T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Merve UNUTUR
DANIŞMAN: Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN

VAN–2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Merve UNUTUR

VAN–2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN danışmanlığında, Merve UNUTUR tarafından sunulan " **Bazı Sınır Değer Problemlerinin Hyers-Ulam Kararlılığı**" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 31/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Musa ÇAKIR İmza: M. Çakır

Üye: Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Derya ARSLAN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08./08/2019 tarih ve 2019/43-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

....

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. ... ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Merve UNUTUR

ÖZET

BAZI SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

UNUTUR, Merve
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN
Ağustos 2019, 51 sayfa

Bu tez çalışmasında, bazı sınır-değer problemlerinin Hyers-Ulam kararlılığı ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelendi. İlk olarak lineer olmayan iki-nokta sınır-değer probleminin kararlılığı bir genelleşmiş sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlandı, ve daha sonra ağırlıklı uzay yöntemi adı verilen bir yöntem kullanılarak Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğu gösterildi. İkinci olarak integral sınır koşullu lineer olmayan bir sınır-değer probleminin kararlılığı aynı yöntemler kullanılarak ispatlandı.

Anahtar sözcükler: Ağırlıklı uzay yöntemi, Hyers-Ulam kararlılık, Hyers-Ulam-Rassias kararlılık, Sabit nokta teoremi, Sınır-değer problemi.

ABSTRACT

HYERS-ULAM STABILITY OF SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

UNUTUR, Merve
M.Sc. Thesis, Mathematics
Supervisor : Assoc. Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN
August, 51 pages

In this thesis, the Hyers-Ulam stability and the Hyers-Ulam-Rassias stability of some boundary-value problems are studied. Firstly, stability of nonlinear two-point boundary-value problem is proved by using a generalized fixed point theorem, and then it is showed that the problem has the Hyers-Ulam-Rassias stability by using a method called weighted space method. Secondly, stability of a nonlinear boundary-value problem with integral boundary condition is proved by using same methods.

Keywords: Boundary-value problem, Fixed point theorem, Hyers-Ulam stability, Hyers-Ulam-Rassias stability, Weighted space method

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN’e teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım esnasında her türlü destekleriyle yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

2019

Merve UNUTUR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Stanislaw Ulam, Wisconsin Üniversitesi Matematik kulübüne 1940 yılında verdiği meşhur konuşmasında birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu konuşmasında Ulam (1964) tarafından aşağıdaki genel problem verilmiştir:

G_1 bir grup ve G_2, $d(\cdot,\cdot)$ metriği ile bir metrik grup olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer bir $h: G_1 \to G_2$ dönüşümü her $x, y \in G_1$ için

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her $x \in G_1$ için $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ ile bir $H: G_1 \to G_2$ homomorfizması var olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var mıdır?

Bu problem fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur.

Matematik problemlerinin kararlılık kavramı daha genel bir bakış açısıyla şu şekilde verilebilir:

"Bir teoremin hipotezlerinde ufak bir değişiklik yaparak teoremin ana sonucunun doğru ya da yaklaşık olarak doğru kaldığını hangi durumlarda söyleyebiliriz? " veya "Belli bir özelliği yaklaşık olarak sağlayan bir matematiksel nesnenin, bu özelliği tamamen sağlayan bir nesneye yakın olması gerektiği ne zaman doğrudur? "

Eğer dikkatimizi fonksiyonel denklemler durumuna yöneltirsek, özellikle “verilen bir denklemden çok az farklı olan bir denklemin çözümü verilen bu denklemin çözümüne ne zaman yakın olmalıdır?” veya benzer biçimde “bir fonksiyonel denklem bir fonksiyonel eşitsizlik ile değiştirildiğinde eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olması gerektiği ne zaman iddia edilebilir?” sorusunu sorabiliriz. Fonksiyonel denklemlerin kararlılık problemi böyle bir temel sorudan kaynaklanmıştır (Rassias, 2000).

Hyers, 1941 de yayınlamış olduğu bir çalışmada Ulam'ın sorusuna ilk cevabı aşağıdaki teoremde ifade edildiği şekilde verdi.

Teorem 1.1. E_1 ve E_2 iki Banach uzayı ve $f: E_1 \to E_2$, her $x, y \in E_1$ ve bazı $\delta > 0$ için

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $x \in E_1$ için

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

limiti vardır ve $L: E_1 \to E_2$, her $x \in E_1$ için

$$\|f(x) - L(x)\| \leq \delta$$

olacak şekilde bir tek toplamsal fonksiyondur. Bununla birlikte, eğer $f(tx)$ fonksiyonu her $x \in E_1$ için t ye göre sürekli ise, o zaman L lineerdir. Dahası f fonksiyonu E_1 deki bir noktada sürekli ise, L de E_1 deki her noktada süreklidir.

Yukarıdaki durum için,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi Hyers-Ulam kararlılığa sahiptir denir. Yukarıdaki teoremde, Hyers $L: E_1 \to E_2$ toplamsal fonksiyonunu doğrudan verilmiş f fonksiyonundan oluşturdu. Bu yöntem direkt yöntem olarak adlandırılır ve birçok fonksiyonel denklemin kararlılığının incelenmesinde güçlü bir araçtır.

Hyers'in (1941) bu önemli sonucu aşağıdaki şekilde açıklanabilir:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi Banach uzayının herhangi bir çifti için kararlıdır.

$$(x, y) \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$$

fonksiyonu Cauchy farkı olarak adlandırılır.

Th. M. Rassias, 1978 de, Hyers'in teoreminin bir genellemesini Cauchy farkını sınırsız alarak aşağıda verilen teoremle ispatladı.

Teorem 1.2. E_1 ve E_2 iki Banach uzayı olsun ve $\theta \geq 0$ ve $0 \leq p < 1$ olmak üzere $f: E_1 \to E_2$ nin her $x, y \in E_1$ için

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

olacak şekilde bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in E_1$ için

$$\|f(x) - L(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p}\|x\|^p$$

olacak şekilde bir tek $L: E_1 \to E_2$ toplamsal dönüşümü vardır. Bununla birlikte, eğer $f(tx)$ fonksiyonu her $x \in E_1$ için t ye göre sürekli ise, o zaman L lineerdir.

Bu kararlılık olayına Hyers-Ulam-Rassias veya genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığı denir. Hyers-Ulam-Rassias, farklı fonksiyonel denklemler için kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Makalelerin büyük çoğunluğunda Hyers 'in fikri kullanılır. Hyers'in fikrinde

$$\text{eğer } p < 1 \text{ ise } L(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x),$$

$$\text{eğer } p > 1 \text{ ise } L(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{n} f(2^{-n} x)$$

formülü kullanılarak, $L: E_1 \to E_2$ fonksiyonu verilmiş f fonksiyonundan doğrudan oluşturulmuştur.

Bu yöntem direkt yöntem olarak adlandırılır. Belli bir fonksiyonel denklemin çözümünü bulmak için sıklıkla kullanılır. Direkt yöntem, birçok fonksiyonel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını incelemek için etkili bir araçtır ve çok çeşitli denklemlerin kararlılığının incelenmesinde başarıyla uygulanmıştır. (Hyers et al., 1998). Hyers-Ulam kararlılığı incelemek için diğer birçok etkili yöntem vardır. Bunlardan biri sabit nokta yöntemidir. Sabit nokta yöntemi, fonksiyonel denklemlerin kararlılığını göstermede kullanılan bilinen ikinci tekniktir. Bu yöntem ilk olarak Baker (1991) tarafından kullanılmıştır. Baker, fonksiyonel bir denklemin Hyers-Ulam kararlılığını tek bir değişkende ispatlamak için Banach sabit nokta teoreminin bir versiyonunu uyguladı. Radu, 2003 yılında, A fonksiyonunun varlığının ve

$$\|f(x) - L(x)\| \le \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

eşitsizliğinin Diaz ve Margolis'in (1968) alternatif sabit nokta teoreminden elde edilebileceğini gözlemlemiştir (Radu, 2003). Sonra, Cadariu ve Radu (2003; 2004), perturbe olmuş denklemin belirli bir φ dönüşümü ile kontrol edilmesi durumunda Cauchy ve Jensen fonksiyonel denklemleri için genelleştirilmiş bir Hyers-Ulam kararlılık sonucu sundular. Onların fikri, Diaz ve Margolis'in alternatif sabit nokta teoremini kullanarak kesin çözümün varlığını ve hata tahminlerini elde etmek idi.

Ulam'ın probleminin bir genelleştirmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını inceleyen ilk bilinen kişi Obłoza (1993; 1997) dır. Daha sonra, Alsina ve Ger (1998), bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını araştıran ilk çalışmalarında, $y'(t) = y(t)$ diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını ele aldılar ve bu denklemin, eğer $y: I \to \mathbb{R}$, her $t \in I$ için $|y'(t) - y(t)| \le \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir diferansiyellenebilir fonksiyon ise, o zaman her $t \in I$ için $|y(t) - g(t)| \le 3\varepsilon$ olacak şekilde bir $g: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir çözümünün var olduğunu ispatladılar.

Alsina ve Ger'in (1998) bu sonucu Miura ve ark. (2001), Miura (2002) ve Takahasi ve ark. (2002) tarafından genelleştirildi. Daha sonra Miura ve ark., (2003), Miura ve ark., (2004) ve Jung (2004; 2005; 2006) değişik türden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını incelemişlerdir.

Li (2010), $y \in C^2(a,b)$, $\lambda > 0$, $-\infty < a < b < \infty$ için ikinci mertebeden

$$y'' = \lambda^2 y$$

diferansiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını çalıştı. Li ve Shen (2010), $y \in C^2[a,b]$, $f \in C$, $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere ikinci mertebeden homojen

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

ve homojen olmayan

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)$$

lineer diferansiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını incelediler. Li ve Shen (2009), $y \in C^2(a,b)$, $f \in C$, $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0$$

diferansiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını ispatladılar. Javadian ve arkadaşları (2011)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğunu gösterdiler. Ghaemi ve ark. (2012) ve Abdullahpour ve ark. (2012) ikinci mertebeden tam (mükemmel) diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını ispatladılar. Li ve Huang (2013), kompleks Banach uzaylarında ikinci mertebeden homojen

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = 0$$

ve homojen olmayan

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t)$$

lineer diferansiyel denklemlerinin Hyers-Ulam kararlılığını çalıştılar. Alqifiary ve Jung (2014), Gronwall eşitsizliğini kullanarak başlangıç koşullu ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını ispatladılar. Mortici ve ark. (2015), integrasyon yöntemini kullanarak sınırlı bir bölge üzerinde homojen olmayan

$$x^2 y''(x) + \alpha x y'(x) + \beta y(x) = f(x)$$

Euler diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğunu gösterdiler.

Gavruta ve ark. (2011),$y \in C^2[a,b]$, $\beta(x) \in C[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere

$$y(a) = y(b) = 0$$

sınır şartlarına sahip olan

$$y'' + \beta(x)y = 0$$

biçimindeki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminin

$$\max|\beta(x)| < \frac{8}{(b-a)^2}$$

koşulunun sağlanması durumunda Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğunu gösterdiler.

Zhao ve ark. (2017),

$$y''(t) + p(t)\,y'(t) + q(t)\,y(t) = F(y(t))$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğunu sırasıyla aşağıda verilen teoremlerde bir genelleşmiş sabit nokta teoremi yardımıyla $p \in C[a,b]$ ve $q \in C([a,b],(-\infty,0))$ koşulları altında gösterdiler.

Teorem 1.3. $I = [a,b]$ bir reel aralık olsun ve L, $0 < L\int_a^b G(s,s)r(s)\,ds < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir sabit olmak üzere, $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\forall y, z \in \mathbb{R}$ için

$$|F(u) - F(v)| \leq L|u - v|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer ikinci sürekli türeve sahip bir $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in I$ ve bir $\varepsilon > 0$ için

$$\int_a^b |y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)|\,dt < \infty$$

koşulu ile

$$|y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) - F(y(t))| \leq \varepsilon$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $\forall t \in I$ için

$$y_0(t) = -\int_a^b G(t,s)r(s)F(y_0(s))ds + y(b)\phi_1(t) + y(a)\phi_2(t)$$

denklemini ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{\varepsilon\int_a^b G(s,s)r(s)\,ds}{1 - L\int_a^b G(s,s)r(s)\,ds}$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek sürekli $y_0: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Teorem 1.4. Verilmiş $I = [a,b]$ reel aralığı için K ve L, $0 < KL < 1$ koşulunu sağlayan pozitif sabitler olsun. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ' nın $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$ için

$$|F(u) - F(v)| \leq L|u - v|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Üstelik $\varphi: I \to (0,\infty)$' nın $\forall t \in I$ için

$$\int_a^b G(t,s)r(s)\varphi(s)ds \le K\varphi(t)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer ikinci sürekli türeve sahip $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\int_a^b |y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)|\, dt < \infty$$

koşulu ile $\forall t \in I$ için

$$|y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) - F(y(t))| \le \varphi(t)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $\forall t \in I$ için

$$y_0(t) = -\int_a^b G(t,s)r(s)F(y_0(s))ds + y(b)\phi_1(t) + y(a)\phi_2(t),$$

$$|y(t) - y_0(t)| \le \frac{K\varphi(t)}{1-KL}$$

olacak şekilde bir tek $y_0: I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Rus (2009)

$$-y'' = h(t), \quad y(a) = 0, \qquad y(b) = 0$$

sınır-değer probleminin Green fonksiyonunu kullanarak, $a < b < +\infty$ ve $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ olmak üzere

$$-x''(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \in [a,b]$$
$$x(a) = y(a), \qquad x(b) = y(b)$$

sınır-değer probleminin Hyers-Ulam kararlı olduğunu gösterdi.

Şimdi n −inci mertebeden

$$\varphi\big(f(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0 \tag{1.1}$$

diferansiyel denklemi için Hyers-Ulam kararlılığın tanımını verelim. Burada y bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı n-defa sürekli diferansiyellenebilir bir reel değerli fonksiyondur.

Tanım 1.1. Eğer verilmiş $\varepsilon > 0$ ve her $t \in I$ için

$$\left|\varphi\big(f(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\big)\right| \le \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir n-defa sürekli diferansiyellenebilir $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, (1.1) denkleminin $|y(t) - y_0(t)| \le K(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan y_0 çözümü mevcut ise, (1.1) diferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlılığa sahiptir denir. Burada, $K(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon) = 0$ ile sadece ε'na bağlı bir fonksiyondur. $\varphi, \Phi\colon \mathrm{I} \to [0,\infty)$ fonksiyonları açık bir biçimde y ve y_0'a bağlı olmayan fonksiyonlar olmak üzere, eğer yukarıdaki tanım, ε ve $K(\varepsilon)$ sırasıyla $\varphi(t)$ ve $\Phi(t)$ ile yer değiştirdiğinde de doğru ise, o zaman yukarıdaki diferansiyel denklem genelleştirilmiş Hyers-Ulam kararlılığa (veya Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa) sahiptir denir (Rezaei ve ark., 2013).

Yani, eğer n-inci sürekli türeve sahip $y(t)$ fonksiyonu (1.1) diferansiyel denkleminin bir yaklaşık çözümü ise, o zaman denklemin $y(t)$ ye yakın bir $y_0(t)$ çözümü vardır. Diğer bir ifade ile diferansiyel denklemin tüm çözümlerinin kümesi ile $y(t)$ fonksiyonu arasındaki uzaklık veya perturbe olmuş çözüm ile tam çözüm arasındaki fark en fazla $K(\varepsilon)$ kadardır.

Bir ağırlıklı metrik ile donatılmış olan bir uzayda bilinen matematiksel sonuçları kullanan yöntemler ağırlıklı uzay yöntemi olarak adlandırılır (Cadariu ve ark., 2012). İlk olarak Gavruta ve Gavruta (2010)

$$d(u,v) = \sup \frac{|u(x) - v(x)|}{\varphi(x)}$$

ağırlıklı metriği ile donatılmış bir tam metrik uzay üzerinde Banach Sabit nokta teoremini kullanarak lineer olmayan

$$y(x) = F\Big(x, y\big(\eta(x)\big)\Big)$$

fonksiyonel denkleminin,

$$y(x) = g(x) + \int_c^x f\big(t, y(t)\big)dt$$

Volterra integral denkleminin ve

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K\big(x, t, y(t)\big)dt$$

Fredholm integral denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğunu gösterdiler. Daha sonra Cadariu ve ark. (2012) aynı ağırlıklı uzay üzerinde yine Banach sabit nokta teoremini kullanarak lineer olmayan

$$y(x) = F(x, y(x), y(\eta(x))$$

ve lineer

$$y(x) = g(x).\, y(\eta(x)) + h(x)$$

fonksiyonel denklemleri ile lineer olmayan

$$y(x) = h(x) + \lambda \int_a^x G\big(x, t, y(t)\big) dt$$

Volterra integral denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını ispatladılar. Castro ve Guerra (2013), Castro ve Simoes (2017a; 2017b) ve Gordji ve ark. (2013) bazı integral, integro-diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını ispatlamak için ağırlıklı uzay yöntemini kullandılar.

Bu tez çalışmasının amacı, aşağıda verilen iki sınır-değer probleminin Hyers-Ulam kararlılığını ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını bir genelleşmiş sabit nokta yaklaşımını ve bir ağırlıklı uzay yöntemini kullanarak incelemektir.

Problem 1 (İki-nokta sınır-değer problemi):

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad a < t < b \tag{1.2}$$

$$y(a) = A, \;\; y(b) = B, \tag{1.3}$$

burada $F: [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyondur.

Problem 2 (İntegral koşullu sınır-değer problemi):

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big), \;\; 0 < t < 1 \tag{1.4}$$

$$y(0) - \alpha y'(0) = \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds \,, \;\; y(1) - \beta y'(1) = \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds \tag{1.5}$$

burada $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, σ_0, $\sigma_1: [0,1] \to [0, +\infty)$ fonksiyonları sürekli ve α ve β, $1 + \alpha > \beta > 1$ koşulunu sağlayan negatif olmayan reel parametrelerdir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Banach sabit nokta teoremi kullanılarak (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin çözümü için bir varlık ve teklik sonucu verilecektir. Daha sonra bir genelleşmiş sabit nokta teoremi kullanılarak aynı problemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ve Hyers-Ulam kararlılığı incelenecektir. Ardından bir ağırlıklı uzay yöntemi kullanılarak, aynı problemin Hyers-Ulam Rassias kararlılığa sahip olduğu gösterilecektir.

Üçüncü bölümde (1.4)-(1.5) sınır-değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği Banach sabit nokta teoremi kullanılarak gösterildikten sonra, Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa ve Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğu bir genelleşmiş sabit nokta yaklaşımı kullanılarak ispatlanacaktır. Daha sonra problemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ağırlıklı uzay yöntemi kullanılarak incelenecektir.

2. İKİ-NOKTA SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN KARARLILIĞI

Bu bölümde, $F: [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big), \qquad a < t < b$$

(1.2)

$$y(a) = A, \;\; y(b) = B,$$

(1.3)

ile verilen sınır-değer probleminin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenecektir.

2.1. Giriş

İlk olarak (1.2)-(1.3) probleminin çözümünü bulmak, yani bu probleme denk olan integral denklemi belirlemek istiyoruz. Bunun için

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big)$$

denkleminin a dan t ye integrali alınırsa,

$$y'(t) = y'(a) + \int_a^t F\big(s, y(s)\big)ds$$

denklemi elde edilir. Aynı işlem bu eşitlik için tekrarlandığında ve $y(a) = A$ sınır koşulu dikkate alındığında

$$y(t) = A + y'(a)(t - a) + \int_a^t (t - s)F\big(s, y(s)\big)ds \tag{2.1}$$

eşitliğine ulaşılır. (2.1) eşitliğin sağ tarafında bulunan $y'(a)$ ifadesini belirlemek için $y(b) = B$ sınır koşulu kullanılırsa

$$y(b) = A + y'(a)(b - a) + \int_a^b (b - s)F\big(s, y(s)\big)ds = B$$

elde edilir. Buradan

$$y'(a) = \frac{B - A}{b - a} - \frac{1}{b - a}\int_a^b (b - s)F\big(s, y(s)\big)ds$$

bulunur. Bu ifade (2.1) de yerine yazıldığında

$$y(t) = A + \left(\frac{B-A}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-s)F\big(s,y(s)\big)ds\right)(t-a)$$
$$+ \int_a^t (t-s)F\big(s,y(s)\big)ds$$
$$= A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \frac{(t-a)}{b-a}\int_a^b (b-s)F\big(s,y(s)\big)ds$$
$$+ \int_a^t (t-s)F\big(s,y(s)\big)ds$$
$$= A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \frac{(t-a)}{b-a}\int_a^t (b-s)F\big(s,y(s)\big)ds$$
$$- \frac{(t-a)}{b-a}\int_t^b (b-s)F\big(s,y(s)\big)ds + \int_a^t (t-s)F\big(s,y(s)\big)ds$$
$$= A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^t \frac{(s-a)(b-t)}{b-a}F\big(s,y(s)\big)ds$$
$$- \int_t^b \frac{(t-a)(b-s)}{b-a}F\big(s,y(s)\big)ds$$

elde edilir. Bu durumda (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin çözümü için

$$y(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds \tag{2.2}$$

eşitliği elde edilir. Bu bir simetrik çekirdekli Fredholm integral denklemidir. Burada

$$K(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a \le t \le s \le b \\ \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a \le s \le t \le b \end{cases} \tag{2.3}$$

biçimindedir.

Her $t, s \in [a,b]$ için $K(t,s) \ge 0$ olduğu kolayca görülebilir. Bunun yanında, $t \in [a,b]$ için

$$\int_a^b |K(t,s)|ds = \int_a^b K(t,s)ds = \int_a^t K(t,s)ds + \int_t^b K(t,s)ds$$
$$= \int_a^t \frac{(s-a)(b-t)}{b-a}ds + \int_t^b \frac{(t-a)(b-s)}{b-a}ds$$
$$= \frac{(b-t)(t-a)^2}{2(b-a)} + \frac{(t-a)(b-t)^2}{2(b-a)}$$
$$= \frac{(b-t)(t-a)}{2}$$

elde edilir.

$$\frac{(b-t)(t-a)}{2}$$

fonksiyonu maksimum değerini

$$t=\frac{a+b}{2}$$

noktasında aldığı için,

$$\int_a^b |K(t,s)|ds \leq \frac{(b-a)^2}{8}$$

elde edilir.

2.2. Çözümün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, Banach sabit nokta teoremi kullanılarak (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenecektir.

Teorem 2.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi) $X \neq \emptyset$ olmak üzere $X=(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ operatörü X üzerinde bir daralma dönüşümü, yani her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$$

olacak şekilde bir pozitif $\alpha < 1$ reel sayısı var olsun. Bu durumda T operatörü bir tek sabit noktaya sahiptir, yani $Tx^* = x^*$ olacak şekilde bir tek $x^* \in X$ vardır. Üstelik, herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_0, \qquad x_1 = Tx_0, \qquad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \cdots$$

iterasyonlarının $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar ve herhangi bir $x \in X$ için

$$d(x^*,x) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x,Tx)$$

olur.

Teorem 2.2. $F: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli olsun ve $[a,b] \times \mathbb{R}$ üzerinde her $(t,y),(t,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ için

$$|F(t,y) - F(t,z)| \leq L|y-z|$$

ile verilen Lipschitz koşulunu L Lipschitz sabiti ile sağlansın. Eğer $\frac{L(b-a)^2}{8} < 1$ ise (1.2)-(1.3) sınır-değer problemi bir tek çözüme sahiptir (Kelley ve Peterson, 2010; Waltman, 2004).

İspat. $[a,b]$ üzerindeki sürekli fonksiyonların $X = C[a,b]$ kümesini göz önüne alalım. Bu küme $g, h \in X$ için

$$d(g,h) = \max_{t\in[a,b]} |g(t) - h(t)|$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

(1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$y(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds$$

denkleminin bir tek çözüme sahip olmasıdır. Burada

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, a \le t \le s \le b \\ -\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, a \le s \le t \le b \end{cases}$$

fonksiyonu

$$y''(t) = 0, \qquad y(a) = 0, \qquad y(b) = 0$$

sınır-değer problemi için Green fonksiyonudur.

$$Ty(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds$$

ile bir

$$T: X \to X$$

operatörünü tanımlayalım. (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır.

Şimdi T'nin bir daralma operatörü olduğunu gösterelim. $y, z \in X$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ için

$$|Ty(t) - Tz(t)| \leq \int_a^b |G(t,s)||F(s,y(s) - F(s,z(s)|\,ds$$
$$\leq L\int_a^b |G(t,s)||y(s) - z(s)|ds$$
$$\leq Ld(y,z)\int_a^b |G(t,s)|ds$$
$$\leq L\frac{(b-a)^2}{8}d(y,z)$$

elde edilir. $\frac{L(b-a)^2}{8} < 1$ olduğu için T bir daralmadır. Bu durumda, Banach sabit nokta teoreminden, T bir tek sabit noktaya, dolayısıyla (1.2)-(1.3) sınır-değer problemi bir tek sürekli çözüme sahiptir ve

$$y_n(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)F\big(s, y_{n-1}(s)\big)ds \equiv Ty_{n-1}(t), \qquad n = 1,2,\ldots$$

ardışık yaklaşımları ile elde edilen $\{y_n(t)\}$ dizisi X de bu çözüme yakınsar.

2.3. Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık

Bu bölümde, genelleşmiş tam metrik uzay üzerinde verilmiş olan bir sabit nokta teoremi kullanılarak (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenecektir.

Tanım 2.1. X bir boş olmayan küme olsun. Bir

$$d: X \times X \to [0, +\infty]$$

fonksiyonu ancak ve ancak d fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa X üzerinde bir genelleşmiş metrik olarak adlandırılır.

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Genelleşmiş metrik ile bilinen metrik arasındaki tek fark genelleşmiş metriğin değer kümesinin sonsuzu da içermesidir.

Şimdi Diaz ve Margolis (1968) tarafından verilen daha sonra ihtiyaç duyacağımız genelleşmiş sabit nokta teoremini verelim.

Teorem 2.3. (X,d) bir genelleşmiş tam metrik uzayı olsun. $\Lambda: X \to X$ nın $L < 1$ Lipschitz sabiti ile bir kesin daralma operatörü olduğunu kabul edelim. Eğer bir $f \in X$ için $d(\Lambda^{k+1}f, \Lambda^k f) < +\infty$ olacak şekilde bir negatif olmayan k tamsayısı varsa, o zaman aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\{\Lambda^n f\}$ dizisi Λ' nın bir f^* sabit noktasına yakınsar.

(ii) f^*, Λ' nın $X^* = \{y \in X | d(\Lambda^k f, y) < +\infty\}$ kümesindeki tek sabit noktasıdır.

(iii) Eğer $y \in X^*$ ise o zaman $d(y, f^*) \leq \frac{d(\Lambda y, y)}{1-L}$ olur.

İspat. (Diaz ve Margolis, 1968).

Lemma 2.1. Bir I kapalı aralığı üzerinde tanımlı olan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini X ile gösterelim. Yani

$$X = \{f: I \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ sürekli}\}$$

olsun. Bu küme üzerinde $f, g \in X$ için $\varphi(t): I \to (0, \infty)$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere

$$d(f,g) = \inf\{C \in [0,\infty] \,\big|\, |f(t) - g(t)| \leq C\varphi(t), \forall t \in I\} \qquad (2.4)$$

ile bir $d: X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda (X,d) bir tam genelleşmiş metrik uzayıdr.

İspat. İlk olarak, d fonksiyonunun X üzerinde bir genelleşmiş metrik olduğunu gösterelim. $f, g \in X$ ve $\forall t \in I$ için

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f(t) = g(t)$$

ve $\forall f, g \in X$ için

$$d(f,g) = d(g,f)$$

olduğu açıkça görülebilir. Şimdi (M3) özelliğinin doğruluğunu gösterelim.

$\forall f, g, h \in X$ için $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$ olduğunu göstermek için bazı $f, g, h \in X$ için $d(f,g) > d(f,h) + d(h,g)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda d nin tanımından

$$|f(t_0) - g(t_0)| > \{d(f,h) + d(h,g)\}\varphi(t_0) = d(f,h)\varphi(t_0) + d(h,g)$$
$$> |f(t_0) - h(t_0)| + |h(t_0) - g(t_0)|$$

olacak şekilde bir $t_0 \in I$ vardır. Bu bir çelişkidir. O halde d fonksiyonu bir genelleşmiş metrik ve (X,d) bir genelleşmiş metrik uzayıdır.

İkinci olarak, (X, d) nin tam olduğunu gösterelim. $\{f_n\}$, (X, d) de herhangi bir Cauchy dizisi olsun. O zaman verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, m, n \geq N_\varepsilon$ için $d(f_m, f_n) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Bu keyfi $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, m, n \geq \mathbb{N}_\varepsilon$ için

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon\varphi(t), \quad \forall t \in I \tag{2.5}$$

olacak şekilde N_ε doğal sayısının var olduğu anlamına gelir. Bu herhangi bir sabit t değeri için $\{f_n(t)\}$ nin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olmasını gerektirir. $\mathbb{R}$ bir tam uzay olduğundan $\{f_n(t)\}$ Cauchy dizisi her bir $t \in I$ için yakınsaktır. Bu nedenle $t \in I$ için $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ ile bir $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir.

Eğer $m \to \infty$ alırsak, bu durumda (2.5) ten herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, n \geq N_\varepsilon$ için

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon\varphi(t), \quad \forall\, t \in I \tag{2.6}$$

olacak şekilde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısının var olduğu sonucu ortaya çıkar. φ, I kapalı aralığı üzerinde sürekli olduğu için sınırlıdır. Bu yüzden, (2.6) eşitsizliği $\{f_n\}$ dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterir. Sürekli fonksiyonların bir dizisi eğer bir fonksiyona düzgün yakınsak ise bu durumda limit fonksiyonununda sürekli olduğunu da biliyoruz. Bundan dolayı f fonksiyonu süreklidir. Yani $f \in X$' tir.

Eğer (2.5) ve (2.6) eşitsizliğini birlikte ele alırsak, bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, n \geq N_\varepsilon$ için $d(f, f_n) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısının var olduğu sonucu çıkarılabilir. Bu $\{f_n\}$ Cauchy dizisinin f fonksiyonuna (X, d) de yakınsak olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak (X, d) tamdır.

Aşağıda (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ile ilgili bir sonuç verilmiştir.

Teorem 2.4. Verilmiş $I = [a, b]$ $(b > a)$ reel aralığı için M ve L, $0 < ML < 1$ koşulunu sağlayan pozitif sabitler olsun. $F: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nin $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$ için

$$|F(t, u) - F(t, v)| \leq L|u - v| \tag{2.7}$$

standart Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Üstelik $\varphi: I \to (0, \infty)$' nin $\forall t \in I$ için

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds \leq M\varphi(t) \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer bir ikinci sürekli türeve sahip $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in I$ için

$$|y''(t) - F(t, y(t))| \leq \varphi(t) \tag{2.9}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $\forall t \in I$ için

$$y_0(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F\big(s, y_0(s)\big)\,ds \tag{2.10}$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{M\varphi(t)}{1-ML} \tag{2.11}$$

olacak şekilde bir tek $y_0 : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat.

$$X = \{f : I \to \mathbb{R} \,|\, f \text{sürekli}\} \tag{2.12}$$

ile tüm I üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesini tanımlayalım. Bu küme

$$d(f,g) = \inf\{C \in [0,+\infty] \,\big|\, |f(t) - g(t)| \leq C\varphi(t),\ \forall t \in I\} \tag{2.13}$$

genelleşmiş metriği ile bir genelleşmiş tam metrik uzaydır (Lemma 2.1 e bakınız).Şimdi

$$(\Lambda f)(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F\big(s, f(s)\big)ds \tag{2.14}$$

ile X üzerinde bir Λ operatörü tanımlayalım. f, F ve K fonksiyonları sürekli olduğu için İntegralin Temel Teoreminden $\Lambda y \in X$ olur. Eğer y_0, Λ operatörünün sabit noktası ise, o zaman y_0 fonksiyonu (1.2)-(1.3) probleminin bir çözümüdür.

Şimdi Λ 'nın X üzerinde bir kesin daralma operatörü olduğunu ispatlayacağız. $C_{fg} \in [0,\infty]$ sayısı herhangi $f, g \in X$ için $d(f,g) \leq C_{fg}$ eşitsizliğini sağlayan keyfi bir sabit olsun. (2.13) ten $\forall t \in I$ için

$$|f(t) - g(t)| \leq C_{fg}\varphi(t) \tag{2.15}$$

olduğu çıkar. Bundan dolayı (2.7), (2.8), (2.14) ve (2.15) den $\forall t \in I$ için

$$\begin{aligned}
|(\Lambda f)(t) - (\Lambda g)(t)| &= \left| \int_a^b K(t,s)F\big(s, f(s)\big)ds - \int_a^b K(t,s)F\big(s, g(s)\big)ds \right| \\
&\leq \int_a^b |K(t,s)|\big|F\big(s, f(s)\big) - F\big(s, g(s)\big)\big|ds \\
&\leq L \int_a^b |K(t,s)||f(s) - g(s)|\,ds \\
&\leq LC_{fg} \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds \\
&\leq MLC_{fg}\varphi(t),
\end{aligned}$$

yani,

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq MLC_{fg}$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi $f, g \in X$ için

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq MLd(f, g)$$

olduğu sonucuna varılabilir. $0 < ML < 1$ olduğu için Λ bir kesin daralma operatörüdür.

(2.13) ve (2.15) den bir keyfi $g_0 \in X$ ve $\forall t \in I$ için

$$|(\Lambda g_0)(t) - g_0(t)| = \left| A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F\big(s, g_0(s)\big)ds - g_0(t) \right|$$
$$\leq C\varphi(t)$$

ile bir $0 < C < \infty$ sabitinin var olduğu çıkar. Çünkü $K(t,s)$ fonksiyonu $I \times I$ üzerinde sınırlı, $F\big(t, g_0(t)\big)$ fonksiyonu I üzerinde sınırlı ve $\min_{x \in I} \varphi(t) > 0$ dır.

Böylece d nin tanımından dolayı $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ olması gerekir. Yani, $d(\Lambda^{k+1} g_0, \Lambda^k g_0) < \infty$ olacak şekilde bir negatif olmayan $k = 0$ tamsayısı vardır. Bu sebeple Teorem 2.3 (i) şıkkının kullanılmasıyla (X, d) deki $\{\Lambda^n g_0\}$ dizisi Λ operatörünün y_0 sabit noktasına $(\Lambda y_0 = y_0)$ yakınsar, yani $\forall t \in I$ için (2.10) denklemini sağlayacak şekilde bir sürekli $y_0 : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Sonra

$$\{g \in X \big| d\big(g_{0,}\ g\big) < \infty\} = X,$$

yani Teorem 2.3 deki X^* kümesinin X kümesine eşit olduğunu doğrulayacağız. Herhangi $g \in X$ için g ve g_0, I üzerinde sınırlı ve $\min_{t \in I} \varphi(t) > 0$ olduğundan herhangi bir $t \in I$ için

$$|g_0(t) - g(t)| \leq C_g \varphi(t)$$

olacak şekilde bir $0 < C_g < \infty$ sabiti vardır. Bundan dolayı $\forall\, g \in X$ için $d(g_{0,} g) < \infty$, yani $\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$ elde edilir. Teorem 2.3 (ii) den dolayı, y_0, Λ operatörünün X deki tek sabit noktasıdır. Yani y_0, (1.2)-(1.3) probleminin tek sürekli çözümüdür.

Diğer taraftan (2.9) eşitsizliğini sağlayan y fonksiyonu için (2.14) ten $\Lambda y \in X$ elde ederiz. Üstelik (2.9) dan

$$-\varphi(t) \leq y''(t) - F(t, y(t)) \leq \varphi(t)$$

eşitsizliği yazılabilir. $h(t) = y''(t)$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b K(t,s)h(s)ds = -\,y(t) + A + \frac{B-A}{b-a}(t-a)$$

yazılabilir. Buradanda

$$-\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds \le \int_a^b K(t,s)(h(s)-F(s,y(s))ds \le \int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}-\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds &\le \int_a^b K(t,s)h(s)\,ds - \int_a^b K(t,s)F(s,y(s)))ds\\ &= -\,y(t) + A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F(s,y(s)))ds\\ &\le \int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\forall t \in I$ için

$$-\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds \le (\Lambda y)(t) - y(t) \le \int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds$$

olur. Böylece $\forall t \in I$ için

$$|\Lambda(y)(t) - y(t)| \le \int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds \le M \tag{2.16}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$d(y,\Lambda y) \le M < +\infty \tag{2.17}$$

olur. Sonuç olarak (2.17) ile birlikte Teorem 2.3 (iii)

$$d(y,y_0) \le \frac{1}{1-ML} d(y,\Lambda y) \le \frac{M}{1-ML}$$

olmasını gerektirir. Yani $\forall t \in I$ için

$$|y(t) - y_0(t)| \le \frac{M\varphi(t)}{1-ML}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.1. $I = [0,1]$ olsun.

$$y'' - y = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.18}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 1 \tag{2.19}$$

sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğunu gösterelim. $ML < 1$ olacak şekilde pozitif M ve L sabitlerini seçelim. İkinci sürekli türeve sahip $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\forall t \in I$ için

$$|y''(t) - y(t)| \le t + 1 \tag{2.20}$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Burada $F\big(t, y(t)\big) = y(t)$ fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için $L = 1$ Lipschitz sabiti ile

$$|F(t,y) - F(t,z)| \leq L|y - z| \tag{2.21}$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyondur. Eğer $\varphi(t) = t + 1$ alınır ise, bu durumda yukarıdaki (2.20) eşitsizliği (2.9) ile özdeş forma sahiptir. Verilen problemin çözümü

$$y(t) = t - \int_0^1 K(t,s)F\big(s, y(s)\big)ds$$

olur. Burada

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu (2.3) ile özdeş formdadır. Üstelik her bir $t \in I$ için

$$\int_0^1 K(t,s)\varphi(s)\,ds = (1-t)\int_0^t s(s+1)\,ds + t\int_t^1 (1-s)(s+1)ds$$
$$= \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 \leq \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(t+1) = M\varphi(t)$$

elde edilir. Teorem 2.4 e göre $\forall t \in I$ için

$$y_0(t) = t - \int_0^1 K(t,s)F(s, y(s))ds$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{M\varphi(t)}{1 - ML}$$

olacak şekilde bir tek $y_0 : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

2.4. Hyers-Ulam Kararlılık

Aşağıdaki teoremde (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam kararlılığını ispatlayacağız.

Teorem 2.5. L, $0 < \frac{L(b-a)^2}{8} < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir sabit ve $I = [a,b]$ bir reel aralık olmak üzere, $F: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|F(t,u) - F(t,v)| \leq L|u - v|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer ikinci sürekli türeve sahip bir $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in I$ ve bir $\varepsilon > 0$ için

$$|y''(t) - F(t, y(t))| \leq \varepsilon \tag{2.23}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $\forall\, x \in I$ için

$$y_0(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F\big(s, y_0(s)\big)\,ds \tag{2.24}$$

denklemini ve

$$|y(t) - y_0(t)| \le \frac{\varepsilon(b-a)^2}{8 - L(b-a)^2} \tag{2.25}$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek sürekli $y_0 : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

İspat.

$$X = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ sürekli}\}$$

kümesi üzerinde

$$d(f,g) = \inf\big\{C \in [0, +\infty] \big| |f(t) - g(t)| \le C, \forall t \in I\big\} \tag{2.26}$$

ile verilen genelleşmiş metriğini tanımlayalım. (X, d) nin bir genelleşmiş tam metrik uzayı olduğu Lemma 2.1 de gösterilmişti. X üzerinde

$$(\Lambda f)(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s)F\big(s, f(s)\big)ds \tag{2.27}$$

biçiminde tanımlanan Λ operatörünü göz önüne alalım. Teorem 2.4 ün ispatına benzer şekilde $\Lambda f \in X$ olduğunu ve Λ operatörünün y_0 sabit noktasının (1.2)-(1.3) probleminin çözümü olduğunu görebiliriz.

Şimdi Λ'nın X üzerinde bir kesin daralma operatörü olduğunu göstereceğiz. $C_{fg} \in [0, \infty]$ sayısı herhangi $f, g \in X$ için $d(f,g) \le C_{fg}$, yani herhangi $t \in I$ için

$$|f(t) - g(t)| \le C_{fg} \tag{2.28}$$

eşitşizliğini sağlayan bir keyfi sabit olsun. Bu durumda $\forall t \in I$ için

$$\begin{aligned}
|(\Lambda u)(t) - (\Lambda v)(t)| &= \left|\int_a^b K(t,s)F\big(s, u(s)\big)ds - \int_a^b K(t,s)F\big(s, v(s)\big)ds\right| \\
&\le \int_a^b |K(t,s)|\big|F\big(s,u(s)\big) - F\big(s,v(s)\big)\big|ds \\
&\le L\int_a^b |K(t,s)||u(s) - v(s)|\,ds \\
&\le LC_{fg}\int_a^b |K(t,s)|ds \\
&\le \frac{(b-a)^2}{8}LC_{fg}
\end{aligned}$$

yani

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq \frac{(b-a)^2}{8} LC_{fg}$$

elde edilir. Buradan $\forall f, g \ \in X$ için

$$(\Lambda f, \Lambda g) \leq \frac{L(b-a)^2}{8} d(f,g)$$

olduğu sonucu çıkar. Burada $0 < \frac{L(b-a)^2}{8} < 1$ olduğuna dikkat edelim.

Teorem 2.3 ün ispatına benzer bir biçimde her bir $g_0 \in X$ 'in $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ özelliğini sağladığını gösterebiliriz. (2.26) ve (2.27) dan bir keyfi $g_0 \in X$ ve $\forall\ t \in I$ için

$$|(\Lambda g_0)(t) - g_0(t)| = \left| A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b K(t,s) F\big(s, g_0(s)\big) ds - g_0(t) \right| \leq C$$

ile bir $0 < C < \infty$ sabitinin var olduğu çıkar. Çünkü $K(t,s)$ fonksiyonu $I \times I$ üzerinde ve $f\big(t, g_0(t)\big)$ fonksiyonu da I üzerinde sınırlıdır. Böylece d nin tanımından dolayı $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ olmalıdır. Yani, $d(\Lambda^{k+1} g_0, \Lambda^k g_0) < \infty$ olacak şekilde bir negatif olmayan $k = 0$ tamsayısı vardır. Bu sebeple Teorem 2.3 (i) den dolayı $n \to \infty$ iken (X, d) de $\Lambda^n g_0 \to y_0$ olacak şekilde ve $y_0 = \Lambda y_0$ olacak şekilde, yani y_0 herhangi $t \in I$ için (2.24) denklemini sağlayacak şekilde bir $y_0 : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Şimdi $X = \{g \ \in \ \mathrm{X} \,|\, d(g_0\,, g) < \infty\,\}$ olduğunu gösterelim. Eğer $g \ \in X$ ise o zaman g_0, g sınırlı ve kapalı I aralığı üzerinde tanımlanan sürekli fonksiyonlardır. Bu nedenle $\forall t \in I$ için

$$|g_0(t) - g(t)| \leq C$$

koşulunu sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır. Bu her bir $g \in X$ için $d(g_0, g) < \infty$, denk olarak $\{g \ \in \ \mathrm{X} \,|\, d(g_0, g) < \infty\,\} = X$ olması anlamına gelir. Böylece Teorem 2.3 (ii)'den dolayı y_0, Λ operatörünün tek sabit noktasıdır. Yani y_0, (1.2)-(1.3) probleminin tek çözümüdür. Buna ek olarak, (2.23) eşitsizliğini sağlayan tüm y fonksiyonları için

$$-\varepsilon \ \leq \ y''(t) - F(s, y(s)) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. $h(t) = y''(t)$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b K(t,s) h(s) ds = -y(t) + A + \frac{B-A}{b-a}(t-a)$$

yazılabilir. Sonra

$$-\varepsilon\int_a^b K(t,s)ds \le \int_a^b K(t,s)[h(s)-F(s,y(s))]ds \le \varepsilon\int_a^b K(t,s)\,ds$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$-\varepsilon\int_a^b K(t,s)ds \le -\int_a^b K(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds - y(t) + A + \frac{B-A}{b-a}(t-a)$$

$$\le \varepsilon\int_a^b K(t,s)ds$$

olur. Dolayısıyla $\forall t \in I$ için

$$-\varepsilon\int_a^b K(t,s)ds \le (\Lambda y)(t) - y(t) \le \varepsilon\int_a^b K(t,s)ds$$

elde edilir. Bu yüzden $\forall t \in I$ için

$$|\Lambda(y)(t) - y(t)| \le \varepsilon\int_a^b K(t,s)ds \le \varepsilon\frac{(b-a)^2}{8} \tag{2.29}$$

ve bunun sonucu olarak

$$d(y,\Lambda y) \le \varepsilon\frac{(b-a)^2}{8},$$

olur. Böylece Teorem 2.3 (iii) den dolayı, $\forall\, t \in I$ için

$$d(y,y_0) \le \frac{1}{1-L\frac{(b-a)^2}{8}}d(y,\Lambda y) \le \frac{\varepsilon\frac{(b-a)^2}{8}}{1-L\frac{(b-a)^2}{8}} = \frac{\varepsilon(b-a)^2}{8-L(b-a)^2}$$

elde edilir. (2.25) eşitsizliği $\forall t \in I$ için doğrulanmış olur.

Örnek 2.2. (2.18)-(2.19) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğunu gösterelim. $I = [0,1]$ olsun. İkinci sürekli türeve sahip $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\forall t \in I$ için

$$|y''(t) - y(t)| \le \varepsilon \tag{2.30}$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Burada $F\big(t,y(t)\big) = y(t)$ fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için $L = 1$ Lipschitz sabiti ile

$$|F(t,y) - F(t,z)| \le L|y-z| \tag{2.31}$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyondur. Yukarıdaki (2.30) eşitsizliği (2.23) ile özdeş formdadır. Teorem 2.5 e göre $\forall t \in I$ için

$$y_0(t) = t - \int_0^1 K(t,s)F(s,y_0(s))ds$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{\varepsilon}{7}$$

olacak şekilde bir tek sürekli $y_0 : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

2.5. Ağırlıklı Uzay Yöntemi

Bu kısımda ağırlıklı uzay yöntemi kullanılarak (1.2)-(1.3) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğu ispatlanacaktır. Bir metrik fonksiyonunu pozitif değerli bir fonksiyon ile çarptığımızda elde ettiğimiz metriği ağırlıklı metrik olarak adlandırıyoruz. Bir ağırlıklı metrik ile donatılmış olan bir uzayda bilinen matematiksel sonuçları kullanan yöntemler ağırlıklı uzay yöntemi olarak adlandırılır (Cadariu ve ark., 2012).

$L: [a,b] \times [a,b] \to [0,\infty)$ bir integrallenebilir fonksiyon ve $\varphi: [a,b] \to (0,\infty)$ bir sürekli fonksiyon olsun.

Teorem 2.6.

$$\int_a^b L(t,s)\varphi(s)ds \leq \beta\varphi(t), \quad t \in [a,b] \tag{2.32}$$

olacak şekilde bir $\beta \in [0,1]$ sayısının var olduğunu kabul edelim. Ayrıca $F: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu, her $u, v \in C[a,b]$ için

$$\left|F\big(s,u(s)\big) - F(s,v(s))\right| \leq L(t,s) \tag{2.33}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer

$$\left| y(t) - A - \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b G(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds \right| \leq \varphi(t) \tag{2.34}$$

olacak şekilde bir $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu varsa ve eğer $0 < (b-a)\beta < 1$ ise, bu durumda

$$y_0(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)F\big(s,y_0(s)\big)ds \tag{2.35}$$

olacak şekilde bir tek $y_0: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır ve $t \in [a,b]$ için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{1}{1-(b-a)\beta}\varphi(t) \tag{2.36}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini $C[a, b]$ ile gösterelim. Bu küme $u, v \in C[a, b]$ için

$$d(u, v) = \sup_{t\in[a,b]} \frac{|u(t) - v(t)|}{\varphi(t)}$$

ağırlıklı metriği ile bir metrik uzay teşkil eder. Şimdi $(C[a, b], d)$ nin bir tam metrik uzay olduğunu gösterelim.

$C[a, b]$ den keyfi bir $\{u_n\}$ Cauchy dizisi alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq N$ iken

$$d(u_n, u_m) = \sup_{t\in[a,b]} \frac{|u_n(t) - u_m(t)|}{\varphi(t)} < \varepsilon, \qquad \forall t \in [a, b] \tag{2.37}$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı vardır. (2.37) den her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq N$ iken

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon\varphi(t) \tag{2.38}$$

olacak şekilde bir N sayısının var olduğu görülür. Bir sabit $t \in [a, b]$ için $m, n \geq N$ iken $|u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon\varphi(t)$ eşitsizliği sağlandığı için $\{u_n(t)\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğu için bu Cauchy dizisi $\mathbb{R}$ de yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$, $t \in [a, b]$ kabul edelim. Bu $t \in [a, b]$ noktasıyla bir tek $u(t) \in \mathbb{R}$ elemanını eşleyebiliriz. Bu ise $[a, b]$ üzerinde bir u fonksiyonu tanımlar. Şimdi $u \in C[a, b]$ olduğunu ve her $t \in [a, b]$ için $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ olduğunu göstermeliyiz. (2.37) de $m \to \infty$ iken limit alırsak, $n > N$ iken

$$d(u_n, u) = \sup_{t\in[a,b]} \frac{|u_n(t) - u(t)|}{\varphi(t)} < \varepsilon, \quad t \in [a, b] \tag{2.39}$$

olur. Bu durumda $\{u_n\}$ dizisi u fonksiyonuna düzgün yakınsar. Sürekli fonksiyonların düzgün limiti de sürekli olduğu için u limit fonksiyonu da sürekli, yani $u \in C[a, b]$ dir. Ayrıca (2.39) dan dolayı $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ olduğu kolayca görülür. Cauchy dizisini keyfi aldığımız için $(C[a, b], d)$ uzayı tamdır.

Daha sonra $C[a, b]$ üzerinde

$$(Tu)(t) = A + \frac{B - A}{b - a}(t - a) + \int_a^b G(t, s)F\big(s, y(s)\big)ds \tag{2.40}$$

ile verilen bir $T: C[a, b] \to C[a, b]$ operatörü tanımlayalım. T nin daralma operatörü olduğunu gösterelim. Her $u, v \in C[a, b]$ için

$$d(Tu,Tv) = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_a^b \{G(t,s)\left[F\big(s,u(s)\big) - F\big(s,v(s)\big)\right]\}dt\right|}{\varphi(t)}$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_a^b \{G(t,s)[L(t,s)|u(s)-v(s)|]\}ds\right|}{\varphi(t)}$$

$$\leq (b-a) \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_a^b L(t,s)|u(s)-v(s)|ds\right|}{\varphi(t)}$$

$$= (b-a) \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_a^b L(t,s)\varphi(s)\frac{|u(s)-v(s)|}{\varphi(s)}ds\right|}{\varphi(t)}$$

$$\leq (b-a) \sup_{s\in[0,1]} \frac{|u(s)-v(s)|}{\varphi(s)} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_a^b L(t,s)\varphi(s)ds\right|}{\varphi(t)}$$

$$\leq (b-a)\beta d(u,v)$$

elde edilir. $0 < (b-a)\beta < 1$ olduğu için, T operatörü bir daralmadır.

Diğer taraftan, (2.34) eşitsizliği kullanılırsa,

$$d(y,Ty) = \sup_{t\in[0,1]} \frac{|y(t)-(Ty)(t)|}{\varphi(t)}$$

$$= \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|y(t) - A - \frac{B-A}{b-a}(t-a) - \int_a^b G(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds\right|}{\varphi(t)} \leq 1 \quad (2.41)$$

elde edilir. Şimdi $C[a,b]$ tam metrik uzayı üzerinde Banach Sabit Nokta Teoremi'nin uygulanması sonucu T operatörünün $\forall t \in [a,b]$ için

$$y_0(t) = A + \frac{B-A}{b-a}(t-a) + \int_a^b G(t,s)F\big(s,y_0(s)\big)ds$$

olacak şekilde bir tek y_0 sabit noktasının var olduğu, yani (1.2)-(1.3) probleminin bir tek $y_0: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli çözümüne sahip olduğu sonucuna ulaşılır. Dahası, herhangi bir $y \in C[a,b]$ için

$$y, \quad y_1 = Ty, \quad y_2 = T^2y, \dots, y^n = T^n y$$

ardışık yaklaşımlarının $\{T^n y\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T'nin bir tek sabit noktasına yakınsar, yani her $t \in [a,b]$ için

$$y_0(t) = \lim_{n\to\infty} (T^n y)(t)$$

olur. Ayrıca (2.41) dikkate alınarak

$$d(y,y_0) \leq \frac{1}{1-(b-a)\beta} d(y,Ty) \leq \frac{1}{1-(b-a)\beta}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan (2.36) eşitsizliği elde edilir.

Örnek 2.3.

$$y'' - 2y = 0, \quad 1 < t < 2$$
$$y(1) = 0, \quad y(2) = 1$$

sınır-değer problemini ele alalım. Bu problem

$$y(t) = t - 1 + \int_1^2 G(t,s)2y(s)ds$$

Fredholm integral denklemine denktir. Burada

$$G(t,s) = \begin{cases} -(t-1)(2-s), & 1 \le t \le s \le 2 \\ -(s-1)(2-t), & 1 \le s \le t \le 2 \end{cases}$$

şeklindedir.

$\varphi(t) = t - 1/2$ ile bir $\varphi: [1,2] \to (0,\infty)$ sürekli fonksiyonu belirleyelim. $F\big(t, y(t)\big) = 2y(t)$ ile verilen $F: [1,2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in [1,2]$ ve $s \in [1,2]$ için

$$\left|F\big(s, y(s)\big) - F(s, z(s))\right| \le \frac{1}{5}(2t - s)|y(s) - z(s)|$$

koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyondur. Bu durumda $L(t,s) = (2t - s)/5$ ile bir integrallenebilir $L: [1,2] \times [1,2] \to [0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda (2.32) koşulu sağlanır. Ayrıca

$$\int_1^2 \frac{1}{5}(2t - s)\left(s - \frac{1}{2}\right) ds = \frac{2}{5}t - \frac{19}{60} \le \frac{2}{5}t + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}(t+1) = \frac{2}{5}\varphi(t)$$

olduğundan $\beta = 2/5$ olur. Bu durumda eğer

$$\left|y(t) - t + 1 - \int_1^2 G(t,s)2y(s)ds\right| \le t + 1$$

ise,

$$y_0(t) = t - 1 + \int_1^2 G(t,s)2y(s)ds$$

olacak şekilde bir tek $y_0: [1,2] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır ve $t \in [1,2]$ için

$$|y(t) - y_0(t)| \le \frac{5}{3}\varphi(t)$$

eşitsizliği elde edilir.

3. İNTEGRAL SINIR KOŞULLU PROBLEMİN HYERS-ULAM-RASSIAS KARARLILIĞI

Bu bölümde Diaz ve Margolis'in sabit nokta teoremi ve ağırlıklı uzay yöntemi kullanılarak

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big), \ 0 < t < 1 \tag{1.4}$$

$$y(0) - \alpha y'(0) = \int_0^1 \sigma_0(s)y(s)ds\,, \ y(1) - \beta y'(1) = \int_0^1 \sigma_1(s)y(s)ds \tag{1.5}$$

ile verilen integral sınır koşullu sınır değer probleminin Hyers-Ulam karalılığı ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenecektir. Burada $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma_0, \ \sigma_1: [0,1] \to [0, +\infty)$ fonksiyonları sürekli ve α ve β, $1 + \alpha > \beta > 1$ koşulunu sağlayan negatif olmayan reel parametrelerdir.

3.1. Giriş

Öncelikle (1.4)-(1.5) sınır değer probleminin başlangıç koşullarında bulunan α ve β sabitlerinin bu bölüm boyunca

$$1 + \alpha > \beta > 1$$

koşulunu sağladığını kabul edelim.

İlk olarak (1.4)-(1.5) probleminin çözümünü bulmak, yani bu probleme denk olan integral denklemi belirlemek istiyoruz. Bunun için

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big)$$

denkleminin 0 dan t ye integrali alınırsa,

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t F\big(s, y(s)\big)ds$$

elde edilir. Birinci sınır koşulundan $y'(0)$ çekilip son eşitlikte yazılırsa

$$y'(t) = \frac{y(0)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \sigma_0(s)y(s)ds + \int_0^t F\big(s, y(s)\big)ds$$

bulunur. Son eşitliğin bir daha 0 dan t ye integrali alınırsa

$$y(t) = y(0) + \frac{y(0)}{\alpha}t - \frac{t}{\alpha}\int_0^1 \sigma_0(s)y(s)ds + \int_0^t (t-s)F\big(s, y(s)\big)ds \tag{3.1}$$

denklemi elde edilir. Burada ikinci sınır koşulu kullanılırsa

$$y(1) - \beta y'(1)$$

$$= y(0) + \frac{y(0)}{\alpha} t - \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \sigma_0\,(s) y(s) ds + \int_0^1 (1-s) F\big(s, y(s)\big) ds$$

$$- \beta \left[\frac{y(0)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int_a^1 \sigma_0(s) y(s) ds + \int_0^1 F\big(s, y(s)\big) ds \right]$$

$$= \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds$$

elde edilir. Buradan $y(0)$ çekilirse

$$y(0) = \frac{1-\beta}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds$$

$$+ \frac{\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds + \frac{(1-\beta)\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 F\big(s, y(s)\big) ds$$

bulunur. Bu (3.1) de yazıldığında,

$$y(t) = \frac{1-\beta}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds + \frac{\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds$$

$$+ \frac{(1-\beta)\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 F\big(s, y(s)\big) ds + \frac{(1-\beta)t}{(1+\alpha-\beta)\alpha} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds$$

$$+ \frac{\alpha t}{(1+\alpha-\beta)\alpha} \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds + \frac{(1-\beta)\alpha t}{\alpha(1+\alpha-\beta)} \int_0^1 F\big(s, y(s)\big) ds$$

$$- \frac{t}{\alpha} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds + \int_0^t (t-s)\, F\big(s, y(s)\big) d$$

$$= -\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds + \frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds$$

$$+ \frac{(1-\beta)(\alpha+t)}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 F\big(s, y(s)\big) ds + \int_0^t (t-s) F(s, y(s)) ds$$

$$= \int_0^1 G(t,s)\, F\big(s, y(s)\big) ds - \frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds$$

$$+ \frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds$$

elde edilir. Sonunda,

$$z(t) = -\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds + \frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta} \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds$$

olmak üzere (1.4)-(1.5) sınır değer problemine denk olan

$$y(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)\, F\big(s, y(s)\big) ds$$

biçimindeki Fredholm integral denklemi elde edilir. Burada $G(t,s)$

$$y''(t) = 0, \qquad 0 < t < 1$$

$$y(0) - \alpha y'(0) = 0, \;\; y(1) - \beta y'(1) = 0$$

homojen sınır-değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonudur ve

$$k_1(t) = t + \alpha, \qquad k_2(t) = \frac{t + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}$$

olmak üzere

$$G(t,s) = \begin{cases} k_1(t)k_2(s), & 0 \le t \le s \\ k_1(s)k_2(t), & 0 \le s \le t \end{cases}$$

şeklindedir.

Her $t \in I$ için $k_1(t) > 0$ ve $k_2(t) > 0$, böylece her $(t,s) \in I \times I$ için $G(t,s) > 0$ dır.

Şimdi $\int_0^1 |G(t,s)| ds$ için bir üst sınır belirleyelim. Her $(t,s) \in I \times I$ için

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |G(t,s)| ds &= \frac{t + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta} \int_0^t (s + \alpha) ds + \frac{t + \alpha}{1 + \alpha - \beta} \int_t^1 (s + \beta - 1) ds \\
&= \frac{t + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta} \left(\frac{t^2}{2} + \alpha t \right) + \frac{t + \alpha}{1 + \alpha - \beta} \left(\frac{1}{2} + \beta - 1 - \frac{t^2}{2} - t\beta + t \right) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \right) t^2 + \frac{1}{2} t + \beta + \frac{\alpha}{2} - 1 + \alpha(\beta - 1) \\
&\le \alpha\beta + \frac{\beta}{2} = \beta(\alpha + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2. Çözümün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, Banach sabit nokta teoremi kullanılarak (1.4)-(1.5) sınır-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenecektir.

Teorem 3.1. $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli olsun ve $[0,1] \times \mathbb{R}$ üzerinde her $(t,y), (t,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ için

$$|F(t,y) - F(t,z)| \le L|y - z|$$

ile verilen Lipschitz koşulunu L Lipschitz sabiti ile sağlansın. Eğer $L\beta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)<1$ ise (1.4)-(1.5) sınır-değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat. $[0,1]$ üzerindeki sürekli fonksiyonların $X=C[0,1]$ kümesini göz önüne alalım. Bu küme $g,h\in X$ için

$$d(g,h)=\max_{t\in[0,1]}|g(t)-h(t)|$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

(1.4)-(1.5) sınır-değer probleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$y(t)=\int_0^1 G(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds-\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\int_0^1\sigma_0(s)y(s)ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta}\int_0^1\sigma_1(s)y(s)ds$$

denkleminin bir çözüme sahip olmasıdır. Burada $k_1(t)=t+\alpha,\ k_2(t)=\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta}$ olmak üzere

$$G(t,s)=\begin{cases}k_1(t)k_2(s), & 0\le t\le s\le 1\\ k_1(s)k_2(t), & 0\le s\le t\le 1\end{cases}$$

fonksiyonu

$$y''(t)=0,\qquad 0<t<1$$
$$y(0)-\alpha y'(0)=0,\ \ y(1)-\beta y'(1)=0$$

sınır-değer problemi için Green fonksiyonudur.

$$Ty(t)=z(t)+\int_0^1 G(t,s)F\big(s,y(s)\big)ds$$

ile bir

$$T\colon X\to X$$

operatörünü tanımlayalım. Burada

$$z(t)=-\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\int_0^1\sigma_0(s)y(s)ds+\frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta}\int_0^1\sigma_1(s)y(s)ds$$

şeklindedir. (1.4)-(1.5) sınır-değer probleminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün bir tek sabit noktaya sahip olmasıdır.

Şimdi T'nin bir daralma operatörü olduğunu gösterelim. $y,z\in X$ olsun. $t\in[0,1]$ için

$$|Ty(t) - Tz(t)| \leq \int_0^1 |G(t,s)||F(s,y(s) - F(s,z(s)|\, ds$$
$$\leq L \int_0^1 |G(t,s)||y(s) - z(s)|ds$$
$$\leq Ld(y,z) \int_0^1 |G(t,s)|ds$$
$$\leq L\beta \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) d(y,z)$$

elde edilir. $L\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) < 1$ olduğu için T bir daralmadır. Bu durumda, Banach sabit nokta teoreminden, T bir tek sabit noktaya, dolayısıyla (1.4)-(1.5) sınır-değer problemi bir tek sürekli çözüme sahiptir ve

$$y_n(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s, y_{n-1}(s)\big)ds \equiv Ty_{n-1}(t), \qquad n = 1,2, \dots$$

ardışık yaklaşımları ile elde edilen $\{y_n(t)\}$ dizisi X de bu çözüme yakınsar.

3.3. Hyers-Ulam-Rassias Kararlılık

Aşağıda (1.4)-(1.5) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ile ilgili bir sonuç verilmiştir.

Teorem 3.2. Verilmiş $I = [0,1]$ reel aralığı için M ve L, $0 < ML < 1$ koşulunu sağlayan pozitif sabitler olsun. $F: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nin $\forall\, u\,, v \in \mathbb{R}$ için

$$|F(t,u) - F(t,v)| \leq L|u - v| \tag{3.2}$$

standart Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Üstelik $\varphi: I \to (0,\infty)$' nin $\forall t \in I$ için

$$\int_0^1 G(t,s)h(s)ds \leq M\varphi(t) \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir sürekli fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer bir ikinci sürekli türeve sahip $y: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in I$ için

$$|y''(t) - F(t, y(t))| \leq \varphi(t) \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $\forall t \in I$ için

$$y(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s, y(s)\big)\, ds \tag{3.5}$$

$$|y(t) - y_0(t)| \le \frac{M\varphi(t)}{1 - ML} \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir tek $y_0: I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat.

$$X = \{f: I \to \mathbb{R} \,|\, f \text{sürekli}\} \tag{3.7}$$

ile I üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini tanımlayalım. Bu küme

$$d(f,g) = \inf\{C \in [0,+\infty] \,\big|\, |f(t) - g(t)| \le C\varphi(t),\ \ \forall t \in I\} \tag{3.8}$$

genelleşmiş metriği ile bir genelleşmiş tam metrik uzaydır (Lemma 2.1 e bakınız). Şimdi

$$(\Lambda f)(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s,f(s)\big)\,ds \tag{3.9}$$

ile X üzerinde bir Λ operatörü tanımlayalım. f, g, F ve G fonksiyonları sürekli olduğu için İntegralin Temel Teoreminden $\Lambda y \in X$ olur. Eğer y_0, Λ operatörünün sabit noktası ise, o zaman y_0 fonksiyonu (1.4)-(1.5) probleminin bir çözümüdür.

Şimdi Λ'nın X üzerinde bir kesin daralma operatörü olduğunu ispatlayacağız. $C_{fg} \in [0,\infty]$ sayısı herhangi $f, g \in X$ için $d(f,g) \le C_{fg}$ eşitsizliğini sağlayan keyfi bir sabit olsun. (3.8) den $\forall t \in I$ için

$$|f(t) - g(t)| \le C_{fg}\varphi(t) \tag{3.10}$$

olduğu çıkar. Bundan dolayı (3.2), (3.3), (3.9) ve (3.10) dan $\forall t \in I$ için

$$\begin{aligned}
|(\Lambda f)(t) - (\Lambda g)(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)F\big(s,f(s)\big)ds - \int_0^1 G(t,s)F\big(s,g(s)\big)ds\right| \\
&\le \int_0^1 |G(t,s)|\big|F\big(s,f(s)\big) - F\big(s,g(s)\big)\big|ds \\
&\le L\int_0^1 |G(t,s)||f(s) - g(s)|\,ds \\
&\le LC_{fg}\int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds \\
&\le MLC_{fg}\varphi(t)
\end{aligned}$$

yani, $d(\Lambda f, \Lambda g) \le MLC_{fg}$ elde edilir. Dolayısıyla herhangi $f, g \in X$ için

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \le ML\, d(f,g)$$

olduğu sonucuna varılabilir. $0 < ML < 1$ olduğu için Λ bir kesin daralma operatörüdür.

(3.8) ve (3.10) dan bir keyfi $g_0 \in X$ ve $\forall t \in I$ için

$$|(\Lambda g_0)(t) - g_0(t)| = \left| z(t) + \int_a^b G(t,s)F\big(s, g_0(s)\big)ds - g_0(t) \right| \leq C\varphi(t)$$

ile bir $0 < C < \infty$ sabitinin var olduğu çıkar. Çünkü $G(t,s)$ fonksiyonu $I \times I$ üzerinde sınırlı, $F\big(t, g_0(t)\big)$ fonksiyonu I üzerinde sınırlı ve $\min_{t \in I}\varphi(t) > 0$ dır.

Böylece d nin tanımından dolayı $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ olması gerekir. Yani, $d(\Lambda^{k+1}g_0, \Lambda^k g_0) < \infty$ olacak şekilde bir negatif olmayan $k = 0$ tamsayısı vardır. Bu sebeple Teorem 2.3 (i) şıkkının kullanılmasıyla (X, d) deki $\{\Lambda^n g_0\}$ dizisi Λ operatörünün y_0 sabit noktasına ($\Lambda y_0 = y_0$) yakınsar, yani $\forall\, t \in I$ için (3.5) denklemini sağlayacak şekilde bir sürekli $y_0 : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Sonra $\{g \in X \big| d(g_0, g) < \infty\} = X$, yani Teorem 2.3 deki X^* kümesinin X kümesine eşit olduğunu doğrulayacağız. Herhangi $g \in X$ için g ve g_0, I üzerinde sınırlı ve $\min_{t \in I}\varphi(t) > 0$ olduğundan herhangi bir $t \in I$ için

$$|g_0(t) - g(t)| \leq C_g \varphi(t)$$

olacak şekilde bir $0 < C_g < \infty$ sabiti vardır. Bundan dolayı her $g \in X$ için $d(g_0, g) < \infty$, yani $\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$ elde edilir. Teorem 2.3 (ii) den dolayı, y_0, Λ operatörünün X deki tek sabit noktasıdır. Yani y_0, (1.4)-(1.5) probleminin tek sürekli çözümüdür.

Diğer taraftan (3.4) eşitsizliğini sağlayan, y fonksiyonu için (3.9) dan $\Lambda y \in X$ elde ederiz. Üstelik (3.4) ten

$$-\varphi(t) \leq h(t) - F(t, y(t)) \leq \varphi(t)$$

eşitsizliği yazılabilir. $h(t) = y''(t)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^1 G(t,s)h(s)ds = -\,y(t) + z(t)$$

yazılabilir. Buradan da

$$-\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\,ds \leq \int_0^1 G(t,s)(h(s) - F(s, y(s)))ds \leq \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\,ds$$

elde edilir. Yani

$$-\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\,ds \leq y(t) - z(t) - \int_0^1 G(t,s)F(s, y(s))ds \leq \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\,ds$$

olur. Böylece her $t \in I$ için

$$|\Lambda(y)(t) - y(t)| \leq \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\, ds \leq K\varphi(t) \tag{3.11}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan

$$d(y, \Lambda y) \leq M < +\infty \tag{3.12}$$

olur. Sonuç olarak (3.12) ile birlikte Teorem 2.3 (iii)

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1-ML} d(y, \Lambda y) \leq \frac{M}{1-ML}$$

olmasını gerektirir. Yani her $t \in I$ için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{M\varphi(\mathrm{t})}{1-ML}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.1.

$$y''(t) - y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{3.13}$$

$$y(0) - 2y'(0) = \int_0^1 sy(s)ds, \; y(1) - 2y'(1) = \int_0^1 (s+1)y(s)ds \tag{3.14}$$

sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğunu gösterelim. $ML < 1$ olacak şekilde pozitif M ve L sabitlerini seçelim. İkinci sürekli türeve sahip $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\forall t \in [0,1]$ için

$$|y''(t) - y(t)| \leq t + 1 \tag{3.15}$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Burada $F\big(t, y(t)\big) = y(t)$ fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için $L = 1$ Lipschitz sabiti ile

$$|F(t,y) - F(t,z)| \leq L|y - z| \tag{3.16}$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyondur. Eğer $\varphi(t) = t + 1$ alınır ise, bu durumda yukarıdaki (3.15) eşitsizliği (3.4) ile özdeş forma sahiptir. Verilen problemin çözümü

$$z(t) = (t+1)\int_0^1 sy(s)ds + (t+2)\int_0^1 (s+1)y(s)ds$$

olmak üzere

$$y = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s, y(s)\big)ds$$

olur. Burada

$$G(t,s) = \begin{cases} (t+2)(s+1), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ (s+2)(t+1), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Üstelik her bir $t \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\,ds = (t+1)\int_0^t (s+2)(s+1)\,ds + (t+2)\int_t^1 (s+1)(s+1)ds$$
$$= (t+1)\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+\frac{2t^2}{2}+2t\right)+(t+2)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{2}+2-1-\frac{t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}-2t+t\right)$$
$$=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{7}{3}t-\frac{14}{3}\leq\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{7}{3}t-\frac{14}{3}$$
$$=\frac{7}{3}t-4\leq\frac{7}{3}t-4+\frac{19}{3}\leq\frac{7}{3}t+\frac{7}{3}=\frac{7}{3}(t+1)=M\varphi(t)$$

elde edilir. Teorem 3.2 ye göre $\forall\, t\in[0,1]$ için

$$y_0(t)=z(t)+\int_0^1 G(t,s)F(s,y(s))ds$$

ve

$$|y(t)-y_0(t)|\leq\frac{M\varphi(t)}{1-ML}$$

olacak şekilde bir tek y_0: $[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

3.4. Hyers-Ulam Kararlılık

Aşağıdaki teoremde (1.4)-(1.5) sınır-değer probleminin Hyers-Ulam kararlılığını ispatlayacağız.

Teorem 3.3. L, $0<L\beta(\alpha+\frac{1}{2})<1$ eşitsizliğini sağlayan bir sabit ve $I=[0,1]$ bir reel aralık olmak üzere, $F\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$|F(t,u)-F(t,v)|\leq L|u-v|,\quad\forall\,u\,,v\,\in\mathbb{R} \tag{3.17}$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer ikinci sürekli türeve sahip bir $y\colon I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, t\in I$ ve bir $\varepsilon>0$ için

$$|y''(t)-F(t,y(t))|\leq\varepsilon \tag{3.18}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda $\forall t\in I$ için

$$y_0(t)=\int_0^1 G(t,s)F\big(s,y(s)\big)\,\mathrm{ds}-\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\int_0^1\sigma_0(s)y(s)ds$$
$$+\frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta}\int_0^1\sigma_1(s)y(s)ds \tag{3.19}$$

denklemini ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{\varepsilon\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{1 - L\beta\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \tag{3.20}$$

eşitsizliğini sağlayan bir tek sürekli $y_0: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

İspat.

$$X = \{f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli}\}$$

kümesi üzerinde

$$d(f,g) = \inf\{C \in [0, +\infty] \big| |f(t) - g(t)| \leq C, \forall\, t \in I\} \tag{3.21}$$

ile verilen genelleşmiş metriğini tanımlayalım. (X, d) nin bir genelleşmiş tam metrik uzay olduğu Lemma 2.1 de gösterilmişti. X üzerinde

$$(\Lambda f)(t) = \int_0^1 G(t,s)F\big(s, f(s)\big)ds - \frac{t + \beta - 1}{1 + \alpha - \beta}\int_0^1 \sigma_0(s)y(s)ds$$
$$+ \frac{t + \alpha}{1 + \alpha - \beta}\int_0^1 \sigma_1(s)y(s)ds \tag{3.22}$$

biçiminde tanımlanan Λ operatörünü göz önüne alalım. Teorem 3.2 nin ispatına benzer şekilde $\Lambda f \in X$ olduğunu ve Λ operatörünün y_0 sabit noktasının (1.4)-(1.5) probleminin çözümü olduğunu görebiliriz.

Şimdi Λ'nın X üzerinde bir kesin daralma operatörü olduğunu göstereceğiz. $C_{fg} \in [0, \infty]$ sayısı herhangi $f, g \in X$ için $d(f,g) \leq C_{fg}$, yani herhangi $t \in I$ için

$$|f(t) - g(t)| \leq C_{fg} \tag{3.23}$$

eşitşizliğini sağlayan bir keyfi sabit olsun. Bu durumda $\forall t \in I$ için

$$|(\Lambda f)(t) - (\Lambda g)(t)| = \left|\int_0^1 G(t,s)F\big(s, f(s)\big)ds - \int_0^1 G(t,s)F\big(s, g(s)\big)ds\right|$$
$$\leq \int_0^1 |G(t,s)|\big|F\big(s, g(s)\big) - F\big(s, f(s)\big)\big|ds$$
$$\leq L\int_0^1 |G(t,s)||f(s) - g(s)|\,ds \leq LC_{fg}\int_0^1 |G(t,s)|ds$$
$$\leq \beta(\alpha + \frac{1}{2})LC_{fg}$$

yani $d(\Lambda f, \Lambda g) \leq \beta\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)LC_{fg}$ elde edilir. Buradan $\forall f, g \in X$ için

$$d(\Lambda f, \Lambda g) \leq L\beta(\alpha + \frac{1}{2})d(f,g)$$

olduğu sonucu çıkar. Burada $0 < L\beta(\alpha + \frac{1}{2}) < 1$ olduğuna dikkat edelim.

Teorem 2.5 in ispatına benzer bir biçimde her bir $g_0 \in X$ 'in $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ özelliğini sağladığını gösterebiliriz. (3.21) ve (3.22) dan bir keyfi $g_0 \in X$ ve $\forall t \in I$ için

$$|(\Lambda g_0)(t) - g_0(t)| = \left| z(t) - \int_0^1 G(t,s)F\big(s, g_0(s)\big)ds - g_0(t) \right| \leq C$$

ile bir $0 < C < \infty$ sabitinin var olduğu çıkar. Çünkü $G(t,s)$ fonksiyonu $I \times I$ üzerinde ve $f\big(t, g_0(t)\big)$ fonksiyonu da I üzerinde sınırlıdır. Böylece d nin tanımından dolayı $d(\Lambda g_0, g_0) < \infty$ olmalıdır. Yani, $d(\Lambda^{k+1} g_0, \Lambda^k g_0) < \infty$ olacak şekilde bir negatif olmayan $k = 0$ tamsayısı vardır. Bu sebeple Teorem 2.3 (i) den dolayı $n \to \infty$ iken (X, d) ‘de $\Lambda^n g_0 \to y_0$ olacak şekilde ve $y_0 = \Lambda y_0$ yani y_0 herhangi $x \in I$ için (3.19) denklemini sağlayacak şekilde bir $y_0 : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Şimdi $X = \{g \in \mathrm{X} \,|\, d(g_0, g) < \infty\}$ olduğunu gösterelim. Eğer $g \in X$ ise o zaman g_0, g sınırlı ve kapalı I aralığı üzerinde tanımlanan sürekli fonksiyonlardır. Bu nedenle $\forall t \in I$ için

$$|g_0(t) - g(t)| \leq C$$

koşulunu sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır. Bu herbir $g \in X$ için $d(g_0, g) < \infty$, denk olarak $\{g \in \mathrm{X} \,|\, d(g_0, g) < \infty\} = X$ olması anlamına gelir. Böylece Teorem 2.3 (ii)’den dolayı y_0, Λ operatörün tek sabit noktasıdır. Yani y_0, (1.4)-(1.5) problemini sağlayan tek çözümdür. Buna ek olarak, (3.18) eşitsizliğini sağlayan tüm y fonksiyonları için

$$-\varepsilon \leq y''(t) - F(s, y(s)) \leq \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. $h(t) = y''(t)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^1 G(t,s)h(s)ds = -y(t) + z(t)$$

yazılabilir. Sonra

$$-\varepsilon \int_0^1 G(t,s)ds \leq \int_0^1 G(t,s)[h(s) - F(s, y(s))]ds \leq \varepsilon \int_0^1 G(t,s)\, ds$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$-\varepsilon \int_0^1 G(t,s)ds \leq -\int_0^1 G(t,s)F\big(s, y(s)\big)ds - y(t) + z(t) \leq \varepsilon \int_0^1 G(t,s)ds$$

olur. Dolayısıyla $\forall t \in I$ için

$$-\varepsilon \int_0^1 G(t,s)ds \leq (\Lambda y)(t) - y(t) \leq \varepsilon \int_0^1 G(t,s)ds$$

elde edilir. Bu yüzden $\forall t \in I$ için

$$|\Lambda(y)(t) - y(t)| \leq \varepsilon \int_0^1 G(t,s)ds \leq \varepsilon\beta(\alpha + \frac{1}{2}) \qquad (3.24)$$

bunun sonucu olarak $d(y, \Lambda y) \leq \varepsilon\beta(\alpha + \frac{1}{2})$, böylece Teorem 2.3 (iii) den dolayı, $\forall t \in I$ için

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - L\beta(\alpha + \frac{1}{2})} d(y, \Lambda y) \leq \frac{\varepsilon\beta(\alpha + \frac{1}{2})}{1 - L\beta(\alpha + \frac{1}{2})}$$

elde edilir. (3.20) eşitsizliği $\forall t \in I$ için doğrulanmış olur.

Örnek 3.2.

$$y''(t) - y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \qquad (3.25)$$

$$y(0) - \frac{1}{4}y'(0) = \int_0^1 sy(s)ds, \; y(1) - y'(1) = \int_0^1 (s+1)y(s)ds \qquad (3.26)$$

sınır-değer probleminin Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğunu gösterelim. Burada $F\big(t, y(t)\big) = y(t)$ fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için $L = 1$ Lipschitz sabiti ile

$$|F(t,y) - F(t,w)| \leq L|y - w|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyondur. Gerçekten $\alpha = 1/4$ ve $\beta = 1$ için Teorem 3.3 ün hipotezindeki $0 < L\beta(\alpha + \frac{1}{2}) < 1$ koşulu sağlanır. İkinci sürekli türeve sahip $y: [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\forall t \in [0,1]$ için

$$|y''(t) - y(t)| \leq \varepsilon \qquad (3.27)$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Verilen problemin çözümü

$$z(t) = -4t \int_0^1 sy(s)ds + (4t+1) \int_0^1 (s+1)y(s)ds$$

olmak üzere

$$y = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s, y(s)\big)ds$$

olur. Burada

$$G(t,s) = \begin{cases} 4(t + 1/4)s & 0 \leq t \leq s \\ 4(s + 1/4)t, & 0 \leq s \leq t \end{cases}$$

şeklindedir. Teorem 3.3 e göre $\forall t \in [0,1]$ için

$$y_0(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F(s, y(s))ds$$

ve

$$|y(t) - y_0(t)| \leq 3\varepsilon$$

olacak şekilde bir tek $y_0: [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

3.5. Ağırlıklı Uzay Yöntemi

$L: [0,1] \times [0,1] \to [0, \infty)$ bir integrallenebilir fonksiyon ve $\varphi: [0,1] \to (0, \infty)$ bir sürekli fonksiyon olsun.

Teorem 3.4.

$$\int_0^1 L(t,s)\varphi(s)dt \leq \gamma\varphi(t), \qquad t \in [0,1] \tag{3.28}$$

olacak şekilde bir $\gamma \in [0,1]$ sayısının var olduğunu kabul edelim. Ayrıca $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu, her $u, v \in C[0,1]$ için

$$\left|F\big(s, u(s)\big) - F\big(s, v(s)\big)\right| \leq L(t,s)|u(s) - v(s)| \tag{3.29}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer

$$\left| y(t) - z(t) - \int_0^1 G(t,s)F\big(s, y(s)\big)ds \right| \leq \varphi(t) \tag{3.30}$$

olacak şekilde bir $y: [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu varsa ve eğer $0 < \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta}\gamma < 1$ ise, bu durumda

$$y_0(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s, y_0(s)\big)\, ds \tag{3.31}$$

olacak şekilde bir tek $y_0: [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır ve $t \in [0,1]$ için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{1+\alpha-\beta}{1+\alpha-\beta-(1+\alpha)\beta\gamma}\varphi(t) \tag{3.32}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$z(t) = -\frac{t+\beta-1}{1+\alpha-\beta}\int_0^1 \sigma_0(s)y(s)ds + \frac{t+\alpha}{1+\alpha-\beta}\int_0^1 \sigma_1(s)y(s)ds$$

şeklindedir.

İspat. $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini $C[0,1]$ ile gösterelim. Bu küme $u, v \in C[0,1]$ için

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,1]} \frac{|u(t) - v(t)|}{\varphi(t)}$$

ağırlıklı metriği ile bir metrik uzay teşkil eder. $(C[0,1], d)$ nin bir tam metrik uzay olduğu kolayca gösterilebilir (Teorem 2.6 ya bakınız). Şimdi $C[0,1]$ üzerinde

$$(Tu)(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s,u(s)\big)\, ds$$

ile verilen bir $T: C[0,1] \to C[0,1]$ operatörü tanımlayalım. T nin daralma operatörü olduğunu gösterelim. Her $u, v \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
d(Tu,Tv) = & \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_0^1 \{G(t,s)\big[F\big(s,u(s)\big) - F\big(s,v(s)\big)\big]\} dt\right|}{\varphi(t)} \\
& \leq \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_0^1 \{G(t,s)[L(t,s)|u(s)-v(s)|]\} ds\right|}{\varphi(t)} \\
& \leq \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_0^1 L(t,s)|u(s)-v(s)| ds\right|}{\varphi(t)} \\
& \leq \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta} \sup_{t\in[0,1]} \frac{|u(t)-v(t)|}{\varphi(t)} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\int_0^1 L(t,s)\varphi(s) ds\right|}{\varphi(t)} \\
& \leq \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta} \gamma d(u,v)
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta}\gamma < 1$ olduğundan, T operatörü bir daralmadır.

Diğer taraftan, (3.30) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
d(y,Ty) = & \sup_{t\in[0,1]} \frac{|y(t)-(Ty)(t)|}{\varphi(t)} \\
& = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|y(t) - z(t) - \int_0^1 G(t,s)F\big(s,y(s)\big) ds\right|}{\varphi(t)} \leq 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $C[0,1]$ tam metrik uzayı üzerinde Banach Sabit Nokta Teoremi'nin uygulanması sonucu T operatörünün $\forall t \in [0,1]$

$$y_0(t) = z(t) + \int_0^1 G(t,s)F\big(s,y_0(s)\big)\, ds$$

olacak şekilde bir tek y_0 sabit noktasının var olduğu, yani (1.4)-(1.5) denkleminin bir tek $y_0: [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli çözümüne sahip olduğu sonucuna ulaşılır. Dahası, herhangi bir $y \in C[0,1]$ için

$$y, \qquad y_1 = Ty, \quad y_2 = T^2 y, \dots, y^n = T^n y$$

ardışık yaklaşımlarının $\{T^n y\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T'nin bir tek sabit noktasına yakınsar, yani her $t \in [0,1]$ için

$$y_0(t) = \lim_{n\to\infty} (T^n y)(t)$$

olur. Ayrıca

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta}\gamma} d(y, Ty) \leq \frac{1+\alpha-\beta}{1+\alpha-\beta-(1+\alpha)\beta\gamma}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan (3.32) eşitsizliği elde edilir.

Örnek 3.3.

$$y''(t) - y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{3.33}$$

$$y(0) - y'(0) = \int_0^1 s y(s) ds, \; y(1) - \tfrac{1}{2} y'(1) = \int_0^1 (s+1) y(s) ds \tag{3.34}$$

sınır-değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğunu gösterelim. $\varphi(t) = t + 1$ ile bir $\varphi: [0,1] \to (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu belirleyelim. $F(t, y(t)) = y(t)$ ile verilen $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in [0,1]$ ve $s \in [0,1]$ için

$$|F(s, y(s)) - F(s, z(s))| \leq (t + s)|y(s) - z(s)|$$

koşulunu sağlayan bir sürekli fonksiyondur. Bu durumda $L(t, s) = t + s$ ile bir integrallenebilir $L: [0,1] \times [0,1] \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda (3.28) koşulu sağlanır. Ayrıca

$$\int_0^1 (t+s)(s+1) dt = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} t \leq \frac{5}{6} + \frac{5}{6} t = \frac{5}{6}(t+1) = \frac{5}{6}\varphi(t)$$

olduğundan $\gamma = 5/6$ dır. Ayrıca $0 < \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\alpha-\beta}\gamma < 1$ koşulu sağlanır. Teorem 3.4 e göre

$$y_0(t) = z(t) + \int_0^1 G(t, s) F(s, y_0(s))\, ds$$

olacak şekilde bir tek $y_0: [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır ve $t \in [0,1]$ için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{1+\alpha-\beta}{1+\alpha-\beta-(1+\alpha)\beta\gamma} \varphi(t)$$

elde edilir.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışma, konu ile ilgili makale ve kitapların incelenmesi ile yapılacaktır. Bu doğrultuda öncelikle konuyla ilgili ön araştırmalar yapıldıktan sonra, sınır-değer problemlerinin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı incelenecek ve elde edilen sonuçlar örneklerle birlikte verilecektir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada lineer olmayan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin bazı sınır-değer problemlerinin Hyers-Ulam kararlılığı ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı Banach Sabit Nokta Teoreminin bazı versiyonları kullanılarak ispatlanmıştır. İlk olarak

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big), \quad a < t < b, \qquad y(a) = A, \;\; y(b) = B$$

sınır-değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılarak gösterildi. Daha sonra bu problemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ve Hyers-Ulam kararlılığı Margolis ve Diaz (1968) tarafından genelleşmiş tam metrik uzaylar üzerinde verilen bir sabit nokta teoremi (Teorem 2.3) kullanılarak ispatlandı. Ardından bir ağırlıklı tam metrik uzay üzerinde Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılarak aynı problemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip olduğu gösterildi.

İkinci olarak integral sınır koşullarına sahip olan

$$y''(t) = F\big(t, y(t)\big), \qquad 0 < t < 1$$

$$y(0) - \alpha y'(0) = \int_0^1 \sigma_0(s) y(s) ds, \qquad y(1) - \beta y'(1) = \int_0^1 \sigma_1(s) y(s) ds$$

sınır-değer problemi göz önüne alındı. Öncelikle bu problemin çözümünün var ve tek olduğu Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılarak gösterildi. Sonra Margolis ve Diaz tarafından genelleşmiş tam metrik uzaylar üzerinde verilen bir sabit nokta teoremi (Teorem 2.3) kullanılarak bu problemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa ve Hyers-Ulam kararlılığa sahip olduğu gösterildi ve daha sonra bir ağırlıklı tam metrik uzay üzerinde Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılarak aynı problemin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ispatlandı.

Hyers-Ulam kararlılığın önemi şu şekilde ifade edilebilir: Eğer ikinci mertebeden sürekli türeve sahip bir fonksiyon yukarıda verilen sınır-değer problemlerinden birinin bir yaklaşık çözümü ise, o zaman bu problemlerin bu fonksiyona yakın olan bir tam çözümü vardır. Diğer bir ifade ile, verilen sınır-değer problemlerinin çözümü ile bu yaklaşık çözüm arasındaki fark çok küçüktür. Bu durumda eğer bir sınır-değer problemi Hyers-Ulam kararlılığa veya Hyers-Ulam-Rassias kararlılığa sahip ise, bu durumda bir uygun yaklaşık eşitsizliği sağlayan bir fonksiyon elde etmek yeterlidir, yani Hyers-Ulam kararlılık bir tam çözümün varlığını garanti eder.

KAYNAKLAR

Abdollahpour, M. R., Najati, A., Park, C., Rassias, T. M., Shin, D. Y. 2012. Approximate perfect differential equations of second order. ***Advances in DifferenceEquations***, **(**1**):** 225.

Alqifiary, Q.H.,Jung, S.M., 2014. On the Hyers-Ulam stability of differential equations second order. ***Abstr. Appl. Anal.***, **8:** 1-8.

Alsina, C., Ger, R., 1998. On some inequalities and stability results related to the exponential function, ***J. Inequal.Appl,.*** **2:** 373-380.

Baker, J.A., 1991. The stability of certain functional equations. ***Proc.Amer. Math. Soc.***, **112**(3):729–732.

Cadariu, L., Radu, V., 2003. Fixed points and the stability of Jensen's functional equation. ***J. Ineq. Pure and Appl. Math.***, **4**(1):1-7, 2003.

Cadariu, L., Radu, V., 2004. On the stability of the Cauchy functional equation, a fixed point approach. ***Grazer Math. Berichte***, **346ç:** 43-52.

Cadariu, L., Găvruţa, L., Găvruţa, P., 2012. Weighted space method for the stability of some nonlinear equations. ***Applicable Analysis and Discrete Mathematics***, ***6***:126-139.

Castro, L. P., Guerra, R. C., 2013. Hyers-Ulam-Rassias stability of Volterra integral equations within weighted spaces. ***Libertas Mathematica***, ***33***(2):21-36.

Castro, L. P., Simões, A. M. T., 2017. Different types of Hyers-Ulam-Rassias stabilities for a class of integro-differential equations. ***Filomat***, ***31***(17):5379-5390.

Castro, L. P., & Simões, A. M. 2018. Hyers-Ulam-Rassias stability of nonlinear integral equations through the Bielecki metric. ***Mathematical Methods in the Applied Sciences***. 1:1-17.

Diaz, J.B., Margolis, B.,1968. A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space. ***Bull. Am. Math. Soc.***, **74**: 305-309.

Gavruta, P.,Jung, S.M., Li, Y., 2011. Hyers-Ulam stability for second order linear differential equations with boundary conditions. ***Electron. J. Differential Equations.,*** **80:** 1-5.

Gavruta, P., Gavruta, L., 2010. A new method for the generalized Hyers-Ulam-Rassias stability. ***International Journal of Nonlinear Analysis and Applications***, ***1***(2):11-18.

Ghaemi, M.B., Gordji, M.E., Alizadeh, B., Park, C., 2012. Hyers-Ulam stability of exact linear differential equations. ***Adv. Difference Equ.***, **36:** 1-7.

Gordji, M. E., Cho, Y. J., Ghaemi, M. B., & Alizadeh, B., 2011. Stability of the second order partial differential equations. ***Journal of Inequalities and Applications***, 1:81.

Hyers, D.H., 1941. On the stability of the linear functional equation, ***Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,*** **27:** 222-224.

Hyers, D.H., Rassias, Th.M., 1992. Approximate homomorphisms, ***Aequationes Math.,*** **44:** 125-153.

Javadian, A., Sorouri, E., Kim, G.H., Gordji, M.E., 2011. Generalized Hyers-Ulam stability of the second-order linear differential equations. ***J. Appl. Math., 2011,*** 1-10.

Jung, S.-M., 2004. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, ***Appl. Math. Lett.*, 17:** 1135-1140.

Jung, S.-M., 2006. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, II, ***Appl. Math. Lett.*, 19:** 854-858.

Jung, S.-M., 2005. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order, III, ***J. Math. Anal. Appl.*, 311:** 139-146.

Kelley, W.,G., Peterson, A.,C., 2010. ***The theory of differential equations: classical and qualitative***. Springer, New York.

Li, Y.,Shen, Y., 2010. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order. ***Appl. Math. Lett.*, 23:** 306-309.

Li, Y.,Shen, Y., 2009. Hyers-Ulam stability of nonhomogeneous linear differential equations of second order. ***Int. J. Math. Math. Sci.*, 2009,** 1-7.

Li, Y., 2010. Hyers-Ulam stability of linear differential equations $y'' = \lambda^2 y$. ***Thai Journal of Math.*, 2:** 215-219

Li, Y.,Huang, J., 2013.Hyers-Ulam stability of linear second-order differential equations in complex Banach spaces. ***Electron. J. Differential Equations.*, 184:** 1-7.

Miura, T.,Takahasi, S.-E., Choda, H., 2001. On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued differentiable map, ***Tokyo J. Math.*, 24:** 467-476.

Miura, T., 2002. On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map, ***Sci. Math. Japon.*, 55:** 17-24.

Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.-E., 2003. A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators, ***J. Math. Anal. Appl.*, 286:** 136-146.

Miura, T.,Jung, S.-M., Takahasi, S.-E., 2004. Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations y′=λy, ***J. Korean Math. Soc.*, 41:** 995-1005.

Mortici, C., M.Rassias, T., Jung, S.M., 2014. The inhomogeneous Euler equation and its Hyers-Ulam stability. ***Appl. Math. Lett.*, 40:** 23-28.

Obloza, M., 1993. Hyers stability of the linear differential equation, ***Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, 13:** 259-270.

Obloza, M., 1997. Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations, ***RocznikNauk.-Dydakt. Prace Mat.*, 141:** 141-146.

Radu, V., 2003. The fixed point alternative and the stability of functional equations, ***Fixed Point Theory***, **4**(1):91-96.

Rassias, Th.M.,1978. On the stability of the linear mapping in Banach spaces, ***Proc. Amer. Math. Soc.*,72:** 297-300.

Rassias, Th. M., 2000. On the stability of functional equations in Banach spaces. ***J. Math. Anal. Appl.***, **251**(1): 264-284.

Rezaei, H., Jung, S. M., Rassias, T. M. (2013). Laplace transform and Hyers–Ulam stability of linear differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.***, **403:** 244-251.

Rus, I. A. (2009). Ulam stability of ordinary differential equations. ***Studia Universitatis Babes-Bolyai***, *Mathematica*, **LIV**(4): 125-133.

Takahasi, S.-E., Miura, T., Miyajima, S., 2002. On the Hyers-Ulam stability of the Banach space-valued differential equation $y' = \lambda y$, ***Bull. Korean Math. Soc.*,** **39**: 309-315.

Ulam, S.M., 1964. ***Problems in Modern Mathematics***, Chapter VI, Wiley, New York.

Waltmann, P., 2004. ***A second course in elementary differential equations.*** Dover, New York.

Wang, G., Zhou, M., Sun, L., 2008. Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order. ***Applied Mathematics Letters***, **21**(10): 1024-1028.

Zhao, X., Zhang, X., & Ge, W. (2017). Hyers–Ulam Stability of a Class Second Differential Equation $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = F(y(x))$. ***Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society***, **40**(2): 891-906.

ÖZ GEÇMİŞ

Merve UNUTUR, 1991 yılında Batman'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Batman'da tamamladı. 2015 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2019 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Alanında Tezli Yüksek lisansını tamamladı.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 18/07/2019

Tez Başlığı / Konusu: **Bazı Sınır-Değer Problemlerinin Hyers-Ulam Kararlılığı**

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 51 sayfalık kısmına ilişkin, 18/07/2019 tarihinde şahsım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 11 (Onbir) dir.
Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
-Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına Ilişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışınamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin dogru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

18/07/2019
Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Merve UNUTUR...

Öğrenci No: 159102001...

Anabilim Dalı: Matematik...

Programı: Matematik...

Statüsü: Y. Lisans ☒ Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Sebaheddin ŞEVGİN

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)