

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE SINIR DEĞER
PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN DÜZGÜN YAKINSAK NÜMERİK
METOTLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Zelal TEMEL
DANIŞMAN : Prof. Dr. Musa ÇAKIR

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE SINIR DEĞER
PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN DÜZGÜN YAKINSAK NÜMERİK
METOTLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Zelal TEMEL

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Zelal TEMEL tarafından sunulan “İntegral Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Sınır Değer Probleminin Çözümü için Düzgün Yakınsak Nümerik Metotlar” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 08/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

İmza:

Üye: Doç. Dr. Hakkı Duru

İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19/07/2019 tarih ve 2019/39-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

(İmza)

Zelal TEMEL

ÖZET

İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN DÜZGÜN YAKINSAK NÜMERİK METOTLAR

TEMEL, Zelal
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Musa ÇAKIR
Temmuz 2019, 51 Sayfa

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde problemlerin tarihsel gelişimi ve ikinci bölümünde kaynak bildirişleri verilmektedir. Üçüncü bölümde, bu tezde kullanılacak meteryal ve yöntem belirtildi.

Dördüncü bölümde, tez çalışmasında ele alınan sınır değer problemlerin çözümü için kullanılacak metot, temel bilgi niteliğinde olan bazı temel tanımlar, yardımcı teoremler ve teoremler vb. verildi.

Çalışmanın beşinci bölümünde, reaksiyon-difüzyon tipindeki singüler pertürbe özellikli sınır değer probleminin çözümü için düzgün bir nümerik yaklaşım verildi. İlk olarak, problemin çözümü ve türevi için açık sınırlar çıkarıldı. Daha sonra, düzgün şebekede fark şeması kuruldu. Bu fark şemalarının ayrık maksimum normda pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsaklığı ispatlandı. Ayrıca metodun etkinliği birkaç örnek üzerinde gösterildi.

Bu tezin altıncı bölümünde ise integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli sınır değer probleminin çözümü için beşinci bölümdeki değerlendirmelere benzer değerlendirmeler yapılarak düzgün yakınsak bir nümerik metotlar sunuldu.

Bu tezin son bölümünde ise yaptığımız çalışmalara ilişkin tartışma ve sonuç kısmı verildi.

Anahtar kelimeler: Düzgün yakınsaklık, Hata değerlendirmeleri, Singüler pertürbe problemler, Üstel sonlu fark şeması.



ABSTRACT

UNIFORM CONVERGENCE NUMERICAL METHODS FOR SOLVING SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

TEMEL, Zelal

MSc. Thesis Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

July 2019, 51 Pages

This thesis consists of seven chapters. In the first and second part of the thesis, historical development of the problems and literature are given. In the third part, the materials and methods to be used in this thesis are mentioned.

In the fourth part, the method to be used for the solution of the boundary value problems, some basic definitions, auxiliary theorems and theorems which are basic knowledge are given.

In the fifth chapter of the study, a uniform numerical approach is given to solve the boundary value problem with singular perturbation type of reaction-diffusion type. First, explicit boundaries for the solution and the derivative of the problem were established. Then, the difference scheme in the uniform mesh is established. Uniform convergence of these difference schemes according to the perturbation parameter at the discrete maximum norm is proved. In addition, the effectiveness of the method is shown on several examples.

In the sixth chapter of this thesis, similar to four the estimates in section five uniform convergence numerical methods are presented for the solution of the boundary value problem with singular perturbation with integral boundary condition.

In the last part of this thesis, discussion and conclusions about our studies are given.

Key words: Error estimates, Exponential finite difference scheme, Singular perturbation problems, Uniform convergence.



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında değerli bilgilerini benimle paylaşan, her türlü ilgi ve desteğini esirgemeyen, bana her fırsatta yardımcı olan, çok sevdiğim ve her zaman örnek kişilik olarak gördüğüm değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Musa ÇAKIR'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem Nesrin TEMEL'e, babam Prof. Dr. Cesim TEMEL'e ve bölümde çalışmama desteğini esirgemeyen Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

2019
Zelal TEMEL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	7
4.1. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu	7
4.2. Sağ, Sol ve Merkezi Fark Türevleri.....	7
4.3. Fark Şemasının Kararlılığı.	7
4.4. Fark Şemasının Yakınsaklığı.....	8
4.5. Maximum Prensibi	9
4.6. Singüler Pertürbe Problem	9
4.7. Sınır Katı	12
4.8. Barrier Fonksiyonu	12
4.9. Kuadratur Formülleri.....	12
5. REAKSİYON-DİFÜZYON TİPİNDEKİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR-DEĞER PROBLEMİ.....	15
5.1. Tam Çözümün Bazı Özellikleri.....	15
5.2. Fark Şemasının Kurulması	18
5.3. Fark Şemasının Yakınsaklığı.....	21
5.4. Nümerik Sonuçlar.....	24
6. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ.....	29
6.1. Tam Çözümün Bazı Özellikleri.....	29

6.2. Fark Şemasının Kurulması.	33
6.3. Düzgün Yakınsaklık ve Hata Değerlendirmeleri.....	36
6.4. Nümerik Sonuçlar.....	40
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	47
ÖZ GEÇMİŞ.....	51



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. $N = 2^4$, $\varepsilon = 10^{-5}$ değerleri için kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve hata sonuçları	25
Çizelge 5.2. $N = 2^5$, $\varepsilon = 10^{-6}$ değerleri için kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve hata sonuçları	25
Çizelge 5.3. $N = 2^{10}$, $\varepsilon = 10^{-8}$ değerleri için kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve hata sonuçları	26
Çizelge 6.1. N ve ε 'nin farklı değerleri için ω_N şebekesinde hesaplanan e_ε^N hataları ve p^N , yakınsaklık oranları	41
Çizelge 6.2. N ve ε 'nin farklı değerleri için ω_N şebekesinde hesaplanan e_ε^N hataları ve p^N , yakınsaklık oranları	42

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. $x = 0$ de bir sınır katına sahip	10
Şekil 4.2. $x = 1$ de bir sınır katına sahip	11
Şekil 4.3. $x = 0$ ve $x = 1$ 'de iki sınır katına sahip	12
Şekil 5.1. $\varepsilon = 10^{-5}$ ve $N = 2^4$ değerleri için kesin çözüm ve yaklaşık çözümün grafik eğrisi.	26
Şekil 5.2. $\varepsilon = 10^{-6}$ ve $N = 2^5$ değerleri için kesin çözüm ve yaklaşık çözümün grafik eğrisi.	27
Şekil 5.3. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $N = 2^{10}$ değerleri için kesin çözüm ve yaklaşık çözümün grafik eğrisi.	27
Şekil 6.1. Hata Eğrileri ($N=80$ için 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^{-4} için (sırasıyla kırmızı, yeşil, sarı, mavi)).....	43
Şekil 6.2. Yaklaşık çözüm eğrileri ($N=80$ için 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^{-4} için (sırasıyla siyah, yeşil, sarı, kırmızı)).....	43



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
N	Şebeke elemanlarının sayısı
h	Şebeke adımı
g_i	$g(x)$ fonksiyonunun x_i şebeke noktasındaki değeri
C	ε ve h 'dan bağımsız genel sabit
ω_h	$[0, l]$ bölgesinde düzgün şebeke
$\bar{\omega}_h$	$\omega_h \cup \{x = 0, x = l\}$
$\ g\ _{\infty, [0, l]}$	$[0, l]$ 'de sürekli fonksiyon için maksimum norm
$\ g\ _{\infty, \omega_h}$	ω_h düzgün şebeke normu
$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$	Sonlu üstel baz fonksiyonları
θ_i	Fark şemasının üstel katsayısı
l	Sonlu fark operatörü
L	Diferansiyel operatörü
$O(h^k)$	Yakınsama hızı k yakınsaklık mertebesi
u	Diferansiyel denklemin kesin çözümü
y	Diferansiyel denklemin nümerik çözümü
$C^n(0, l)$	$[0, l]$ bölgesinde n 'inci sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe özellikli problemler, uygulamalı matematiğin ve mühendisliğin birçok değişik alanlarında ortaya çıkmaktadır. Örneğin, akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, elastik kuantum mekaniği, kütleli hareketi, plastik, kimyasal reaktör teorisi, aerodinamik, elektron plazma dalgası, elektrik akımı, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, oşinografi, meteoroloji, iletişim hatları, yayılma teori ve reaksiyon difüzyon gibi alanlarda kullanılmaktadır. Matematiksel olarak bu problemler, yüksek mertebeli türevlerin katsayılarının pozitif küçük parametrenin olduğu problemler olarak bilinir. Bu tür problemlerde küçük parametrelerin varlığı uygun nümerik çözümler elde etmede zorluklar ortaya çıkarır. Singüler pertürbe problemlerin çözümleri multi-scale bir karaktere sahip olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahiptir. Yani çözüm, sınır katları denilen ince geçiş katlarında hızlı değişirken, diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değişir (Kevorkian ve ark., 1981; Smith, 1985; Nayfeh, 1985; O' Malley, 1991; Roos ve ark., 2008; Farrel ve ark., 2000; Miller ve ark., 2012).

1904 yılında akışkanlar mekaniği üzerinde çalışmalar yapan fizikçi Ludwig Prandtl, Heidelberg'de düzenlenen 3. Uluslararası Matematik Konferansında ilk olarak sınır katı kavramını tanıtmıştır. Singüler Pertürbasyon ifadesini ilk olarak Friedrichs ve Wasow kullanmıştır. Singüler pertürbe olmuş problemlere ilgi, yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar esasen asimptotik açılımlar üzerine yoğunlaşmış ve 1960'lı yıllardan sonraki dönemlerde çok iyi sonuçlar alınmıştır (Wasow, 1965). Singüler pertürbe problemlerin nümerik çözümü ile ilgili çalışmalar 1970'li yıllarda başlamıştır ve günümüzde bu çalışmalar yoğun bir şekilde sürdürülmektedir. Nümerik çözümlerdeki esas zorluk sınır katlarında kesin çözümün hızlı bir şekilde kötüleşiyor olmasıdır. Diğer bir ifadeyle çözüm fonksiyonunun türevleri, parametrenin küçük değerleri için ince geçiş katlarında sonsuza ıraksar ve kararsızlıktan dolayı klasik nümerik yöntemlerin uygulanması geçersiz olur. Bundan dolayı kararlı ve küçük parametreye göre düzgün yakınsaklık özelliğine sahip nümerik

metodların kurulması büyük önem arz etmektedir (Doolan ve ark., 1980; Nayfeh, 1993; Farrel ve ark., 2000; Linss, 2003; Roos ve ark., 2008).

Singüler pertürbe olmuş lineer başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin farklar metodu ile nümerik çözümleri ele alınmaktadır. Genel olarak ifade edersek, bu alanda iki tip yaklaşım ağırlık kazanmaktadır:

- i) Düzgün (eşit aralıklı düğümlerden oluşan) şebeke üstel katsayılı fark şemalarının uygulanması;
- ii) Sınır katları dahilinde özel kuralla belirlenen düzgün olmayan şebekenin seçimine dayalı fark metotları.

Bunların her ikisinde amaç, diferansiyel problemin özelliklerini daha iyi biçimde aksettirebilecek nümerik metodun kurulmasıdır.

Bu çalışmada aşağıdaki iki tipteki singüler pertürbe özellikli sınır değer problemleri ele alınacaktır:

- 1) Önce aşağıdaki singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi ele alınmaktadır:

$$Lu \equiv -\varepsilon u'' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \quad (1.1)$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B, \quad (1.2)$$

burada, $0 < \varepsilon \ll 1$ pozitif küçük parametre, $a(x) \geq a > 0$, ve $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve A, B verilmiş sabitlerdir. (1.1) – (1.2) problemi genel olarak, $x = 0$ ve $x = l$ noktalarında olmak suretiyle, iki sınır katına sahiptir.

- 2) Daha sonra aşağıdaki integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi ele alınmaktadır:

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (1.3)$$

$$u(0) = A, \quad (1.4)$$

$$u(l) = \int_0^l g(x)u(x)dx + B, \quad (1.5)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresi, A ve B verilen sabitler $g(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyon, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$ ve $f(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında (1.3)-(1.5) probleminin bir tek çözümü vardır. $0 < \varepsilon \ll 1$ için $u(x)$ çözümü genelde $x = 0$ civarında bir sınır katına sahiptir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

İntegral sınır şartlı diferansiyel denklemler, problemlerin çok ilginç ve önemli bir sınıfını oluşturur ve bu tür problemler yıllardır çalışılmaktadır. İntegral sınır şartlı diferansiyel denklemler uygulamalı bilimlerde pek çok olayın tanımında kullanıldığı iyi bilinmektedir. Örneğin, ısı iletimi, yer altı su geçişleri, termoelastik ve kimyasal mühendislikte vb. çeşitli uygulamaları vardır (Cannon, 1963; Ionkin, 1977; Nicoud ve ark., 2002). Bu yüzden, integral sınır şartları içeren sınır değer problemleri pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (Borovykh, 2002; Jankowski, 2002; Amiraliyev ve ark., 2007; Cakir ve ark., 2007; Cen ve ark., 2007; Samoilenko ve ark., 2010; Das ve ark., 2013; Henderson ve ark., 2016). Regüler durumlardaki bu tür problemlerin bazı yaklaşık yönlerini, yani sınır katlarının olmadığı durumlar, çok sayıda yazarlar tarafından incelenmiştir (Borovykh, 2002; Jankowski, 2002; Samoilenko ve ark., 2010; Das ve ark., 2013; Henderson ve ark., 2016). İntegral sınır şartlı bu tür problemlerin varlık ve teklik tartışmaları için Cannon (1963), Byszewski (1991), Borovykh (2002), Nicoud ve Schönfeld (2002), Jankowski (2004), Cen ve Cai (2007), Samoilenko ve Martynyuk (2010), Das ve Natesan (2013) ve Das ve Natesan (2013) kaynaklarına bakınız ve içindeki referansları inceleyiniz. Son yıllarda çok sayıda araştırmacılar bu tür problemlerin singüler pertürbe durumunu ele aldı. Amiraliyev ve Cakir (2002), lokal olmayan şarta sahip singüler pertürbe sınır değer problem için düzgün şebekede fark şemasını kurarak nümerik çözüm elde ettiler. Cakir ve Amiraliyev (2005), integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemleri için sonlu fark metodunu geliştirdiler.

Amiraliyev ve ark. (2007), Cakir ve Amiraliyev (2007), Cen ve Cai (2007), Cakir (2016), Kudu ve ark. (2018)'de integral sınır şartlı sınır değer problemleri için Shishkin şebekede sonlu fark şemasını geliştirdiler ve metodun birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğunu ispatladılar. Kudu (2018)'de integral sınır şartlı parametrized singüler pertürbe sınır değer problemi için Bakhvalov şebekede düzgün yakınsak bir nümerik yöntem verdi. Sekar ve Tamilselvan (2018)'de integral sınır şartlı konveksiyon-difüzyon tipindeki singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü için Shishkin şebekede bir sonlu fark şemasını kurdu.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Giriş ve Kaynak Bildirişleri bölümüne bakıldığında ilgili literatürde integral sınır şartlı singüler pertürbe sınır değer problemler ile ilgili kayda değer birçok çalışmanın olduğu görülmektedir.

Bu tezde meteryal olarak tezin kaynaklar kısmında geçen integral sınır şartlı singüler pertürbe sınır değer problemi için düzgün yakınsak metot e ilgili belirtilen çalışmaları ve tez konusundaki temel bilgileri içeren kitaplar düşünülmektedir. Bu tez 1. Giriş, 2. Kaynak Bildirişleri ve “3. Materyal ve Yöntem” bölümleriyle beraber yedi bölümden oluşmaktadır. Dördüncü bölümde, bu tez çalışmasında ele alınan sınır değer probleminin çözümü için kullanılacak metodla ilgili bazı temel tanım, lemma ve teoremler verilmektedir.

Çalışmanın beşinci bölümünde singüler pertürbe özellikli sınır değer probleminin fark şemasının kurulmasını ve yakınsaklığını, altıncı bölümünde integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi alınacak olup ilkinde fark şeması kurulup sonrasında düzgün yakınsaklığı ve hata değerlendirmeleri sonlu fark metodu yardımıyla elde edilecektir.

Son bölümde ise tezimizde yaptığımız çalışmalar ile literatürde yer alan bazı çalışmaların karşılaştırılması yapılacaktır.



4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde düzgün şebekede fark şemasının kurulmasında ihtiyaç duyulan notasyonlar, sürekli bölgede tanımlanmış fonksiyonlar için bazı notasyonlar ve bazı kuadratür formüller verilmektedir.

Tanım 4.1. (Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu)

a) $\bar{\Omega} = [a, b]$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebekede tanımlanmış fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir.

b) Eğer düğümler eşit aralıklı iseler

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \mid x_i = a + ih, \quad i = \overline{0, N}; \quad h = (b - a)/N\}$$

ifadesine $\bar{\Omega}$ aralığındaki düzgün şebeke denir. Burada h sabiti şebeke adıdır.

c) Düzgün şebekede tanımlanmış $g_i \equiv g(x_i)$ fonksiyonuna x_i düğüm noktalarındaki şebeke fonksiyonu denir (Samarskii, 2001).

Tanım 4.2. (Sağ, Sol ve Merkezi Fark Türevleri) $\bar{\Omega}$ aralığındaki $g(x)$ fonksiyonunun *düzgün şebeke* için fark türevleri aşağıdaki gibidir (Samarskii, 2001).

a) $g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h}$ ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi,

b) $g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$ ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi,

c) $g_{\hat{x},i} = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}$ ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi,

d) $g_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2}$ ifadesine ikinci mertebeden fark türevi denir.

Tanım 4.3. (Fark Şemasının Kararlılığı) Lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in G \tag{4.1}$$

denkleminin

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma \tag{4.2}$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şartı olabilir) sağlayan çözümünün bulunması istensin, burada $f(x)$, $\mu(x)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), l belirli bir lineer diferansiyel operatördür. $\bar{G} = D \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$

şebekesinin kurulduğunu varsayalım, burada ω_h - iç şebeke, γ_h - sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir (şebeke adımı). (4.1)-(4.2) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, \quad x = \omega_h, \quad (4.3)$$

$$l_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h \quad (4.4)$$

fark problemi olsun. Burada $L_h, l_h - \bar{\omega}_h$ 'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h, χ_h belli şebeke fonksiyonlarıdır.

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli özelliktir. (4.3)-(4.4) fark problemleri, belli sınıflardan olan her bir φ_h, χ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. (4.3) – (4.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h, \tilde{\chi}_h$ olan çözümünü \tilde{y} ile belirleyelim.

Eğer öyle, h 'a bağlı olmayan C_1, C_2 sabitleri varsa, yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_3 \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanmış olsun. Bu durumda (4.3) – (4.4) fark şeması başlangıç verilerine göre şartına göre kararludur denir. Burada $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$ herhangi şebeke normlarıdır. (4.3) – (4.4) problemi lineer olduğundan, kararlılığı ifade eden (4.5) eşitsizliği

$$\|y\|_1 \leq C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|\chi_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir. Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğunu, hem de bu bağlılığın h 'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade eder (Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.4. (Fark Şemasının Yakınsaklığı) u , (4.1) – (4.2) probleminin kesin çözümü ve y 'de herhangi bir şebekedeki bu probleme uygun fark probleminin çözümü olsun. $z = y - u$ farkı hata fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Eğer $h \rightarrow 0$ olduğunda

$$\|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$$

ise ($\|\cdot\|_1$ söz konusu şebekedeki herhangi bir norm), bu durumda y fark probleminin çözümü u probleminin çözümüne yakınsıyor denir (Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.5. $u(x)$ diferansiyel problemin çözümü, y_i uygun fark probleminin çözümü, $\|\cdot\|$ ise belli bir şebeke normu olsun. Eğer ε 'dan ve h 'dan bağımsız bir C sabiti için

$$\|y - u\| \leq Ch^p, p > 0$$

şeklinde bir eşitsizlik söz konusu ise, bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızıyla ε 'a göre düzgün yakınsaktır denir (Amirali ve Amirali, 2018).

Lemma 4.1. (Maximum Prensibi) Varsayalım ki, $v(x), v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, $Lv(x) \geq 0$ ($0 < x < l$), $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ eşitsizliklerini sağlayan fonksiyondur. Bu durumda $v(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq l$) olur.

İspat. Aksini varsayalım. Bu durumda, $v(x_0) \geq 0, v(l) \geq 0$ olduğuna göre öyle x_0 ve x_1 noktaları vardır ki $v(x_0) = 0, v(x_1) = 0, v(x) < 0$ ($x_0 < x < x_1$)'dir. Bu takdirde ikinci türevle ikinci fark türevi arasındaki ilişkiye göre, öyle bir $\xi \in (x_0, x_1)$ noktası bulunur ki,

$$v''(\xi) = \frac{v(x_1) - 2v((x_0 + x_1)/2) + v(x_0)}{((x_1 - x_0)/2)^2} \geq 0$$

olur. Bundan ve $v(\xi) < 0$ olmasından dolayı $Lv(\xi) < 0$ olur. Bu ise Lemma'nın hipotezi ile çelişir (Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.6. (Singüler Pertürbe Problem) Diferansiyel denklemler için singüler pertürbe özellikli problemler matematiksel olarak, en yüksek mertebeli türevler içeren terimlerinin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemler olarak bilinir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahiptir. Yani çözüm, sınır katları denilen ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değişir (Nayfeh, 1981).

Örnek 4.1.

$$\begin{aligned} \varepsilon u'(x) + u(x) &= 0, & 0 < x \leq 1, \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemi verilsin. Bu problemin kesin çözümü

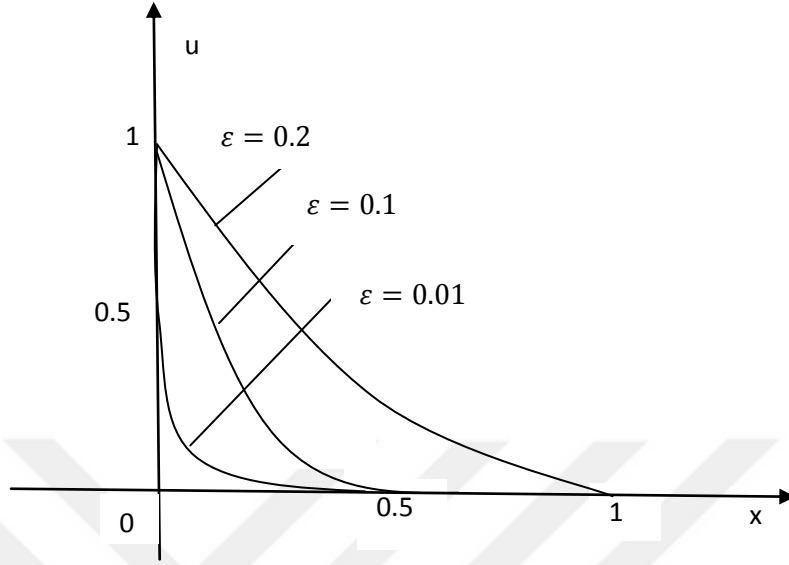
$$u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

fonksiyonudur. Buradan ε 'a bağlı olmayan keyfi $x_0 \in (0,1]$ için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

olduğu görülür. Fakat tekrarlı limitlerin eşitliği $x = 0$ noktası için söz konusu değildir:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$



Şekil 4.1. $x = 0$ da bir sınır katına sahip.

Örnek 4.2.

$$-\varepsilon u'' + u' = 1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

sınır değer problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = x - \frac{\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

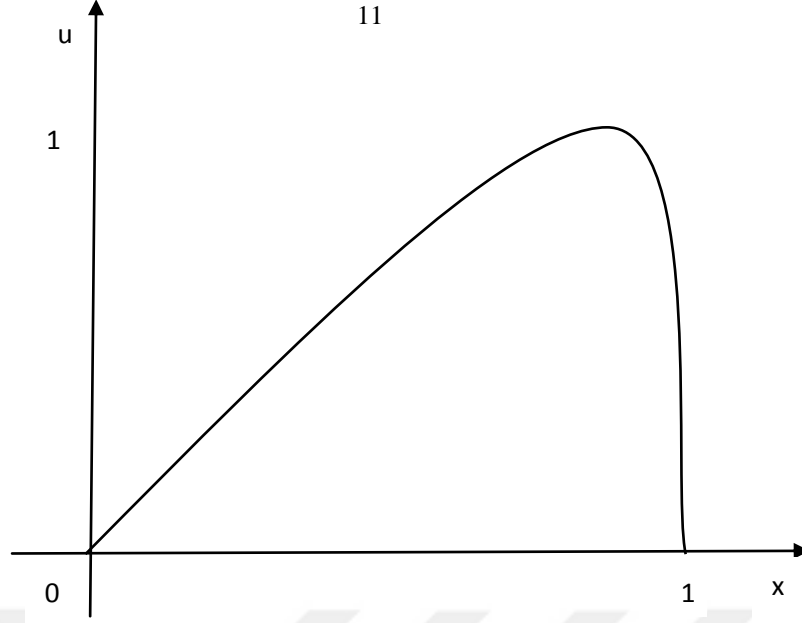
biçimindedir. Burada $a \in [0,1)$ için

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow a} u(x),$$

fakat

$$1 = \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 0,$$

olmaktadır. Böyle bir eşitsizliğin ortaya koyduğu bir noktanın varlığı (bu örnekte $x = 1$) bu problemin singüler pertürbe olduğu anlamına gelir. Bu eşitsizlik $x, 1$ 'e yaklaşırken, $u(x)$ çözümünün ani değiştiğini ifade eder. Orada $x = 1$ noktasında bir sınır katına sahip olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 4. 2. $x = 1$ de bir sınır katına sahip.

Örnek 4.3.

$$-\varepsilon u''(x) + u(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 1,$$

problemini ele alalım. Bunun çözümü,

$$u(x) = \frac{(e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{\frac{x-2}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}}})}{1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}}}$$

fonksiyonudur. Buradan $u(x)$ için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ ve } x = 1, \\ 0, & x \neq 0; 1 \end{cases}$$

olduğu görülür. Uygun indirgenmiş problem $u_0(x) = 0$ çözümüne sahip ve her iki sınır şartı bunun için gereksiz hale gelmektedir. Açıklananlar bu sınır değer probleminin $x = 0$ ve $x = 1$ 'de olmak üzere iki sınır katı içerdiğini belirtmektedir.

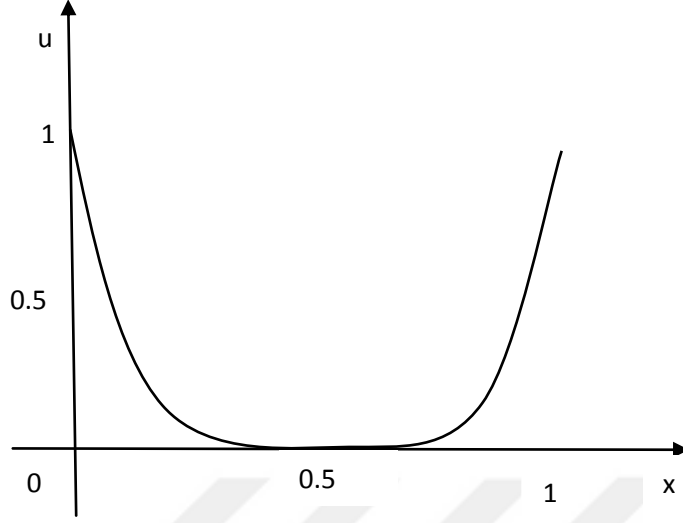
$x = 0$ noktası için

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1,$$

$x = 1$ noktası için

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 1,$$

olduğu görülür. Böylece buradan bu problemin $x = 0$ ve $x = 1$ 'de sınır katları mevcuttur.



Şekil 4.3. $x = 0$ ve $x = 1$ 'de iki sınır katına sahip.

Tanım 4.7. (Sınır Katı) Bir singüler pertürbasyon probleminin çözümünün hızlı değiştiği herhangi bir sınır noktasının bir komşuluğuna, o noktanın birer sınır katı denir. Sınır katı dışındaki üstel küçük değerlere sahip fonksiyona sınır katı fonksiyonu denir. Başlangıç-değer problemi için kullanılan sınır katına başlangıç katı denir (Amirali ve Amirali, 2018).

Tanım 4.8. (Barrier Fonksiyonu) Problemin çözümünü değerlendirmek için problemin başlangıç verilerini kullanarak maksimum prensibiyle birlikte kullanılan fonksiyona barrier fonksiyonu denir (Doolan ve ark., 1980).

Tanım 4.9. (Kuadratur Formülleri) Fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratur formülleri kullanılacaktır.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \} + f(a; b) \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx + R(f). \quad (4.6)$$

Burada σ reel parametre, $p(x) \in [a, b]$ ağırlık fonksiyonudur.

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2$$

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, \quad s = 0, 1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f(a; b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!}, \quad \lambda \geq 0; T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0.$$

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f(a; b) \int_a^b p(x) dx + \bar{R}(f), \quad (4.7)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } n = 2$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_0(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^2[a, b].$$

(4.6) ve (4.7) formüllerinde aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonu kullanılmaktadır. Ayrıca,

$$K_0(a, \xi) = K_0(b, \xi) = 0,$$

$$K_1(a, \xi) = K_1(b, \xi) = K_1(x, a) = K_1(x, b) = 0,$$

$$K_1(x, \xi) = K_1(\xi, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) = -K_0(x, \xi), \quad \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, \xi) = -K_0(\xi, x)$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x) dx + R^*(f)$$

$$R^*(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}^*(x, \xi) d\xi \\ + (n-1) f(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x) d(x), \quad n = 1 \text{ veya } n = 2, \quad (4.8)$$

$$K_s^*(x, \xi) = T_s(x - \xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) + (b-a)^{-1}(b - \xi)^s \left(\frac{a+b}{2} - x\right), \quad s = 0, 1$$

(Amirali ve Amirali, 2018).



5. REAKSİYON-DİFÜZYON TİPİNDEKİ SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR-DEĞER PROBLEMİ

Bu çalışmada aşağıdaki reaksiyon-difüzyon tipindeki singüler pertürbe özellikli sınır-değer problemi ele alınacaktır.

$$Lu \equiv -\varepsilon u'' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \quad (5.1)$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B. \quad (5.2)$$

5.1 Tam Çözümün Bazı Özellikleri

Burada $u(x)$ çözümü için gerekli bazı değerlendirmeler verilecektir. Bu değerlendirmeler daha sonraki kısımlarda kullanılacaktır.

Lemma 5.1. $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ olduğunu kabul edelim. (1.1) – (1.2) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler sağlanır.

$$|u(x)| \leq C, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.3)$$

burada, $C = |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)|$ ve

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}. \quad (5.4)$$

İspat. İlk önce (5.3)'in doğruluğunu gösterelim. Burada maksimum prensibinden yararlanacağız. Herhangi bir $v(x) \in C[0, l]$ için

$$Lv(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad u(0) \geq 0, \quad u(l) \geq 0$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, o zaman $u(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq l$) olur.

Aşağıdaki gibi bir bariyer fonksiyonunu ele alalım:

$$\Psi(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)|.$$

Maksimum prensibine göre,

$$L\Psi(x) = \pm f(x) + a(x)(|A| + |B|) + a(x)\alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)| \quad (a(x) \geq \alpha > 0)$$

$$\geq \pm f(x) + |A| + |B| + \max_{x \in [0, l]} |f(x)|$$

$$\geq \pm f(x) + \max_{x \in [0, l]} |f(x)| \geq 0,$$

$$\Psi(0) = \pm u(0) + |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(0)|$$

$$= \pm A + |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)| \geq 0$$

ve

$$\Psi(l) = \pm B + |B| + |A| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)| \geq 0$$

ise, o zaman

$$\Psi(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)| \geq 0$$

olur. Buradan

$$|u(x)| \leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |f(x)| \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.5) eşitsizliği (5.3)'in doğru olduğunu gösterir.

Şimdi ise (5.4) eşitsizliğini ispatlayalım: (1.1) denkleminde

$$|u''(x)| \leq \frac{|(fx) - a(x)u|}{\varepsilon} \leq \frac{|f| + |a||u|}{\varepsilon}$$

alabiliriz. Bu eşitsizlikte (5.3)'i dikkate alırsak

$$|u''(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon}, \quad x \in [0, l] \quad (5.6)$$

elde edilir.

Daha sonra $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ değerlendirmelerini almamız gerekir. Bunun için aşağıdaki bağıntıdan yararlanacağız: $g \in C^2$ için,

$$g'(x) = \frac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} - \int_{\beta}^{\alpha} \left[\frac{\gamma - \xi}{\gamma - \beta} - T_0(X - \xi) \right] g''(\xi) d\xi. \quad (5.7)$$

İlk önce $u'(0)$ 'ı değerlendirelim: $g(x) \equiv u(x)$, $\beta = 0$, $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$, $x = 0$ değerlerini (5.7) eşitliğinde kullanırsak,

$$|u'(0)| \leq \frac{|u(\sqrt{\varepsilon})|}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon} - \xi}{\sqrt{\varepsilon}} |u''(\xi)| d\xi$$

bulunur. Bu eşitsizlikte (5.3) ve (5.6)'ü dikkate alırsak,

$$|u'(0)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (5.8)$$

elde edilir. Şimdi ise $|u'(l)|$ için bir değerlendirme ele alalım. Bu defa (5.7)'de

$$g(x) \equiv u(x), \quad x = l \text{ ve } \beta = l - \sqrt{\varepsilon}, \quad \alpha = l$$

değerlerini kullanıp, (5.3) ve (5.6)'ü dikkate alırsak,

$$|u'(l)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (5.9)$$

bulunur. (1.1) denkleminde türev alırsak,

$$-\varepsilon v'' + a(x)v = \Phi(x) \quad (5.10)$$

elde edilir. Burada

$$v(x) = u'(x), \quad \Phi(x) = f'(x) - a'(x)u(x).$$

Ayrıca (5.8) ve (5.9)'e göre,

$$|v(0)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad |v(l)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (5.11)$$

açık olduğu görülür. $\Phi(x)$ fonksiyonu aşağıdaki değerlendirmeye sahiptir.

$$|\Phi(x)| \leq |f'(x)| + |a'(x)||u(x)| \leq C.$$

(5.10) ve (5.11)'un çözümünü,

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

şeklinde yazabiliriz. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir.

$$\begin{aligned} Lv_1(x) &= \Phi(x), \\ v_1(0) &= v_1(l) = 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} Lv_2(x) &= 0, \\ v_2(0) &= v(0), \quad v_2(l) = v(l). \end{aligned} \quad (5.13)$$

(5.12) probleminin çözümü maksimum prensibine göre,

$$|v_1(x)| \leq \alpha^{-1} \max_{x \in [0, l]} |\Phi(x)| \quad (5.14)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\Phi(x)$ fonksiyonu ε' na göre düzgün sınırlı olduğundan,

$$|v_1(x)| \leq C, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.15)$$

bulunur. (5.13) problemi için maksimum prensibine göre

$$|v_2(x)| \leq \theta(x) \quad (5.16)$$

eşitsizliğini alabiliriz. Burada $\theta(x)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümüdür.

$$-\varepsilon \theta'' + \alpha \theta = 0, \quad (5.17)$$

$$\theta(0) = |v_2(0)|, \quad \theta(l) = |v_2(l)|.$$

(5.17) probleminin çözümü sabit katsayılı olduğu için

$$\theta(x) = \theta(0) \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}l\right)} + \theta(l) \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}x\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\varepsilon}}l\right)}$$

şeklinde bulunur. Burada (5.17) probleminin sınır şartlarına göre

$$|\theta(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right\} \quad (5.18)$$

olduğu kolayca görülür.

Son olarak (5.15), (5.16) ve (5.18) eşitsizlikleri

$$|u'(x)| \leq |v_1(x)| + |v_2(x)|$$

eşitsizliğinde kullanılırsa, (5.4)'nin ispatlandığı görülür. Böylece lemma 5.1'in ispatı tamamlanmış olur.

5.2 Fark Şemasının Kurulması

$[0, l]$ aralığında,

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{1, N-1}, h = \frac{l}{N} \right\}, \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, l\}$$

düzgün şebekesini ele alalım. Fark şemasının kurulması süreci için başlangıç olarak aşağıdaki özdeşlikten hareket edeceğiz:

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (5.19)$$

Burada, $\varphi_i(x)$ aşağıdaki biçimde belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) = \frac{\sinh(\gamma_i(x - x_{i-1}))}{\sinh(\gamma_i h)}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)}(x) = \frac{\sinh(\gamma_i(x_{i+1} - x))}{\sinh(\gamma_i h)}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}},$$

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx = \frac{2 \tanh(\gamma_i h/2)}{\gamma_i h}.$$

Kolayca görülebilir ki, $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ baz fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi''(x) + a_i \varphi(x) &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \\ \varphi(x_{i-1}) &= 0, \quad \varphi(x_i) = 1, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi'' + a_i \varphi &= 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \\ \varphi(x_i) &= 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

(5.19) denkleminde kısmi integrasyon uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)u'(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i(x) = f_i - R_i \quad (5.22)$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

bağıntısını elde ederiz. Burada R_i kalan terimi

$$\begin{aligned} R_i &= \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x)\varphi_i(x) \\ &\quad + \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

biçimindedir. (5.22) bağıntısına her bir (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralıkları üzerinde (4.6) ve (4.7) kuadratur formülleri uygulanırsa ve ayrıca (5.20), (5.21) bağıntıları dikkate alınırsa, aşağıdaki kesin bağıntıyı buluruz.

$$\begin{aligned} &\chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)u'(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i(x)dx \\ &= -\varepsilon\chi_i^{-1} \left\{ 1 + a_i\varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x)(x - x_i)dx \right\} u_{\bar{x}x,i} \\ &\quad + a_i\chi_i^{-1} \left\{ h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)dx \right\} u_i \\ &= -\varepsilon\theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i, \end{aligned} \quad (5.24)$$

burada

$$\begin{aligned} \theta_i &= \chi_i^{-1} \left\{ 1 + a_i\varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)(x - x_i)dx \right\} \\ &\equiv \chi_i^{-1} \left\{ 1 - a_i\varepsilon^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)(x - x_i)dx \right\}. \end{aligned}$$

θ_i katsayısında basit işlemleri yaptıktan sonra,

$$\theta_i = \frac{\rho^2 a_i}{4\sinh^2(\sqrt{a_i}\rho/2)}, \quad \rho = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (5.25)$$

olarak bulunur. (5.24)'e geri döner ve (5.22)'yi dikkate alırsak, (1.1) denklemini için aşağıdaki şekilde bir fark şemasını yazabiliriz.

$$l u_i \equiv -\varepsilon\theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i = f_i - R_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (5.26)$$

(5.26)'de R_i kalan terimi ihmal edilirse, (1.1)-(1.2) problemi için aşağıdaki fark problemi elde edilir.

$$l y_i \equiv -\varepsilon\theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (5.27)$$

$$y_0 = A, y_N = B. \quad (5.28)$$

Burada θ_i katsayısı (5.25) formülüyle verilmiştir.

Not 5.1.

a) θ_i katsayısını aşağıdaki biçimde ispatlayabiliriz :

$$\theta_i = \chi_i \left\{ 1 + a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^1(x) (x - x_{i-1}) dx \right\} = \frac{a_i h^2}{4 \varepsilon \sinh^2 \frac{\sqrt{a_i h}}{2\sqrt{3}}}$$

İspat.

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^1(x) (x - x_{i-1}) dx &= \frac{1}{\sinh \gamma h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sinh \gamma (x - x_{i-1}) d(x - x_i) dx \\ &= \left(\frac{h}{\gamma_i} - \frac{1}{\gamma_i^2} \sinh \gamma_i h \right) \frac{1}{\sinh \gamma h} \\ &= \frac{h}{\gamma_i \sinh \gamma_i h} - \frac{1}{\gamma_i^2} \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^{-1} a_i h}{\gamma_i \sinh \gamma_i h} - \frac{a_i}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \\ &= 1 + \frac{a_i h}{\gamma_i \varepsilon \sinh \gamma_i h} - 1 \\ &= \frac{a_i h}{\gamma_i \varepsilon \sinh \gamma_i h} \end{aligned}$$

buradan,

$$\theta_i = \chi_i \frac{a_i h}{\gamma_i \varepsilon \sinh \gamma_i h} = \frac{h \gamma_i}{2 \tanh \frac{\gamma_i h}{2}} \frac{a_i h}{\gamma_i \varepsilon \sinh \gamma_i h} = \frac{a_i h^2}{2 \varepsilon \frac{\sin \frac{\gamma_i h}{2}}{ch \frac{\gamma_i h}{2}} 2 \sin \frac{\gamma_i h}{2} Ch \frac{\gamma_i h}{2}}$$

Böylece θ_i katsayısı aşağıdaki biçimde bulunur.

$$\theta_i = \frac{a_i h^2}{4 \varepsilon \sinh \frac{\gamma_i h}{2}}$$

b) Şimdi ise χ_i katsayısını ispatlayalım:

$$\chi_i = \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(1)}(x) dx \right)^{-1} = \frac{h \gamma_i}{2 \tanh \frac{\gamma_i h}{2}}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h} dx \\
&= \frac{1}{\sinh \gamma_i h} \left\{ \frac{1}{\gamma_i} Ch \gamma_i h - \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\gamma_i} + Ch \gamma_i h \gamma_i \right\} \\
&= \frac{1}{\sinh \gamma_i h} \left\{ \frac{2}{\gamma_i} (Ch \gamma_i h - 1) \right\} \\
&= \frac{2}{\sinh \gamma_i h} \left\{ \frac{Ch \gamma_i h - 1}{\sinh \gamma_i h} \right\} \\
&= \frac{2 \tanh \gamma_i \frac{h}{2}}{\gamma_i}
\end{aligned}$$

$$\frac{Ch \gamma_i h - 1}{\sinh \gamma_i h} = \tanh \gamma_i,$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \right)^{-1} = \left(h^{-1} \frac{2 \tanh \gamma_i \frac{h}{2}}{\gamma_i} \right)^{-1} = \frac{h \gamma_i}{2 \tanh \gamma_i \frac{h}{2}}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.3 Fark Şemasının Yakınsaklığı

$z = y - u$, $x \in (0, l)$ dersek, (5.27) ve (5.28)'ya göre, hata fonksiyonu aşağıdaki sınır değer problemini sağlar.

$$lz_i \equiv -\varepsilon z_{\bar{x}x,i} + a_i z_i = R_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (5.29)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0, \quad (5.30)$$

Burada R_i yaklaşım hatası (5.23) formülüyle belirlenmiştir.

Lemma 5.2. $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ şartı altında, R_i kalan terimi aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\|R\|_{\infty, \omega_h} \leq Ch. \quad (5.31)$$

İspat. (5.23) bağıntısını

$$R_i = R_{a,i} + R_{f,i} \quad (5.32)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$R_{a,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x) [a(x_i) - a(x)] dx, \quad (5.33)$$

ve

$$R_{f,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) [f(x) - f(x_i)] dx. \quad (5.34)$$

İlk önce $R_{a,i}$ yaklaşım hatasını gösterelim: (5.33)'deki fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygularsak,

$$\begin{aligned} |a(x_i) - a(x)| &= |a'(\xi_i)(x - x_i)| \leq \max_{[0,l]} |a'(x)| |x - x_i| \\ &\leq C_0 h \end{aligned} \quad (5.35)$$

buluruz. (5.35)'ü (5.33)'de yerine yazarsak,

$$|R_{a,i}| \leq C_0 C_1 h \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \leq C_0 C_1 h \leq Ch,$$

olur. Buradan

$$|R_{a,i}| \leq Ch, \quad (5.36)$$

elde edilir. Şimdi ise $R_{f,i}$ kalan terimi gösterelim: (5.34)'deki fonksiyona ortalama değer teoremi uygularsak

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_i)| &= |f'(\eta_i)(x - x_i)| \leq \max_{[0,l]} |f'(x)| |x - x_i|, \quad \eta_i \in (x, x_i) \\ &\leq C_1 h \end{aligned} \quad (5.37)$$

olur. (5.37)'i (5.35)'de yerine yazarsak,

$$|R_{f,i}| \leq C_1 h \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \leq Ch$$

bulunur. Buradan

$$|R_{f,i}| \leq Ch, \quad (5.38)$$

elde edilir.

Böylece (5.36) ve (5.38) eşitsizliklerini (5.32)'de yerine yazarsak,

$$\|R\|_{\infty, \omega_h} \leq \|R_a\|_{\infty, \omega_h} + \|R_f\|_{\infty, \omega_h} \leq Ch,$$

elde edilir. Bu da (5.31)'in ispatını tamamlar.

Lemma 5.3. $z_i = y_i - u_i$, $i = \overline{1, N}$ hata fonksiyonu (5.29)-(5.30) fark probleminin çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} \quad (5.39)$$

İspat:

Keyfi h ve ε için, lv_i fark operatörü için ayrık maksimum prensibinin doğruluğu kolayca gösterilebilir:

$$lv_i \geq 0, v_0 \geq 0, v_N \geq 0 \text{ ise, } v_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N-1}$$

olur. Maksimum prensibini (5.29)-(5.30) problemine uygularsak,

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} \quad (5.40)$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca R_i için (5.7) formülünden

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq Ch, \quad (5.41)$$

olduğu açıktır. Böylece (5.40) ve (5.41)'den teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi ise (5.3)-(5.4) probleminin yakınsaklık sonucunu ifade edebiliriz.

Teorem 5.1. $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ şartı altında (5.27)-(5.28) fark probleminin çözümü, $\bar{\omega}_h$ 'da (1.1)-(1.2) probleminin çözümüne ε 'a göre düzgün yakınsaktır. Hata için,

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch \quad (5.42)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. Önceki lemmalardan Teoremin ispatı çıkar.

5.4. Nümerik Sonuçlar

Örnek 5.1.

$$-\varepsilon u'' + u = -(\cos^2 \pi x + 2(\varepsilon \pi)^2 \cos 2\pi x), \quad 0 < x < l \quad (5.43)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (5.44)$$

problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümü

$$u_\varepsilon(x) = \frac{e^{\frac{-x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 + e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}}} - \cos^2 \pi x,$$

şeklinde verilmektedir.

Bu kesimde kovma algoritması uygulanır. Kovma algoritması için

$$y_0 = k_1 y_1 + \mu_1 (y_1 \neq 0)$$

sınır ifadesinden

$$\alpha_1 = 0 \text{ ve } \beta_1 = 0$$

alınmaktadır.

$$y_i = y_{i+1} \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (i = \overline{1, N-1})$$

rekürans bağıntısını $A_i \neq 0$ ve $B_i \neq 0$ olmak üzere fark problemlerinin

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$y_0 = y_N = 0$$

açık yazılışında yerine yazarak düzenliyelim. $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \alpha_1 = 0, \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_1 = 0, \quad i = \overline{1, N-1}$$

bağıntılarını elde ederiz.

$$y_i = y_{i+1} \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1, 0}$$

rekürans formülünden de bütün y_i değerlerini hesaplayabiliriz. Burada

$$y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2 \text{ ve } y_{N-1} = y_1 + \alpha_N y_N + \beta_N$$

bağıntılarından $1 - \alpha_N k_2 \neq 0$ olmak üzere

$$y_N = \frac{\mu_2 + k_2 \beta_N}{1 - \alpha_N k_2}$$

yazılır. $y_N = 0$ sınır şartından $\mu_2 = k_2 = 0$ alınır.

Örneğimizde

$$a(x) = 1, f(x) = -(\cos^2 \pi x + 2(\varepsilon \pi)^2 \cos 2\pi x)$$

alıyoruz. Buna göre üstel katsayılı fark şeması için

$$A = -\varepsilon \theta_i, \quad B = A, \quad C = a_i h^2 - 2\varepsilon \theta_i, \quad F = h^2 f_i,$$

elde edilir.

Mutlak hatalar için

$$e_\varepsilon^N = \max_i |u_\varepsilon(x_i) - y_i|,$$

alınmaktadır.

Çizelge 5.1. $N = 2^4$, $\varepsilon = 10^{-5}$ değerleri için kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve hata sonuçları

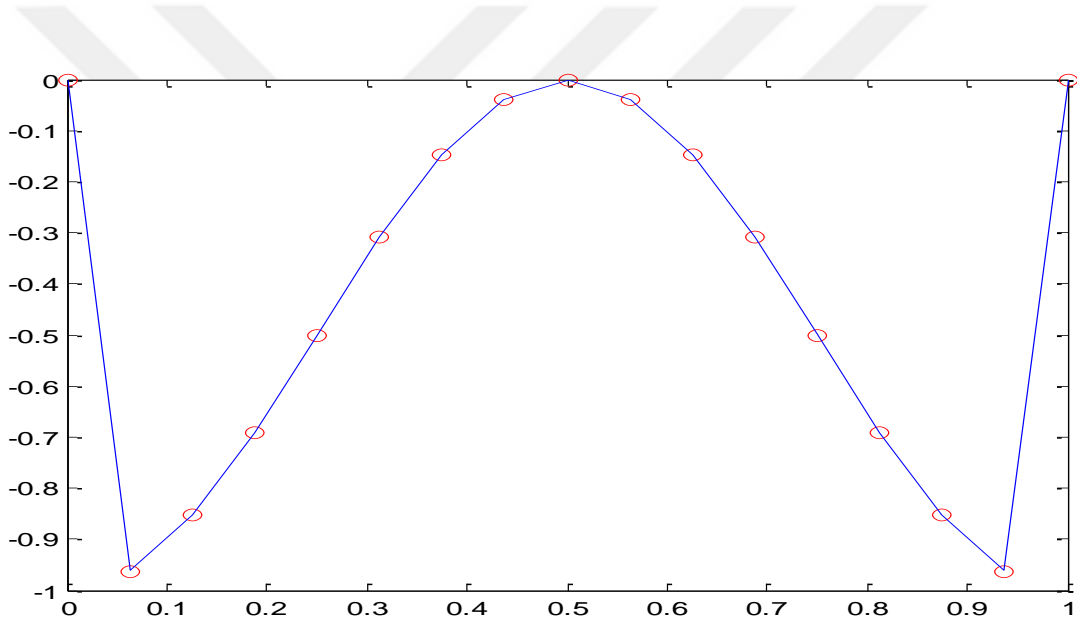
x	$y(x)$	y_i	e_ε^N
0.00000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.12500	-0.85355339	-0.85363922	0.00008583
0.18750	-0.69134172	-0.69141161	0.00006989
0.25000	-0.50000000	-0.50005109	0.00005109
⋮	⋮	⋮	⋮
0.93750	-0.96193976	-0.96201071	0.00007095
1.00000	0.00000000	0.00000000	0.00000000

Çizelge 5.2. $N = 2^5$, $\varepsilon = 10^{-6}$ değerleri için kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve hata sonuçları

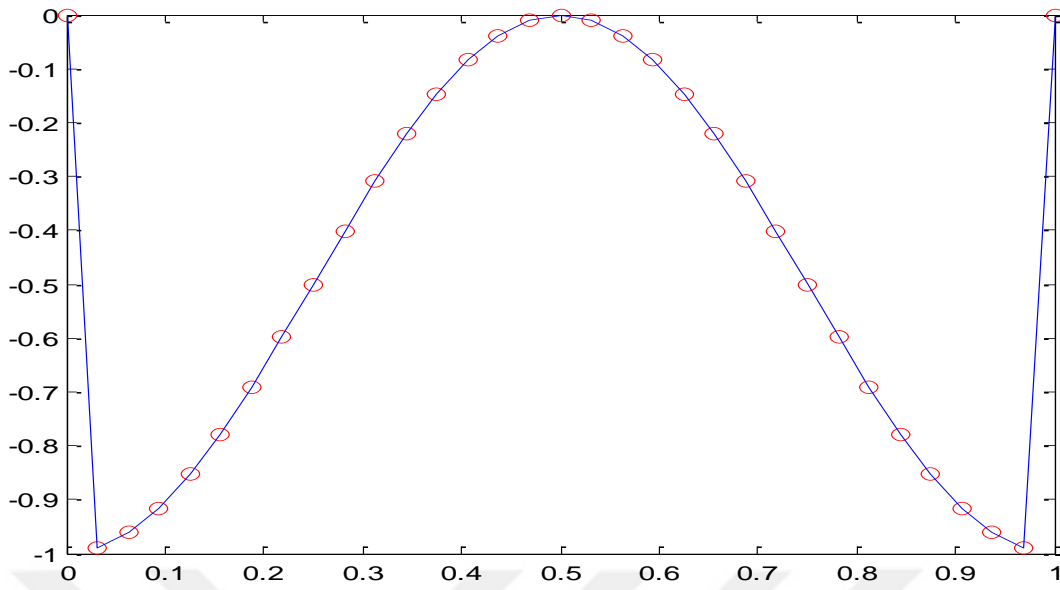
x	$y(x)$	y_i	e_ε^N
0.00000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.03125	-0.99039264	-0.99039288	0.00000024
0.06250	-0.96193977	-0.96194008	0.00000031
0.09375	-0.91573481	-0.91573510	0.00000030
⋮	⋮	⋮	⋮
0.96875	-0.99039264	-0.99039288	0.00000024
1.00000	0.00000000	0.00000000	0.00000000

Çizelge 5.3. $N = 2^{10}$, $\varepsilon = 10^{-8}$ değerleri için kesin çözüm, yaklaşık çözüm ve hata sonuçları

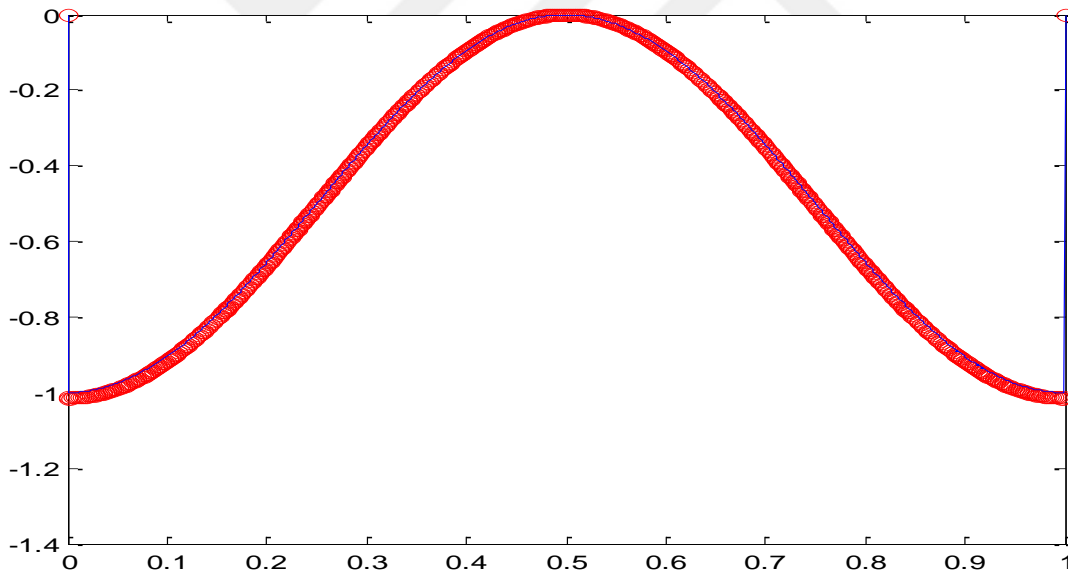
x	$y(x)$	y_i	e_ε^N
0.00000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00098	-0.99993320	-1.01149996	0.01156676
0.00195	-0.99996235	-0.01533225	0.01536990
0.00293	-0.99991529	-1.01529920	0.01538391
⋮	⋮	⋮	⋮
0.99902	-0.99993320	-1.01149996	0.01156675
1.00000	0.00000000	0.00000000	0.00000000



Şekil 5.1. $\varepsilon = 10^{-5}$ ve $N = 2^4$ değerleri için kesin çözüm ve yaklaşık çözümün grafik eğrisi.



Şekil 5.2. $\varepsilon = 10^{-5}$ ve $N = 2^5$ değerleri için kesin çözüm ve yaklaşık çözümün grafik eğrisi.



Şekil 5.3. $\varepsilon = 10^{-8}$ ve $N = 2^{10}$ değerleri için kesin çözüm ve yaklaşık çözümün grafik eğrisi.



6. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu çalışmada aşağıdaki integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi ele alınmaktadır.

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (6.1)$$

$$u(0) = A, \quad (6.2)$$

$$u(l) = \int_0^l g(x)u(x)dx + B. \quad (6.3)$$

Burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresi, A ve B verilen sabitler, $g(x)$ fonksiyonu $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyon, $a(x) \geq \alpha > 0$, ve $f(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında (6.1)-(6.3) probleminin bir tek çözümü vardır. $0 < \varepsilon \ll 1$ için $u(x)$ çözümü genelde $x = 0$ civarında bir sınır katına sahiptir.

6.1 Tam Çözümün Bazı Özellikleri

Burada (6.1)-(6.3) probleminin çözümünün bazı özelliklerini vereceğiz. Bu özellikler daha sonraki kısımlarda uygun nümerik çözümün analizinde gerekli olacaktır.

Lemma 6.1. $u(x)$ fonksiyonu, (6.1)-(6.3) probleminin çözümü olsun ve

$$\gamma = \int_0^l |g(x)|dx < 1,$$

olmak üzere. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\|u\|_\infty \leq C_0, \quad (6.4)$$

burada

$$C_0 = (1 - \gamma)^{-1}(|A| + |B| + \alpha^{-1}\|F\|_\infty)$$

ve

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6.5)$$

İspat. Burada maksimum prensibini kullanacağız. (6.1)'de L diferansiyel operator ve $v \in C^2[0, l]$ olsun. Eğer $0 < x < l$ için $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ ve $Lv \leq 0$ ise o zaman $0 \leq x \leq l$ için $v(x) \geq 0$ olur. Buna göre maksimum prensibini kullanırsak, (6.1)-(6.3) probleminden

$$|u(x)| \leq |A| + |u(l)| + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty}, \quad x \in [0, l] \quad (6.6)$$

eşitsizliğini alırız. Daha sonra (6.3) sınır şartından

$$|u(l)| \leq |B| + \int_0^l |g(x)| |u(x)| dx \quad (6.7)$$

yazabiliriz. (6.7) eşitsizliğini (6.6) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |A| + |B| + \int_0^l |g(x)| |u(x)| dx + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty} \\ &\leq |A| + |B| + \max_{[0, l]} |u(x)| \int_0^l |g(x)| dx + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty} \\ &\leq |A| + |B| + \|u\|_{\infty} \int_0^l |g(x)| dx + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(1 - \int_0^l |g(x)| dx\right) \|u\|_{\infty} \leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty}$$

ise

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty} &\leq \left(1 - \int_0^l |g(x)| dx\right)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty}) \\ &\leq (1 - \gamma)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|F\|_{\infty}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

elde ederiz. Bu da (6.4)'ün ispatını verir. Şimdi ise (6.5)'in ispatını yapalım: (6.1)'i aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) = F(x), \quad (6.9)$$

burada

$$F(x) = f(x) + b(x)u(x),$$

(6.9) denkleminde

$$u'(x) = u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^x a(\tau) d\tau} d\xi, \quad (6.10)$$

yazabiliriz. (6.10)'daki $u'(0)$ için bir değerlendirme almamız gerekir. (6.10) bağıntısını $[0, l]$ aralığında integral alırsak,

$$\begin{aligned} \int_0^l g(x)u(x) + B - A &= u'(0) \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \alpha(\tau) d\tau} dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x \alpha(\tau) d\tau} d\xi dx \end{aligned} \quad (6.11)$$

elde edilir. (6.11)'den $u'(0)$ 'ı çekersek,

$$u'(0) = \frac{B - A + \int_0^l g(x)u(x) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x \alpha(\tau) d\tau} d\xi dx}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \alpha(\tau) d\tau} dx} \quad (6.12)$$

buluruz. (6.12)'deki paydadaki integrali değerlendirelim:

$$\begin{aligned} \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \alpha(\tau) d\tau} dx &\geq \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \bar{\alpha} d\tau} dx \\ &= \int_0^l e^{-\frac{\bar{\alpha} x}{\varepsilon}} dx = -\frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \left(e^{-\frac{\bar{\alpha} l}{\varepsilon}} - 1 \right) = \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{\bar{\alpha} l}{\varepsilon}} \right) \\ &= \delta \varepsilon \quad \left(\delta \neq \delta \varepsilon > 0, \quad \bar{\alpha} = \max_{[0, l]} |\alpha(x)| \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

(6.12)'deki pay kısmındaki integrale ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x \alpha(\tau) d\tau} d\xi dx \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \left[\int_0^x |F(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x \alpha(\tau) d\tau} d\xi \right] dx \\ &\leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x \alpha(\tau) d\tau} d\xi dx, \quad (\alpha(x) \geq \alpha > 0) \\ &\leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-\xi)} d\xi dx \\ &\leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^l \left[1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right] dx \\ &= \alpha^{-1} \|F\|_\infty \int_0^l \left[1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right] dx \\ &\leq \alpha^{-2} \varepsilon \|F\|_\infty \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}} \right) \\ &\leq \|F\|_\infty C_1 \leq C \end{aligned} \quad (6.14)$$

ve

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l g(x)u(x)dx \right| &\leq \int_0^l |g(x)||u(x)|dx \\
&\leq \max_{[0,l]} |u(x)| \int_0^l |g(x)| dx \\
&\leq \|u\|_\infty \int_0^l |g(x)| dx \\
&\leq C_2,
\end{aligned} \tag{6.15}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(6.13), (6.14) ve (6.15) değerlendirmelerini (6.12) de yerine yazarsak,

$$|u'(0)| \leq \frac{|A| + |B| + C_2 + \|F\|_\infty C_1}{\delta \varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

eşitsizliği bulunur.

(6.10) eşitliğin mutlak değerini alırsak,

$$\begin{aligned}
|u'(x)| &\leq |u'(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x |F(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \|F\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a d\tau} d\xi \\
&= \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \|F\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-\xi)} d\xi \\
&= \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) \varepsilon \alpha^{-1} \\
&= \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C
\end{aligned} \tag{6.16}$$

elde edilir. (6.16) eşitsizliği (6.5) eşitsizliğini sağlar.

6.2 Fark Şemasının Kurulması

Bu kısımda (6.1)-(6.3) sürekli problemi için sonlu fark şemasını kuracağız. Burada $[0, l]$ aralığında aşağıdaki gibi bir ω_h düzgün şebekesinin tanımını veriyoruz.

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad h = \frac{l}{N} \right\}$$

ve

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0 \text{ ve } x = 1\}$$

(6.1) denklemi için fark metodunun yaklaşımı aşağıdaki özdeşlikle başlayacağız:

$$h^{-1} \int_0^l Lu\Psi_i(x)dx = h^{-1} \int_0^l f(x)\Psi_i(x)dx, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (6.17)$$

Burada $\Psi_i(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanan baz fonksiyonlarıdır.

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \Psi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i, \\ \Psi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases}$$

$\Psi_i^{(1)}(x)$ ve $\Psi_i^{(2)}(x)$ sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir.

$$\varepsilon\Psi''(x) - a_i\Psi'(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

$$\Psi(x_{i-1}) = 0, \quad \Psi(x_i) = 1,$$

$$\varepsilon\Psi''(x) - a_i\Psi'(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1},$$

$$\Psi(x_i) = 1, \quad \Psi(x_{i+1}) = 0.$$

$\Psi_i^{(1)}(x)$ ve $\Psi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları

$$\Psi_i^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{a_i(x-x_{i-1})}{\varepsilon}} - 1}{e^{-\frac{a_i h}{\varepsilon}} - 1}, \quad \Psi_i^{(2)}(x) = \frac{1 - e^{-\frac{a_i(x_{i+1}-x)}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{a_i h}{\varepsilon}}}$$

gibi açık bir şekilde ifade edilebilir. Ayrıca,

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Psi_i(x)dx = 1$$

olduğu görülür.

(6.17) bağıntısında Lu yerine denklemi yazarsak,

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x)]\Psi_i(x)dx$$

$$= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \Psi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (6.18)$$

olur. (6.18)'deki ilk ifadeye kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned} & h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -\varepsilon u'(x) \Psi_i'(x) dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a_i u'(x) dx - h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x) u(x) dx \Psi_i(x) dx \\ & \quad = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \Psi_i(x) dx, \\ & h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -\varepsilon u'(x) \Psi_i'(x) dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a_i u'(x) \Psi_i(x) dx - b_i u_i \\ & \quad = f_i - R_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

elde edilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \quad (6.20)$$

biçimindedir. $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ ve $R_i^{(3)}$ kalan terimleri sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır:

$$R_i^{(1)} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u'(x) \Psi_i(x) dx, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x)u(x) - b(x_i)u(x_i)] \Psi_i(x) dx, \\ &\equiv h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \Psi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} (b(x)u(x)) K_{0,i}^*(x, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$K_{0,i}^*(x, \xi) = T_0(x - \xi) - T_0(x_i - \xi), \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

$$T(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \geq 0 \\ 0 & \lambda < 0. \end{cases}$$

$$R_i^{(3)} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \Psi_i(x) dx. \quad (6.23)$$

(6.19) daki integrallerin her bir (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) alt aralıklarına Tanım 4.9'da ki kuadratür formları uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u'(x) \Psi_i^{(1)'}(x) + a_i u'(x) \Psi_i^{(1)}(x)] dx \\
& \quad + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varepsilon u'(x) \Psi_i^{(2)'}(x) + a_i u'(x) \Psi_i^{(2)}(x)] dx \\
& \quad = -\varepsilon h^{-1} u_{\bar{x},i} + a_i u_{\bar{x},i} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_i^{(1)}(x) \\
& \quad \quad + a_i u_{x,i} h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi_i^{(2)}(x) dx + \varepsilon h^{-1} u_{x,i} \\
& \quad = \varepsilon \frac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h} + a_i u_{\bar{x},i} \sigma_i^{(1)} + a_i u_{x,i} \sigma_i^{(2)} \\
& \quad = \varepsilon u_{\bar{x}x,i} + a_i u_{\bar{x},i} \sigma_i^{(1)} + a_i u_{x,i} \sigma_i^{(2)} \tag{6.24}
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\sigma_i^{(1)} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_i^{(1)}(x) dx = \frac{\varepsilon}{a_i h} + \frac{1}{1 - e^{-\frac{a_i h}{\varepsilon}}} \\
\sigma_i^{(2)} &= h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_i^{(2)}(x) dx = \frac{1}{e^{\frac{a_i h}{\varepsilon}} - 1} - \frac{\varepsilon}{a_i h}
\end{aligned}$$

şeklindedir. (6.24)'te

$$\begin{aligned}
u_{\bar{x},i} - u_{\bar{x},i} &= \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i}, \\
u_{\bar{x},i} - u_{x,i} &= \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i}
\end{aligned}$$

bağıntıları kullanırsak,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon u_{\bar{x}x,i} + a_i \sigma_i^{(1)} u_{\bar{x},i} - a_i \sigma_i^{(1)} \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} - a_i \sigma_i^{(1)} u_{\bar{x},i} + a_i \sigma_i^{(2)} \frac{h}{2} u_{\bar{x}x,i} \\
& \quad = \varepsilon \left\{ 1 + \frac{a_i h}{\varepsilon} (\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}) \right\} u_{\bar{x}x,i} + a_i (\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}) u_{\bar{x},i} \\
& \quad = \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_{\bar{x},i} \tag{6.25}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)} = 1.$$

(6.25)'i (6.19) bağıntısında yerine yazarsak, (6.1) denklemini için

$$l u_i \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_{\bar{x},i} - b_i u_i = f_i - R_i, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{6.26}$$

fark yaklaşımı bulunur. Burada θ_i katsayısı

$$\theta_i = \left\{ 1 + \frac{a_i h}{\varepsilon} (\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}) \right\} = \gamma_i \cot(h\gamma_i), \quad \gamma_i = \frac{a_i h}{2\varepsilon} \quad (6.27)$$

biçiminde hesaplanmaktadır.

(6.2) sınır şartına uygun bir yaklaşım elde etmek için sağ taraflı dikdörtgen kuralını kullanıyoruz.

$$u_N = h \sum_{i=1}^N g_i u_i - r + B. \quad (6.28)$$

Burada r kalan terimi,

$$r = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g(x)u(x)) dx \quad (6.29)$$

biçimindedir.

(6.26) ve (6.28) deki R_i ve r kalan terimlerini ihmal edersek, (6.1)-(6.3) sürekli problemi için aşağıdaki gibi fark şemasını elde ediyoruz.

$$ly_i \equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_{\bar{x},i} - b_i y_i = f_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (6.30)$$

$$y_0 = A \quad (6.31)$$

$$y_N - h \sum_{i=1}^N g_i y_i = B. \quad (6.32)$$

Burada θ_i katsayısı (6.27) bağıntısıyla verilmektedir.

6.3 Düzgün Yakınsaklık ve Hata Değerlendirmeleri

Bu kısımda metodumuzun yakınsaklığını gösteriyoruz. $z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq N$ hata fonksiyonu aşağıdaki diskrete problemin çözümüdür.

$$lz_i \equiv \varepsilon \theta_i z_{\bar{x}x,i} + a_i z_{\bar{x},i} - b_i z_i = R_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (6.33)$$

$$z_0 = 0 \quad (6.34)$$

$$l_0 z \equiv z_N - h \sum_{i=1}^N g_i z_i = r. \quad (6.35)$$

Burada R_i ve r kalan terimleri sırasıyla (6.20) ve (6.29) bağıntılarıyla verilmiştir.

Lemma 6.2. Eğer $a(x)$, $b(x)$ ve $f(x) \in C^1[0, l]$ ise o zaman R_i ve r kalan terimleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\|R\|_1 \leq Ch, \quad (6.36)$$

$$|r| \leq Ch. \quad (6.37)$$

İspat. (6.36) eşitsizliğini ispatlayalım: İlk önce (6.21) özdeşliğini ele alalım. (6.21) deki fonksiyona ortalama değer problemi uygularsak,

$$\begin{aligned} |a(x) - a(x_i)| &= |a'(\xi)||x - x_i| \\ &\leq \max|a'(x)||x - x_i| \\ &\leq C_0 h \end{aligned} \quad (6.38)$$

bulunur. (6.38)'i, $|\Psi_i(x)| \leq 1$ 'i ve (6.21)'de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} \|R^{(1)}\|_1 &\leq C_0 h \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx \\ &\leq C_0 h \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} C_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \\ &\leq C_0 C_1 h \int_0^l \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \\ &\leq C_0 C_1 h \left(l + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx\right) \\ &\leq C_0 C_1 h \left(l + \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}}\right)\right) \\ &\leq Ch, \end{aligned} \quad (6.39)$$

elde edilir.

$b \in C^1[0, l]$ ve $|\Psi_i(x)| \leq 1$ 'i (6.22) de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{d}{dx} (b(x)u(x)) \right| d\xi \\ &\leq C \left(h + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(\xi)| d\xi \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikle Lemma 6.1'i gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned} \|R^{(2)}\|_1 &\leq Ch \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(\xi)| d\xi\right) \\ &\leq Ch \left(1 + \int_0^l |u'(\xi)| d\xi\right) \\ &\leq Ch \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ch(1 + \alpha^{-1}(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}})) \\
&\leq Ch
\end{aligned} \tag{6.40}$$

bulunur. Son olarak (6.23)'ün ispatını yapalım. (6.23)'teki fonksiyona ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_i)| &= |f'(\xi)||x - x_i|, \quad x, \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\
&\leq Ch
\end{aligned}$$

olur. (6.23)'te $|\Psi_i(x)| \leq 1$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
\|R^{(3)}\|_1 &\leq Ch(h^{-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |\Psi_i(x)| dx) \\
&\leq Ch,
\end{aligned} \tag{6.41}$$

elde edilir. Böylece (6.39), (6.40) ve (6.41) eşitsizliklerini (6.20) de dikkate alırsak, (6.36) eşitsizliği ortaya çıkar.

Şimdi ise (6.37)'yi ispatlayalım: (6.29)'un açık ifadesinden ve Lemma 6.1'i de göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
|r| &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - x_i| \left| \frac{d}{dx} (g(x)u(x)) \right| dx \\
&\leq Ch \int_0^l (1 + |u'(x)|) dx \\
&\leq Ch(l + \int_0^l |u'(x)| dx) \\
&\leq Ch(l + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx) \\
&\leq Ch(l + \alpha^{-1}(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}})) \\
&\leq Ch,
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece lemma 6.2'nin ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 6.3. $z = y - u$, $x \in \bar{\omega}_h$ (6.33)-(6.35) diskret probleminin çözümü olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq C(\|R\|_{\infty} + |r|). \tag{6.42}$$

İspat. Burada diskret maksimum prensibini kullanacağız. l ve l_0 (6.33)-(6.35)'te sonlu fark operatörleri olsun. v , $\bar{\omega}_h$ üzerinde tanımlanan herhangi bir şebeke fonksiyonu için

$v_0 \geq 0$, $l_0 \geq 0$ ve $i = \overline{1, N-1}$ için $lv_i \leq 0$ ise, o zaman tüm $i = \overline{1, N-1}$ için $v_i \geq 0$ olur. Maksimum prensibine göre

$$\|z\|_\infty \leq \alpha^{-1}\|R\|_\infty + |z_N| \quad (6.43)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Daha sonra (6.35) sınır şartından

$$\|z_N\| \leq h \sum_{i=1}^N |g_i| |z_i| + |r| \quad (6.44)$$

alabiliriz. (6.44) eşitsizliğini (6.43)'te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \|z\|_\infty &\leq \alpha^{-1}\|R\|_\infty + |r| + h \sum_{i=1}^N |g_i| |z_i| \\ &\leq \alpha^{-1}\|R\|_\infty + |r| + \max_{1 \leq i \leq N} |z_i| h \sum_{i=1}^N |g_i| \\ &\leq \alpha^{-1}\|R\|_\infty + |r| + \|z\|_\infty h \sum_{i=1}^N |g_i| \end{aligned} \quad (6.45)$$

elde edilir. (6.45) eşitsizliğinden

$$\|z\|_\infty \leq (1 - \bar{\gamma})^{-1}(\alpha^{-1}\|R\|_\infty + |r|),$$

bulunur. Böylece $\bar{\gamma} < 1$ olduğundan, (6.42) değerlendirmesi çıkar.

Böylece (6.1)-(6.3) probleminin yakınsaklık sonucunu ifade edebiliriz.

Teorem 6.1. u , (6.1)-(6.3) probleminin çözümü ve y de (6.30)-(6.32) fark probleminin çözümü olsun. O zaman Lemma 6.1 ve Lemma 6.2 şartları altında, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq Ch.$$

İspat. Önceki lemmalardan Teoremin ispatı çıkar.

6.4. Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda (6.1)-(6.3) sürekli problemi için düzgün şebeke üzerinde kurulan (6.30)-(6.32) fark şeması için nümerik sonuçlar verilmektedir.

Örnek 6.1. Aşağıdaki test problemini ele alıyoruz.

$$\varepsilon u''(x) + (2 + \sin x)u'(x) - (1 + x)u(x) = \tanh x \quad x \in (0,1) \quad (6.46)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-x} u(x) dx + 1. \quad (6.47)$$

Test problemimizin çözümü bilinmemektedir. Bu yüzden hesaplanan çözümlerimizde hataları değerlendirmek ve yakınsaklık oranlarını hesaplamak için çift şebeke prensibini kullanıyoruz. Yani hesaplanan çözümler ikiye bölünen bir şebeke üzerindeki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Roos ve ark., 2008; Lins, 2003; Farrell ve ark., 2000; Cakir ve Amiraliev, 2007). Bu yolla elde edilen hata değerlendirmeleri,

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}|$$

ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2} : i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln\left(\frac{e_\varepsilon^N}{e_\varepsilon^{2N}}\right)}{\ln 2}$$

ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 6.1. ε ve N 'nin farklı değerleri için ω_N şebekesinde hesaplanan e_ε^N hataları ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.056424	0.030112	0.001555	0.007963	0.004024	0.002068
	0.84	0.89	0.95	0.97	0.98	
2^{-4}	0.058452	0.030321	0.001554	0.007951	0.004016	0.002035
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-6}	0.059015	0.030213	0.001550	0.007864	0.004013	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-8}	0.059015	0.030124	0.001551	0.007834	0.004008	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-10}	0.059013	0.030985	0.001549	0.007829	0.004005	0.001995
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-12}	0.059013	0.030988	0.001549	0.007827	0.004005	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-14}	0.059014	0.030986	0.001550	0.007827	0.004006	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-16}	0.059014	0.030987	0.001550	0.007828	0.004006	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
e^N	0.059024	0.030988	0.001555	0.007963	0.004024	0.002035
p^N	0.85	0.89	0.95	0.97	0.99	

Örnek 6.2.

$$\varepsilon u''(x) + 3u'(x) - u(x) = e^{\frac{99\varepsilon^2}{x}} + e^{\frac{99\varepsilon}{x}} - e^{99\varepsilon} - 1 - e^{\varepsilon^2}, \quad x \in (0,1) \quad (6.48)$$

$$u(0) = 1 - \varepsilon, \quad (6.49)$$

$$u(1) = \int_0^1 u(x)dx + B = 1 \quad (6.50)$$

problemini ele alalım. Burada

$$B = \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left(1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon}}\right).$$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = 1 - (1 - x)\varepsilon e^{\frac{-x}{\varepsilon}}$$

şeklinde verilmektedir.

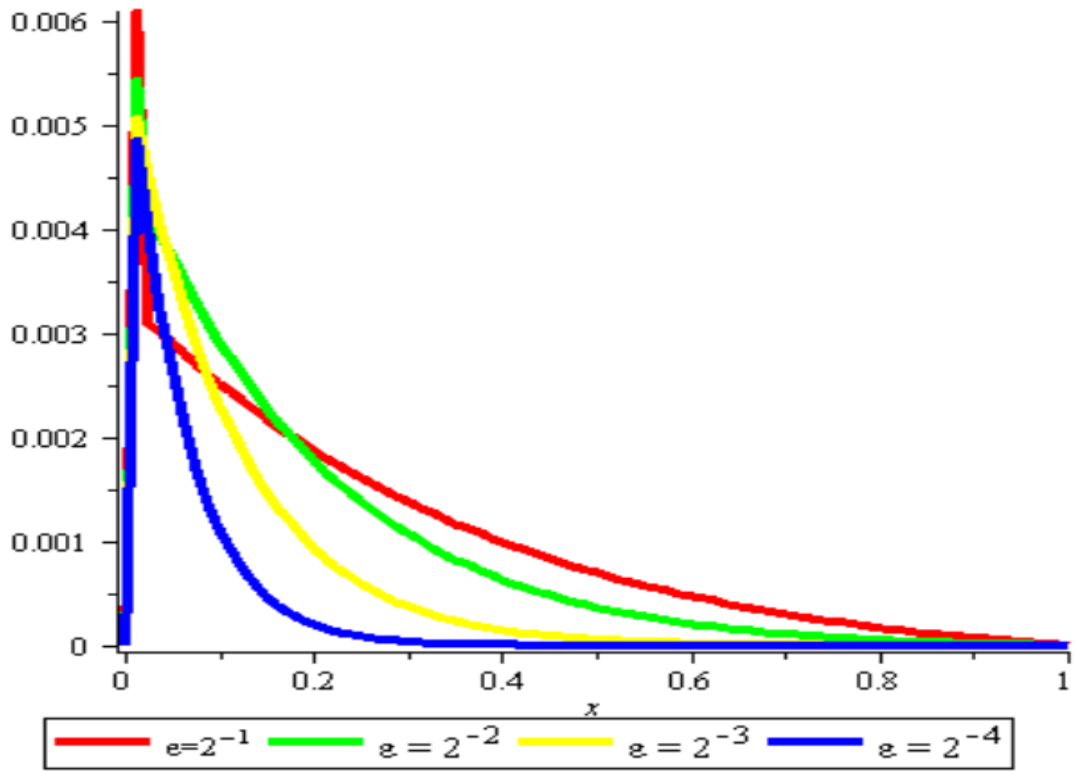
Hesaplanan mutlak hatalar için

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} |u_\varepsilon(x_i) - y_i|,$$

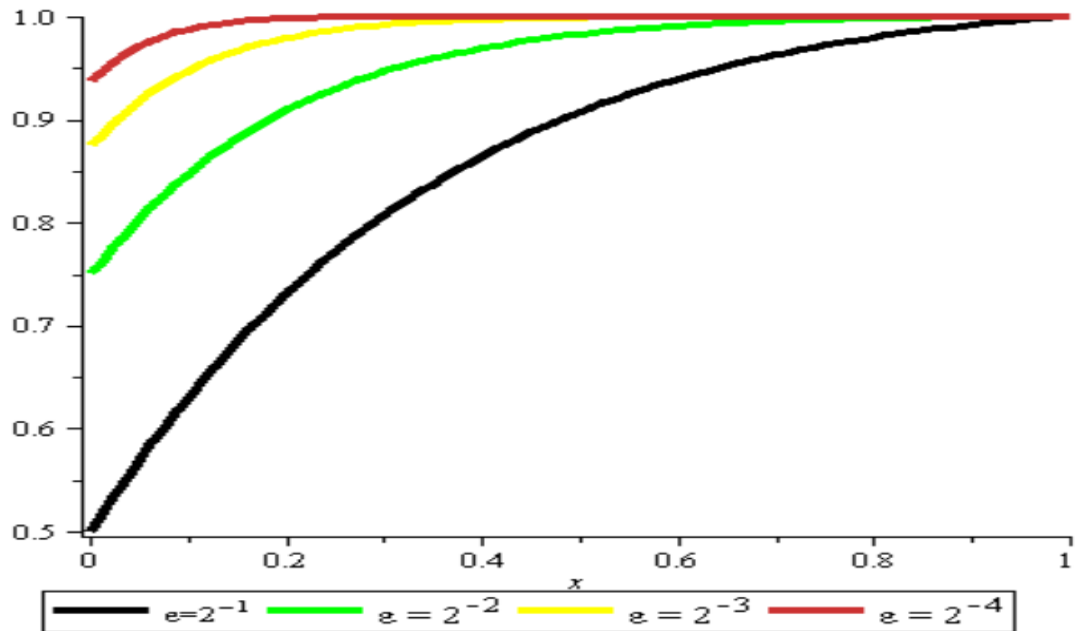
alınmaktadır.

Çizelge 6.2. ε ve N 'nin farklı değerleri için ω_N şebekesinde hesaplanan e_ε^N hataları ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	$N = 160$	$N = 320$	$N = 640$
2^{-1}	0.049991	0.025071	0.012110	0.006099	0.003023	0.001508	0.00753
	0.99	1.04	0.98	1.01	1.00	1.00	
2^{-2}	0.038888	0.022627	0.011123	0.005444	0.002795	0.001364	0.000645
	0.78	1.02	1.03	0.96	1.03	1.08	
2^{-3}	0.035512	0.018208	0.010406	0.005072	0.002519	0.001279	0.000623
	0.96	0.80	1.03	1.00	0.97	1.03	
2^{-4}	0.032084	0.016532	0.008766	0.004863	0.002408	0.001256	0.000648
	0.95	0.91	0.85	1.01	0.93	0.95	
2^{-5}	0.030749	0.016127	0.008209	0.004298	0.002301	0.001172	0.000545
	0.93	0.97	0.93	0.90	0.97	1.10	
2^{-6}	0.029127	0.016420	0.008085	0.004090	0.002128	0.001195	0.000578
	0.82	1.02	0.98	0.94	0.83	1.04	



Şekil 6.1. Hata Eğrileri (N=80 için 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^{-4} için (sırasıyla kırmızı, yeşil, sarı, mavi)).



Şekil 6.2. Yaklaşık çözüm eğrileri (N=80 için 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^{-4} için (sırasıyla siyah, yeşil, sarı, kırmızı)).



7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada iki tip problem ele alındı. Bunlardan birincisi, birinci tip sınır şartlı reaksiyon-difüzyon tipindeki singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi, diğeri ise integral sınır şartlı konveksiyon-difüzyon tipindeki singüler pertürbe özellikli sınır değer problemidir. Bu tür problemlerin çözümü için düzgün şebekede sonlu fark şemalarını kullanarak düzgün yakınsak bir nümerik yaklaşım verildi.

Singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler, yüksek türevler karşısında küçük pozitif parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümü çok değişkenli bir karakter gösterir. Yani, ince geçiş katlarında çözüm hızlı ve diğey yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Böylece singüler pertürbe özellikli problemlerin işleyişlerinde ciddi zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu özellikler nümerik çözümde de kendini göstermektedir. Dolayısıyla, klasik nümerik yöntemler kararsızlıkları ya da ıraksak olmaları nedeniyle imkansız olmaktadır. Bu nedenle, ε 'a göre düzgün yakınsaklık özelliğine sahip nümerik metotların kurulması önem arz etmektedir.

Çalışılan her iki problem için ilk olarak, nümerik çözüm için metodu vermeden önce singüler pertürbe özellikli problemlerinin çözümü ve türevleri için bazı değerlendirmeler verildi. Bu değerlendirmeler nümerik metodun kurulmasında kullanılmaktadır. Daha sonra düzgün şebekede fark şeması kuruldu. Bu fark şemaları üstel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanılarak kurulmuştur. Nümerik yaklaşımın ayırık maksimum normda singüler pertürbasyon parametresinden bağımsız birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu ispatlandı. Ayrıca nümerik metodun etkinliğini göstermek için bazı örnekler verildi. ε pertürbasyon parametreleri ve N 'nin farklı değerleri için maksimum noktasal hatalar ve yakınsaklık oranları tablolarda verilmiştir.

İntegral sınır şartları içeren sınır değer problemleri pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (Borovykh, 2002; Jankowski, 2002; Amiraliev ve ark., 2007; Cakir ve ark., 2007; Cen ve ark., 2007; Samoilenko ve ark., 2010; Das ve ark., 2013; Henderson ve ark., 2016). Bu çalışmalar, nümerik çözüm için önce problemin çözümü ve türevleri

için değerlendirmeler yapılmış, fark şeması kurularak nümerik yaklaşımları verilmiştir. Bu değerlendirmeler yaptığımız çalışmalar ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak, tezin nümerik sonuçlar bölümünde sonlu fark metodu kullanılarak, düzgün yakınsak bir nümerik yaklaşım verildi. Hesaplanan nümerik sonuçlar teorik değerlendirmeleri desteklediği görülmüştür.

Burada ortaya konulan düzgün yakınsaklık analizi için temel yaklaşımlar; integral ve lokal olmayan sınır şartlı lineer olmayan diferansiyel problemlerin yanısıra daha karmaşık lineer diferansiyel problemlerin çalışması için de kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- Amiraliyev, G.M., Cakir, M., 2002. Numerical solution of singularly perturbed problem with nonlocal condition, *Applied Mathematics and Mechanics. English Edition*, **23** (7): 755-764.
- Amiraliyev, G. M., Amiraliyeva, I. G., Kudu, M., 2007. A numerical treatment for singularly perturbed differential equations with integral boundary condition, *Applied Mathematics and Computation*, **185**: 574-582.
- Amirali, G. M., Amirali, I., 2018. *Nümerik Analiz*, Teori ve Uygulamalarla, Seçkin Yayınevi, Ankara.
- Byszewski, L., 1991. Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **162** (2): 494-505.
- Borovykh, N., 2002. Stability in numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Applied Numerical Mathematics*, **42** (1-3): 17-27.
- Cakir, M., 2016. A numerical study on the difference solution of singularly perturbed semilinear problem with integral boundary condition, *Mathematical Modelling and Analysis*, **21** (5): 644-658.
- Cakir, M., Amiraliyev, G. M., 2005. A finite difference method for the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition, *Applied Mathematics and Computation*, **160** (2): 539-549.
- Cakir, M., Amiraliyev, G. M., 2007. Numerical solutions of a singularly perturbed three-point boundary value problem, *Intenational Journal of Computer Mathematics*, **84**: 1465-1481.
- Cannon, J. R., 1963. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, **21** (2): 155-160.
- Cen, Z., Cai, X., 2007. A second-order upwind difference scheme for a singularly perturbed problem with integral boundary condition in natural network, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, 175-181.
- Das, P., Natesan, S., 2013. Richardson extrapolation method for singularly perturbed convection-diffusion problems on adaptively generated mesh, *CMES*, **90** (6): 463-485.
- Das, P., Natesan, S., 2013. Numerical solution of a system of singularly perturbed convection diffusion boundary value problems using mesh equidistribution technique, *AJMAA*, **10** (1): 1-17.
- Doolan, E. R., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A., 1980. *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*. Boole Press, Duplin.

- Farrel, P. A., Hegarty A. F., Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I., 2000. ***Robust Computational Techniques for Boundary Layers***. Chapman Hall/CRC, New York.
- Ionkin, I. N., 1977. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Dif. Eqs.*, **13** (2): 294-304.
- Henderson, J., Luca, R., Tudorache, A., 2016. Positive solutions for a system of second-order differential equations with integral boundary conditions. *IJAPM*, **6** (3): 138-149.
- Jankowski, T., 2004. Existence of solutions of differential equations with nonlinear multipoint boundary conditions. *Computers Mathematics with Applications*, **47** (6-7): 1095-1103.
- Jankowski, T., 2002. Application of the numerical-analytical method to systems of differential equations with a parameter. *Ukrain. Math. J.*, **54** (4): 671-683.
- Kevorkian, J., and Cole, J. D., 1981. ***Perturbation Methods in Applied Mathematics***. Springer, New York.
- Kudu, M., 2018. A parameter uniform difference scheme for the parameterized singularly perturbed problem with integral boundary condition, *Advances in Difference Equations*, <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1620-0>.
- Kudu, M., Amirali, I., Amiraliyev, G. M., 2018. Uniform numerical approximation for parameter dependent singularly perturbed problem with integral boundary condition. *Miskolc Mathematical Notes*, **19** (1): 337-353.
- Linss, T., 2003. Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192** (9-10):1061-1105.
- Miller, J. J. H., O’Riordan, E., Shishkin, G. I., 2012. ***Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems***. Rev. Ed. World Scientific, Singapore.
- Nayfeh, A. H., 1985. ***Perturbation Methods***. Wiley, New York.
- Nayfeh, A. H., 1993. ***Introduction to Perturbation Techniques***. Wiley, New York.
- Nicoud, F., Schönfeld, T., 2002. Integral boundary conditions for unsteady biomedical CFD applications, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **40** (3-4): 457-465.
- O’Malley. R. E., 1991. ***Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations***. Springer Verlag, New York.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L., 2008. ***Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations***, 2nd ed. Springer Verlag, Berlin.
- Samoilenko, A. M., Martynyuk, S. V., 2010. Justification of the numerical-analytic method of successive approximations for problems with integral boundary conditions, *Ukrain. Math. Zh. SSR*, **43**: 1231-1239.
- Samarskii, A. A., 2001. ***The Theory of Difference Schemes***. Moscow M.V. Lomonosov State University, Russia.
- Sekar, E., Tamilselvan, A., 2018. Singularly perturbed delay differential equations of convection- diffusion type with integral boundary condition, *J. Appl. Math. Comput.*, DOI: 10.1007/s12190-018-1198-4.

Smith, D. R., 1985. *Singularly Perturbation Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

Wasow, W., 1965. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Pure and Applied Mathematics 14, Interscience, New York.



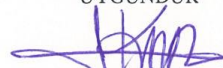




ÖZ GEÇMİŞ

1995 yılında Van'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Van'da tamamladı. 2012 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2016 yılında Matematik Bölümü birincilikle bitirdikten sonra aynı yıl Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve devam etmektedir. Bu zaman zarfında bir lisede Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.



T.C VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU	
Tarih: 27/ 06 /2019	
<p>Tez Başlığı / Konusu: İntegral Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Sınır Değer Probleminin Çözümü için Düzgün Yakınsak Nümerik Metot.</p> <p>Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 71 sayfalık kısmına ilişkin, 27/ 06 /2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin benzerlik oranı % 14 (ondört) dir.</p> <p>Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Kabul ve onay sayfası hariç, - Teşekkür hariç, - İçindekiler hariç, - Simge ve kısaltmalar hariç, - Gereç ve yöntemler hariç, - Kaynakça hariç, - Alıntılar hariç, - Tezden çıkan yayınlar hariç, - 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words) <p>Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.</p> <p>Gereğini bilgilerinize arz ederim.</p>	
 27/ 06 /2019	
<p>Adı Soyadı: Zelal TEMEL Öğrenci No: 169102038 Anabilim Dalı: Matematik Anabilim Dalı Programı: Uygulamalı Matematik Statüsü: Y. Lisans <input checked="" type="checkbox"/> Doktora <input type="checkbox"/></p>	
<p>DANIŞMAN ONAYI UYGUNDUR</p>  Prof. Dr. Musa Çakır	<p>ENSTİTÜ ONAYI UYGUNDUR</p>  Doç. Dr. Serhat KARACA Enstitü Müdür Yrd.