T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN ÇARPANLARI İÇİN BAZI ERGODİK TEOREMLER

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Hayri TOPAL
DANIŞMAN: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN ÇARPANLARI İÇİN BAZI ERGODİK TEOREMLER

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Hayri TOPAL

Bu çalışma Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Başkanlığı tarafından FDK-2018-7349 No'lu proje olarak desteklenmiştir.

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV danışmanlığında, Hayri TOPAL tarafından sunulan "**DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN ÇARPANLARI İÇİN BAZI ERGODİK TEOREMLER**" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 19/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV İmza:

Üye: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV İmza:

Üye: Prof. Dr. Tunay BİLGİN İmza:

Üye: Prof. Dr. Cesim TEMEL İmza:

Üye: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/07/2019 tarih ve 2019/40-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

....

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hayri TOPAL

ÖZET

DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN ÇARPANLARI İÇİN BAZI ERGODİK TEOREMLER

TOPAL, Hayri
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV
Temmuz 2019, 77 sayfa

Bu tez çalışması değişmeli Banach cebiri üzerinde tanımlanan çarpanların bazı ergodik özellikleri ile ilgilidir ve sekiz bölümden oluşmaktadır: Giriş, Temel Tanım-Teoremler, Banach cebirleri ve Çarpanlar teorisi ile ilgili temel kavramlar, elde edilen Bulgular ve Tartışma-Sonuç. Tezin ilk bölümünde, konunun literatürdeki önemi ve tarihsel gelişiminden söz edilmiştir. Tezin sonraki üç bölümü Banach cebiri ve çarpan teorisi konuları üzerine bazı önemli gerçeklerle ilgilidir. Tezin bu bölümlerinde tezin diğer bölümlerinde kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edildi. Bu tezin ana konusunu oluşturan bulgular üç bölüme ayrılmıştır.

Bu tezde ilk olarak, Banach cebirlerinde kuvvet sınırlı her çarpanın izometrik bir çarpana genişletilebileceği ispat edildi. İzometrik çarpanlar ile ilgili elde edilen bu sonuçlar kullanılarak, değişmeli bir Banach cebirinde çarpanların iterasyonlarının yakınsaklığı üzerine gerekli ve yeterli koşullar verildi. İkinci olarak Katznelson-Tzafriri teoreminin daha genel versiyonunun yapısı üzerinde durduk. Banach cebirlerinde çarpanlar için de benzer sonuçlar elde edildi. Ve son olarak, lokal kompakt Abel gruplarında ölçümlerin ergodik özellikleri üzerine Choquet-Deny tipli teoremler tartışıldı ve değişmeli Banach cebirlerinin çarpanları bağlamında Choquet-Deny teoremi genelleştirildi, sonrasında, sonuçlarımızın bir uygulaması olarak, bu sonuçlar ağırlıklı grup cebirlerine ve Segal cebirlerine uygulandı.

Anahtar kelimeler: Çarpanlar, Değişmeli Banach cebirleri, Grup cebiri, Lokal kompakt Abel grup, Ölçüm cebiri.

ABSTRACT

SOME ERGODIC THEOREMS FOR MULTIPLIERS OF COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS

TOPAL, Hayri
Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV
July 2019, 77 pages

This thesis is about some ergodic properties of the multipliers of commutative Banach algebra and consists of eight chapters: Introduction, Basic Definitions-Theorems, Basic Concepts of Banach Algebras and Multipliers Theory, the Results Obtained, and Discussion-Conclusion. In the first chapter of the thesis, it is mentioned about the importance in the literature and historical development of the subject. The following three chapters of the thesis are related to some of the salient facts about Banach algebras and the theory of multipliers. In these chapters of thesis, we recall main definitions and theorems which are used through the thesis. The research findings that constitute the main part of this thesis are divided into three chapters.

In this thesis, it was firstly proved that every power bounded multiplier can be extended the isometric multiplier on a Banach algebra. Using these results obtained with respect to the isometric multipliers, some necessary and sufficient conditions on convergence of iterations of multipliers in a commutative Banach algebras are given. Secondly, we concentrated on the structure of more general version of Katznelson-Tzafriri theorem. Similar results were also obtained for multipliers on Banach algebras. And lastly, theorems of Choquet-Deny type on ergodic properties of measures on locally compact abelian groups were discussed and Choquet-Deny theorem was generalized in the context of multipliers of commutative Banach algebras, in the sequel, as an application of our main results, these results were applied to the weighted group algebras and Segal algebras.

Keywords: Commutative Banach algebras, Group algebra, Locally compact Abelian group, Measure algebra, Multipliers.

ÖN SÖZ

Doktora öğrenimim boyunca danışmanlığımı yürüten; bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Heybetkulu Mustafayev'e samimi ve içten alakalarından dolayı teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım.

İlgi ve sevgileriyle beni sürekli destekleyen ve her zaman yanımda olan sevgili eşime ve çocuklarım Elif Su ve Ali Bera'ya teşekkür ederim.

Ayrıca doktora süresince "Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı" kapsamında maddi destek sunan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

2019

Hayri TOPAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT iii
ÖN SÖZ v
İÇİNDEKİLER vii
SİMGELER VE KISALTMALAR ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 9
 2.1. Topolojik Özellikler 9
 2.2. Banach Cebirleri 11
3. CEBİRLER HAKKINDA GEREKLİ KAVRAM VE BİLGİLER 19
 3.1. Spektral Özellikler 19
 3.2. Maksimal Regüler İdealler ve Kompleks Homomorfizmalar 20
 3.3. Gelfand Dönüşümü ve Gelfand Temsili 21
 3.4. Regüler Banach Cebirleri 23
4. ÇARPANLAR TEORİSİ 25
 4.1. Banach Cebirlerinde Çarpanlar 25
 4.2. Helgason-Wang Temsili 26
 4.3. Kuvvet Sınırlı Operatörler 28
 4.4. Kuvvet Sınırlı Çarpanlar 30
5. KATZNELSON-TZAFRİRİ TİPLİ TEOREMLER 35
6. GENELLEŞTİRİLMİŞ KATZNELSON-TZAFRİRİ TİPLİ TEOREMLER 45
7. CHOQUET-DENY TİPLİ TEOREMLER VE ERGODİK ÖZELLİKLER 55
 7.1. Ağırlıklı Grup Cebirleri 64
 7.2. Segal Cebirleri 68
8. TARTIŞMA VE SONUÇ 71
KAYNAKLAR 73
ÖZ GEÇMİŞ 77

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{D}=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{C}:\lvert\boldsymbol{\lambda}\rvert<\mathbf{1}\}$	Açık birim disk
$\overline{\mathbb{D}}=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{C}:\lvert\boldsymbol{\lambda}\rvert\leq\mathbf{1}\}$	Kapalı birim disk
$\mathbb{T}=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{C}:\lvert\boldsymbol{\lambda}\rvert=\mathbf{1}\}$	Birim çember
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{G}$	Lokal kompakt Abel grubu
$\boldsymbol{\omega}$	G üzerinde ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{\lambda}$	G üzerindeki Haar ölçümü
$\widehat{\boldsymbol{G}}$	G grubunun dual grubu
$\boldsymbol{X}^*$	X uzayının topolojik dual uzayı
$\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g}$	f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{A}}$	A değişmeli Banach cebirinin maksimal idealler uzayı
$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{G})$	G grubunun ölçüm cebiri
$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{A})$	A cebrinin tüm çarpanlar kümesi
$\boldsymbol{A}(\mathbb{D})$	f, $\mathbb{D}$ üzerinde analitik ve $f\in C(\overline{\mathbb{D}})$ olan fonksiyonlar cebiri
$\boldsymbol{\partial S}$	S kümesinin topolojik sınırı
$\overline{\boldsymbol{N}}^{w^*}$	$N\subset X^*$ kümesinin zayıf * topolojiye göre kapanışı
$\widehat{\boldsymbol{L^1}(\boldsymbol{G})}$	$f\in L^1(G)$ nin Fourier dönüşümleri kümesi

1. GİRİŞ

Matematiğin gelişmesinde önemli rol oynayan Fourier serileri ve Fourier dönüşümleri, gerek fizik ve mühendislik alanlarındaki uygulamaları ve gerekse de matematikteki merkezi konumu açısından, matematiğin en önemli konularından biridir. Çarpan (multiplier) kavramı ilk defa Fourier serilerinin yakınsaklık teorisi ile bağlantılı olarak harmonik analizde ortaya çıkmıştır. $\sum_n a_n e^{int}$ serisi belirli bir sınıftan olan bir fonksiyonun Fourier serisi olsun. Çarpanlar (multipliers) teorisi, $\{c_n\}$ kompleks sayıların bir dizisi olmak üzere, $\sum_n c_n a_n e^{int}$ serisinin de aynı sınıftan bir başka fonksiyonun Fourier serisi olması için $\{c_n\}$ dizisinin (çarpanının) belirlenmesinde karşımıza çıkar. Örneğin, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\,(n)e^{int}$ serisi bir $f \in L^1(\mathbb{T})$ fonksiyonun Fourier serisi olsun. $\left\{c_n \widehat{f}\,(n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $g \in L^1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Fourier katsayısı olması için $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ çarpanı

$$c_n = \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t) = \hat{\mu}(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

olarak karşımıza çıkar ki burada μ, $\mathbb{T}$ üzerinde regüler sınırlı bir Borel ölçümüdür. Benzer şekilde φ, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli sınırlı bir fonksiyon ve $\widehat{f}$ fonksiyonu $f \in L^1(\mathbb{R})$ nin Fourier dönüşümü olsun. $\{\varphi\widehat{f}\,\}$ fonksiyonu bir $g \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olması için φ çarpanı

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} d\mu(t) = \hat{\mu}(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

olarak karşımıza çıkar. Burada μ, $\mathbb{R}$ üzerinde regüler sınırlı bir Borel ölçümüdür.

Çarpan kavramının daha sonra harmonik analizin birçok alanında, Fourier dönüşümü özelliklerinin incelenmesinde, Fourier serilerinin yakınsaklık teorisinde, grup cebirlerinin homomorfizmalarının araştırılmasında, Banach cebirlerinin çarpanlara ayırma probleminde, enterpolasyon teorisinde, stokastik süreçler teorisinde, Banach modüllerinin incelenmesinde, operatörler teorisinde ve Banach cebirlerinin genel teorisinde de sıklıkla karşımıza çıktığını görmekteyiz.

G lokal kompakt bir Abel grubu olmak üzere $L^1(G)$ (G kompakt ise $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$) uzayının konvolüsyon işlemine göre Banach cebiri yapısı ve bu cebirin özelliklerinin incelenmesi harmonik analizin temel konularındandır. Bu kapsamda, harmonik analizin en önemli ve üzerinde en çok çalışma yapılan $L^1(G)$ ve ağırlıklı $L^1_\omega(G)$ uzaylarının, çarpanları ile ilgili özelliklerini ortaya koymak önem arz eder. Grup cebirlerinin yapısal zenginliği çarpan kavramının çeşitli denk tanımlarını karşımıza çıkarmaktadır. Yukarıda ifade edilenlerden yola çıkarak, G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere, $L^1(G)$ grup cebirleri için çarpan kavramı şu şekilde ifade edilir: $\hat{G}$ üzerinde tanımlı sürekli, sınırlı ve

$$\varphi \widehat{L^1(G)} \subseteq \widehat{L^1(G)}$$

kapsamasını sağlayan φ fonksiyonuna $L^1(G)$ nin bir çarpanı denir. φ fonksiyonu $L^1(G)$ nin bir çarpanı ise bu takdirde her $f \in L^1(G)$ için

$$\widehat{Tf} = \varphi \hat{f}$$

olacak şekilde bir tek $T : L^1(G) \to L^1(G)$ sınırlı lineer operatörü vardır. Ünlü Wendel (1952)-Helson (1953) teoremi, G üzerinde tanımlı sınırlı regüler bir Borel μ ölçümü için $\varphi = \hat{\mu}$ olduğunu söyler. Böylece $\widehat{Tf} = \hat{\mu}\hat{f}$ eşitliğinden $Tf = \mu * f$ elde edilir. Buradan her $h \in L^1(G)$ için $Tf * h = T(f * h)$ olur. Bu eşitlik bize çarpan kavramını keyfi bir A cebrine genişletme imkanı sunar: A bir Banach cebirinde etki eden ve

$$(Ta)b = aT(b) \qquad (a, b \in A)$$

eşitliğini sağlayan sınırlı lineer T operatörüne A nın bir çarpanı denir. A nın tüm çarpanlar cebirini $\mathcal{M}(A)$ ile göstereceğiz. A değişmeli yarı basit bir Banach cebiri, Σ_A, A nın Gelfand uzayı olmak üzere

$$\widehat{(Ta)}(\gamma) = \hat{T}(\gamma)\hat{a}(\gamma) \quad (\forall \gamma \in \Sigma_A)$$

eşitliğini sağlayan ve Σ_A üzerinde tanımlı olan sürekli ve sınırlı bir tek $\hat{T}$ fonksiyonu vardır. $\hat{T}$ fonksiyonuna T çarpanının Helgason-Wang temsili denir.

Banach cebirleri için çarpan kavramı ilk olarak S. Helgason (1956) tarafından verilmiştir. Helgason çalışmasında çarpan kavramını, A değişmeli bir Banach cebirinin Σ_A Gelfand uzayı üzerinde tanımlanan ve $\varphi\hat{A} \subseteq \hat{A}$, $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$, şartını sağlayan sınırlı ve sürekli bir φ fonksiyonu olarak ifade etmiştir. Burada φ fonksiyonu, yukarıda sözünü ettiğimiz çarpanın Helgason-Wang temsilidir. Daha sonra J. K. Wang (1961), Banach cebirlerinde çarpanların genel teorisini geliştirerek, bir A Banach cebiri ile onun çarpanlar cebirinin, maksimal idealler uzayları arasındaki ilişkiyi ele almıştır.

Her $f \in L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ ve $g \in G$ için L_g öteleme operatörünü $L_g f(s) = f(s-g)$ olarak tanımlayalım. $L^1(G)$ nin çarpanları şu şekilde de karakterize edilebilir. $L^1(G)$ üzerinde tanımlı T operatörünün $L^1(G)$ nin bir çarpanı olması için gerek ve yeter şart her $g \in G$ için $TL_g = L_g T$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu tanım bize çarpan kavramını $L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzaylarına genişletme olanağı sağlamaktadır. $L^p(G)$ üzerinde tanımlı T operatörü $TL_g = L_g T$, $(\forall g \in G)$ eşitliğini sağlarsa T ye $L^p(G)$ nin bir çarpanıdır denir.

Hilbert uzaylarındaki klasik spektral teorinin dışında gelişen Banach cebirlerinin çarpanlar teorisi, modern spektral teorinin gelişmesinde de önemli bir yere sahiptir. Çarpanlar teorisi zengin bir spektral teoriye sahip olduğundan, Banach cebirlerinin çarpanlarının spektral özelliklerinin ele alınması lokal spektral teori üzerine yapılan çalışmalar ile birlikte zaman içinde önemli ölçüde artmıştır. Bu yönde Zafran (1973) ve Ricker (2005) $L^p(G)$ uzayının çarpanlarının spektral özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Aiena (1991), $L^1(G)$ nin çarpanlarının veya daha genel olarak değişmeli yarı basit Banach cebirlerinin çarpanlarının spektral özelliklerinin araştırdığı çalışmasında, çarpanların spektral özelliklerinin Hilbert uzayındaki normal operatörlerin spektral özellikleri ile benzerlik gösterdiğini ortaya koymuştur. Laursen ve Neumann (1992), Laursen (1994), Neumann (1998) ve Eschmeier ve ark. (1996) çalışmalarında çarpanların lokal spektral özelliklerini; Aiena (1995), Mustafayev (2016a; 2019) ise Banach cebirlerinde çarpanların spektral özelliklerini incelemişlerdir.

Akemann (1967) ve Kitchen (1968) grup cebirlerinin kompakt çarpanlarını karakterize etmişlerdir. Friedberg (1979) ve Kamowitz (1981) çalışmalarında daha genel Banach cebirlerinin kompakt çarpanlarına yer vermişlerdir. Kaniuth ve ark. (2007), A ve B değişmeli yarı basit Banach cebirleri, $M(A)$ ve $M(B)$ ise sırasıyla A ve B nin çarpan cebirleri olmak üzere, "$\varphi : A \to B$ sınırlı homomorfizmasının ne zaman bir $\phi : M(A) \to M(B)$ sınırlı homomorfizmasına genişletilebilir?" sorusuna yanıt aramışlardır. Yine Kaniuth ve ark. (2010), değişmeli Banach cebirlerinin çarpanları için bazı Foguel tipli teoremler ispatlamış ve kuvvet sınırlı çarpanlar ile ortaya çıkan bazı ideallerin özelliklerini incelemişlerdir. Bütün bunlara ek olarak, Dunford anlamında spektral ve skaler çarpanlar, ayrışabilir çarpanlar (zayıf ayrışım, süper ayrışım) ve çarpanların spektrumlarının dönüşüm özellikleri birçok çalışmada ele alınmıştır. Çarpanlar teorisi üzerine 2004 yılına kadar yapılan çalışmaların büyük bir kısmı üç ana kitap altında toplanmıştır: Larsen, 1971; Laursen ve Neuman, 2000; Aiena, 2004.

Öncelikle bu tez çalışmasında, A değişmeli Banach cebirinin çarpanlarının bazı ergodik özellikleri araştırılacaktır. Özellikle T operatörü A nın bir çarpanı ve $a \in A$ olmak üzere $\{T^n a\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin A cebirinin farklı topolojilerinde bazı yakınsama kriterleri incelenecektir. Literatürü taradığımızda bu konuyla ilgili yeterince çalışma yapılmadığı görülmektedir. Dolayısıyla konu ile ilgili özgün çalışmalar yapılmasına ihtiyaç duyulduğu söylenebilir.

T operatörü X Banach uzayı üzerinde tanımlı kuvvet sınırlı bir lineer operatör olsun. T operatörünün $n \to \infty$ iken T^n kuvvetlerinin farklı topolojilerde davranışını belirlemek oldukça önemlidir. Bu davranışları genelde T nin spekral özellikleri belirler. Örneğin, $\|T^n\| \to 0$ olması için gerek ve yeter şart T nin spektrumunun birim yuvar içinde olmasıdır. Ayrıca ünlü Gelfand teoremi (1941), T operatörü çift kuvvet sınırlı olup $\sigma(T) = \{1\}$ ise $T = I$ olduğunu söyler.

S sınırlı lineer bir operatör olmak üzere $\{T^n S\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin düzgün veya kuvvetli yakınsaklığı için gerekli ve yeterli şartlar ortaya koymak çok daha zordur. Bu amaca yönelik olarak, Ornstein ve Sucheston (1970), $L^1(\Omega, \Sigma, m)$ uzayı üzerinde herhangi bir T pozitif daralma operatörü için $\|T^n - T^{n+1}\| = 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ veya

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n - T^{n+1}\| = 0$$

olduğunu ispat etmişlerdir (burada $S = I - T$ olur). Bu sonuç Foguel (1976) tarafından $L^\infty(\Omega, \Sigma, m)$ uzayları üzerindeki pozitif operatörlere genişletilmiştir. "*Sıfır-iki*" (zero-two) kuralı olarak da adlandırılan bu sonuçlar L^p, $1 < p \neq 2$, uzayları üzerinde pozitif daralma operatörleri için Zaharopol (1986) tarafından genelleştirilmiştir. "S*ıfır-iki*" kuralı olarak tanımlanan olgunun, gerçekte

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n - T^{n+1}\| = 0$$

özelliğinin, T nin spektrumunun yapısına bağlı olduğu ilk kez Esterle (1983) tarafından fark edilmiştir. Esterle teoremi, T operatörü kuvvet sınırlı olup $\sigma(T) = \{1\}$ ise

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n - T^{n+1}\| = 0$$

olduğunu söyler. Bu netice aynı zamanda Gelfand teoreminin de bir genelleştirmesidir. Katznelson ve Tzafriri (1986), spektrum üzerindeki koşulu zayıflatarak daha geniş operatör sınıfarı için Esterle'nin sonucunu genelleştirerek aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 1.1. *T operatörü, X Banach uzayı üzerinde kuvvet sınırlı ise,*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n - T^{n+1}\| = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subseteq \{1\}$ olmasıdır.

Operatör yarı gruplarının asimptotik teorisinin en önemli köşe taşlarından biri olarak değerlendirilen Katznelson-Tzafriri teoreminin uygulamaları, stokastik süreçler teorisinde, iterasyon metotlar teorisinde karşımıza çıkmaktadır. Phóng (1992b), Katznelson-Tzafriri teoremini bir parametreli operatör yarı grupları için ispatlamıştır. Allan ve ark. (1987), Allan ve Ransford (1989), kompleks analizin bazı metotlarını kullanarak teoremin alternatif ispatlarını vermişler ve önemli ölçüde teoremi genelleştirmişler. Özellikle asimptotik teori açısından büyük öneme sahip Katznelson-Tzafriri teoremi, başlangıçta kuvvet sınırlı operatörler için ifade edilmesine rağmen zamanla araştırmacıların ilgisini çekmiş ve Allan (1989), Phóng (1992a; 1997), Zemánek (1994), Tomilov ve Zemánek (2004), Mustafayev (2006; 2015), Zarrabi (2013), Suciu ve Zemánek (2013) gibi farklı akademik çalışmalara da konu olmuştur. Operatör ergodik teoriye oldukça önemli katkılar sunan Katznelson-Tzafriri teoremi, bizim bu çalışmamız için de bir yol gösterici olmuştur.

Bu çalışma çerçevesinde ilk önce, değişmeli Banach cebirinin çarpanları için daha zayıf şartlar altında Katznelson-Tzafriri tipli teoremler verilecek. Örneğin, A değişmeli yarı basit regüler ve Tauberian bir Banach cebiri ve T, A nın kuvvet sınırlı bir çarpanı olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n a - T^{n+1} a\| = 0 \quad (\forall a \in A)$$

eşitliğinin sağlaması için gerek ve yeter şart $\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$ olmasıdır. Burada

$$\mathcal{E}_T := \{\gamma \in \Sigma_A : |\hat{T}(\gamma)| = 1\}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda ifade edilen Katznelson-Tzafriri teoremi, aslında sadece $T^n(I - T)$ formundaki ifadeler için değil, aynı zamanda $I - T$ yerine çok daha genel $f(T)$ fonksiyonları ele alınarak ispat edilmiştir.

Teorem 1.2. *T kuvvet sınırlı bir operatör ve $f \in A_+(\mathbb{T})$ fonksiyonu $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ kapalı kümesine göre sentezlenebilir ise*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$$

eşitliği vardır (Katznelson ve Tzafriri, 1986).

Esterle ve ark. (1990), Hilbert uzaylarında, "T bir daralma operatörü ve $f \in A(\mathbb{D})$ olmak üzere her $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$ için $f(\lambda) = 0$ ise $\|T^n f(T)\| \to 0$" sonucunu elde etmişlerdir. Mustafayev (2010) ise çalışmasında

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)\cap\mathbb{T}} |f(\lambda)|$$

formülünü ispatlayarak daha net bir sonuç elde etmiştir. Phóng (1992b; 1997), Katznelson-Tzafriri teoremini C_0-yarı grupları için ispat etmiştir. Allan ve Ransford (1989), f fonksiyonunun $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ kümesine göre spektral sentez olması yerine f fonksiyonun özel seçimleri için teoremi genelleştirerek ispat etmiştir.

Tezimizde ikinci olarak, Banach cebirinin çarpanları için Katznelson-Tzafriri teoreminin daha genel hali daha zayıf şartlar altında ispat edilmiştir. Teoremin ispatında kullanılan yöntem, değişmeli Banach cebirlerinin ideal teorisine bir dayanak teşkil eden sentez küme problemi ile yakından ilişkilidir.

Bu tez çalışmasında son olarak

$$\mu * f(s) := \int_G f(s-t)\,d\mu(t) = f(s) \qquad (\forall s \in G)$$

konvolüsyon tipli denklemler ele alınmıştır. Bu denklemler ilk olarak G. Choquet ve J. Deny (Choquet ve Deny, 1960) tarafından incelendiğinden *Choquet-Deny tipli* denklemler olarak da bilinir. Burada amaç, bir $\mu \in M(G)$ ölçümü için $\mu * f = f$ denkleminin $f : G \to \mathbb{C}$ Borel fonksiyonları ile çözümlerini ifade etmektir. Bir $\mu \in M(G)$ ölçümünün belirli bir ergodik özelliğini karakterize eden Choquet-Deny teoremi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 1.3. *G lokal kompakt bir Abel grubu ve $\mu \in M(G)$ olsun. $\varphi \in L^{\infty}(G)$ olmak üzere $\mu * \varphi = \varphi$ denkleminin çözümünün sabit bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her $\gamma \in \hat{G} \setminus \{0\}$ için $\hat{\mu}(\gamma) \neq 1$ olmasıdır.*

Choquet-Deny tipli denklemlerin etki alanı oldukça geniş olmuş ve sonrasında birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Ramsey ve Weit, 1984). Şimdi $\mu \in M(G)$ kuvvet sınırlı bir ölçüm olsun. Foguel (1975), $\hat{f}(0) = 0$ şartını sağlayan her $f \in L^1(G)$ fonksiyonu için $\lim_{n\to\infty} \|\mu^n * f\| = 0$ eşitliğinin ancak ve ancak $|\hat{\mu}(\chi)| < 1$, $\forall \chi \in \hat{G} \setminus \{0\}$, koşulu altında doğru olabileceğini ispat etmiştir, burada $\hat{\mu}$, μ nün Fourier-Stieltjes dönüşümüdür. Böylece Foguel, lokal kompakt Abel grupları için $\mu \in M(G)$ ölçümlerinin ergodik bir özelliğini ortaya koymuştur. Granirer (1985), $L^1(G)$ grup cebiri yerine $A_p(G)$, $1 < p < \infty$, Herz cebirlerini alarak Choquet–Deny teoremini önemli ölçüde genişletmiştir.

Ölçümler, integrallenebilir fonksiyonlar cebirinin çarpanları olduğundan, genel Banach cebirlerinin çarpanlarının ergodik özelliklerinin nasıl olacağı sorusunu beraberinde getirmektedir. Kaniuth ve ark. (2010), değişmeli Banach cebirlerinde çarpanlar teorisi bağlamında Choquet–Deny ve Foguel'in sonuçlarını genelleştirmişlerdir. Mustafayev (2016b; 2017; 2019), Fourier ve Fourier-Stieltjes cebirlerinde çarpanların ergodik özelliklerini incelemiştir.

Bu tezde son olarak, değişmeli Banach cebirlerinin çarpanlarının belirli ergodik özelliklerini karakterize eden bazı Choquet-Deny tipli sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar Choquet-Deny ve Foquel teoremlerini önemli ölçüde genelleştirmiştir. Özellikle değişmeli Banach cebirlerinin çarpanları bağlamında T bir A Ditkin cebirinin çarpanı olmak üzere $\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$ uzayının sonlu boyutlu olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmiş olup bu sonuçlar ağırlıklı grup cebirlerine ve Segal cebirlerine uygulanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Topolojik Özellikler

Tanım 2.1. X bir topolojik uzay olsun.

(i) Her $x \in X$ noktası, kapanışı kompakt olan bir komşuluğa sahip ise X uzayına *lokal kompakt* uzay denir.

(ii) Eğer X in birbirinden farklı her x ve y elemanları için $x \in U$ ve $y \in V$ özelliklerini sağlayan iki ayrık U ve V açık kümeleri varsa X topolojik uzayına *Hausdorff* uzayı denir.

(iii) $C(X)$ tüm kompleks değerli ve sürekli $f : X \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının uzayıdır. Bir $f : X \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun *desteği* (support)

$$\mathrm{supp} f \coloneqq \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır ve kompakt destekli tüm $f \in C(X)$ fonksiyonlarının uzayı $C_c(X)$ ile gösterilir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $x \in X \setminus K_\varepsilon$ için $|f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $K_\varepsilon \subset X$ kompakt kümesi varsa $f : X \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna *sonsuzda sıfırdır* (vanish at infinity) denir. Sonsuzda sıfır olan $f \in C(X)$ fonksiyonlarının uzayı $C_0(X)$ ile gösterilir.

(iv) Kapalı ve her noktası, diğer noktalarının bir limiti olarak elde edilebilen kümelere *mükemmel kümeler* denir. X in boştan farklı her alt kümesi bir izole noktaya sahip ise X e *saçılmış* (scattered) *küme* denir. Diğer bir ifadeyle X, boştan farklı mükemmel bir alt küme içermiyorsa X saçılmış bir kümedir (Laursen ve Neumann, 2000). Örneğin reel ve kompleks sayıların saçılmış alt kümeleri ancak ve ancak sayılabilir kümelerdir.

(v) X bir topolojik vektör uzayı ise o zaman X^*, X üzerinde tüm sürekli lineer fonksiyonellerin bir vektör uzayıdır. X^* uzayına X in *dual* uzayı denir. $\varphi \in X^*$ fonksiyonelinin bir $x \in X$ deki değeri $\langle x, \varphi \rangle$ ile gösterilir. Y bir başka topolojik vektör uzay ve $T : X \to Y$ sürekli lineer dönüşüm ise her $x \in X$, $y^* \in Y^*$ için

$$\langle x, T^* y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle$$

şeklinde tanımlanan bir lineer $T^* : Y^* \to X^*$ dönüşümü tanımlanabilir.

(vi) X topolojik vektör uzayı ve $\{x_\alpha\} \subset X$ bir ağ (net) olsun. Her $\varphi \in X^*$ için

$$\lim_\alpha \langle x_\alpha, \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle$$

ise $\{x_\alpha\} \subset X$ ağı $x \in X$ noktasına *zayıf yakınsar* denir. Bu yakınsaklık, X üzerinde X in topolojisinden daha zayıf olan ve *zayıf topoloji* (*weak topology*) olarak adlandırılan bir topoloji oluşturur. Her $x \in X$ için

$$\lim_\alpha \langle x, \varphi_\alpha \rangle = \langle x, \varphi \rangle$$

ise $\{\varphi_\alpha\} \subset X^*$ ağı $\varphi \in X^*$ noktasına *zayıf* yakınsar* denir. Bu yakınsaklığın X^* üzerinde oluşturduğu topoloji ise *zayıf* topoloji* (*weak* topology*) olarak adlandırılır ve $\sigma(X^*, X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. G bir grup olsun. Bu G grubu üzerinde $(x, y) \to xy^{-1}$ dönüşümünü sürekli yapan bir topoloji varsa, G ye *topolojik grup* denir. G topolojik grubu, lokal kompakt Hausdorff ise G ye *lokal kompakt grup* denir. Eğer G değişmeli ise G ye *lokal kompakt değişmeli (Abel) grubu* denir.

Tanım 2.3. X bir lokal kompakt Hausdorff uzayı olsun. Ω ile X in tüm açık kümelerinin doğurduğu Borel cebirini gösterelim. Ω nın elemanlarına Borel kümeleri veya ölçülebilir kümeler denir. Ω da tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan pozitif μ ölçümüne *regüler Borel ölçümü* denir.

(i) Her $K \subset X$ kompakt kümesi için $\mu(K) < \infty$.

(ii) Her $E \in \Omega$ için $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E$ ve K kompakt$\}$.

(iii) Her $E \in \Omega$ için $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U$ ve K açık$\}$.

G bir lokal kompakt grup olsun. Her $x \in G$ ve her $E \subset G$ Borel alt kümeleri için $\mu(E + x) = \mu(E)$ özelliğini sağlayan bir regüler Borel μ ölçümü vardır. Bu ölçüme *Haar ölçümü* denir. Her G lokal kompakt grubu üzerinde sabit çarpan farkıyla bir tek Haar ölçümü vardır (Cohn, 2013).

Lemma 2.1. *X lokal kompakt Hausdorff uzayı ve $x \in X$ olsun.*

(i) K, X de *bir kompakt küme ve E, K yı kapsayan bir açık küme ise $\overline{U}$ kompakt olmak üzere $K \subset U \subset \overline{U} \subset E$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır.*

(ii) U, x *in bir komşuluğu ise bu takdirde* $\bar{V}$ *kompakt olmak üzere* $\bar{V} \subset U$ *olacak şekilde* x *in bir* V *komşuluğu vardır* (Cohn, 2013).

2.2. Banach Cebirleri

Tanım 2.4. A bir vektör uzayı olsun. A üzerinde $A \times A \to A$, $(a,b) \to a \cdot b$ şeklinde tanımlanan "·" işlemi her $a, b, c \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

(iii) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$

koşullarını sağlıyorsa A vektör uzayına bir *cebir* denir.

Her $a, b \in A$ için $a \cdot b = b \cdot a$ koşulunu sağlayan bir A cebirine *değişmeli* cebir denir. Her $a \in A$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde $e \in A$ varsa A ya *birim elemanlı cebir* ve e elemanına ise A nın *birim elemanı* denir. Tez boyunca $a \cdot b$ yerine ab kullanımını tercih edeceğiz.

$(A, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. A bir cebir ve her $a, b \in A$ için

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

eşitsizliği sağlanırsa A cebirine bir *normlu cebir* denir. Normlu bir uzay norm metriğine göre topolojik bir uzaydır. Bu nedenle bir normlu cebir, hem cebirsel hem de topolojik bir yapıya sahiptir. $(A, \|\cdot\|)$ normlu uzayının Banach uzayı olması durumunda ise A normlu cebirine *Banach cebiri* denir. Bu tezde sadece değişmeli Banach cebirleri ele alınacaktır.

$(A, \|\cdot\|)$ normlu cebiri, Λ ağı ve A da bir $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dizisi verilsin. Eğer her $a \in A$ için $\lim_{\lambda} \|e_\lambda a - a\| = 0$ ise $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dizisine A nın *yaklaşık birimi* denir.

Bir A cebirinin I alt uzayı, her $a \in A$ ve her $b \in I$ için $ab \in I$ koşulunu sağlıyorsa I ya A cebirinin ideali denir. I bir ideal olmak üzere $I \neq A$ ise I ya A nın *has ideali* denir. I has ideali, kendinden başka A nın hiçbir has ideali tarafından kapsanmıyorsa I ya A nın *maksimal ideali* denir. I bir ideal olmak üzere I idealini içeren tüm maksimal ideallerin kümesine I nın *hull'u* denir ve $\mathrm{hull}(I)$ ile gösterilir.

I, A cebirinin bir ideali olmak üzere A/I bölüm uzayı

$$(a+I)(b+I) = ab + I \qquad (a, b \in A)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemine göre bir cebir olur. I, A normlu cebirinin kapalı bir ideali olmak üzere A/I bölüm cebiri

$$\|a+I\|_{A/I} = \inf_{b \in I}\|a+b\| \qquad (a \in A)$$

bölüm normu ile normlu bir cebirdir. Ayrıca A bir Banach cebiri ise A/I bölüm cebiri de bir Banach cebiridir. A/I bölüm cebiri birimli ise I idealine *regüler ideal* denir. A Banach cebirinin tüm regüler maksimal ideallerinin arakesitine A cebirinin *radikali* denir ve $\mathrm{rad}(A)$ ile gösterilir. $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$ ise A cebirine *yarı basit*'tir (semisimple) denir.

Aşağıda bu çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılacak ve cebirler teorisinde önemli bir yere sahip olan Banach cebiri örnekleri verilmiştir.

G grubu, λ Haar ölçümü ile donatılmış lokal kompakt bir Abel grubu olsun. $L^1(G)$, G üzerinde Haar ölçümüne göre mutlak integrallenebilen fonksiyonlar uzayını göstersin. $L^1(G)$,

$$\|f\|_1 := \int_G |f(t)|d\lambda(t) \qquad (f \in L^1(G))$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $f, g \in L^1(G)$ olmak üzere f ve g nin konvolüsyon çarpımı

$$f * g(s) := \int_G f(s-t)g(t)d\lambda(t) \qquad (s \in G)$$

biçiminde tanımlanır. Bu konvolüsyon çarpımına göre $L^1(G)$ değişmeli bir Banach cebiri olur (Larsen, 1973). Harmonik analizin en önemli ve en çok üzerinde çalışılan $L^1(G)$ cebiri, G nin *grup cebiri* olarak da adlandırılır. $L^1(G)$ genellikle birimsizdir (G grubu ancak diskret olması durumunda $L^1(G)$ cebiri birimlidir); fakat $L^1(G)$ cebiri her zaman bir yaklaşık birime sahiptir (Rudin, 1962; Loomis, 1953).

$1 < p < \infty$ olmak üzere, $L^p(G)$ ile G üzerinde Haar ölçümüne göre p. kuvveti mutlak integrallenebilen fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz. $L^p(G)$,

$$\|f\|_p := \left(\int_G |f(t)|^p d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in L^p(G))$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. G nin kompakt olması durumunda $L^p(G)$ uzayı yine yukarıda tanımlanan konvolüsyon çarpımına göre bir Banach cebiri olur (Aiena, 2004).

$L^\infty(G)$ ile G üzerinde tanımlı kompleks değerli ve ölçülebilir tüm esas sınırlı fonksiyonlar uzayını gösterelim. Bu uzay $(fg)(t) = f(t)g(t)$ çarpma işlemine göre bir cebirdir. Ayrıca

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in G}\{|f(t)|\}$$

normuna göre bir Banach cebiridir.

G lokal kompakt Abel grubu ve μ, G üzerinde kompleks değerli regüler bir Borel ölçümü olsun. μ ölçümünün $|\mu|$ total varyasyonu

$$|\mu|(G) := \sup\left\{\sum |\mu(E_i)| : G = \bigcup E_i\,, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j\right\}$$

olarak tanımlanır. $|\mu|(G) < \infty$ ise μ ölçümü *sınırlıdır* denir. $M(G)$ ile G üzerinde tüm kompleks değerli regüler sınırlı Borel ölçümler kümesini gösterelim. $M(G)$,

$$\|\mu\|_1 := |\mu|(G)$$

normuna göre ile bir Banach uzayıdır.

$\mu, \nu \in M(G)$ olmak üzere $\mu \times \nu$ ile $G \times G$ kartezyan çarpım uzayı üzerindeki çarpım ölçümünü gösterelim. $E \subset G$ Borel kümesi için

$$F := \{(s,t) \in G \times G : s + t \in E\}$$

kümesi tanımlansın. F kümesi çarpım uzayında bir Borel kümesidir. $\mu, \nu \in M(G)$ nin konvolüsyon çarpımı $\mu * \nu$ ile gösterilir ve

$$\mu * \nu(E) := (\mu \times \nu)(F)$$

eşitliği ile tanımlanır. Fubini teoremi yardımıyla μ ve ν nün konvolüsyon çarpımını tüm $E \subset G$ Borel kümeleri için

$$\mu * \nu(E) := \int_G \mu(E - t) d\nu(t)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Tanımlanan bu konvolüsyon çarpımı ile $M(G)$ değişmeli bir Banach cebiridir ve *Ölçüm cebiri* olarak bilinir. δ_0 ile 0 noktasına odaklanan Dirac ölçümünü gösterelim. δ_0, $M(G)$ nin birimidir (Laursen ve Neumann, 2000).

G üzerinde Haar ölçümüne göre mutlak integrallenebilir fonksiyonlar, Haar ölçümüne göre mutlak sürekli ölçümlerle özdeşleştirilebilir. Bu özdeşleştirme ile $L^1(G)$ Banach cebiri izometrik olarak $M(G)$ Banach cebirinin içine gömülür. Ayrıca, $f \in L^1(G)$ ve $\mu \in M(G)$ olmak üzere $\mu * f \in L^1(G)$ dir ve konvolüsyon

$$(\mu * f)(s) = \int_G f(s-t)d\mu(t) \qquad (\forall s \in G)$$

eşitliği ile verilir. Böylece $L^1(G)$ grup cebirini $M(G)$ nin kapalı bir ideali olarak görebiliriz. Ayrıca G grubu diskret ise $L^1(G) = M(G)$ dir (Laursen ve Neumann, 2000; Rudin, 1962).

G nin her E Borel kümesi için $\mu^*(E) = \overline{\mu(-E)}$ işlemine göre $M(G)$ ölçüm cebiri bir involüsyon cebiridir. Eğer $\mu^* = \mu$ ise μ ye bir *Hermit ölçüm* denir (Dales, 2000).

$f \in L^1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun n. Fourier katsayısı

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$$

eşitliği ile tanımlanır. Mutlak yakınsak Fourier serisi olarak ifade edilen $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm kompleks değerli fonksiyonlar uzayı

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty \right\}$$

ile gösterilsin. $A(\mathbb{T})$ uzayı

$$\|f\|_1 := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Ayrıca bu uzay noktasal çarpma işlemine göre birimli değişmeli bir Banach cebiridir. Bu cebire *Wiener cebiri* de denir.

Tanım 2.5. G lokal kompakt bir Abel grubu, γ ise G üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in G$ için $|\gamma(t)| = 1$ ve her $t, s \in G$ için

$$\gamma(t+y) = \gamma(t)\gamma(s)$$

koşulları sağlanıyorsa γ ya G grubunun *karakter*i denir. G grubunun tüm karakterlerinin kümesi $\hat{G}$ ile gösterilir. Böylelikle $\gamma : G \to \mathbb{T}$ karakteri, G nin bir sürekli grup homomorfizmidir. Bu $\hat{G}$ kümesi, $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ olmak üzere

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t) \qquad (t \in G)$$

işlemine göre bir Abel grup oluşturur. Her $\delta > 0$ sayısı ve G nin her K kompakt alt kümesi için

$$\mathcal{B}(K,\delta) := \{\gamma \in \hat{G} : |\gamma(t) - 1| < \delta, \forall t \in K\}$$

tanımlansın. $\{\mathcal{B}(K,\delta) : K \subset G$ kompakt, $\delta > 0\}$ kümeleri $\hat{G}$ üzerindeki bir topoloji için bir taban oluşturur. *Kompakt-açık topoloji* olarak adlandırılan bu topoloji ile $\hat{G}$, lokal kompakt bir Abel grubu olur. Bu gruba G nin *dual grubu* (*karakter grubu*) adı verilir. Böylece G nin $\hat{G}$ dual grubu üzerinde bir Haar ölçümü vardır (Rudin, 1962).

Tanım 2.6. G lokal kompakt Abel grubu ve $\hat{G}$, G nin dual grubu olsun. Herhangi bir $f \in L^1(G)$ fonksiyonu için

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(t)\langle -t, \gamma\rangle d\lambda(t)$$

şeklinde tanımlanan $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ dönüşümüne f fonksiyonunun *Fourier dönüşümü* denir. Her $f, g \in L^1(G)$ için $h = f * g$ olmak üzere

$$\hat{h}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma) \quad (\gamma \in \hat{G})$$

eşitliği sağlanır.

Herhangi $\mu \in M(G)$ verildiğinde

$$\hat{\mu}(\gamma) := \int_G \langle -t, \gamma\rangle d\mu(t)$$

şeklinde tanımlanan $\hat{\mu} : \hat{G} \to \mathbb{C}$ dönüşümüne ise μ ölçümünün *Fourier-Stieltjes dönüşümü* denir. Her $\mu, \nu \in M(G)$ için

$$(\widehat{\mu * \nu})(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)\hat{\nu}(\gamma) \quad (\gamma \in \hat{G})$$

vardır (Rudin, 1962).

Tanım 2.7. A bir değişmeli cebir ve E ise bir vektör uzayı olsun.

$$A \times E \to E, \quad (a, x) \to a \cdot x$$

şeklinde tanımlanan ve

$$a \cdot (b \cdot x) = ab \cdot x \quad (a, b \in A, x \in E)$$

koşulunu sağlayan bir bilineer dönüşüm varsa E vektör uzayına bir *A-modül* denir.

A değişmeli bir Banach cebiri ve E Banach uzayı bir A-modül olsun. Eğer

$$\|a \cdot x\| \leq C\|a\|\|x\| \quad (a \in A, x \in E)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa E, *Banach A-modül* olarak adlandırılır.

A değişmeli bir Banach cebiri ve E bir Banach A-modülü olmak üzere

$$\langle x, a \cdot \varphi \rangle = \langle x \cdot a, \varphi \rangle \quad (a \in A, x \in E, \varphi \in E^*)$$

ile E^* dual uzayı üzerinde Banach A-modül yapısı kurulur. Özel olarak $E = A$ alınırsa

$$\langle b, a \cdot \varphi \rangle = \langle ba, \varphi \rangle \quad (a, b \in A, \varphi \in A^*)$$

eşitliği ile A^*, Banach A-modülü olur (Dales ve ark 2003). Örneğin $L^1(G)$, $M(G)$ de kapalı bir ideal olduğundan $L^1(G)$, Banach $M(G)$-modüldür. Ayrıca $L^\infty(G)$, $L^1(G)$ nin duali olduğundan böylece $\mu \in M(G)$, $f \in L^1(G)$ ve $\varphi \in L^\infty(G)$ için

$$\langle f, \mu \cdot \varphi \rangle = \langle f * \mu, \varphi \rangle$$

ile $L^\infty(G)$ bir Banach $M(G)$-modüldür (Dales, 2000).

X bir Banach uzayı ve $B(X)$, X üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörlerin kümesi olmak üzere, operatörlerin noktasal toplama, skalerle çarpma, $(ST)(x) = S(Tx)$ $(x \in X)$ şeklinde verilen çarpma işlemine ve

$$\|S\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|$$

operatör normuna göre bir Banach cebiridir.

E, X Banach uzayının bir alt kümesi olmak üzere E kümesinin gereni (span$E$)

$$\text{span}E := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_i \in \mathbb{C}, x_i \in E, i = 1,2, \dots, n\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.8. X bir Banach uzayı. M kümesi X in ve N kümesi ise X^* ın alt uzayları olsun. Bu takdirde

$$M^\perp := \{\varphi \in X^* : \langle x, \varphi \rangle = 0, \forall x \in M\}$$

$$^\perp N := \{x \in X : \langle x, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in N\}$$

ile tanımlanan $M^{\perp}$ kümesine M alt uzayının *dik tamlayanı*, ${}^{\perp}N$ kümesine ise N alt uzayının *ön dik tamlayanı* denir. Bilindiği üzere $M^{\perp}$, X^* ın zayıf * kapalı alt uzayı iken; ${}^{\perp}N$, X in kapalı alt uzayıdır (Rudin, 1991).

Lemma 2.2. *X bir Banach uzayı, M kümesi X in ve N kümesi de X^*ın alt uzayları olmak üzere*

(i) ${}^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}^{\|\cdot\|}$

(ii) $({}^{\perp}N)^{\perp} = \overline{N}^{w^*}$

eşitlikleri vardır (Rudin, 1991).

Lemma 2.3. *X bir normlu uzay ve M, X^* dual uzayının zayıf* kapalı bir alt uzayı olsun. Eğer $\varphi \in X^* \setminus M$ ise $\varphi(x) \neq 0$ ve her $\psi \in M$ için $\psi(x) = 0$ sağlanacak şekilde bir $x \in X$ elemanı vardır* (Kaniuth, 2009).

Teorem 2.1. *$(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu vektör uzayı olsun.*

(i) *Her $x \in X$ için $\|x\|_X = \|Tx\|_Y$*

(ii) $\overline{T(X)} = Y$

özelliklerini sağlayan bir $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach uzayı ve $T : X \to Y$ lineer dönüşümü vardır. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uzayına $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının *tamlanması* denir (Eidelman ve ark., 2004).

Teorem 2.2. *$\hat{X}$ ve $\hat{Y}$ Banach uzayları sırasıyla X ve Y normlu uzaylarının tamlanması olsun. Her $T \in B(X,Y)$ nin X in $\hat{X}$ tamlanışından Y nin $\hat{Y}$ tamlanışı üzerine bir tek $\hat{T} \in B(\hat{X}, \hat{Y})$ genişlemesi vardır ve $\|\hat{T}\| = \|T\|$ dir* (Kubrusly, 2011).

3. CEBİRLER HAKKINDA GEREKLİ KAVRAM VE BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak Banach cebirleri ile ilgili bazı temel bilgilere yer verilecektir. Bu tez boyunca ele alınacak Banach cebileri sadece kompleks Banach cebirleri olacaktır.

3.1. Spektral Özellikler

Tanım 3.1. A, birimi e olan bir cebir ve $a \in A$ olsun. Eğer $ab = ba = e$ olacak şekilde bir $b \in A$ varsa a elemanına *tersinir* eleman ve b ye a elemanının *tersi* denir. $\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \text{ tersinirdir}\}$ kümesine a nın *rezolvent* kümesi, onun tümleyeni olan $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ kümesine ise a nın (A cebirine göre) *spektrumu* denir.

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olmak üzere

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} \in B(X)\}$$

kümesine T operatörünün resolvent kümesi, $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ operatörüne T nin *rezolventi* denir. $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ kümesine ise T operatörünün spektrumu denir.

Tanım 3.2. $T \in B(X)$, $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer λ nın bir U_λ komşuluğu ve her $z \in U_\lambda$ için $(zI - T)f(z) = x$ denklemi sağlayacak şekilde bir $f : U_\lambda \to X$ analitik fonksiyonu varsa bu takdirde λ ya T nin x te *yerel rezolvent* kümesindendir denir ve $\rho_T(x)$ ile gösterilir. $\rho_T(x)$ açık ve $\rho(T) \subseteq \rho_T(x)$ kapsamasının sağlandığı aşikardır. Yerel rezolvent kümesinin $\mathbb{C}$ ye göre tümleyeni olan $\mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ kümesine, T nin x te *yerel spektrumu* denir ve $\sigma_T(x)$ ile gösterilir.

Her $U \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesi için $(zI - T)f(z) = 0$ denklemini sağlayan tek analitik $f : U \to X$ fonksiyonu, $f = 0$ ise T operatörü *tek değerli genişleme özelliğine* (SVEP) sahiptir denir. T operatörü tek değerli genişleme özelliğine sahip ise $\sigma_T(x) \neq \emptyset$ dır. (Laursen ve Neumann, 2000).

T nin $x \in X$ de *yerel spektral yarıçapı*

$$r_T(x) \coloneqq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_T(x)\}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca T operatörü tek değerli genişleme özelliğine sahip ise

$$r_T(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}$$

dir (Laursen ve Neumann, 2000).

Teorem 3.1. *A birimli bir Banach cebiri ve $a \in A$ olsun. Bir a elemanının $\sigma(a)$ spektrumu, düzlemin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir* (Larsen, 1973).

Lemma 3.1. (**Spektral dönüşüm teoremi**) *A birimli bir Banach cebiri ve p bir polinom olmak üzere her $a \in A$ için*

$$\sigma\big(p(a)\big) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$$

eşitliği sağlanır (Larsen, 1973).

Tanım 3.3. A birimli bir Banach cebiri (genelde değişmeli olmayan) olmak üzere $a \in A$ nın spektral yarıçapı

$$r(a) \coloneqq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

ile tanımlanır. Bilindiği üzere $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ eşitliği vardır (Larsen, 1973).

3.2. Maksimal Regüler İdealler ve Kompleks Homomorfizmalar

Tanım 3.4. A değişmeli bir Banach cebiri olmak üzere her $a, b \in A$ için $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ özdeşliğini sağlayan $\phi : A \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneline A cebiri üzerinde bir *kompleks homomorfizm* denir. A nın sıfırdan farklı tüm kompleks homomorfizmalarının kümesi Σ_A ile gösterilir. A birimli ve değişmeli ise $\Sigma_A \neq \emptyset$ dır.

Aşağıdaki teorem maksimal idealler ile Σ_A kompleks homomorfizmalar arasındaki ilişkiyi ifade eder.

Teorem 3.2. *A değişmeli bir Banach cebiri olsun.*

(i) *Her $\phi \in \Sigma_A$ elemanı $\|\phi\| \leq 1$ eşitsizliğini sağlar. A birimli ise $\|\phi\| = 1$ dir.*

(ii) *$\phi \in \Sigma_A$ ise $M \coloneqq \phi^{-1}(0)$ bir maksimal regüler idealdir, tersine, $M \subset A$ bir* *maksimal regüler ideal ise* $\phi^{-1}(0) = M$ *olacak şekilde* A *nın bir tek* ϕ *kompleks homomorfizması vardır. Böylece*

$$\phi \to \ker \phi = \{a \in A : \phi(a) = 0\}$$

dönüşümü Σ_A *dan* A *nın tüm maksimal regüler ideallerinin kümesi üzerine bire-bir ve örten bir dönüşümdür* (Larsen, 1973).

Maksimal regüler idealler ile Σ_A kompleks homomorfizmalar arasında bir eşleşme olduğundan, Σ_A uzayına A nın *maksimal ideal uzayı* da denilir.

3.3. Gelfand Dönüşümü ve Gelfand Temsili

Tanım 3.5. A değişmeli Banach cebirindeki her $a \in A$ elemanı için

$$\hat{a}(\phi) = \phi(a)$$

olarak tanımlanan

$$\hat{a} : \Sigma_A \to \mathbb{C}$$

dönüşümüne a nın *Gelfand dönüşümü* (Gelfand transform) denir. A cebirinin yarı basit olması için gerek ve yeter şart Gelfand dönüşümünün bire-bir olmasıdır. $\sigma(A^*, A)$ topolojisinin Σ_A ya indirgediği topolojiye *Gelfand topolojisi* denir. Gelfand topolojisine göre Σ_A lokal kompakt Housdorf topolojik uzaydır. A birimli ise Σ_A kompakttır.

Teorem 3.3. (**Gelfand temsil teoremi**) *A değişmeli bir Banach cebiri ve Σ_A bir Gelfand uzayı olmak üzere*

$$A \to C_o(\Sigma_A), \;\; a \to \hat{a}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir ve

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\phi \in \Sigma_A} |\hat{a}(\phi)| \le \|a\|$$

eşitsizliği sağlanır (Larsen, 1973).

A nın bir I idealinin "hull" kavramı Gelfand temsili ile

$$\mathrm{hull}(I) = \{\phi \in \Sigma_A : \; \hat{a}(\phi) = 0, \forall a \in I\}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.4. *A değişmeli bir Banach cebiri ve I, A nın kapalı bir ideali olmak üzere*

(i) $\Sigma_{A/I}$ *uzayı* $\mathrm{hull}(I)$ *ya homeomorftur,*

(ii) $\widehat{(x+I)} = \hat{x}_{\mid h(I)}$,

(iii) $\Sigma_I = \Sigma_A \backslash \mathrm{hull}(I)$

eşitlikleri vardır (Larsen, 1973).

Teorem 3.5. *A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Her $a \in A$ için aşağıdaki eşitlikler vardır.*

(i) *A birimli ise $\sigma(a) = \{\hat{a}(\phi) : \phi \in \Sigma_A\}$ dır.*

(ii) *A birimli değilse $\sigma(a) = \{\hat{a}(\phi) : \phi \in \Sigma_A\} \cup \{0\}$ dır.*

(iii) $\|\hat{a}\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = r(a)$ *eşitliği sağlanır* (Larsen, 1973).

G lokal kompakt Abel grubu ve $\gamma \in \hat{G}$ olsun. Keyfi $f \in L^1(G)$ nin $\hat{f}$ Fourier dönüşümü yardımıyla $\psi(f) = \hat{f}(\gamma)$ ile tanımlanan $\psi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $L^1(G)$ nin bir kompleks homomorfizmidir. Diğer taraftan $L^1(G)$ nin her kompleks homomorfizmi bu şekildedir (Rudin, 1962). Böylelikle $\Sigma_{L(G)}$ nin her ψ elemanını $\hat{G}$ nın bir γ elemanıyla özdeşleştirebiliriz. Bu özdeşleştirme aşağıdaki şekilde gerçekleşir:

$$\Sigma_{L^1(G)} \leftrightarrow \hat{G}$$

$$\phi \leftrightarrow \gamma$$

$$\phi(f) = \hat{f}(\gamma), f \in L^1(G).$$

Böylelikle oldukça önemli olan $\Sigma_{L^1(G)} = \hat{G}$ eşitliği elde edilir. Anlaşıldığı üzere f nin Fourier dönüşümü tam olarak Gelfand dönüşümüdür.

$\gamma \in \hat{G}$ olmak üzere $\mu \in M(G)$ nin $\hat{\mu}$ Fourier-Stieltjes dönüşümü yardımıyla $\Psi(\mu) = \hat{\mu}(\gamma)$ şeklinde tanımlanan $\Psi : M(G) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $M(G)$ nin bir kompleks homomorfizmdir (Rudin, 1962). Böylece $\hat{G}$ dual grubu $M(G)$ nin Gelfand uzayının bir alt kümesi ile özdeşleştirilebilir. G nin diskret olması dışında (G diskret ise $M(G) = L^1(G)$ dir) $M(G)$ nin Gelfand uzayı tam olarak bilinmemektedir.

3.4. Regüler Banach Cebirleri

Tanım 3.6. A değişmeli bir Banach cebiri olsun. $S \subset \Sigma_A$ kapalı bir küme ve $\phi \in \Sigma_A \setminus S$ için

$$\hat{a}(\phi) = 1 \qquad \text{ve} \qquad \hat{a}(S) = \{0\}$$

olacak şekilde $a \in A$ varsa A cebirine *regüler cebir* denir.

Teorem 3.6. *A regüler bir Banach cebiri, $S \subset \Sigma_A$ kapalı bir küme ve $K \cap S = \emptyset$ olmak üzere bir kompakt $K \subset \Sigma_A$ kümesi verilsin. Bu takdirde*

$$\hat{a}(K) = \{1\} \quad \textit{ve} \qquad \hat{a}(S) = \{0\}$$

olacak şekilde bir $a \in A$ elemanı vardır (Larsen, 1973).

Lemma 3.2. *A bir yarı basit regüler Banach cebiri ve B bir birimli Banach cebiri olsun. Bu takdirde yoğun görüntü kümesine sahip her $w : A \to B$ homomorfizması için*

$$\mathrm{hull}(\ker w) = w^*(\Sigma_B)$$

eşitliği vardır.

İspat. Önce $w^*(\Sigma_B) \subseteq \mathrm{hull}(\ker w)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\phi \in \Sigma_B$ ve $c, d \in A$ alarak

$$\begin{aligned}(w^*\phi)(cd) &= \phi\big(w(cd)\big) \\ &= \phi\big(w(c)w(d)\big) \\ &= (w^*\phi)(c)(w^*\phi)(d)\end{aligned}$$

eşitliğinden bu kapsama görülebilir. Şimdi ise $\mathrm{hull}(\ker w) \subseteq w^*(\Sigma_B)$ kapsamasının doğru olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\phi_0 \in \mathrm{hull}(\ker w)$ ve $\phi_0 \notin w^*(\Sigma_B)$ olacak şekilde bir $\phi_0 \in \Sigma_A$ vardır. U ve V sırasıyla ϕ_0 nin ve $w^*(\Sigma_B)$ ayrık iki komşuluğu olsun. A cebirinin regüler olmasından dolayı $\hat{c}(\phi_0) = 1$ ve her $\phi \in \Sigma_A \backslash U$ için $\hat{c}(\phi) = 0$ olacak şekilde $c \in A$ vardır. Benzer şekilde her $\phi \in w^*(\Sigma_B)$ için $\hat{d}(\phi) = 1$ ve her $\phi \in \Sigma_A \backslash V$ için $\hat{d}(\phi) = 0$ olacak şekilde $d \in A$ vardır. Buradan her $\phi \in \Sigma_A$ için $\hat{c}(\phi)\hat{d}(\phi) = 0$ olduğu kolayca görülür. A cebiri yarı basit olduğundan buradan $cd = 0$ ve dolayısıyla $w(c)w(d) = 0$ elde edilir. Her $\phi \in \Sigma_B$ için $\widehat{w(d)}(\phi) = 1$ olduğundan $w(d)$, B cebirinin tersinir elemanıdır. Böylece $w(c) = 0$, dolayısıyla $c \in \ker w$ olur. $\hat{c}(\phi_0) = 1$ olduğundan $\phi_0 \notin \mathrm{hull}(\ker w)$ olur ki bu ise bir çelişkidir. ■

A bir Banach cebiri olmak üzere A_{00} ile

$$A_{00} \coloneqq \{a \in A : \mathrm{supp}\hat{a} \text{ kompakt}\}$$

kümesi gösterilsin. $\overline{A_{00}} = A$ ise A cebiri *Tauberian*'dır denir. Değişmeli yarı basit ve regüler bir Banach cebiri Tauberian ise bu cebirin sıfırdan farklı her idealinin hull'u boştan farklıdır.

A yarı basit regüler bir Banach cebiri olsun. $S \subset \Sigma_A$ kapalı alt kümesi verildiğinde A nın, hull'u S kümesine eşit olan iki önemli kapalı ideali vardır. Bunlar:

$$I(S) \coloneqq \{a \in A : \hat{a}(S) = \{0\}\}$$

hull'u S kümesine eşit olan en büyük kapalı ideali ve

$$J^0(S) \coloneqq \{a \in A_{00} : \mathrm{supp}\hat{a} \cap S = \emptyset\}$$

olmak üzere $J(S) \coloneqq \overline{J^0(S)}$ ise hull'u S kümesine eşit olan en küçük kapalı idealidir. Eğer

$$I(S) = \overline{J^0(S)}$$

eşitliği gerçekleşiyorsa S kümesi A cebiri için bir *sentez* kümesidir denir (Larsen, 1973).

Teorem 3.7. (**Malliavin teoremi**) *G bir diskret Abel grubu değilse, $L^1(G)$ nin sentezlenemeyen kümesi vardır* (Larsen, 1973).

4. ÇARPANLAR TEORİSİ

4.1. Banach Cebirlerinde Çarpanlar

Bu bölümde Banach cebirlerinin çarpanları ile ilgili daha sonra sıklıkla kullanacağımız çeşitli tanımlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 4.1. A kompleks bir Banach cebiri olsun. Her $a, b \in A$ için

$$(Ta)b = a(Tb)$$

eşitliğini sağlayan $T : A \to A$ dönüşümüne A cebirinin *çarpanı* (multiplier) denir (Larsen, 1971). A cebrinin tüm çarpanlar kümesi $\mathcal{M}(A)$ ile gösterilir.

Değişmeli bir Banach cebirinde keyfi bir $a \in A$ için $L_a b = ab$ ile tanımlanan $L_a : A \to A$ çarpma operatörü A nın bir çarpanı, yani $L_a \in \mathcal{M}(A)$ dır. Eğer A birimi e olan değişmeli bir Banach cebiri ise $a \in A$ ve $T \in \mathcal{M}(A)$ için

$$L_{Te}a = (Te)a = e(Ta) = Ta$$

olduğundan çarpan tanımı, A nın bir a elemanı ile çarpma operatörüne indirgenir. Yani A birimli ise $\mathcal{M}(A) = A$ dır. Bu durumda çarpanlar problemi bir önem arz etmez.

Tanım 4.2. A değişmeli bir Banach cebiri olmak üzere, her $a \in A$ için $aA = \{0\}$ veya $Aa = \{0\}$ eşitliği $a = 0$ olmasını gerektirirse A cebirine *faithful* Banach cebiri denir. A cebiri faithful ise her $a, b, c \in A$ ve $T \in \mathcal{M}(A)$ için

$$c[a(Tb)] = c[(Ta)b] = (Tc)(ab) = cT(ab)$$

olduğundan $a(Tb) - T(ab) = 0$ elde edilir. Böylece çarpan tanımı

$$(Ta)b = a(Tb) = T(ab) \qquad (\forall\ a, b \in A)$$

eşitliği ile de ifade edilebilir (Aiena, 2004).

$\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ yaklaşık birime sahip bir A Banach cebiri faithfuldur. Gerçekten $aA = \{0\}$ ise her $b \in A$ için $ab = 0$ dır. Özel olarak her $\lambda \in \Lambda$ için $ae_\lambda = 0$ dır. $\lim\limits_{\lambda} ae_\lambda = a$ olduğundan $a = 0$ elde edilir.

Ayrıca yarı basit bir A cebiri yine faithfuldur. Bunu görmek için $a \in A$ olmak üzere $aA = \{0\}$ olsun. Buradan her $b \in A$ için $ab = 0$ veya $\hat{a}\hat{b} = 0$ olur. Öte yandan her $\phi \in \Sigma_A$ için $\hat{b}(\phi) \neq 0$ olacak şekilde $b \in A$ vardır. Demek ki her $\phi \in \Sigma_A$ için $\hat{a}(\phi) = 0$ olur. A cebiri yarı basit olduğundan $a = 0$ elde edilir.

Teorem 4.1. *A bir faithful Banach cebiri olsun. Her $T \in \mathcal{M}(A)$ için*

(i) *$T \in B(A)$ dır.*

(ii) *$\mathcal{M}(A)$, $B(A)$ cebirinin birimini içeren kapalı ve değişmeli bir alt cebiridir.*

(iii) *A faithful değişmeli bir Banach cebiri ise $a \to L_a$ dönüşümü A cebirinden $\mathcal{M}(A)$ cebirinin $\{L_a : a \in A\}$ ideali üzerine bir sürekli izomorfizm'dir* (Larsen, 1971).

Tanım 4.3. B, birimli bir A cebirinin alt cebiri olsun. Eğer A cebirinde tersinir olan herhangi bir $b \in B$ elemanı, aynı zamanda B alt cebirinde de tersinir ise B alt cebirine *dolu alt cebir* denir (Laursen ve Neumann, 2000).

Yukarıda ifade edilen tanım ile $\mathcal{M}(A)$, $B(A)$ nın dolu alt cebiridir. Gerçekten, her $a, b \in A$ ve $T \in \mathcal{M}(A)$ için

$$T[a(T^{-1}b) - (T^{-1}a)b] = aTT^{-1}b - (TT^{-1}a)b = 0$$

ve T, bire-bir ve örten olduğundan $(T^{-1}a)b = a(T^{-1}b)$ olur, yani $T^{-1} \in \mathcal{M}(A)$ dır. Böylelikle spektral teori açısından oldukça önemli olan aşağıdaki sonuç elde edilir. $T \in \mathcal{M}(A)$ olmak üzere

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathcal{M}(A)}(T)$$

eşitliği geçerlidir (Aiena, 2004; Laursen ve Neumann, 2000).

4.2. Helgason-Wang Temsili

Değişmeli yarı basit Banach cebirlerin çarpanlar teorisinde önemli bir rol oynayan ve Helgason-Wang temsili olarak da bilinen aşağıdaki teorem, A nın her T çarpanının Σ_A lokal kompakt Hausdorff uzayı üzerinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olarak temsil edilebileceğini göstermektedir (Wang, 1961).

Teorem 4.2. *A değişmeli yarı basit bir Banach cebiri olsun. Her $T \in \mathcal{M}(A)$ için*

(i) $\widehat{(Ta)}(\phi) = \varphi_T(\phi)\hat{a}(\phi) \qquad (a \in A, \phi \in \Sigma_A)$

(ii) $\|\varphi_T\|_\infty \leq \|T\|$

özelliklerini sağlayan Σ_A üzerinde tanımlı bir tek sınırlı ve sürekli φ_T fonksiyonu vardır (Aiena, 2004).

$\mathcal{M}(A)$ değişmeli birimli bir Banach cebiri olduğundan $\mathcal{M}(A)$ nın maksimal ideal uzayı $\Sigma_{\mathcal{M}(A)}$ kompakt olur. Aşağıdaki teorem faithful değişmeli Banach cebirlerinde $\mathcal{M}(A)$ nın Gelfand uzayı $\Sigma_{\mathcal{M}(A)}$ ile A nın Gelfand uzayı Σ_A arasındaki ilişkiyi ifade eder. Teorem 4.1'den dolayı, A cebiri ile $\mathcal{M}(A)$ nın $\{L_a : a \in A\}$ ideali cebirsel olarak özdeşleştirilebileceğinden hareketle $A = \{L_a : a \in A\}$ olmasını kullanacağız.

Teorem 4.3. *A faithful değişmeli bir Banach cebiri olsun. Her $\phi \in \Sigma_A$ için*

$$\Phi(L_a) = \phi(a) \qquad (a \in A)$$

sağlayan bir tek $\Phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)}$ vardır. Eğer $\Phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)}$ ise o zaman ya her $a \in A$ için $\Phi(L_a) = 0$ ya da $\Phi(L_a) = \phi(a)$ olacak şekilde bir tek $\phi \in \Sigma_A$ vardır (Aiena, 2004; Larsen, 1971).

Yukarıda ifade edilen teoremin bir sonucu olarak, $\phi \to \Phi$ dönüşümü Σ_A ile

$$\Omega \coloneqq \left\{\Phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)} : \Phi(L_a) \neq 0, \exists a \in A\right\}$$

kümesi arasında bire-bir ve örten olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca $A = \{L_a : a \in A\}$ idealinin hull'u

$$\mathrm{hull}_{\mathcal{M}(A)}(A) = \left\{\Phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)} : \Phi_{|A} \equiv 0, \forall a \in A\right\}$$

olmak üzere

$$\Sigma_{\mathcal{M}(A)} = \Sigma_A \cup \mathrm{hull}_{\mathcal{M}(A)}(A)$$

yazılabilir.

Σ_A, $\Sigma_{\mathcal{M}(A)}$ nın bir alt kümesi olarak düşünüldüğünde, Σ_A nın Gelfand topolojisi $\Sigma_{\mathcal{M}(A)}$ tarafından üretilen alt uzay topolojisi ile çakışır. Ek olarak

$$\hat{T} : \Sigma_{\mathcal{M}(A)} \to \mathbb{C}$$

dönüşümü T nin Gelfand dönüşümü ise

$$\widehat{T}_{|\Sigma_A} = \varphi_T$$

elde ederiz. Bundan dolayı Σ_A üzerinde tanımlanan Helgason-Wang fonksiyonu için hem φ_T hemde $\widehat{T}$ gösterimini kullanabiliriz.

G lokal kompakt bir Abel grubu olsun. Her $\mu \in M(G)$ için $T_\mu f = \mu * f$, $f \in L^1(G)$ şeklinde tanımlanan $T_\mu : L^1(G) \to L^1(G)$ konvolüsyon operatörü $L^1(G)$ için bir çarpandır. $L^1(G)$ nin her çarpanı bu şekilde elde edilir ve $\mu \to T_\mu$ dönüşümü bir izometrik izomorfizmdir (Wendel, 1952). Diğer bir ifadeyle $\mathcal{M}\big(L^1(G)\big) = M(G)$ dir. $\hat{f}$ ve $\hat{\mu}$, f nin ve μ nün sırasıyla Fourier ve Fourier-Stieltjes dönüşümleri olsun. Her $\gamma \in \widehat{G}$ için

$$\widehat{T_\mu}(\gamma)\hat{f}(\gamma) = \big(\widehat{T_\mu f}\big)(\gamma) = (\widehat{\mu * f})(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)\hat{f}(\gamma)$$

olduğundan $\widehat{T_\mu} = \hat{\mu}$ elde edilir.

4.3. Kuvvet Sınırlı Operatörler

Tanım 4.4. X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $\|T\| \le 1$ ise T operatörüne daralma operatörü; $C_T \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T^n\| < \infty$ ise *kuvvet sınırlı* operatör ve $\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|T^n\| < \infty$ ise *çift kuvvet sınırlı* operatör denir. $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right\| < \infty$ eşitsizliğini sağlayan bir T operatörüne *Cesàro sınırlıdır* denir.

T operatörü kuvvet sınırlı ise

$$\|x\|_1 = \sup_{n\ge 0}\|T^n x\|$$

eşitliği X in normuna denk bir norm tanımlar. Gerçekten de bir taraftan $\|x\| \le \|x\|_1$ diğer taraftan ise

$$\|x\|_1 = \sup_{n\ge 1}\|T^n x\| \le C_T\|x\|$$

olduğu görülür. Bu yeni norma göre T bir daralma operatörü olur:

$$\|Tx\|_1 = \sup_{n\ge 1}\|T^n x\| \le \sup_{n\ge 0}\|T^n x\| = \|x\|_1$$

olduğundan $\|T\|_1 \leq 1$ dir. Bu nedenle kuvvet sınırlı operatörler için geçerli olan her durum daralma operatörü içinde geçerlidir. T bir daralma operatörü olması durumunda $\{\|T^n x\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi azalan olur ve bu yüzden her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|$ vardır.

Lemma 4.1. *X bir Banach uzayı, T_n düzgün sınırlı operatörler dizisi ve E bir alt uzay olsun. Eğer her $x \in E$ için $\|T_n x\| \to 0$ ise bu takdirde her $x \in \bar{E}$ için $\|T_n x\| \to 0$ olur.*

Lemma 4.2. *X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun.*

(i) *T kuvvet sınırlı operatör ise $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, T çift kuvvet sınırlı ise $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$ dir.*

(ii) *$r(T) < 1$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$ olmasıdır.*

İspat.

(i) T kuvvet sınırlı operatör ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T^n\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Buradan $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ olur. Diğer taraftan $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ olduğundan $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ elde edilir. Benzer şekilde $\sigma(T^{-1}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ olur. $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$ olduğundan, $\lambda \in \sigma(T)$ olmak üzere bir taraftan $|\lambda| \leq 1$ diğer taraftan ise $|\lambda^{-1}| \leq 1$ olur ki buradan $|\lambda| = 1$ elde edilir.

(ii) $r(T) < 1$ olsun. Spektral yarıçap formülünden $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ bulunur. $0 < \delta < 1$ olmak üzere bir δ sayısını alalım. Yeterince büyük n ler için $\|T^n\| \leq \delta^n \to 0$ olur ki buradan $\|T^n\| \to 0$ elde edilir. Şimdi de $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$ olsun. Her $\lambda \in \sigma(T)$ için $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ olduğundan $|\lambda|^n \leq \|T^n\| \to 0$ olur ki buradan da $|\lambda| < 1$ olur. Böylece $r(T) < 1$ elde edilir. ■

Örnek 4.1. $r(T) \leq 1$ olması T operatörünün kuvvet sınırlı olmasını gerektirmez. Bunun için $N \neq 0$ ve $N^2 = 0$ olmak üzere bir N nilpotent operatör alalım ve $T = I + N$ olarak tanımlayalım. Spectral dönüşüm teoreminden $\sigma(T) = \{1\}$ dir. Diğer taraftan $(I + N)^n = 1 + nN$ olduğundan buradan

$$\|(I + N)^n\| = \|1 + nN\| = n\left\|\frac{1}{n} + N\right\| \to \infty \ (n \to \infty)$$

olur. Bu ise T nin kuvvet sınırlı olmadığını gösterir.

Lemma 4.3. *A birimli bir Banach cebiri ve $a \in A$ olmak üzere $L_a : A \to A;\ \ b \to ab$ çarpma operatörü tanımlansın. O zaman $\sigma(L_a) = \sigma(a)$ dır.*

İspat. $\lambda \in \rho(a)$ ise $(\lambda e - a)b = e$ olacak şekilde $b \in A$ vardır. Çarpma operatörünün tanımından $\lambda L_e L_b - L_a L_b = L_e$ yani $(\lambda I - L_a)L_b = I$ olduğundan $\lambda \in \rho(L_a)$ olur. Diğer yandan $\lambda \in \rho(L_a)$ ise $(\lambda I - L_a)S = I$ sağlanacak şekilde $S \in B(A)$ vardır. Böylece A nın her elemanı için eşitlik sağlandığından özel olarak $e \in A$ içinde sağlanır. Buradan $(\lambda I - L_a)Se = e$ veya $(\lambda e - a)Se = e$, ki burada e cebirin birim elemanıdır. Böylece $\lambda e - a$ tersinirdir dolayısıyla $\lambda \in \rho(a)$ dır. ■

4.4. Kuvvet Sınırlı Çarpanlar

A değişmeli bir Banach cebiri ve $T \in \mathcal{M}(A)$ olmak üzere çarpanlar teorisinde önemli bir rol oynayan

$$\mathcal{F}_T \coloneqq \left\{\gamma \in \Sigma_A :\ \hat{T}(\gamma) = 1\right\}$$

ve

$$\mathcal{E}_T \coloneqq \left\{\gamma \in \Sigma_A :\ \left|\hat{T}(\gamma)\right| = 1\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\hat{T}$, T nin Helgason-Wang temsilidir. Tezimiz boyunca tanımlanan bu kümeler önemli bir rol oynayacaktır. A değişmeli bir Banach cebiri ve T, A nın bir çarpanı olmak üzere

$$F_T \coloneqq \overline{(I - T)A}$$

şeklinde tanımlanan F_T, A nın kapalı bir idealidir. Ayrıca F_T idealinin hull'u

$$\mathrm{hull}(F_T) = \mathcal{F}_T$$

dir. Gerçekten, $\gamma \in \mathrm{hull}(F_T)$ ise $a \in A$ olmak üzere $a - Ta \in (I - T)A$ için $\hat{a}(\gamma) - \hat{a}(\gamma)\hat{T}(\gamma) = 0$ dır. Ayrıca $\hat{a}(\gamma) \neq 0$ olacak şekilde $a \in A$ olduğundan $\hat{T}(\gamma) = 1$ elde edilir. Diğer yandan $\hat{T}(\gamma) = 1$ ve $a \in F_T$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $\|a - (b - Tb)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $b \in A$ vardır. Böylelikle her $\varepsilon > 0$ için $|\hat{a}(\gamma)| = \left|\hat{a}(\gamma) - \hat{b}(\gamma) + \hat{T}(\gamma)\hat{b}(\gamma)\right| < \varepsilon$ olduğundan $\hat{a}(\gamma) = 0$ olur ki $\gamma \in \mathrm{hull}(F_T)$ elde edilir. Ayrıca kolayca görebiliriz ki F_T nin dik tamlayanının

$$F_T^{\perp} = \{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$$

olduğu görülür.

T kuvvet sınırlı bir çarpan olmak üzere her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{T}(\gamma)\right| \leq 1$ olur. Gerçekten de, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\hat{T}(\gamma)\right|^n \leq \|T^n\| \leq C_T$$

olduğundan $n \to \infty$ iken limit alındığında $\left|\hat{T}(\gamma)\right| \leq C_T^{\frac{1}{n}} \to 1$ elde edilir.

T çift kuvvet sınırlı bir çarpan olmak üzere her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{T}(\gamma)\right| = 1$ dir. Şimdi ise bu eşitliği gösterelim. T kuvvet sınırlı bir çarpan olduğun yukarıda da görüldüğü üzere her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{T}(\gamma)\right| \leq 1$ dir. Diğer yandan T tersinir ve $\mathcal{M}(A)$ dolu bir alt cebir olduğundan $T^{-1} \in \mathcal{M}(A)$ dır. Buradan her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\hat{T}(\gamma)\widehat{T^{-1}}(\gamma) = 1$ ve dolayısıyla $\widehat{T^{-1}}(\gamma) = \hat{T}(\gamma)^{-1}$ olur. Buradan T^{-1} kuvvet sınırlı olduğundan her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\left(\hat{T}(\gamma)\right)^{-1}\right| \leq 1$ veya $\left|\hat{T}(\gamma)\right| \geq 1$ bulunur. Sonuç olarak her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{T}(\gamma)\right| = 1$ elde edilir.

Lemma 4.4. *X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ kuvvet sınırlı bir operatör olmak üzere*

$$\overline{(I-T)X} = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x\right\| = 0\right\}$$

eşitliği vardır.

İspat. $x \in (I-T)X$ olsun. $x = y - Ty$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. T kuvvet sınırlı olduğundan

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k (y - Ty)\right\| = \left\|\frac{y - T^n y}{n}\right\|$$
$$\leq \frac{1}{n}(\|y\| + C_T\|y\|) \to 0 \ (n \to \infty).$$

$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ operatörler dizisi düzgün sınırlı ve her $x \in (I-T)X$ $\left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right)x\right\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$ olduğundan böylece her $x \in \overline{(I-T)X}$ için de $\left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right)x\right\| \to 0 \ (n \to \infty)$ dır (bkz. Lemma 4.1).

Şimdi de $x \notin \overline{(I-T)X}$ olsun. Bu takdirde $\varphi(x) \neq 0$ ve $\varphi \in [(I-T)X]^{\perp}$ olacak şekilde $\varphi \in X^*$ vardır. Buradan $T^*\varphi = \varphi$ ve

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle\varphi, T^k x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle T^{*k}\varphi, x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle\varphi, x\rangle = \langle\varphi, x\rangle$$

elde edilir. $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x\right\| \to 0 \ (n \to \infty)$ olduğundan $\langle\varphi, x\rangle = 0$ dır. Fakat bu sonuç $\varphi(x) \neq 0$ olması ile çelişir. ■

$T \in \mathcal{M}(A)$ kuvvet sınırlı bir çarpan olmak üzere

$$I_T \coloneqq \left\{a \in A : \ \underset{n}{\mathrm{l.i.m.}}\|T^n a\| = 0\right\}$$

şeklinde tanımlanan I_T, A nın kapalı ve T-invaryant bir idealidir. Burada $\mathrm{l.i.m.}$ bir sabit Banach limitidir. Gösterelim ki, $a \in I_T$ ise $\|T^n a\| \to 0$ dır. Gerçekten, $\underset{n}{\mathrm{l.i.m.}}\|T^n a\| = 0$ ise o zaman $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|T^n a\| = 0$ olduğundan bir $\{n_k\}$ alt dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty}\|T^{n_k} a\| = 0$ olur. Buradan da

$$\|T^n a\| \leq \|T^{n-n_k}\|\|T^{n_k} a\| \leq C_T\|T^{n_k} a\|$$

eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty}\|T^n a\| = 0$ elde ederiz. Bu da göstermektedir ki I_T, Banach limitinin seçiminden bağımsızdır. Böylece

$$I_T \coloneqq \left\{a \in A : \ \lim_{n\to\infty}\|T^n a\| = 0\right\}$$

yazabiliriz. I_T, A nın kapalı bir idealidir. Aşağıdaki lemma Kaniuth ve ark. (2010) tarafından ispat edilmesine rağmen bizim ifade ettiğimiz ispat hem farklı hemde daha kısadır.

Lemma 4.5. *A değişmeli yarı basit regüler bir Banach cebiri ve $T \in \mathcal{M}(A)$ kuvvet sınırlı ise*

$$\mathrm{hull}(I_T) = \mathcal{E}_T$$

eşitliği vardır.

İspat. Her $\gamma \in \Sigma_A$ ve her $a \in A$ için

$$(\widehat{T^n a})(\gamma) = \hat{T}(\gamma)^n \hat{a}(\gamma)$$

olduğundan her $\gamma \in \mathcal{E}_T$ ve her $a \in I_T$ için

$$|\hat{a}(\gamma)| = |\hat{a}(\gamma)|\left|\hat{T}(\gamma)\right|^n \leq \|T^n a\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

olur. Böylece $\mathcal{E}_T \subseteq \text{hull}(I_T)$ elde edilir. Diğer yandan kabul edelim ki bir $\gamma_0 \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{T}(\gamma_0)\right| < 1$ sağlansın. O zaman her $\gamma \in \bar{U}$ için $\left|\hat{T}(\gamma)\right| < 1$ olacak şekilde γ_0 ın bir U kompakt komşuluğu vardır. $K \subseteq \Sigma_A$ kompakt kümesi $\gamma_0 \in K \subset U$ sağlansın. A regüler olduğundan $\hat{a}(K) = \{1\}$ ve $\hat{a}(\Sigma_A \backslash U) = \{0\}$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. supp$\hat{a} \subseteq \bar{U}$ olduğundan her $\gamma \in$ supp$\hat{a}$ için $\left|\hat{T}(\gamma)\right| < 1$ dir. supp$\hat{a}$ kompakt olduğundan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T^n a\|^{\frac{1}{n}} = \max\left\{\left|\hat{T}(\gamma)\right| : \gamma \in \text{supp}\hat{a}\,\right\}$$

eşitliği (bkz. Laursen ve Neuman, 2000) ile $\lim_{n\to\infty} \|T^n a\| = 0$ dır ve böylece $a \in I_T$ dır. $\hat{a}(\gamma_0) = 1$ olduğundan $\gamma_0 \notin \text{hull}(I_T)$ dir. ■

A cebiri Tauberian ve $T \in \mathcal{M}(A)$ kuvvet sınırlı ise $\mathcal{E}_T = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart her $a \in A$ için $\lim_{n\to\infty} \|T^n a\| = 0$ olmasıdır. Çünkü

$$A = \text{hull}(\emptyset) = \text{hull}(\mathcal{E}_T) = I_T$$

eşitliği sağlanır.

$T \in \mathcal{M}(A)$ olmak üzere Σ_A nın $\mathcal{E}_T$ ve $\mathcal{F}_T$ alt kümeleri arasında her $\gamma \in \Sigma_A$ için

$$\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\} \iff \mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T \iff \lim_{n\to\infty} \left|\hat{T}(\gamma)^{n+1} - \hat{T}(\gamma)^n\right| = 0$$

ilişkisi yazabilir.

$\mu \in M(G)$ olmak üzere $C_\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mu^n\| < \infty$ eşitsizliğini sağlayan bir μ ölçümüne *kuvvet sınırlı bir ölçüm* denir. $\mu \in M(G)$ kuvvet sınırlı bir ölçüm olmak üzere

$$I_\mu = \left\{f \in L^1(G) : \text{l.}\underset{n}{\text{i.}}\text{m.}\|\mu^n * f\|_1 = 0\right\},$$

$L^1(G)$ cebirinin kapalı bir idealidir ve $I_\mu = I_{T_\mu}$ eşitliği sağlanır. Burada $T_\mu = \mu * f$ şeklinde tanımlıdır.

Kuvvet sınırlı bir $\mu \in M(G)$ ölçümü için $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq 1$, $(\forall \gamma \in \hat{G})$ eşitsizliği vardır çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $|\hat{\mu}(\gamma)|^n \leq \|\mu^n\|_1 \leq C_\mu$ olduğundan $n \to \infty$ iken limit alındığında $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq C_\mu^{\frac{1}{n}} \to 1$ elde edilir. Eğer

$$\mathcal{E}_\mu := \left\{\gamma \in \hat{G} :\ |\hat{\mu}(\gamma)| = 1\right\}$$

olarak tanımlanırsa $\widehat{T_\mu} = \hat{\mu}$ olduğundan $\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_{T_\mu}$ olur. Böylelikle

$$\text{hull}(I_\mu) = \mathcal{E}_\mu$$

eşitliği elde edilir.

5. KATZNELSON-TZAFRİRİ TİPLİ TEOREMLER

Klasik Katznelson-Tzafriri Teoremi (Teorem 5.3), bir Banach uzayında etki eden kuvvet sınırlı bir T operatörü için $n \to \infty$ iken

$$\{T^n - T^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisinin asimptotik davranışını ifade eder. Operatör yarı grupları için asimptotik teorinin en önemli köşe taşlarından biri olarak değerlendirilen Katznelson-Tzafriri teoreminin uygulamaları stokastik süreçler teorisinde ve iterasyon metotlar teorisinde karşımıza çıkmaktadır. I. M. Gelfand (1941) tarafından ispat edilen aşağıdaki teorem Katznelson-Tzafriri Teoremi için bir başlangıç noktası olması yönüyle oldukça önemlidir.

Teorem 5.1. *$T \in B(X)$ operatörü çift kuvvet sınırlı olup $\sigma(T) = \{1\}$ ise $T = I$ dır* (Zemánek, 1994).

Sonrasında J. Esterle (1983), Gelfand'ın bu teoremini aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

Teorem 5.2. *$T \in B(X)$ operatörü kuvvet sınırlı olup $\sigma(T) = \{1\}$ ise*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n - T^{n+1}\| = 0$$

eşitliği gerçekleşir (Esterle, 1983).

Y. Katznelson ve L. Tzafriri (1986) ise Esterle'nin bu teoremini aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Teorem 5.3. *$T \in B(X)$ kuvvet sınırlı bir operatör olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n - T^{n+1}\| = 0$$

eşitliğinin gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subseteq \{1\}$ olmasıdır (Katznelson ve Tzafriri, 1986).

Katznelson-Tzafriri Teoremi, daha sonra birçok araştırmacı tarafından farklı yönlerde genelleştirilmiştir: Allan, 1989; Esterle ve ark. 1990; Phóng, 1997; Neerven, 1996; Zarrabi, 2013.

Tezimizin bu bölümünde Banach cebirleri üzerindeki çarpanlar teorisi için bazı Katznelson-Tzafriri tipli teoremler verilecektir. Bu bölümün ana neticesi ifade edilmeden önce bazı ön bilgileri ifade edelim.

A değişmeli yarı basit bir Banach cebiri olsun. Öncelikle $T \in \mathcal{M}(A)$ olmak üzere $\widehat{T}(\Sigma_A) \subseteq \sigma(T)$ kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim: $\gamma_0 \in \Sigma_A$ olsun. Kabul edelim ki $\widehat{T}(\gamma_0) \in \rho(T)$ sağlansın. O zaman $\big(\widehat{T}(\gamma_0)I - T\big)S = I$ olacak şekilde $S \in \mathcal{M}(A)$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} 1 = \hat{I}(\gamma_0) &= \big(\widehat{T}(\widehat{\gamma_0)I} - T\big)(\gamma_0)\hat{S}(\gamma_0) \\ &= \Big(\widehat{T}(\gamma_0) - \widehat{T}(\gamma_0)\Big)\hat{S}(\gamma_0) = 0 \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\widehat{T}(\gamma_0) \in \sigma(T)$ elde edilir. Böylece her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\widehat{T}(\gamma) \in \sigma(T)$ olduğundan $\|\widehat{T}\|_\infty \leq r(T)$ eşitsizliği doğrudur.

Ayrıca $\gamma \in \mathcal{E}_T$ ise $|\widehat{T}(\gamma)| = 1$ olduğundan $\widehat{T}(\mathcal{E}_T) \subseteq \mathbb{T}$ dir. Böylelikle yukarıda elde edilen kapsama ile birlikte

$$\widehat{T}(\mathcal{E}_T) \subseteq \sigma(T) \cap \mathbb{T}$$

sonucu elde edilir. $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ kapalı olduğundan $\overline{\widehat{T}(\mathcal{E}_T)} \subseteq \sigma(T) \cap \mathbb{T}$ kapsaması da doğrudur.

Aşağıda $\mathbb{T} \subseteq \sigma(T) \cap \mathbb{T}$ kapsamasının sağlandığı fakat $\widehat{T}(\mathcal{E}_T)$ kümesinin sonlu olduğu bir $T \in \mathcal{M}(A)$ çarpan örneği verildi. Böylece bu örnek ile $\widehat{T}(\mathcal{E}_T)$ kümesinin genelde $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ nin "küçük" bir parçası olduğunu söyleyebiliriz.

$\mu \in M(G)$ ölçümü, $0 < m \leq n < \infty$ olduğunda $\mu^n \perp \mu^m$ sağlayan bir Hermit olasılık ölçümü ise $\sigma_{M(G)}(\mu) = \overline{\mathbb{D}}$ dır (Graham, 1979). Ayrıca

$$\sigma(T_\mu) = \sigma_{\mathcal{M}(L^1(G))}(T_\mu) = \sigma_{M(G)}(\mu) = \overline{\mathbb{D}}$$

olduğundan $\mathbb{T} = \sigma(T_\mu) \cap \mathbb{T}$ elde edilir. Diğer yandan $\hat{\mu}$ reel değerli olduğundan

$$\widehat{T_\mu}\left(\mathcal{E}_{T_\mu}\right) = \hat{\mu}(\mathcal{E}_\mu) \subseteq \{-1, 1\}$$

olur.

Önerme 5.1. *A değişmeli yarı basit regüler bir Banach cebiri ve $T \in \mathcal{M}(A)$ kuvvet sınırlı bir çarpan ve $\mathcal{S} = \mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T$ olsun. $\mathcal{S}$ sentezlenebilir ise bu takdirde*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n a - T^{n+1}a\| = 0 \quad (\forall a \in A)$$

eşitliği vardır.

İspat. Lemma 4.5 ile $\mathrm{hull}(I_T) = \mathcal{E}_T$ ve ayrıca $\mathrm{hull}(F_T) = \mathcal{F}_T$ eşitliğinden

$$\mathrm{hull}(I_T) = \mathcal{S} = \mathrm{hull}(F_T)$$

olur. Ayrıca $\mathcal{S}$ sentezlenebilir olmasından $I_T = F_T$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece her $a \in A$ için $a - Ta \in F_T$ ve buradan

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n a - T^{n+1}a\| = \lim_{n\to\infty} \|T^n(a - Ta)\| = 0 \qquad (\forall a \in A)$$

sonucu elde edilir. ■

Bu tezin ilk ana sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem 5.4. *A değişmeli yarı basit regüler ve Tauberian bir Banach cebiri, T ise A nın kuvvet sınırlı bir çarpanı olsun. $\mathcal{E}_T$ kompakt ise bu takdirde*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n a - T^{n+1}a\| = 0 \quad (\forall a \in A)$$

olması için gerek ve yeter şart $\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$ olmasıdır.

Tanım 5.1. X bir Banach uzayı ve $V \in B(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|Vx\| = \|x\|$ sağlanıyorsa V ye bir *izometri* denir. Açıktır ki $\|V\| = 1$ dir. V izometrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart V nin örten veya $VX = X$ olmasıdır. Bir V izometrisi tersinir ise

$$\|x\| = \|VV^{-1}x\| = \|V^{-1}x\|$$

olduğundan tersi V^{-1} de bir izometridir. $VX \neq X$ olması durumunda $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$ ve $VX = X$ ise $\sigma(V) \subseteq \mathbb{T}$ olur (Esterle ve ark., 1990).

Teoremi ispat edilmeden önce aşağıda verilen ve Banach cebirlerinde kuvvet sınırlı her çarpanın izometrik bir çarpana genişletilebileceğini ifade eden yardımcı teoremi ispat edelim.

Lemma 5.1. *A değişmeli bir Banach cebiri ve T operatörü A nın bir daralma çarpanı olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartları sağlayan*

(i) $\|Q(a)\|_B = \lim_{n\to\infty} \|T^n a\|\,,\ \forall a \in A$

(ii) $VQ = QT$

(iii) $\sigma(V) \subseteq \sigma(T)$

bir B Banach cebiri, yoğun görüntüye sahip sürekli bir $Q : A \to B$ homomorfizması ve B nin bir izometrik V çarpanı bulunur.

İspat. A/I_T bölüm cebiri üzerinde

$$\|a + I_T\|_1 := \lim_{n\to\infty} \|T^n a\| \quad (a \in A)$$

olarak tanımlanan bir normu göz önüne alalım. Önceki bölümde ifade edildiği üzere I_T ideali,

$$I_T = \left\{a \in A :\ \lim_{n\to\infty} \|T^n a\| = 0\right\}$$

olarak tanımlandı. $T \in \mathcal{M}(A)$ ise $\mathcal{M}(A)$ bir cebir olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n \in \mathcal{M}(A)$ dir. Dolayısıyla her $a, b \in A$ için

$$T^{2n}(ab) = T^n\big(T^n(ab)\big) = T^n\big(aT^n(b)\big) = T^n(a)T^n(b) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eşitliği yazılabilir. Böylece her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned}
\|(a + I_T)(b + I_T)\|_1 &= \|ab + I_T\|_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T^n(ab)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T^{2n}(ab)\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|T^n(a)T^n(b)\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|T^n(a)\| \lim_{n\to\infty} \|T^n(b)\| \\
&\le \|a + I_T\|_1 \|b + I_T\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. B, A/I_T nin $\|a + I_T\|_1$ normuna göre tamlanışı olsun. B bir Banach cebiridir. $a \in A$ olmak üzere

$$Q(a) = a + I_T$$

şeklinde tanımlanan $Q : A \to B$ dönüşümü yoğun görüntüye sahip bir daralma homomorfizmasıdır ve her $a \in A$ için

$$\|Q(a)\|_B = \lim_{n\to\infty} \|T^n a\|$$

eşitliği sağlanır. Şimdi ise $(A/I_T\,, \|\cdot\|_1)$ üzerinde

$$V : a + I_T \to Ta + I_T$$

olarak tanımlanan V operatörünü göz önüne alalım.

$$\|V(a + I_T)\|_1 = \|Ta + I_T\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|T^{n+1}a\| = \|a + I_T\|_1$$

olduğundan V, $(A/I_T\,, \|a + I_T\|_1)$ üzerinde bir izometridir. A/I_T, B de yoğun olduğundan V operatörü izometrik olarak tüm B uzayına genişletilebilir. Bu şekilde elde edilen bir genişlemeyi tekrardan V ile gösterelim. V, B üzerinde bir çarpandır ve $VQ = QT$ eşitliği sağlanır. Böylelikle Lemma 5.1'in (i) ve (ii) kısımları ispat edilmiş olur.

Şimdi de Lemma 5.1'in (iii) şıkkını ispat edelim. Bu amaçla $\lambda \in \rho(T)$ alalım ve $(A/I_T\,, \|a + I_T\|_1)$ uzayı üzerinde

$$S_\lambda \coloneqq a + I_T \to R_\lambda(T)a + I_T$$

operatörünü tanımlayalım. Böylelikle

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(x + I_T)\|_1 &= \lim_{n\to\infty} \|T^n R_\lambda(T)a\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|R_\lambda(T)T^n a\| \\ &\le \|R_\lambda(T)\| \lim_{n\to\infty} \|T^n a\| \\ &\le \|R_\lambda(T)\| \|a + I_T\|_1\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. A/I_T cebiri B de yoğun olduğundan S_λ operatörü tüm B uzayına genişletilebilir. Bu şekilde elde edilen bir genişlemeyi tekrardan S_λ ile gösterelim. Ayrıca Lemma 5.1'in (ii) şıkkından ve S_λ operatörünün tanımından aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$(\lambda I - V)Q = Q(\lambda I - T) \quad \text{ve} \quad S_\lambda Q = QR_\lambda(T).$$

Buradan ise

$$S_\lambda(\lambda I - V)Q = S_\lambda Q(\lambda I - T) = QR_\lambda(T)(\lambda I - T) = Q$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca Q yoğun görüntüye sahip olduğundan $S_\lambda(\lambda I - V) = I$ olur. Benzer şekilde $(\lambda I - V)S_\lambda = I$ olduğu elde edilebilir. Bu gösterir ki $\lambda \in \rho(V)$ dir. Sonuç olarak $\sigma(V) \subseteq \sigma(T)$ olduğu ispat edilmiş olur. ∎

(V, Q, B) üçlüsüne T operatörünün doğurduğu *izometrik çarpan* üçlüsü diyeceğiz.

Not 5.1. A değişmeli bir Banach cebiri, T bir daralma çarpanı ve (V, Q, B), T nin doğurduğu izometrik çarpan üçlüsü olsun.

(i) A cebiri yarı basit olduğunda genel olarak B cebiri yarı basit olmak zorunda değildir. Genelde bir sürekli homomorfizma yarı basitliği korumaz. Örneğin, G lokal kompakt fakat kompakt olmayan bir Abel grup ve $L^1(G)$ grup cebiri olsun. Malliavin Teoremi'ne (Teorem 3.7) göre G grubu kompakt değilse, $L^1(G)$ nin sentezlenemeyen bir $S \subset \hat{G}$ kapalı alt kümesi vardır. Buradan $L^1(G) \,/\, J(S)$ cebirinin yarı basit olmadığı aşikardır. Buna rağmen

$$\pi : L^1(G) \to L^1(G) \,/\, J(S)$$

bölüm dönüşümü bir sürekli homomorfizmdir. Buradan da anlaşılmaktadır ki, bir önceki lemmada (Lemma 5.1) A cebirini yarı basit aldığımızda B cebirinin yarı basitliği hakkında genelde bir şey söyleyemiyoruz; fakat bazı durumlarda B cebirinin faithful olması hakkında fikir edinebiliriz. Örneğin $\{e_\lambda\}$, A nın sınırlı yaklaşık birimi ise A cebiri faithful olur. $\overline{Q(A)} = B$ olduğundan $\{Qe_\lambda\}$ dizisi B nin sınırlı yaklaşık birimi olur. Gerçekten,

$$\|Q(a)Q(e_\lambda) - Q(a)\|_B = \|Q(ae_\lambda - \mathrm{a})\|_B \leq \|ae_\lambda - \mathrm{a}\| \to 0$$

ve $\{Q(e_\lambda)\}$ dizisi sınırlı olduğundan her $b \in B$ için

$$\|Q(e_\lambda)b - b\|_B \to 0$$

olur. Böylece bu durumda B cebiri faithfuldur.

(ii) Bir X Banach uzayı üzerinde etki eden bir V izometrisinin spektrumu $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$ veya $\sigma(V) \subseteq \mathbb{T}$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\sigma(T) \neq \overline{\mathbb{D}}$ olması durumunda Lemma 5.1'den dolayı V tersinirdir. Ayrıca T yoğun görüntüye sahip ise V de yoğun görüntüye sahiptir: Her $b \in B$ için ve $\varepsilon_1 > 0$ için Q yoğun görüntüye sahip olduğundan $\|b - Qa'\|_B < \varepsilon_1$ sağlayacak şekilde $a' \in A$ vardır. Ayrıca T yoğun bir görüntüye sahip ise $\|a' - Ta''\| < \varepsilon_2$ olacak şekilde $a'' \in A$ vardır ve buradan $\|Qa' - QTa''\| < \|Q\|\varepsilon_2$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\|b - VQa''\|_B &= \|b - QTa''\|_B = \|b - Qa' + Qa' - QTa''\|_B \\ &\leq \|b - Qa'\|_B + \|Qa' - QTa''\|_B \\ &\leq \varepsilon_1 + \|Q\|\varepsilon_2\end{aligned}$$

elde edilir. V operatörü yoğun görüntüye sahiptir. Böylece V tersinirdir.

(iii) A yarı basit ve regüler bir Banach cebiri ve V izometrik bir çarpan ise $I_V = \{0\}$ ve dolayısıyla

$$\text{hull}(I_V) = \{\gamma \in \Sigma_A : \left|\hat{V}(\gamma)\right| = 1\}$$

olacağından her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{V}(\gamma)\right| = 1$ elde edilir. Aşağıdaki önermeyle, A Banach cebiri yarı basit olmasa da benzer sonucun elde edilebileceğini söyleyebiliriz.

Önerme 5.2. *V operatörü değişmeli faithful ve regüler (yarı basit olması gerekmez) bir A Banach cebiri üzerinde izometrik bir çarpan ise*

$$\left|\hat{V}(\gamma)\right| = 1 \qquad \forall\gamma \in \Sigma_A$$

dir.

İspat. Her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\left|\hat{V}(\gamma)\right| \leq 1$ olduğu açıktır. $a \in A$ olsun. V bir çarpan olduğundan

$$(Va)^n = V^n a^n$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|(Va)^n\| = \|V^n a^n\| = \|a^n\|$$

olur ki böylece spektral yarıçap formülünden $r(Va) = r(a)$ elde edilir. Şimdi eğer bir $\gamma_0 \in \Sigma_A$ elemanı için $\left|\hat{V}(\gamma_0)\right| < 1$ olsa, o zaman γ_0 nın bir U komşuluğu ve her $\gamma \in U$ için $\left|\hat{V}(\gamma)\right| < \delta$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ vardır. Ayrıca A cebiri regüler olduğundan $\hat{a}(\Sigma_A \backslash U) = \{0\}$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Böylece

$$\left|\widehat{(Va)}(\gamma)\right| = \left|\hat{V}(\gamma)\hat{a}(\gamma)\right| < \delta|\hat{a}(\gamma)|, \ \ \forall\gamma \in \Sigma_A$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$r(Va) = \sup_{\gamma\in\Sigma_A}\left|\widehat{(Va)}(\gamma)\right| < \delta \sup_{\gamma\in\Sigma_A}|\hat{a}(\gamma)| = \delta r(a)$$

olur ki bu $r(Va) = r(a)$ olması ile çelişir. ■

Şimdi artık ana teoremizi ispat edebiliriz.

Teorem 5.4'ün ispatı. Her $a \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n a - T^{n+1}a\| = 0$$

olsun. Buradan her $\gamma \in \Sigma_A$ ve $a \in A$ için

$$\begin{aligned}\left|(T^n a - T^{n+1}a)^{\wedge}(\gamma)\right| &\leq \left\|(T^n a - T^{n+1}a)^{\wedge}\right\|_\infty \\ &\leq \|(T^n a - T^{n+1}a)\| \to 0 \ \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\hat{T}(\gamma)^n\hat{a}(\gamma)-\hat{T}(\gamma)^{n+1}\hat{a}(\gamma)\right|=0$$

olur. Diğer yandan her $\gamma\in\Sigma_A$ için $\hat{a}(\gamma)\neq 0$ olacak şekilde $a\in A$ vardır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\hat{T}(\gamma)^n-\hat{T}(\gamma)^{n+1}\right|=0,\ \ \forall\gamma\in\Sigma_A$$

elde edilir. Sonuç olarak $\hat{T}(\mathcal{E}_T)=\{1\}$ olur.

Şimdi ise $\hat{T}(\mathcal{E}_T)=\{1\}$ olduğunu varsayalım. Her şeyden önce hatırlatılmalıdır ki, gerekli görüldüğü takdirde bir denk norm tanımlayarak T bir daralma operatörü yapılabilir. Ayrıca (V,Q,B), T nin doğurduğu izometrik çarpan üçlüsü olsun. Öncelikle teoremin ilk kısmında, B nin birimli bir cebir olduğunu gösterelim.

Teoremin hipotezinden $\mathcal{E}_T$ kümesi Σ_A nin kompakt alt kümesi olduğundan $\mathcal{E}_T$ nin bir komşuluğunda $\hat{u}=1$ olacak şekilde bir $u\in A$ elemanı vardır. Böylece her $a\in A$ için $\mathcal{E}_T$ nin bir komşuluğunda $\hat{a}-\hat{u}\hat{a}=0$ olur. Sonuç olarak

$$\{a-ua : a\in A_{00}\}$$

kümesi A cebirinin hull'u $\mathcal{E}_T$ ye eşit en küçük idealine aittir. Lemma 4.5 ile $\mathrm{hull}(I_T)=\mathcal{E}_T$ olduğundan $a-ua\in I_T$ olur. Diğer taraftan $I_T=\ker\mathrm{Q}$ olduğundan her $a\in A_{00}$ için $\mathrm{Q}(a)=\mathrm{Q}(u)Q(a)$ elde ederiz. A cebiri Tauberian ve $\overline{Q(A)}=B$ olduğundan

$$\overline{\{Qa : a\in A_{00}\}}=B$$

olur ki bu ise her $b\in B$ için $\mathrm{Q}(u)b=b$ sonucu verir. Böylece $\mathrm{Q}(u)$, B cebirinin birimidir. Bu birim elemanını e ile göstereceğiz.

V bir çarpan ve $v=Ve$ olmak üzere her $b\in B$ için

$$Vb=V(eb)=(Ve)b=vb=L_v b$$

eşitliği ile $V=L_v$ elde edilir. Bu ise Lemma 5.1 (ii)'ye göre $VQ=QT$ olduğundan her $a\in A$ için $v(Qa)=QTa$ olmasını gerektirir. Çünkü

$$QTa=VQa=L_vQa=v(Qa)$$

dır. Buradan her $a\in A$ ve her $\gamma\in\Sigma_B$ için

$$\langle vQa,\gamma\rangle=\hat{v}(\gamma)\langle Qa,\gamma\rangle=\hat{v}(\gamma)\langle a,Q^*\gamma\rangle=\hat{v}(\gamma)\hat{a}(Q^*\gamma)$$

ve

$$\langle QTa,\gamma\rangle=\langle Ta,Q^*\gamma\rangle=\hat{T}(Q^*\gamma)\hat{a}(Q^*\gamma)$$

olduğundan

$$\hat{v}(\gamma)\hat{a}(Q^*\gamma)=\hat{T}(Q^*\gamma)\hat{a}(Q^*\gamma)$$

eşitliği elde edilir. $\overline{Q(A)} = B$ olduğundan her $\gamma \in \Sigma_B$ için $\hat{a}\big(Q^*(\gamma)\big) \neq 0$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Böylece her $\gamma \in \Sigma_B$ için

$$\hat{v}(\gamma) = \hat{T}\big(Q^*(\gamma)\big)$$

elde edilir. Lemma 3.2'den

$$Q^*(\Sigma_B) = \mathrm{hull}(\ker Q) = \mathrm{hull}(I_T) = \mathcal{E}_T$$

olduğundan

$$\hat{v}(\Sigma_B) = \hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$$

olur. Yani, $\sigma(v) = \{1\}$ dir. L_v çarpma operatörü ile $v \in B$ aynı spectral özelliklere sahip olduğundan

$$\sigma(V) = \sigma(L_v) = \sigma(v) = \{1\}$$

olur. Böylece Gelfand teoremi ile $V = I$ elde edilir. Lemma 5.1 (ii) ile $VQ = QT$ olduğundan, o zaman her $a \in A$ için $a + I_T = Ta + I_T$, yani $a - Ta \in I_T$ bulunur. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n a - T^{n+1} a\| = 0, \forall a \in A$$

elde edilir. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanmış olur. ■

$\mathcal{M}_0(A)$ ile A nın çarpanlarının Helgason-Wang temsilinin sonsuzda sıfır olan kümesini gösterelim. $N_0(A) := \overline{\{L_a : a \in A\}}$ olsun. Açıktır ki $N_0(A) \subseteq \mathcal{M}_0(A)$ dır. Ayrıca $T \in \mathcal{M}_0(A)$ ise $\mathcal{E}_T$ ve $\mathcal{F}_T$ kompakttır.

Sonuç 5.1. *Teorem 5.4'ün şartları altında $T \in \mathcal{M}_0(A)$ kuvvet sınırlı bir çarpan ise, o zaman*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n a - T^{n+1} a\| = 0 \quad (\forall a \in A)$$

eşitliğinin sağlanması için yeter gerek şart $\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$ olmasıdır.

Sonuç 5.2. *Teorem 5.4'ün şartları altında $T \in \mathcal{M}(A)$ kuvvet sınırlı bir çarpan olsun. Sabit bir $k > 1$ doğal sayısı için*

$$S := \frac{I + T + T^2 + \cdots + T^{k-1}}{k}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\mathcal{F}_T$ kompakt ise bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} \|S^n a - S^{n+1}a\| = 0 \quad (\forall a \in A)$$

eşitliği vardır.

İspat. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{1 + z + z^2 + \cdots + z^{k-1}}{k}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Önce

$$f(T) = \frac{I + T + T^2 + \cdots + T^{k-1}}{k}$$

operatörünün kuvvet sınırlı olduğunu gösterelim. Gerçekten de

$$\begin{aligned} f(T)^n &= \left(\frac{I + T + T^2 + \cdots + T^{k-1}}{k}\right)^n \\ &= \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}=n} \frac{1}{k^n} C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}} T^{0\alpha_0+1\alpha_1+\cdots+(k-1)\alpha_{k-1}} \end{aligned}$$

dir. Burada

$$C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}} = \binom{n}{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}} = \frac{n!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_{k-1}!}$$

ve

$$\sum_{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}=n} \frac{1}{k^n} C_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}} = 1$$

dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f(T)^n\| \le C_T$$

elde edilir ki bu ise $f(T)$ nin kuvvet sınırlı olduğunuı gösterir.

Ayrıca şunu da belirtmeliyiz ki, f fonksiyonu $f(1) = 1$ olup ve her $z \in \overline{\mathbb{D}} \,/\, \{1\}$ için $|f(z)| < 1$ sağlar. Buradan ve her $\gamma \in \Sigma_A$ için

$$\widehat{f(T)}(\gamma) = \frac{1 + \hat{T}(\gamma) + \hat{T}(\gamma)^2 + \cdots + \hat{T}(\gamma)^{k-1}}{k}$$

olduğundan

$$\mathcal{E}_{f(T)} = \mathcal{F}_{f(T)} = \mathcal{F}_T$$

elde edilir. Son olarak hipotezden $\mathcal{F}_T$ kompakt olduğundan Teorem 5.4 ile

$$\lim_{n\to\infty} \|S^n a - S^{n+1}a\| = 0 \quad (\forall a \in A)$$

sonucu elde edilmiş olur. ■

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ KATZNELSON-TZAFRİRİ TİPLİ TEOREMLER

Bu bölümde genelleştirilmiş Katznelson-Tzafriri teoremi (Teorem 6.1) çarpanlar teorisi çerçevesinde ele alındı. Teoreminin benzer sonuçlarının, çarpanlar teorisinde de daha zayıf şartlar altında elde edilebileceği gösterildi. Bölüm boyunca bir A cebiri, değişmeli yarı basit bir Banach cebirini gösterecektir.

$f \in L^1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun n. Fourier katsayısı

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$$

eşitliği ile tanımlanır. Mutlak yakınsak Fourier serisi olarak ifade edilen $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm kompleks değerli fonksiyonlar uzayı

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| < \infty \right\}$$

ile gösterilsin. $A(\mathbb{T})$ uzayı

$$\|f\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Ayrıca bu uzay noktasal çarpma işlemine göre birimli değişmeli bir Banach cebiridir. f in Fourier serisi mutlak yakınsak olduğundan

$$f\left(e^{it}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$$

dir. Sonuç olarak

$$\left| f\left(e^{it}\right) - \sum_{n=-\mathrm{N}}^{N} \widehat{f}(n)e^{int} \right| \leq \sum_{n=-\mathrm{N}}^{-\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| + \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| \to 0 \ \ (N \to \infty)$$

ifadesi f fonksiyonuna trigonometrik polinomlarla düzgün yaklaşılabileceğini göstermektedir. Buradan ise f fonksiyonunun sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Eğer T, A cebiri üzerinde çift kuvvet sınırlı bir çarpan ise her $f \in A(\mathbb{T})$ için

$$f(T) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)T^n$$

olarak tanımlanan $f(T)$ operatörü de A nın bir çarpanı olur. Ayrıca

$$f \quad \to \quad f(T)$$

dönüşümü $A(\mathbb{T})$ den $\mathcal{M}(A)$ üzerine bir sınırlı homomorfizmdir ve her $f \in A(\mathbb{T})$ için

$$\| f(T)\| \leq C_T \| f\|_1$$

eşitsizliği vardır.

T, A cebirinin çift kuvvet sınırlı bir çarpanı olsun. $f(T)$ nin Helgason-Wang temsili için

$$\widehat{f(T)}(\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\,(n)\left(\hat{T}(\phi)\right)^n = f\left(\hat{T}(\phi)\right) \qquad (\phi \in \Sigma_A)$$

eşitliği yazılabilir.

Önerme 6.1. (**Spektral dönüşüm teoremi**) $f \in A(\mathbb{T})$ ve T, *A cebirinin çift kuvvet sınırlı bir çarpanı için*

$$\sigma\big(f(T)\big) = f\big(\sigma(T)\big)$$

eşitliği vardır.

İspat. $\mathcal{M}(A)$ cebiri $B(A)$ nın dolu alt cebiri olduğundan

$$\sigma\big(f(T)\big) = \sigma_{\mathcal{M}(A)}\big(f(T)\big)$$

olur. Diğer taraftan Teorem 3.5'den

$$\sigma_{\mathcal{M}(A)}\big(f(T)\big) = \{\widehat{f(T)}(\phi) : \phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)}\}$$

elde ederiz. $f(T)$ nin Helgason-Wang temsilinden (bkz. Teorem 4.2) ise

$$\begin{aligned}\{\widehat{f(T)}(\phi) : \phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)}\} &= \left\{f\left(\hat{T}(\phi)\right) : \phi \in \Sigma_{\mathcal{M}(A)}\right\} \\ &= f\left(\sigma_{\mathcal{M}(A)}(T)\right) \\ &= f\big(\sigma(T)\big)\end{aligned}$$

gerçekleşir. ■

Mutlak yakınsak Taylor serisi olarak ifade edilebilen $\mathbb{D}$ üzerindeki tüm kompleks değerli analitik fonksiyonlar uzayı

$$A_+(\mathbb{T}) = \left\{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}\,(n) z^n : \|f\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}\,(n)\right| < \infty\right\}$$

ile gösterilsin. Dahası

$$A_{+}(\mathbb{T}) = \{ f \in A(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0 \}$$

olduğundan $A_{+}(\mathbb{T})$ cebiri, $A(\mathbb{T})$ cebirinin bir alt cebiri olarak düşünülebilir. Eğer T, A cebiri üzerinde kuvvet sınırlı bir çarpan ise her $f \in A_{+}(\mathbb{T})$ için

$$f(T) := \sum_{n=0} \widehat{f}(n) T^{n}$$

olarak tanımlanan $f(T)$ operatörü de A nın bir çarpanı olur. Ayrıca

$$f \quad \rightarrow \quad f(T)$$

dönüşümü $A_{+}(\mathbb{T})$ den $\mathcal{M}(A)$ üzerine bir sınırlı homomorfizmdir ve her $f \in A_{+}(\mathbb{T})$ için

$$\| f(T) \| \leq C_{T} \| f \|_{1}$$

eşitsizliği mevcuttur. $f(T)$ nin Helgason-Wang temsili için

$$\widehat{f(T)}(\phi) = \sum_{n=0} \widehat{f}(n) \left(\widehat{T}(\phi) \right)^{n} = f\left(\widehat{T}(\phi) \right) \qquad (\phi \in \Sigma_{A})$$

eşitliği yazılabilir. Aşağıdaki önermenin ispatı Önerme 6.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 6.2. **(Spektral dönüşüm teoremi)** T, *A cebirinin kuvvet sınırlı bir çarpanı ve* $f \in A_{+}(\mathbb{T})$ *olmak üzere*

$$\sigma\big(f(T)\big) = f\big(\sigma(T)\big)$$

eşitliği vardır.

Tanım 6.1. $f \in A_{+}(\mathbb{T})$ fonksiyonu ve $S \subset \mathbb{T}$ kapalı kümesi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{supp}\hat{f}_{n} \cap S = \emptyset$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \| f - f_{n} \|_{1} = 0$$

olacak şekilde $\{f_{n}\} \in A(\mathbb{T})$ dizisi varsa f *fonksiyonu S kümesine göre sentezlenebilirdir* denir (Katznelson, 2004).

Lemma 6.1. *X lokal kompact Hausdorff uzayı saçılmış ise her $f \in C_{0}(X)$ fonksiyonu için $f(X)$ kümesi sayılabilirdir* (Laursen ve Neumann, 2000).

Teorem 6.1. *T kuvvet sınırlı bir operatör ve $f \in A_{+}(\mathbb{T})$ fonksiyonu $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ kapalı kümesine göre sentezlenebilir ise*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)\| = 0$$

eşitliği vardır (Katznelson ve Tzafriri, 1986).

Tezin bu bölümünde Banach cebirinin çarpanları için, yukarıda ifade edilen genelleştirilmiş Katznelson-Tzafriri teoremi daha zayıf şartlar altında elde edilmiştir. Buna göre elde edilen ana sonucumuz aşağıdaki şekildedir.

Teorem 6.2. *A bir Tauberian Banach cebiri,* T *ise A nın kuvvet sınırlı bir çarpanı olsun.* $\mathcal{E}_T$ *nin kompakt ve saçılmış bir küme olduğunu varsayalım. Bu şartlar altında her* $f \in A_+(\mathbb{T})$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)a\| = 0, \quad \forall a \in A$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in \hat{T}(\mathcal{E}_T)$ *için* $f(\lambda) = \{\ 0\ \}$ *olmasıdır.*

Bu ana teoremimizin ispatı için öncelikle aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 6.2. T *operatörü değişmeli fatihful Banach cebiri üzerinde çift kuvvet sınırlı bir çarpan ve* $f \in A(\mathbb{T})$ *olsun. Eğer* $\sigma(T)$, $A(\mathbb{T})$ *cebiri için bir sentez kümesi ise* $f(T) = 0$ *olması için gerek ve yeter şart* $f\big(\sigma(T)\big) = \{0\}$ *olmasıdır.*

İspat. Öncelikle $f(T) = 0$ ise spektral dönüşüm teoreminden $f\big(\sigma(T)\big) = \{0\}$ olduğu görülür. Şimdi de, $f\big(\sigma(T)\big) = \{0\}$ olsun. $\sigma(T)$, $A(\mathbb{T})$ cebiri için bir sentez kümesi olduğundan $\sigma(T)$ nin bir U_n komşuluğunda, her $\lambda \in U_n$ için $\widehat{f_n}(\lambda) = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

olacak şekilde $f_n \in A(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ vardır. Ayrıca $A(\mathbb{T})$ regüler bir cebir olduğundan her $\lambda \in \sigma(T)$ için $\hat{k}(\lambda) = 1$ ve her $\lambda \in \Sigma_{A(\mathbb{T})} \backslash U_n$ için $\hat{k}(\lambda) = 0$ olacak şekilde $k \in A(\mathbb{T})$ bulunabilir. Böylece

$$\hat{k}(\lambda)\widehat{f_n}(\lambda) = 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{T}, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $k(T)f_n(T) = 0$ olduğu görülür. Spektral dönüşüm teoremi ile $\sigma\big(k(T)\big) = \{1\}$ olduğundan $k(T)$ tersinir bir operatördür. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(T) = 0$ olur. $f \ \to f(T)$ dönüşümü bir sürekli homomorfizm olduğundan

$$\|f(T)\| = \|f(T) - f_n(T)\| \leq C_T \|f - f_n\|_1$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken limit alınırsa $f(T) = 0$ elde edilir. ■

Teorem 6.2'nin ispatı. Yukarıda da belirtildiği üzere, teoremin şartları altında $\mathcal{E}_T = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart her $a \in A$ için $\lim_{n\to\infty} \|T^n a\| = 0$ olmasıdır. Böylece $\mathcal{E}_T \neq \emptyset$ olduğunu varsayabiliriz. Öncelikle her $a \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T) a\| = 0$$

olsun. Her $\gamma \in \Sigma_A$ için $\hat{a}(\gamma) \neq 0$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Ayrıca her $\gamma \in \mathcal{E}_T$ için $|\hat{T}(\gamma)| = 1$ olduğundan

$$\left|f\left(\hat{T}(\gamma)\right)\hat{a}(\gamma)\right| = \left|\left(\hat{T}(\gamma)\right)^n f\left(\hat{T}(\gamma)\right)\hat{a}(\gamma)\right|$$
$$\leq \|(T^n f(T) a)\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

olduğu elde edilir. Buradan her $\gamma \in \mathcal{E}_T$ için $f\left(\hat{T}(\gamma)\right) = 0$ olur.

Şimdi de $f \in A_+(\mathbb{T})$ olmak üzere $f\left(\hat{T}(\mathcal{E}_T)\right) = \{\,0\,\}$ olduğunu varsayalım. Genelliği bozmaksızın T yi daralma operatörü olarak düşünebiliriz. (V, Q, B) üçlüsü T çarpanının doğurduğu izometrik çarpan üçlüsü olsun. Lemma 5.1'in ispatında görüldüğü üzere B değişmeli birimli bir Banach cebiridir. Bu birim e ile gösterilirse $V = L_v$ olur ki burada $v = Ve$ dir. Ayrıca bunlara ek olarak

$$\sigma(V) = \sigma(L_v) = \sigma(v) = \hat{v}(\textstyle\sum_B\ )$$

ve $\hat{v}(\sum_B\ ) = \hat{T}(\mathcal{E}_T)$ olduğu elde edilmişti. Buradan

$$\sigma(V) = \hat{T}(\mathcal{E}_T)$$

olur. Hipotezimiz gereği $\mathcal{E}_T$ kompakt ve saçılmış bir küme olduğundan $\hat{T}(\mathcal{E}_T)$, $\mathbb{T}$ nin kompakt ve sayılabilir bir alt kümesidir (Lemma 6.1). Diğer yandan biliyoruz ki, $\mathbb{T}$ nin her sayılabilir kapalı alt kümesi Wiener cebiri için bir sentez kümesidir (Teorem 7.2). Demek ki $\sigma(V)$ kümesi $\mathbb{T}$ nin sayılabilir kapalı bir alt kümesi olup $A(\mathbb{T})$ için bir sentez kümesidir. V nin tersinir olduğu açıktır çünkü $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$ olması durumunda $f(\overline{\mathbb{D}}) = \{0\}$ olur. Dolayısıyla $f = 0$ olur. Bu ise aşikar bir durumdur. Böylece $\sigma(V) \neq \overline{\mathbb{D}}$ olduğunu varsayabiliriz. $f\left(\hat{T}(\mathcal{E}_T)\right) = \{0\}$ olduğundan Lemma 6.2'den dolayı $f(V) = 0$ olur. Diğer yandan $VQ = QT$ olduğundan, böylelikle $f(V)Q = Qf(T)$ olur ki buradan

$$Qf(T) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $f \in A_+(\mathbb{T})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n f(T)a\| = 0, \quad \forall a \in A$$

olduğu ispatlanmış olur. ■

Şimdi ise, X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $F_T \coloneqq \overline{(I-T)A}$, $K_T \coloneqq \ker(I-T)$ ve

$$X_T \coloneqq \left\{ x \in X : \text{norma göre } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x \text{ limit vardır.} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. T operatörünün kuvvet sınırlı olması durumunda

$$X_T = F_T \oplus K_T$$

ve

$$F_T = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x \right\| = 0 \right\}$$

eşitlikleri vardır (Krengel, 1985). Eğer $X = X_T$ ise T operatörüne *ortalama ergodiktir* (mean ergodic) denir. Her $x \in X$ için $\frac{\|T^n x\|}{n} \to 0$ olması koşulu T nin ortalama ergodik olması için gereklidir (Bu koşul T nin kuvvet sınırlı olması durumunda sağlanır). Ayrıca

$$x \to Px \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x$$

olarak tanımlanan P bir izdüşümü operatörü olup buna T *ye karşılık gelen ortalama ergodik izdüşüm operatörü* denir. T ortalama ergodik ise X uzayı, P projeksiyonu yardımıyla

$$X = \ker P \oplus \operatorname{ran} P$$

direkt toplam şeklinde ifade edilebilir. Burada $\ker P = F_T$ ve $\operatorname{ran} P = K_T$ dir. Aşağıdaki önerme $X_T = F_T \oplus K_T$ eşitliğinin doğrudan bir sonucudur.

Önerme 6.3. *$T \in B(X)$ kuvvet sınırlı bir operatör olsun.*

(i) *Eğer T ortalama ergodik bir operatör olup her $x \in X$ için $\|T^n x - T^{n+1} x\| \to 0$ ise bu takdirde $\{T^n x\}$ dizisi kuvvetli yakınsar.*

(ii) *Eğer X refleksif olup her $x \in X$ için $\|T^n x - T^{n+1}x\| \to 0$ ise bu takdirde $\{T^n x\}$ dizisi kuvvetli yakınsar.*

İspat. T ortalama ergodik ise her $x \in X$ için

$$T^n x = T^n y + T^n z$$

olacak şekilde $y \in F_T$ ve $z \in K_T$ vardır. $y \in F_T$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\|y - y_0 + Ty_0\| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $y_0 \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \|T^n x - z\| &= \|T^n x - T^n z\| = \|T^n y\| \\ &\leq \|T^n y - T^n y_0 + T^{n+1} y_0\| + \|T^n y_0 - T^{n+1} y_0\| \end{aligned}$$

olduğundan $\{T^n x\}$ dizisi yakınsaktır. Her kuvvet sınırlı operatör bir refleksif Banach uzayında ortalama ergodik olduğundan (bkz. Eisner, 2012) önermenin (ii) şıkkı (i)'nin bir sonucudur. ■

Teorem 6.3. (**Ortalama ergodik teoremi**) *X bir Banach uzayı ve T, X de etki eden kuvvet sınırlı bir operatör olsun. Bu takdirde $y \in X$ için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x$;

(ii) $y = w - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x$;

(iii) *y noktası $\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir zayıf yığılma noktasıdır* (Krengel, 1985).

Aşağıdaki teorem, tez çalışmamızda ortaya koyduğumuz ana sonuçlardan bir diğerini oluşturmaktadır.

Teorem 6.4. *A değişmeli yarı basit regüler ve Tauberian bir Banach cebiri, T ise A nın kuvvet sınırlı bir çarpanı ve $a \in A$ olsun. Eğer $\mathcal{E}_T$ kompakt olup $\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$ ise bu takdirde $\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i a\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin zayıf yakınsaması $\{T^n a\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisininin aynı elemana kuvvetli yakınsamasını gerektirir.*

İspat. w-$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i a = b$ olsun. Ortalama Ergodik Teoremi'ne göre norma göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i a = b$ olur. Buradan $b - Tb = \frac{a - T^n a}{n}$ olduğundan $n \to \infty$ iken $Tb = b$ elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-b+T(a-b)+\cdots+T^{n-1}(a-b)}{n} = 0$$

olduğundan $a-b \in F_T$ olur. Ayrıca Teorem 5.4'e göre her $c \in A$ için

$$\|T^n(I-T)c\| = \|T^n c - T^{n+1}c\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ise böylece her $c \in \overline{(I-T)A} = F_T$ için $\|T^n c\| \to 0$ olur. Diğer yandan $a-b \in F_T$ ve $T^n b = b$ olduğundan $n \to \infty$ iken $\|T^n a - b\| = \|T^n(a-b)\| \to 0$ sonucu elde edilir. ■

Önerme 6.4. *A değişmeli yarı basit regüler ve Tauberian bir Banach cebiri, T ise A nın kuvvet sınırlı bir çarpanı olsun. $\mathcal{E}_T$ kompakt olsun. Bir $a \in A$ için $\{T^n a : n \geq 0\}$ kümesi ön zayıf kompakt olup $\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$ ise bu takdirde $\{T^n a\}$ dizisi yakınsaktır.*

İspat. $\{T^n a : n \geq 0\}$ ön zayıf kompakt olduğundan Kreĭn-Šmulian Teoremi'nden (Eisner, 2012) dolayı

$$\left\{\frac{a+Ta+\cdots+T^{n-1}a}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi ön zayıf kompakttır. Buradan

$$\left\{\frac{a+Ta+\cdots+T^{n-1}a}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisi A da bir zayıf yığılma noktasına sahiptir. Ortalama Ergodik Teorem gereği

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+Ta+\cdots+T^{n-1}a}{n} = b$$

olacak şekilde bir $b \in A$ vardır. $Tb = b$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-b+T(a-b)+\cdots+T^{n-1}(a-b)}{n} = 0$$

$a-b \in F_T$ elde edilir. Bir önceki önermede olduğu gibi benzer şekilde $\|T^n a - b\| = \|T^n(a-b)\| \to 0$ elde edilir. ■

Aşağıdaki önerme, Önerme 6.4'ün doğrudan bir sonucudur.

Önerme 6.5. *A değişmeli yarı basit regüler ve Tauberian bir Banach cebiri, T ise A nın kuvvet sınırlı bir çarpan ve $\mathcal{E}_T$ bir sentez kümesi olsun. Ayrıca $a \in A$ için $\{T^n a : n \geq 0\}$ ön zayıf kompakt bir küme olsun. $\{T^n a\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\hat{T}(\mathcal{E}_T) = \{1\}$ olmasıdır.*

G kompakt Abel bir grubu olsun. Bu durumunda $1 \leq p < \infty$ için $L^p(G)$, konvolüsyon çarpımına göre değişmeli yarı basit regüler Tauberian bir Banach cebiridir. Ayrıca $\hat{G}$ diskret olup $\Sigma_{L^p(G)} = \hat{G}$ eşitliği vardır. Bu yüzden $\hat{G}$ nin her alt kümesi $L^p(G)$ için bir sentez kümesidir (bkz. Larsen, 1973). Eğer $\mu \in M(G)$ ise $f \in L^p(G)$ için $T_\mu f = \mu * f$ olarak tanımlanan $T_\mu : L^p(G) \to L^p(G)$ operatörü $L^p(G)$ nin bir çarpanıdır ve $\|T_\mu\| \leq \|\mu\|$ sağlanır. Ayrıca $\widehat{T_\mu} = \hat{\mu}$ olduğundan $\mathcal{E}_\mu = \mathcal{E}_{T_\mu}$ olur. Burada

$$\mathcal{E}_\mu := \{\gamma \in \hat{G} : \ |\hat{\mu}(\gamma)| = 1\}$$

dir.

Sonuç 6.1. *G kompakt bir Abel grubu olsun. Ayrıca $1 < p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(G)$ ve $\mu \in M(G)$ kuvvet sınırlı olsun. $\{\mu^n * f\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\hat{\mu}(\mathcal{E}_\mu) = \{1\}$ olmasıdır.*

İspat. $\{\mu^n * f\}$ dizisi yakınsak ise Teorem 5.4'ün ispatında olduğu gibi $\hat{\mu}(\mathcal{E}_\mu) = \{1\}$ elde edilir. Şimdi de $\hat{\mu}(\mathcal{E}_\mu) = \{1\}$ olduğunu varsayalım. Önerme 5.1 gereği $f \in L^p(G)$ için $\|\mu^n * f - \mu^{n+1} * f\| \to 0$ olur. $L^p(G)$ refleksif olduğundan Önerme 6.3'den $\{\mu^n * f\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsaktır. ∎

7. CHOQUET-DENY TİPLİ TEOREMLER VE ERGODİK ÖZELLİKLER

G lokal kompakt bir Abel grubu olsun. Bir $\mu \in M(G)$ ölçümü için

$$\varphi(s) = \int_G \varphi(s-t)\mu(t) \qquad (\forall s \in G)$$

konvolüsyon denkleminin $\varphi \in L^\infty(G)$ çözümleri birçok araştırmacı tarafından incelendi. $\mu \in M(G)$ ölçümünün ergodik özellikleri Abel grupları için Choquet-Deny tarafından ifade edildiğinden

$$\mu * \varphi \ = \varphi$$

konvolüsyon denklemi *Choquet-Deny* konvolüsyon denklemi olarakta bilinir. Choquet-Deny konvolüsyon denklemi tam olarak $\mu * \varphi = \varphi$ denkleminin $\varphi \in L^\infty(G)$ çözümlerini ifade etmektedir. Choquet-Deny konvolüsyon denkleminin φ çözümlerine μ-*harmonik* fonksiyonlar denir.

Choquet ve Deny (1960) çalışmalarındaki yöntemler temel olmasına rağmen etki alanı oldukça geniş olmuştur. Örneğin Abel olmayan gruplar araştırmacılar tarafından ilgi görmeye devam etmektedir. Bizde tezin bu bölümünde, T operatörü A Ditkin cebirinin bir çarpanı olmak üzere

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$$

uzayının sonlu boyutlu olması için gerekli ve yeterli şartları vereceğiz. Elde edilen bu sonuç Choquet-Deny teoremini genelleştirecektir. G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere bir $\mu \in M(G)$ ölçümünün belirli bir ergodik özelliğini karakterize eden Choquet-Deny teoremi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 7.1. *G lokal kompakt Abel grubu ve $\mu \in M(G)$ olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir*:

(i) *$\varphi \in L^\infty(G)$ olmak üzere $\mu * \varphi \ = \varphi$ denkleminin çözümü bir sabit fonksiyondur;*

(ii) *Her $\gamma \in \hat{G} \setminus \{0\}$ için $\hat{\mu}(\gamma) \neq 1$ dir.*

Tezin bu kısmında değişmeli Banach cebileri için kuvvetli Ditkin (s-Ditkin) ve zayıf Diktin (w-Ditkin) cebirlerini tanımlayacağız. Tanımlayacağımız bu cebirler spektral sentez kümeleri ile yakından ilişkilidir.

Tanım 7.1. A değişmeli yarı basit regüler bir Banach cebiri olsun. $S \subset \Sigma_A$ kapalı bir küme olmak üzere her $a \in I(S)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n a - a\| = 0$$

sağlanacak şekilde bir $\{b_n\} \subseteq J^0(S)$ dizisi varsa S kümesine bir *Ditkin* kümesidir denir. Bir başka ifadeyle her $a \in I(S)$ için $a \in \overline{aJ^0(S)}$ ise S bir Ditkin kümesidir. $\phi \in \Sigma_A$ olmak üzere eğer $\{\phi\}$ tek noktası bir Ditkin kümesi ise A cebiri ϕ noktasında Ditkin şartını sağlar denir. Eğer boş küme $\emptyset$ bir Ditkin kümesi ise A cebiri sonsuzda Ditkin şartını sağlar denir. Diğer bir ifadeyle $\lim_{n\to\infty} \|b_n a - a\| = 0$ olacak şekilde A_{00} da bir $\{b_n\}$ dizisi varsa A cebiri sonsuzda Ditkin şartını sağlar denir. Böylece her $\phi \in \Sigma_A \cup \{\infty\}$ noktasında Ditkin şartını sağlayan A cebirine *kuvvetli Ditkin* (s-Ditkin) *cebiri* denir.

Her $\phi \in \Sigma_A \cup \{\infty\}$ noktası A cebiri için bir sentez kümesi ise A cebirine *zayıf Ditkin* (w-Ditkin) *cebiri* denir. $J^0(\{\infty\}) = A_{00}$ ve $I(\{\infty\}) = A$ olduğundan her $\phi \in \Sigma_A$ için $J(\{\phi\}) = I(\{\phi\})$ ve $\overline{A_{00}} = A$ eşitlikleri sağlanıyorsa A cebirine bir w-Ditkin cebiri denir. Açıktır ki her s-Ditkin cebiri bir w- Ditkin cebiridir.

Teorem 7.2. *A cebiri değişmeli yarı basit regüler bir Banach cebiri olsun. Her $\phi \in \Sigma_A \cup \{\infty\}$ noktasında A cebirinin Ditkin şartını sağladığını varsayalım. $S \subset \Sigma_A$ kapalı ve ∂S saçılmış bir küme ise S bir sentez kümesidir* (Larsen, 1973; Katznelson, 2004).

Örnek 7.1. Aşağıda s-Ditkin cebiri örnekleri verilmiştir.

(i) G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere $L^1(G)$ grup cebiri bir s-Ditkin cebiridir (Larsen, 1973).

(ii) $\omega(t) = (1 + |t|)^\alpha$ $(0 \leq \alpha < 1)$ için $L^1_\omega(\mathbb{R})$ Beurling cebiri bir s-Ditkin cebiridir (Reiter, 2000).

A değişmeli Banach cebiri olsun. $\varphi \in A^*$ ve $a \in A$ için $\varphi \cdot a$ fonksiyonelini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\langle \varphi \cdot a, b \rangle = \langle \varphi, ab \rangle \quad (b \in A)$$

fonksiyoneli tanımlansın. $\varphi \cdot a \in A^*$ olduğu aşikardır ve

$$\|\varphi \cdot a\| \leq \|\varphi\|_{A^*} \|a\|_A$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla A^* bir Banach A-modülüdür.

Önerme 7.1. *A değişmeli yarı basit bir Banach cebiri ve $T \in \mathcal{M}(A)$ olmak üzere her $\varphi \in A^*$ ve her $a \in A$ için*

$$T^*(\varphi \cdot a) = T^*\varphi \cdot a$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $T \in \mathcal{M}(A)$ olduğundan her $a, b \in A$ için $T(ab) = a(Tb)$ dir. Buradan her $\varphi \in A^*$ ve her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned} \langle T^*(\varphi \cdot a), b \rangle &= \langle \varphi \cdot a, Tb \rangle = \langle \varphi, aTb \rangle \\ &= \langle \varphi, T(ab) \rangle = \langle T^*\varphi, ab \rangle \\ &= \langle (T^*\varphi) \cdot a, b \rangle \end{aligned}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece $T^*(\varphi \cdot a) = T^*\varphi \cdot a$ eşitliği elde edilir. ■

Şimdi de keyfi $\varphi \in A^*$ için

$$I_\varphi := \{a \in A : \varphi \cdot a = 0\}$$

olarak tanımlayalım. Kolaylıkla görebiliriz ki I_φ, A nın kapalı bir idealidir. Buna ek olarak eğer A yaklaşık birime sahip ise $\varphi \in I_\varphi^\perp$ dir. Bunu gösterelim. $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ genelleşmiş dizisi A nın yaklaşık birimi ve $a \in I_\varphi$ olsun. $\|ae_\lambda - a\| \to 0$ olduğundan

$$\langle \varphi, a \rangle = \lim_\lambda \langle \varphi, ae_\lambda \rangle = \lim_\lambda \langle \varphi. a, e_\lambda \rangle$$

olur. Öte yandan $\varphi. a = 0$ olduğundan $\langle \varphi, a \rangle = 0$ elde edilir, dolayısıyla $\varphi \in I_\varphi^\perp$ olur.

Tüm bu hazırlıklardan sonra artık Beurling spektrumu da denilen $\varphi \in A^*$nın w^*-spektrumunu ifade edebiliriz. $\varphi \in A^*$, $\varphi \neq 0$ fonksiyonelinin *w^*-spektrumu* ya da *Beurling spektrumu* Σ_A nın kapalı bir alt kümesi olarak

$$\sigma_*(\varphi) := \overline{\{\varphi \cdot a : a \in A\}}^{w^*} \cap \Sigma_A$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 7.1. *A değişmeli yarı basit regüler bir Banach cebiri olsun. Her $a \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için aşağıda belirtilen ifadeler geçerlidir.*

(i) $\sigma_*(\varphi) = \mathrm{hull}(I_\varphi)$

(ii) $\sigma_*(\varphi \cdot a) \subseteq \sigma_*(\varphi) \cap \mathrm{supp}\hat{a}$

(iii) *A yaklaşık birime sahip bir Tauberian cebiri olsun. $\sigma_*(\varphi) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi \neq 0$ olmasıdır.*

İspat.

(i) $\gamma \in \sigma_*(\varphi)$ ve bir $a \in A$ için $\varphi \cdot a = 0$ olsun. Bu takdirde $\gamma = w^* - \lim_\lambda \varphi \cdot a_\lambda$ olacak şekilde A da genelleşmiş bir $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dizisi vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\hat{a}(\gamma) = \gamma(a) &= \lim_\lambda \langle \varphi \cdot a_\lambda, a\rangle \\ &= \lim_\lambda \langle \varphi \cdot a, a_\lambda\rangle = 0\end{aligned}$$

olduğundan $\gamma \in \mathrm{hull}(I_\varphi)$ olur. Böylece $\sigma_*(\varphi) \subseteq \mathrm{hull}(I_\varphi)$ elde edilir. Şimdi de $\mathrm{hull}(I_\varphi) \subseteq \sigma_*(\varphi)$ olduğunu görelim. Farz edelim ki $\gamma \in \mathrm{hull}(I_\varphi)$ fakat $\gamma \notin \sigma_*(\varphi)$ olsun. Spektrumun tanımından $\gamma \notin \overline{\{\varphi \cdot a : a \in A\}}^{w^*}$ olur. A cebiri regüler olduğundan $\hat{b}(\gamma) \neq 0$ ve

$$\langle \varphi \cdot b, a\rangle = \langle \varphi \cdot a, b\rangle = 0, \quad \forall a \in A$$

olacak şekilde $b \in A$ vardır. Buradan $\varphi \cdot b = 0$ elde ederiz. Diğer taraftan $\gamma \in \mathrm{hull}(I_\varphi)$ olduğundan $\hat{b}(\gamma) = 0$ olur. Bu ise $\hat{b}(\gamma) \neq 0$ olması ile çelişir.

(ii) Öncelikli olarak $\sigma_*(\varphi \cdot a) \subseteq \sigma_*(\varphi)$ olduğunu gösterelim. $\gamma \in \sigma_*(\varphi \cdot a)$ ise

$$\begin{aligned}\gamma &= w^* - \lim_\lambda (\varphi \cdot a) \cdot b_\lambda \\ &= w^* - \lim_\lambda \varphi \cdot (ab_\lambda)\end{aligned}$$

olacak şekilde A da genelleşmiş bir $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dizisi vardır. Buradan $\gamma = w^* - \lim_\lambda \varphi \cdot (ab_\lambda)$ ile $\gamma \in \sigma_*(\varphi)$ olduğu görülür. Şimdi de $\sigma_*(\varphi \cdot a) \subseteq \mathrm{supp}\hat{a}$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $\gamma \in \sigma_*(\varphi \cdot a)$ fakat $\gamma \notin \mathrm{supp}\hat{a}$ olsun. Bu durumda $\hat{a}(U_\gamma) = \{0\}$ sağlanacak şekilde γ nın bir U_γ komşuluğu vardır (bkz. Lemma 2.1). Ayrıca A regüler bir cebir olduğundan

$$\hat{b}(\gamma) = 1 \quad \text{ve} \quad \mathrm{supp}\hat{b} \subseteq U_\gamma$$

olacak şekilde $b \in A$ elemanı vardır. Bu iki durum birlikte düşünüldüğünde

$$\hat{b}(\gamma)\hat{a}(\gamma) = \widehat{ab}(\gamma) = 0, \forall\, \gamma \in \Sigma_A$$

elde edilir. A yarı basit olduğundan $ab = 0$ olur. Öte yandan $\gamma \in \sigma_*(\varphi \cdot a)$ olduğundan genelleşmiş bir $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dizisi vardır ki

$$\begin{aligned}\hat{b}(\gamma) &= \langle \gamma, b\rangle = \lim_\lambda \langle (\varphi \cdot a)\cdot b_\lambda, b\rangle \\ &= \lim_\lambda \langle \varphi \cdot ab, b_\lambda\rangle = 0\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır; fakat bu $\hat{b}(\gamma) = 1$ ile çelişir. Buradan $\gamma \in \operatorname{supp}\hat{a}$ ve böylece $\sigma_*(\varphi \cdot a) \subseteq \operatorname{supp}\hat{a}$ kapsaması gösterilmiş olur.

(iii) $\varphi = 0$ olursa tanımdan dolayı $\sigma_*(\varphi) = \emptyset$ olur. Diğer taraftan A bir Tauberian ve $\sigma_*(\varphi) = \emptyset$ ise lemmanın (i) şıkkından dolayı $I_\varphi = A$ olur. Ayrıca A yaklaşık birime sahip olduğundan yukarıda da belirtildiği üzere $\varphi \in I_\varphi^\perp = \{0\}$ elde edilir. ■

Lemma 7.2. *A bir Tauberian Banach cebiri ise her $a \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için*

$$\sigma_*(\varphi) \cap \{\gamma \in \Sigma_A :\ \hat{a}(\gamma) \neq 0\} \subseteq \sigma_*(\varphi \cdot a)$$

kapsaması geçerlidir.

İspat. Keyfi $a \in A$ ve $\varphi \in A^*$ alalım. Farz edelim ki bir $\gamma \in \Sigma_A$ için $\gamma \in \sigma_*(\varphi)$ olup $\hat{a}(\gamma) \neq 0$ dır. Tersini farz edelim, $\gamma \notin \sigma_*(\varphi \cdot a)$ olsun. Bu durumda $\hat{b}(\gamma) \neq 0$ ve $\sigma_*(\varphi \cdot a)$ nin bir komşuluğunda $\hat{b} = 0$ olacak şekilde bir $b \in A$ vardır. A bir Tauberian Banach cebiri olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|b_n - b\| = 0$ olacak şekilde A_{00} kümesinde bir $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi mevcuttur. Böylece en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\widehat{b_{n_0}}(\gamma) \neq 0$ olacaktır. $c \coloneqq b_{n_0} b$ olsun. Böyle bir c elemanı için $c \in A_{00}$, $\hat{c}(\gamma) \neq 0$ dır ve $\sigma_*(\varphi \cdot a)$ nin bir komşuluğunda $\hat{c} = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bunun bir sonucu olarak da c elemanı hull'u $\sigma_*(\varphi \cdot a)$ kümesine eşit olan en küçük idealdedir. Bir önceki lemmadan dolayı $c \in I_{\varphi\cdot a}$ olur ve dolayısıyla $\varphi \cdot (ac) = 0$ olur. Demek ki, $\sigma_*(\varphi)$ üzerinde $\hat{a}\hat{c} = 0$ olur. Öte yandan $\gamma \in \sigma_*(\varphi)$ ve $\hat{c}(\gamma) \neq 0$ olduğundan buradan $\hat{a}(\gamma) = 0$ elde edilir ki bu ise $\hat{a}(\gamma) \neq 0$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\gamma \in \sigma_*(\varphi \cdot a)$ dır. ■

$T \in \mathcal{M}(A)$ olmak üzere

$$F_T \coloneqq \overline{(I - T)A}$$

kümesi A nın kapalı bir idealidir ve $\operatorname{hull}(F_T) = \mathcal{F}_T$ sağlanır ki burada

$$\mathcal{F}_T := \left\{\gamma \in \Sigma_A : \hat{T}(\gamma) = 1\right\}$$

ve $\hat{T}$, T nin Helgason-Wang temsilidir. Bir A kümesinin kardinalitesini $\mathrm{card}A$ ile göstereceğiz.

Teorem 7.3. *A yaklaşık birime (genelde sınırlı olmayan) sahip bir w-Ditkin cebiri ve $T \in \mathcal{M}(A)$ olsun. $\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$ uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{card}\mathcal{F}_T$ sonlu olmasıdır. Bu durumda*

$$\dim\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = \mathrm{card}\mathcal{F}_T$$

ve

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = \mathrm{span}\mathcal{F}_T$$

sağlanır.

İspat. Öncelikle $\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$ uzayının sonlu boyutlu olduğunu varsayalım. Her $\gamma \in \Sigma_A$ için $T^*\gamma = \hat{T}(\gamma)\gamma$ olduğundan

$$\mathcal{F}_T \subseteq \{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$$

kapsaması elde edilir. Diğer taraftan Σ_A nın A^* ın lineer bağımsız bir alt kümesi olduğunu biliyoruz. Buradan $\mathcal{F}_T$ sonlu küme olduğunu söyleyebiliriz ve dolayısıyla

$$\mathrm{card}\mathcal{F}_T \leq \dim\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$$

sağlanır. Şimdi de $\mathrm{card}\mathcal{F}_T$ nin sonlu küme olduğunu varsayalım, yani $\mathcal{F}_T = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ olsun. Kolay bir şekilde

$$\mathrm{span}\mathcal{F}_T \subseteq \{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$$

kapsamasının doğru olduğunu görebiliriz. Kapsamanın diğer yönünü göstermek amacıyla $\varphi \in A^*$ olmak üzere $T^*\varphi = \varphi$ ve $\gamma \in \sigma_*(\varphi)$ sağlansın. O zaman

$$\gamma = w^* - \lim_{\lambda}(\varphi \cdot a_\lambda)$$

olacak şekilde A da genelleşmiş bir $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dizisi vardır. Dahası her $a \in A$ için $T^*(\varphi \cdot a) = (T^*\varphi) \cdot a$ (bkz. Önerme 7.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} T^*\gamma &= w^* - \lim_{\lambda} T^*(\varphi \cdot a_\lambda) \\ &= w^* - \lim_{\lambda}(T^*\varphi) \cdot a_\lambda \\ &= w^* - \lim_{\lambda} \varphi \cdot a_\lambda \\ &= \gamma \end{aligned}$$

yazılabilir. Bunun bir sonucu olarak $\hat{T}(\gamma) = 1$, yani $\gamma \in \mathcal{F}_T$ ve dolayısıyla

$$\sigma_*(\varphi) \subseteq \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$$

elde edilir. Şimdi de $\varphi = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_n\gamma_n$ olduğunu gösterelim ki burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ ler kompleks sayılardır. Genelliği bozmadan $\sigma_*(\varphi) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ olarak varsayabiliriz. Bunun için $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ lerin sırasıyla $U_1, U_2, \dots, U_n$ ayrık komşuluklarını alalım. V_i komşuluğu γ_i nin bir kompakt komşuluğu olsun öyle ki $\bar{V}_i \subseteq U_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ şartı sağlansın. A cebiri regüler olduğundan

$$\hat{a}_i(\gamma) = 1 \qquad \gamma \in \bar{V}_i$$
$$\hat{a}_i(\gamma) = 0 \qquad \gamma \in \Sigma_A \backslash U_i$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ elemanları vardır $(i = 1, 2, \dots, n)$.

$$a := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

olarak tanımlayalım. $\sigma_*(\varphi)$ nin bir komşuluğunda $\hat{a} = 1$ olduğundan her $b \in A_{00}$ için $\sigma_*(\varphi)$ nin bir komşuluğunda $ab - b$ nin Gelfand dönüşümü sıfır olur. Bu yüzden $ab - b$ elemanları hull'u $\sigma_*(\varphi)$ ye eşit olan A nın en küçük idealine aittir. Bundan dolayıdır ki

$$ab - b \in I_\varphi$$

olur. Buradan ise

$$(\varphi \cdot a) \cdot b = \varphi \cdot b \qquad \forall b \in A_{00}$$

elde edilir. A cebiri Tauberian olduğundan A_{00} kümesi A da yoğundur. Bu yüzden her $b \in A$ için

$$(\varphi \cdot a) \cdot b = \varphi \cdot b$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik özel olarak, A cebirinin bir $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ yaklaşık birimi içinde gerçekleşir;

$$(\varphi \cdot a) \cdot e_\lambda = \varphi \cdot e_\lambda \qquad (\forall \lambda \in \Lambda).$$

Buradan her $b \in A$ için

$$\langle (\varphi \cdot a) \cdot e_\lambda, b \rangle = \langle \varphi \cdot e_\lambda, b \rangle$$

veya

$$\langle \varphi \cdot a, e_\lambda b \rangle = \langle \varphi, e_\lambda b \rangle$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte $\lambda \in \Lambda$ boyunca limit alırsak

$$\langle \varphi \cdot a, b \rangle = \langle \varphi, b \rangle$$

veya

$$\varphi \cdot a = \varphi$$

eşitliği elde edilir. Burada $a \in A$ elemanı, $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ elemanlarının toplamı şeklinde ifade edildiğinden $\varphi_i = \varphi \cdot a_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$$

olarak yazılabilir. Önceki lemma ve Lemma 7.1'in (ii) şıkkından dolayı

$$\{\gamma_i\} \subseteq \sigma_*(\varphi \cdot a_i) \subseteq \sigma_*(\varphi) \cap \operatorname{supp}\hat{a}_i = \{\gamma_i\}$$

elde edilir ki buradan $\sigma_*(\varphi_i) = \{\gamma_i\}$ olur. Demek ki, Lemma 7.1'in (i) şıkkından dolayı

$$\operatorname{hull}(I_{\varphi_i}) = \{\gamma_i\}$$

eşitliğinin gerçekleştiği görülür. Teoremimizin bir hipotezi olarak $\{\gamma_i\}$, A için sentezlenebilir bir küme olduğundan

$$I_{\varphi_i} = I(\{\gamma_i\})$$

elde edilir. Böylece $I(\{\gamma_i\})$ nin dik tamlayanı $c_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere $I(\{\gamma_i\})^{\perp} = c_i\gamma_i$ olacağından

$$\varphi_i \in I_{\varphi_i}^{\perp} = \mathbb{C}\gamma_i$$

olur. Demek ki $\varphi_i = c_i\gamma_i$ sağlanacak şekilde $c_i \in \mathbb{C}$ vardır $(i = 1, 2, \dots, n)$. Böylece

$$\varphi = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_n\gamma_n$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da

$$\dim\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} \leq \operatorname{card}\mathcal{F}_T$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\dim\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = \operatorname{card}\mathcal{F}_T$$

eşitliği teoremi ispatlamış olur. ∎

Aşağıdaki sonuç Choquet-Deny Teoreminin bir başka genişlemesidir.

Teorem 7.4. *A bir s-Ditkin cebiri ve T, A nın bir çarpanı olsun. $S \subseteq \Sigma_A$ kapalı ve ∂S saçılmış bir küme ise aşağıdaki şartlar denktir*:

(i) $\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} \subseteq \overline{\operatorname{span}S}^{w^*}$;

(ii) *Her $\gamma \in \Sigma_A \setminus S$ için* $\hat{T}(\gamma) \neq 1$.

Ayrıca $\partial\mathcal{F}_T$ saçılmış bir küme ise

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = \overline{\operatorname{span}\mathcal{F}_T}^{w^*}$$

eşitliği vardır.

İspat. (i) ⇒ (ii): Aşağıdaki eşitlikten

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = F_T^{\perp}$$

$F_T^{\perp} \subseteq \overline{\mathrm{spanS}}^{w^*}$ kapsaması geçerlidir. Ayrıca $I(S)^{\perp} = \overline{\mathrm{span}S}^{w^*}$ olduğundan

$$I(S) \subseteq {}^{\perp}(I(S)^{\perp}) = {}^{\perp}\left(\overline{\mathrm{span}S}^{w^*}\right) \subseteq F_T$$

olur ki ve böylece

$$\{\gamma \in \Sigma_A : \hat{T}(\gamma) = 1\} = \mathrm{hull}(F_T) \subseteq \mathrm{hull}(I(S)) = S$$

kapsaması doğrudur. Sonuç olarak her $\gamma \in \Sigma_A \setminus S$ için $\hat{T}(\gamma) \neq 1$ elde edilir.

(ii) ⇒ (i): Aşağıdaki bağıntılardan

$$\mathcal{F}_T = \mathrm{hull}(F_T) \subseteq S$$

ve S kümesinin bir sentez kümesi olmasından (bkz. Teorem 7.2)

$$I(S) = J(S) \subseteq J(\mathcal{F}_T) \subseteq F_T$$

yazılabilir. Böylece sonuç olarak

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = F_T^{\perp} \subseteq I(S)^{\perp} = \overline{\mathrm{span}S}^{w^*}$$

elde edilir.

Eğer $S = \mathcal{F}_T$ ise her $\gamma \in \Sigma_A \setminus S$ için $\hat{T}(\gamma) \neq 1$ olduğundan (i) şıkkı ile

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} \subseteq \overline{\mathrm{span}\mathcal{F}_T}^{w^*}$$

elde edilir. Diğer yandan, her $\gamma \in \Sigma_A$ için $T^*\gamma = \hat{T}(\gamma)\gamma$ olduğundan

$$\overline{\mathrm{span}\mathcal{F}_T}^{w^*} \subseteq \{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\}$$

olur. Böylece istenilen

$$\{\varphi \in A^* : T^*\varphi = \varphi\} = \overline{\mathrm{span}\mathcal{F}_T}^{w^*}$$

eşitliği elde edilmiş olur. ■

$L^1(G)$ grup cebirlerine ekstradan bir "ağırlık" eklendiğinde, harmonik analizin farklı alanlarında önemli bir rol oynayan Beurling cebirleri elde edilir. Bu cebirler ilk kez 1938 yılında $G = \mathbb{R}$ durumu için A. Beurling tarafından ele alınmış, lokal kompakt gruplara Y. Domar tarafından genelleştirilmiştir. Ağırlıklı grup cebiri olarak da bilinen Beurling cebiri, özel olarak $\omega = 1$ ağırlık fonksiyonu ile $L^1(G)$ grup cebiridir. Bu bölümde önceki bölümde elde edilen sonuçların $L^1_\omega(G)$ ağırlıklı grup cebirlerine ve $S(G)$ Segal cebirlerine uygulamalarına yer verilecektir.

7.1. Ağırlıklı Grup Cebirleri

Tanım 7.2. G lokal kompakt bir Abel grubu olmak üzere her $g, s \in G$ için $\omega(g+s) \leq \omega(g)\omega(s)$ şartını sağlayan sürekli $\omega : G \to [1, \infty)$ fonksiyonuna G üzerinde bir *ağırlık fonksiyonu* denir.

Lokal kompakt bir Abel G grubu üzerinde ω bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$L^1_\omega(G) := \{f : G \to \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir bir fonksiyon ve } f\omega \in L^1(G)\}$$

vektör uzayı üzerinde

$$\|f\|_{1,\omega} := \int_G |f(t)|\omega(t)d\lambda(t) < \infty \quad (f \in L^1_\omega(G))$$

tanımlanan bu norma göre, $L^1_\omega(G)$ bir Banach uzayıdır. $L^1_\omega(G)$ üzerinde konvolüsyon çarpımı

$$f * g(s) := \int_G f(s-t)g(t)d\lambda(t) \quad (s \in G)$$

olarak verilir. Bu konvolüsyon işlemine göre $L^1_\omega(G)$ bir Banach cebiridir. Bu cebir genelde birime sahip olmayan (G diskret olması hariç) ancak yaklaşık birime sahip bir Banach cebiridir. G kompakt olması durumunda ise $L^1(G) = L^1_\omega(G)$ olur.

Ağırlıklı $L^\infty_\omega(G)$ uzayı

$$L^\infty_\omega(G) := \{f : G \to \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \frac{f}{\omega} \in L^\infty(G)\}$$

olarak tanımlanır. Bu uzay

$$\|\varphi\|_{\infty,\omega} := \operatorname{ess\,sup} \frac{|\varphi(t)|}{\omega(t)}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $L^\infty_\omega(G)$ uzayı $L^1_\omega(G)$ nin dual uzayı olup aralarında dualite her $f \in L^1_\omega(G)$ ve $\varphi \in L^\infty_\omega(G)$ için

$$f \to \langle f, \varphi\rangle = \int_G f(t)\overline{\varphi(t)}d\lambda(t)$$

formülü ile verilir.

Lokal kompakt bir Abel G grubu üzerinde ω, bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_G \omega(t)d|\mu|(t) < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm kompleks değerli regüler Borel ölçümler kümesi

$$\|\mu\|_\omega := \int_G \omega(t)d|\mu|(t)$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Bu uzay $M_\omega(G)$ ile gösterilir. Konvolüsyon işlemi ile $M_\omega(G)$, değişmeli ve birimli bir Banach cebiridir ve ağırlıklı ölçüm cebiri olarakta bilinir. Grup cebirlerinde belirtildiği gibi $L^1_\omega(G)$ Banach cebiri, $M_\omega(G)$ cebirinin kapalı bir idealidir. Wendel (1952) tarafından $\mathcal{M}(L^1(G)) = M(G)$ olduğu ispat edilen bu sonuç, Beurling cebirlerine de genişletilebilir: T, $L^1_\omega(G)$ cebirinin bir çarpanı olmak üzere her $f \in L^1_\omega(G)$ için $T = T_\mu$ olacak şekilde bir tek $\mu \in M_\omega(G)$ ölçümü vardır ki burada $T_\mu f = f * \mu$ dir. Ayrıca $\mu \to T_\mu$ dönüşümü bir izometrik izomorfizmdir. Dahası

$$\mathcal{M}\left(L^1_\omega(G)\right) = M_\omega(G)$$

eşitliği vardır. T nin Helgason-Wang temsili, μ nün Fourier-Stieltjes dönüşümü ile çakışır (Laursen ve Neumann, 2000).

Tanım 7.3. G lokal kompakt bir Abel grubu ve ω, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer ω fonksiyonu her $g \in G$ için

(i) $\exists \alpha_g > 0,\ \omega(ng) = O(|n|^{\alpha_g}) \quad (|n| \to \infty)$,

(ii) $\liminf\limits_{|n|\to\infty} \frac{\omega(ng)}{|n|} = 0$

şartlarını sağlıyorsa, bu takdirde ω ağırlık fonksiyonu *Shilov şartlarını* sağlıyor denir (Reiter, 2000).

Teorem 7.5. *G lokal kompakt Abel grubu üzerinde ω ağırlık fonksiyonu Shilov şartlarını sağlasın. O zaman aşağıdakiler gerçekleşir.*

(i) $L^1_\omega(G)$ *Beurling cebirinin Gelfand uzayı* $\hat{G}$ *dir.*

(ii) Her $f \in L^1_\omega(G)$ *nin Gelfand dönüşümü* f *nin Fourier dönüşümüdür.*

(iii) $L^1_\omega(G)$ *bir w-Ditkin cebiridir*

(Reiter, 2000).

Lokal kompakt bir Abel G grubu üzerinde ω, bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$F_\mu := \overline{\{f - \mu * f : f \in L^1_\omega(G)\}}$$

bir kapalı idealdir. Aynen $L^1(G)$ grup cebirinde gösterildiği gibi, bu idealin hull'u

$$\mathcal{F}_\mu := \left\{\gamma \in \hat{G} : \hat{\mu}(\gamma) = 1\right\}$$

şeklinde olur. Her $\mu \in M_\omega(G)$, $f \in L^1_\omega(G)$ ve $\varphi \in L^\infty_\omega(G)$ için

$$\langle f, \mu \cdot \varphi\rangle = \langle f * \mu, \varphi\rangle = \langle Tf, \varphi\rangle = \langle f, T^*\varphi\rangle$$

olduğundan $T^*\varphi = \mu * \varphi$ elde edilir. Bunun bir sonucu olarak F_μ nin dik tamlayanı

$$F_\mu^\perp = \{\varphi \in L^\infty_\omega(G) : \mu * \varphi = \varphi\}$$

olur. Yukarıda söylenilenlerden de anlaşıldığı üzere, ω ağırlık fonksiyonu Shilov şartlarını sağladığı takdirde $L^1_\omega(G)$ cebiri Teorem 7.3'ün tüm şartlarını sağlar.

Sonuç olarak aşağıdaki neticeyi elde edebiliriz.

Teorem 7.6. *G lokal kompakt bir Abel grubu ve ω ise Shilov şartlarnı sağlayan bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer $\mu \in M_\omega(G)$ ise $\{\varphi \in L^\infty_\omega(G) : \mu * \varphi = \varphi\}$ uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter şart* $\mathrm{card}\mathcal{F}_\mu$ *kümesinin sonlu olmasıdır. Bu durumda*

$$\dim\{\varphi \in L^\infty_\omega(G) : \mu * \varphi = \varphi\} = \mathrm{card}\mathcal{F}_\mu$$

ve

$$\{\varphi \in L^\infty_\omega(G) : \mu * \varphi = \varphi\} = \mathrm{span}\mathcal{F}_\mu$$

eşitlikleri vardır.

Aşağıdaki örnek, bir önceki teoremde w-Ditkin şartı kaldırıldığı takdirde teoremin doğru olamayacağını gösterir.

Örnek 7.2. $\omega(t) = 1 + |t|$ bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L^1_\omega(\mathbb{R})$ Beurling cebiri olsun. O zaman

$$I(\{0\}) = \left\{f \in L^1_\omega(\mathbb{R}) : \hat{f}(0) = 0\right\}$$

ve

$$J(\{0\}) = \left\{f \in L^1_\omega(\mathbb{R}) : \hat{f}(0) = \hat{f}'(0) = 0\right\}$$

olur (Gelfand ve ark., 1964). $L^1_\omega(\mathbb{R})$ üzerinde $Tf = h * f$ olarak bir T çarpanı tanımlayalım ki burada $h(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}}$ dir. O zaman $\hat{T} = \hat{h}$ ve $\hat{h}(\lambda) = e^{-\lambda^2}$ dir. Buradan $\mathcal{F}_T = \{0\}$ olur. Böylece card$\mathcal{F}_T = 1$ dir. Eğer $f \in (I - T)L^1_\omega(\mathbb{R})$ ise $f = k - h * k$ olacak şekilde bir $k \in L^1_\omega(\mathbb{R})$ vardır. Buradan

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{k}(\lambda)\left(1 - e^{-\lambda^2}\right) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

olur. Bunun sonucu olarak da $\hat{f}(0) = \hat{f}'(0) = 0$ elde edilir ve bu yüzden $F_T \subseteq J(\{0\})$ olur. Ayrıca $J(\{0\})$, $\mathrm{hull}\big(J(\{0\})\big) = \{0\}$ eşitliğini sağlayan en küçük ideal olduğundan $F_T = J(\{0\})$ olur. Böylece

$$\dim\{\varphi \in L^\infty_\omega(G) : T^*\varphi = \varphi\} = \dim F_T^\perp = \dim J(\{0\})^\perp = 2$$

sonucu elde edilir.

Hatırlanacağı gibi $\omega(g) = (1 + |g|)^\alpha$, $(0 \leq \alpha < 1)$ ağırlık fonksiyonu için $L^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ Beurling cebiri bir s-Ditkin cebiridir, burada $g = (t_1, \dots, t_n)$ olmak üzere $|g| = (t_1^2 + \cdots + t_n^2)^{\frac{1}{2}}$ dir (Reiter, 2000).

$G = \mathbb{R}^n$ grubu için $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ olduğundan $\mathbb{R}^n$ ile $\widehat{\mathbb{R}^n}$ arasında bir özdeşleştirme

$$\lambda \leftrightarrow \chi_\lambda$$

olarak verilir. Burada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ve $t = (t_1, \dots, t_n)$ olmak üzere $\chi_\lambda(t) = e^{-it\cdot\lambda}$, $t \cdot \lambda = t_1\,\lambda_1 + \cdots + t_n\,\lambda_n$ olarak verilir. Dolayısıyla $\mu \in M_\omega(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\hat{\mu}(\lambda) = \hat{\mu}(\chi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\cdot\lambda}\, d\mu(t)$$

elde edilir. Böylece bu tür cebirler için Teorem 7.4 uygulanıldığında aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 7.7. $0 \leq \alpha < 1$ *olmak üzere* $\omega(g) = (1 + |g|)^\alpha$, $\mathbb{R}^n$ *de bir ağırlık fonksiyonu ve* $L^1_\omega(\mathbb{R}^n)$, *bu ağırlık fonksiyonuna karşılık bir Beurling cebiri olsun, burada* $g = (t_1, \dots, t_n)$ *için* $|g| = (t_1^2 + \cdots + t_n^2)^{\frac{1}{2}}$ *dir.* T, $L^1_\omega(\mathbb{R}^n)$ *nin bir çarpanı olmak üzere* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *kapalı ve* ∂K *saçılmış bir küme ise aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) $\{\varphi \in L^\infty_\omega(\mathbb{R}^n) : \mu * \varphi = \varphi\} \subseteq \overline{\mathrm{span} K}^{w^*}$;

(ii) *Her* $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus K$ *için* $\hat{\mu}(\lambda) \neq 1$.

Ayrıca $\partial\mathcal{F}_\mu$ saçılmış bir küme ise

$$\{\varphi \in L^\infty_\omega(\mathbb{R}^n) : \mu * \varphi = \varphi\} = \overline{\mathrm{span}\mathcal{F}_\mu}^{w^*}$$

eşitliği vardır.

7.2. Segal Cebirleri

Tanım 7.4. G lokal kompakt Abel grubu, $S(G)$, $L^1(G)$ uzayının aşağıdaki koşullar sağlayan bir alt uzayı olsun:

(i) $S(G)$, $L^1(G)$ uzayında L^1-normuna göre yoğundur.

(ii) $S(G)$, bir $\|\cdot\|_S$ normuna göre bir Banach uzayıdır ve her $f \in S(G)$ için

$$\|f\|_1 \leq C\|f\|_S$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır.

(iii) $S(G)$ ötelemeler altında invaryanttır; her $f \in S(G)$ ve $g \in G$ için $f_g \in S(G)$ dir ve $\|f_g\|_S = \|f\|_S$ koşulu sağlanır, burada $f_g(s) := f(g+s)$ dir.

(iv) Her $f \in S(G)$ için $g \to f_g$ dönüşümü G den $S(G)$ ye süreklidir.

Bu takdirde $S(G)$ konvolüsyon çarpımı ile değişmeli bir Banach cebiridir. Bu cebire *Segal cebiri* denir (Reiter, 2000).

$S(G)$ Segal cebirinin Gelfand uzayı G nin dual grubu ile özdeşleştirilebilir. $f \in S(G)$ nin Gelfand dönüşümü, f nin Fourier dönüşümüdür. Böylelikle $S(G)$ Segal cebiri yarı basit regüler bir Banach cebiridir.

Segal cebirinin tanımından dolayı herhangi bir $S(G)$ Segal cebiri bir Banach $L^1(G)$-konvolüsyon modüldür. Eğer $h \in L^1(G)$ ve $f \in S(G)$ ise bu takdirde $h * f \in S(G)$ olur ve

$$\|h * f\|_S \leq \|h\|_1\|f\|_S \qquad (h \in L^1(G), f \in S(G))$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak $L^1(G)$ cebiri de bir Segal cebiridir ve bilindiği üzere $L^1(G)$ sınırlı yaklaşık birime sahiptir. Şimdi de şunu görelim ki $L^1(G)$ cebiri dışında hiçbir Segal cebiri sınırlı yaklaşık birime sahip olamaz. Gerçekten, $L^1(G)$ cebiri sınırlı yaklaşık birime sahip olduğundan Cohen-Hewit faktorizasyon teoreminden dolayı (Hewitt ve Ross, 1963)

$$S(G) = L^1(G) * S(G)$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan $L^1(G)$ cebiri bir Banach $S(G)$-konvolüsyon modülüdür. Eğer $S(G)$ cebirinin sınırlı yaklaşık birimi olsaydı yine Cohen-Hewit faktorizasyon teoreminden dolayı

$$L^1(G) = S(G) * L^1(G)$$

olurdu. Bu son iki eşitlikten $S(G) = L^1(G)$ elde edilirdi.

Hatırlatalım ki $S(G)$ Segal cebiri bir yaklaşık birime sahiptir (Reiter, 2000). Dahası $S(G)$ Segal cebiri bir s-Ditkin cebiridir (Yap, 1971).

Şimdi de

$$A(G) \coloneqq \{\hat{f} : f \in L^1(\hat{G})\}$$

olarak tanımlayalım.

$$\|\hat{f}\|_A = \|f\|_1$$

normuna göre $A(G)$ bir Banach cebiri olup bu cebire *Fourier cebiri* denir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere $A(G)$ Fourier cebiri, $L^1(\hat{G})$ cebirine izometrik izomorftur. $A(G)$ cebirinin duali $A(G)^*$ olup bu uzayın her bir elemanına *pseudoölçüm* denir.

Bir T operatörü $S(G)$ Segal cebirinin bir çarpanı ise

$$Tf = \sigma * f \qquad f \in S(G)$$

olacak şekilde bir tek σ pseudoölçümü vardır (Unni, 1974). Bir σ pseudoölçümünün Fourier dönüşümü

$$\langle \hat{\sigma}, f \rangle = \langle \sigma, \hat{f} \rangle$$

olarak tanımlanır. Kolayca görülebilir ki T, $S(G)$ Segal cebirinin bir çarpanı ve σ, T yi temsil eden bir pseudoölçüm ise T nin Helgason-Wang temsili, σ nın Fourier dönüşümü ile çakışır. Bir başka ifadeyle $\hat{T} = \hat{\sigma}$ olur.

$S(G)$ bir Segal cebiri ve σ bir pseudoölçüm olmak üzere

$$F_\sigma \coloneqq \overline{\{f - \sigma * f : f \in S(G)\}}$$

idealini ele alalım. Yukarıda da gördüğümüz üzere bu idealin hull'u

$$\mathcal{F}_\sigma \coloneqq \{\gamma \in \hat{G} : \hat{\sigma}(\gamma) = 1\}$$

dir. Böylelikle aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 7.8. $S(G)$ *bir Segal cebiri ve* σ *bir pseudoölçüm olsun.* $\{\varphi \in S(G)^* : \sigma * \varphi = \varphi\}$ *uzayının* sonlu boyutlu *olması için gerek ve yeter şart* $\mathrm{card}\mathcal{F}_\sigma$ *kümesinin sonlu olmasıdır. Bu durumda*

$$\dim\{\varphi \in S(G)^* : \sigma * \varphi = \varphi\} = \mathrm{card}\mathcal{F}_\sigma$$

ve

$$\{\varphi \in S(G)^* : \sigma * \varphi = \varphi\} = \mathrm{span}\mathcal{F}_\sigma$$

eşitlikleri vardır.

Teorem 7.9. $S(G)$ *bir Segal cebiri ve* σ *bir pseudoölçüm olsun.* K, $\hat{G}$ *nın kapalı bir alt kümesi ve* ∂K *saçılmış bir küme ise aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) $\{\varphi \in S(G)^* : \sigma * \varphi = \varphi\} \subseteq \overline{\mathrm{span}K}^{w^*}$;

(ii) *Her* $\gamma \in \hat{G} \setminus K$ *için* $\hat{\sigma}(\gamma) \neq 1$.

Ayrıca $\partial\mathcal{F}_\sigma$ *saçılmış bir küme ise*

$$\{\varphi \in S(G)^* : \sigma * \varphi = \varphi\} = \overline{\mathrm{span}\mathcal{F}_\sigma}^{w^*}$$

eşitliği vardır.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle kuvveti sınırlı her çarpanın izometrik bir çarpana genişletilebileceği ispat edildi. İzometrik bir çarpanın özelliklerinden yol çıkarak değişmeli bir Banach cebirinde çarpanların iterasyonlarının yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşullar verildi. Daha sonra Banach cebirinde çarpanlar teorisinde Katznelson-Tzafriri teoreminin (Katznelson ve Tzafriri, 1986) daha genel bir formu ele alındı. Çarpanlar teorisinde Katznelson-Tzafriri teoreminin benzer sonuçları daha zayıf şartlar altında elde edildi. Son olarak lokal kompakt Abel gruplarında Choquet-Deny tipli teoremler ele alınmış olup değişmeli Banach cebirlerinin çarpanları bağlamında Choquet-Deny teoremini de (Choquet ve Deny, 1960) kapsayacak şekilde sonuçlar elde edildi.

Çalışmanın amacı doğrultusunda literatüre bakıldığında bu konuyla ilgili yeterince çalışma yapılmadığı görülmektedir. Dolayısıyla konu ile ilgili özgün çalışmalar yapılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Daha önce yapılan çalışmalardaki neticelerin şartları zayıflatılarak daha önemli sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Aiena, P., 1991. On spectral properties of multipliers. ***Boll. Un. Mat. Ital. B (7)***, **5** (2): 389-406.

Aiena, P., 1995. Some spectral properties of multipliers on semi-prime Banach algebras. ***Quaestiones Math.***, **18** (1): 141-154.

Aiena, P., 2004. ***Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers*.** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 452.

Akemann, C. A., 1967. Some mapping properties of the group algebras of a compact group. ***Pacific J. Math.***, **22**: 1-8.

Allan, G. R., O'farrell, A. G., Ransford T. J., 1987. A Tauberian theorem arising in operator theory. ***Bull. London Math. Soc.***, **19** (6): 537-545.

Allan, G. R., 1989. Power-bounded elements in a Banach algebra and a theorem of Gelfand. ***Conference on Automatic Continuity and Banach Algebras*.** Proc. Centre Math. Anal., Australian National University, 21, Canberra. 1-12.

Allan, G. R., Ransford, T. J., 1989. Power-dominated elements in a Banach algebra. ***Studia Math.***, **94** (1): 63-79.

Choquet, G., Deny, J., 1960. Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. ***C. R. Acad. Sci. Paris***, **250**: 799-801.

Cohn, D. L., 2013. ***Measure Theory*.** Second edition. Birkhäuser, New York, NY. 457.

Dales, H. G., 2000. ***Banach Algebras* and *Automatic Continuity*.** London Mathematical Society, Clarendon Press, Oxford, 907.

Dales, G., Aiena, P., Eschmeier, J., Laursen, K., Willis, G. A., 2003. ***Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis.*** Cambridge University Press, London. 336.

Eidelman, Y., Milman, V., Tsolomitis, A., 2004. ***Functional Analysis an Introduction.*** American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 343.

Eisner, T., 2012. ***Stability of Operators and Operator Semigroups.*** Springer, Basel. 204.

Eschmeier, J., Laursen, K. B., Neumann, M. M., 1996. Multipliers with natural local spectra on commutative Banach algebras. ***J. Funct. Anal.***, **138** (2): 273-294.

Esterle, J., 1983. Quasimultipliers, representation of H^{∞}, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, ***Radical Banach Algebras and Automatic Continuity*** (Editors: J. M. Bachar, W. G. Bade, P. C. Jr. Curtis, H. G. Dales, M. P. Thomas). Springer. Berlin. 470.

Esterle, J., Strouse, E., Zouakia, F., 1990. Theorems of Katznelson-Tzafriri type for contractions. ***J. Funct. Anal.***, **94** (2): 273-287.

Friedberg, S. H., 1979. Compact multipliers on Banach algebras. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **77** (2): 210.

Foguel, S. R., 1975. On iterates of convolutions. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **47**: 368-370.

Foguel, S. R., 1976. More on the "zero-two" law. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **61** (2): 262-264.

Gelfand, I., 1941. Zur theorie der charaktere der Abelschen topologischen gruppen. ***Rec. Math. N. S. (Mat. Sbornik)***, **9(51)** (1): 49-50.

Gelfand, I., Raikov, D., Shilov, G., 1964. ***Commutative Normed Rings*.** AMS Chelsea Publishing, New York. 306.

Graham, C. C., McGehee, O. C., 1979. ***Essays in Commutative Harmonic Analysis*.** Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. 464.

Granirer, E. E., 1985. On some properties of the Banach algebras $A_p(G)$ for locally compact groups. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **95** (3): 375-381.

Helgason, S., 1956. Multipliers of Banach algebras. ***Ann. of Math.***, **64** (2): 240-254.

Helson, H., 1953. Isomorphisms of abelian group algebras. ***Ark. Mat.***, **2**: 475-487.

Hewitt, E., Ross, K. A., 1963. ***Abstract Harmonic Analysis Volume II*.** Springer-Verlag, Berlin. 775.

Kamowitz, H., 1981. On compact multipliers of Banach algebras. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **81** (1): 79-80.

Kaniuth, E., Lau, A. T., Ülger, A., 2007. Homomorphisms of commutative Banach algebras and extensions to multiplier algebras with applications to Fourier algebras. ***Studia Math.***, **183** (1): 35-62.

Kaniuth E., 2009. ***A Course in Commutative Banach Algebras*.** Springer, New York. 362.

Kaniuth, E., Lau, A. T., Ülger, A., 2010. Multipliers of commutative Banach algebras, power boundedness and Fourier-Stieltjes algebras. ***J. Lond. Math. Soc.***, **81** (1): 255-275.

Katznelson, Y., Tzafriri, L., 1986. On power-bounded operators. ***J. Funct. Anal.***, **68**: 313-328.

Katznelson, Y., 2004. ***An Introduction to Harmonic Analysis*.** Cambridge University Press, New York. 299.

Kitchen, J. W., Jr., 1968. The almost periodic measures on a compact abelian group. ***Monatsh. Math.***, **72**: 217-219.

Krengel, U., 1985. ***Ergodic Theorems*.** De Gruyter, Berlin. 363.

Kubrusly, C. S., 2011. ***The Elements of Operator Theory*.** Second edition. Birkhäuser-Springer, New York. 540.

Larsen, R., 1971. ***An Introduction to the Theory of Multipliers.*** Springer-Verlag, Berlin. 303.

Larsen, R., 1973. ***Banach Algebras*.** Marcel Dekker, New York. 358.

Laursen, K. B., Neumann, M. M., 2000. ***Introduction to Local Spectral Theory.*** Clarendon Press, Oxford. 606.

Laursen, K. B., Neumann, M. M., 1992. Local spectral properties of multipliers on Banach algebras. ***Arch. Math. (Basel)***, **58** (4): 368-375.

Laursen, K. B., 1994. Multipliers and local spectral theory. ***Functional Analysis and Operator Theory, Banach Center Publications***, **30**: 223-236.

Loomis, L. H., 1953. ***An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*.** D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, 190.

Mustafayev, H. S., 2006. The Banach algebra generated by a contraction. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **134** (9): 2677-2683.

Mustafayev, H., 2010. Asymptotic behavior of polynomially bounded operators. ***C. R. Math. Acad. Sci. Paris***, **348**: 517-520.

Mustafayev, H., 2015. Growth conditions for conjugation orbits of operators on Banach spaces. ***J. Operator Theory***, **74** (2): 281-306.

Mustafayev, H., 2016a. On the spectra of multipliers on commutative Banach algebras. ***Math. Proc. R. Ir. Acad.***, **116A** (2): 149-168.

Mustafayev, H., 2016b. Distance formulas in group algebras. ***C. R. Math. Acad. Sci. Paris***, **6**: 577-582.

Mustafayev, H., 2017. Some convergence theorems in Fourier algebras. ***Bull. Aust. Math. Soc.***, **96** (3): 487-495.

Mustafayev, H., 2019. Mean ergodic theorems for multipliers on Banach algebras. ***J. Fourier Anal. Appl.***, **25**: 393-426.

Mustafayev, H., Topal, H., 2019. Some ergodic properties of multipliers on commutative Banach algebras. ***Turkish J. Math.***, **43** (3): 1721-1729.

Neumann, M. M., 1998. Natural spectrum, natural local spectra, and spectral mapping theorems for multipliers on Banach algebras, ***Banach algebras 97*** (Editors: E. Albrecht, M. Mathieu). Walter de Gruyter, Berlin. 575.

Neerven, J. V., 1996. ***The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators.*** Birkhäuser, Basel. 241.

Ornstein, D., Sucheston, L., 1970. An operator theorem on L_1 convergence to zero with applications to Markov kernels. ***Ann. Math. Statist.***, **41**: 1631-1639.

Phóng, V. Q., 1992a. A short proof of the Y. Katznelson's and L. Tzafriri's theorem. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **115**: 1023-1024.

Phóng, V. Q., 1992b. Theorems of Katznelson-Tzafriri type for semigroups of operators. ***J. Funct. Anal.***, **103** (1): 74-84.

Phóng, V. Q., 1997. Almost periodic and strongly stable semigroups of operators, ***Linear Operators*** (Editors: J. Janas, F. H. Szafraniec, J. Zemánek). Banach Center Publ., Polish Acad. Sci. Inst. Math., **38**, Warsaw. 401-426.

Ramsey, T., Weit, Y., 1984. Ergodic and mixing properties of measures on locally compact abelian groups. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **92** (4): 519-520.

Reiter, H., Stegeman, J. D., 2000. ***Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups***. Second edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. 327.

Ricker, W., 2005. The spectral mapping property for p-multiplier operators on compact abelian groups. ***J. Aust. Math. Soc.***, **78** (3): 423-428.

Rudin, W., 1962. ***Fourier Analysis on Groups.*** Wiley-Interscience, New York. 283.

Rudin, W. 1991. ***Functional Analysis***. Second edition. McGraw-Hill, Inc., New York. 424.

Suciu, L., Zemánek, J., 2013. Growth conditions on Cesàro means of higher order. ***Acta Sci. Math. (Szeged)***, **79** (3-4): 545-581.

Tomilov, Y., Zemánek, J., 2004. A new way of constructing examples in operator ergodic theory. ***Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.***, **137** (1): 209-225.

Unni, K. R., 1974. A note on multipliers on a Segal algebra. ***Studia Math.***, **49**: 125-127.

Wang J. K., 1961. Multipliers of commutative Banach algebras. ***Pacific J. Math.***, **11**: 1131-1149.

Wendel, J. G., 1952. Left centralizers and isomorphisms of group algebras. ***Pacific J. Math.***, **2**: 251-261.

Yap L. Y. H., 1971. Every Segal algebra satisfies Ditkin's condition. ***Studia Math.***, **40**: 235-237.

Zafran, M., 1973. On the spectra of multipliers. ***Pacific J. Math.***, **47**: 609-626.

Zaharopol, R., 1986. The modulus of a regular linear operator and the "zero-two" law in L^p-spaces $(1 < p < +\infty,\ p \neq 2)$. ***J. Funct. Anal.***, **68** (3): 300-312.

Zarrabi, M., 2013. Some results of Katznelson-Tzafriri type. ***J. Math. Anal. Appl.***, **397** (1): 109-118.

Zemánek, J., 1994. On the Gel'fand-Hille theorems. ***Functional Analysis and Operator Theory***, (Editor: J. Zemánek). Banach Center Publ**.**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., **30**, Warsaw. 369-385.

ÖZ GEÇMİŞ

1983 yılında Çankırı'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2012 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Yüksek lisans eğitimini aynı üniversitede Matematik Bölümünde tamamlamış olup Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 23/07/2019

Tez Başlığı: **DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN ÇARPANLARI İÇİN BAZI ERGODİK TEOREMLER**

Yukarıda başlığı belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 77 sayfalık kısmına ilişkin, 23/07/2019 tarihinde şahsım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % **6** (**altı**) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

23/07/2019

Adı Soyadı: Hayri TOPAL

Öğrenci No: 149102010

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: Y. Lisans ☐ Doktora ■

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Heybetkulu Mustafayev

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Dr. Sinan ŞENSOY
Enstitü Müdürü

(Unvan, Ad Soyad, İmza)