T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLİT KUATERNİYONLARLA MEKANİZMA KİNEMATİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet Sıddık ÇETİNEL
DANIŞMAN: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SPLİT KUATERNİYONLARLA MEKANİZMA KİNEMATİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Mehmet Sıddık ÇETİNEL

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ danışmanlığında, Mehmet Sıddık Çetinel tarafından sunulan "**Split Kuaterniyonlarla Mekanizma Kinematiği**" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 19/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** / ~~**oy çokluğu**~~ ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Üye: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ

Üye: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./….. tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

………………………..

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet Sıddık ÇETİNEL

ÖZET

SPLİT KUATERNİYONLARLA MEKANİZMA KİNEMATİĞİ

ÇETİNEL, Mehmet Sıddık
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
Aralık 2019, 51 sayfa

Split kuaterniyonlarla mekanizma kinematiğini incelediğimiz tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk iki bölümde sırasıyla giriş ve kaynak bildirişlerine, üçüncü bölümde temel kavramlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde kuaterniyon, dönme hareketine karşılık gelen birim kuaterniyon, adjoint dönme operatörü ve dual kuaterniyon kavramları verilmiştir. Beşinci bölümde split kuaterniyon tanımı verilerek özellikleri ele alınmıştır. Split kuaterniyonlarla mekanizma kinematiği izah edilmiş ve Matlab uygulamaları verilmiştir. Altıncı bölümde sonuç ve tartışma verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Dönme, Kuaterniyon, Lorentz uzayı, Mekanizma, Minkowski uzayı, Split kuaterniyon, Öteleme.

ABSTRACT

THE KINEMATICS OF MECHANISM WITH SPLIT QUATERNATIONS

ÇETİNEL, Mehmet Sıddık
M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
December 2019, 51 pages

The thesis, in which we examine the mechanism kinematics of split quaternions, consists of six chapters.In the first two chapters, the introduction and the literature review are involved and in the third chapter, the basic concepts are given with respect to the main purpose of the thesis study.

In the fourth chapter, quaternion, unit quaternion corresponding to rotation, adjoint rotation operator and dual quaternion are given. In the fifth chapter, the definition of split quaternion is given and its properties are discussed. The kinematics of mechanism is explained by split quaternions and Matlab application is added. In the sixth chapter, results and discussion are given.

Keywords: Rotation, Quaternion, Lorentzian space, Mechanism, Minkowski space, Split quaternion, Translation.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, çalışmanın yapılması fikrinden gerçekleşmesine kadar her türlü ilgi, rehberlik ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Şenay Baydaş'a ve saygı değer hocam Prof. Dr. Bülent Karakaş'a teşekkür ederim.

Son olarak, tez süreci boyunca, anlayış, motivasyon ve sabırla desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen başta babam ve annem olmak üzere aileme ve bana seve seve birikimleri ile yardımcı olan meslektaşlarım ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi ve takdirlerimi sunarım.

2019
Mehmet Sıddık ÇETİNEL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

1. GİRİŞ

Robotik, mekanizma teorisi temel olarak kinematik teoriyi kullanmaktadır. Çalışılan uzay, uzayda tanımlı olan metrik tasarlanan mekanizmayı ve bağlı olarak robotik teoriyi dizayn eder. Temel olan iki dönüşüm vardır ve bunlar öteleme ve dönmedir. Uzayda iki nokta arasındaki yerdeğiştirme öteleme ve dönme ile tek türlü olarak bellidir. Dönme ve öteleme birer izometridir. Dönme bir noktayı sabit bırakan bir izometri olarak tanımlanmaktadır (Bottema ve Roth,1979). Dönme ve öteleme farklı matematik araçlar ile ifade edilebilmektedir. En yaygın olanı matrisleri kullanmaktır. Ancak çalışılan mekanizmaya bağlı olarak kuaterniyonları kullanmak veya çalışılan uzay eğer Lorentz-Minkowski uzayı ise split kuaterniyonları kullanmak daha iyi sonuçlar vermektedir. Kullanılan her matematiksel araç, uzay, mekanizmanın yapısı ve sisteme eşlik eden diğer faktörlere bağlı olarak tercihin ne olacağını belirler. Kuaterniyonlar adjoint operatörle birlikte dönmeyi tanımlarlar (Hacısalihoğlu, 1983). Eğer kuaterniyon operatörünün dönme ve ötelemeyi birlikte vermesi istenirse bu durumda dual kuaterniyonları kullanmak gerekir (McCarthy, 1990). Minkowski_Lorentz uzayda çalışılıyor ise split kuaterniyonlardan hareketle split kuaterniyon operatörü ve dual katsayılı split kuaterniyonlar kullanılabilmektedir.

Bu tez kapsamı içinde tüm bu durumlar için temel bilgiler verilecek ve Lorentz_Minkowski uzaydaki mekanizmalar için temel kinematik araçlar split kuaterniyonlar ile verilecektir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Kinematik ve mekanizma teorisi matematik teori tarihiyle başlar. Matrisler temel olarak lineer denklem sistemlerinin çözümü ile ortaya çıkmaktadır. Ortogonal matris kavramsal olarak Euler'den beri var olsa da matris terimini ilk kullanan Cayley olmuştur. Cayley bu makalede temel bilgileri de vermektedir. Dönme bir noktayı sabit bırakan bir izometridir. Her boyuttaki uzayda bir dönme bir ortogonal matris ile verilebilir ve bu büyük bir kolaylaştırıcıdır. $n > 2$ boyutlu uzayda bir dönmeye karşı gelen ortogonal matrisin karakteristik vektörü dönmenin eksen vektörüdür. Bu durumda matris-karakteristik vektör geçişleri Cayley formülü ile verilebilir (Bottema ve Roth,1979). Rodrigues denklemi bunun invaryantlık durumunu ifade etmektedir (McCarthy, 1990).

Sir William Hamilton kompleks sayıların bir genellemesi olarak kuaterniyonları takdim etmiştir (Hamilton, 1843). Kuaterniyonlar 4-boyutlu vektör uzayı üstünde tanımlıdır. Bir kuaterniyon genel olarak iki bileşenin toplamı olarak verilebilir. Bunlardan biri kuaterniyonun skaler kısmı diğeri de vektör kısmıdır. Kuaterniyon çarpımı skalar ile çarpma, skaler çarpım ve vektörel çarpımın bir kombinasyonudur (Kuipers, 1999). İç çarpım ve vektörel çarpım özellikleri yardımıyla kuaterniyon çarpımın özellikleri ifade ve ispat edilebilmektedir (Hamilton, 1843; Hacısalihoğlu, 1983). Önemli özeliklerinden biri birim kuaterniyonun yazılımına eşlik eden birim vektördür. Adj dönüşümü kullanılarak bir birim kuaterniyon dönme operatörü olarak verilebilmektedir. Bu durumda kuaterniyonun birim formuna eşlik eden birim vektör aynı zamanda dönmenin dönme eksenidir. Böylece dönme, dönme ekseni ve birim kuaterniyonun birim vektörü geçişleri önemlidir. Mekanizma tasarımında linklerin dönme eksenlerinin doğrultman vektörlerini birim vektör kabul eden birim kuaterniyonların çarpımı mekanizmanın dönmeler kısmını vermektedir. Yerdeğiştirmelerdeki öteleme kısmı için dual katsayılı dual kuaterniyonlar kullanılmaktadır (McCarthy, 1990).

Hamilton tarafından takdim edilen kuaterniyonlar, kuaterniyonun vektör kısmının birim vektörlerinin iç çarpımlarının -1 olması üstüne kurulmuştur. Hamilton'un çalışmasının yayınlanmasından 6 yıl sonra J. Cockle kuaterniyonların yeni bir sınıflandırmasını yayınlamıştır (Cockle, 1849). Dördeyler adını verdiği cümle üstünde farklı dört tip çarpımı tanımlamıştır. Bunlardan biri Sir W Hamilton'un tanımladığı kuaterniyonlardır ve bunu yeni bir isimle isimlendirmemiştir. Cockle'nın sınıflandırmasına göre dördeyler şunlardır. 1. The Quaternion of Sir W. R. Hamilton, 2. The Tessarine system, 3. The Coquaternion System ve 4. The Cotessarine system.

Hareket geometrisindeki önemli araçlardan biri de dual sayılardır. Dual sayılar, Clifford tarafından tanıtılmıştır (Clifford, 1873).

Coquaternion daha sonra split kuaterniyon olarak ullanılmıştır. Split kelimesinin çevirisi olarak bölünmüş kelimesi, içeriği tam karşılamasa da kullanılmaktadır. Ancak temel anlamı ve kullanıldığı uzay önemlidir. Coquaternion, split kuaterniyon çarpımında baz vektörleri çarpımı

$$i^2 = -1, j^2 = 1, k^2 = 1$$

şeklinde değer alır ve bu durumda split kuaterniyonların etki uzayı 4 boyutlu Lorentz-Minkowski uzayıdır. Etki uzayının 4 boyutlu Minkowski uzayı olması, split kuaterniyonların relativite, mekanik, kuantum mekaniği, 4-boyutlu Lorentz uzayında kinematik ve mekanizma tasarımında önemli çalışmalar yapılmasına öncü olmuştur (Inoguchi, 1998; Kula ve Yaylı, 2007; Jiang ve ark., 2015; Jiang ve ark., 2018). Kinematik açıdan yerdeğiştirmede dönme ve öteleme birlikte kullanılmak istenirse katsayıları dual sayılar olan dual split kuaterniyonlar kullanılabilir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Dual Sayılar

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesini göstersin. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ üçlüsü bir cisimdir. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ üstünde bir yapı şöyle inşa edilir

$$\mathfrak{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}\}$$

cümlesi üstünde $+,\cdot,\otimes$ işlemleri,

Toplama: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Skalar ile çarpma : $\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$

Çarpma : $(a,b)\otimes(c,d)=(ac,ad+bc)$

olarak tanımlansın.

Tanım 3.1.1. $(\mathfrak{D},+,\cdot,\otimes)$ cümlesine dual sayılar cümlesi ve $d\in\mathfrak{D}$ ye de dual sayı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Bir $(a,b)\in\mathfrak{D}$ dual sayısı

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$$

olarak $(1,0),(0,1)$ birimleri cinsinden yazılabilir. Burada $(1,0)$ reel birim $(0,1)$ ise dual birim olarak isimlendirilir.

$(0,1)=\varepsilon$ ve $(1,0)=1$ ile gösterilir. Dual birim, $\varepsilon^2=0$ özelliğine sahip bir dual sayıdır, şöyle ki;

$$(0,1)\otimes(0,1)=(1.0,0.1+1.0)=(0,0)\cong 0$$

dır. Bu özellik dual sayılar için karakteristik özelliktir.

Böylece (a,b) dual sayısı $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a+\varepsilon b$ olarak da yazılabilir.

Bu durumdan $\mathfrak{D}$ dual sayılar cümlesi

$$\mathfrak{D}=\{a+\varepsilon b: a,b\in\mathbb{R}\ ve\ \varepsilon^2=0\}$$

şeklinde de yazılır.

Tanım 3.1.2. (Eşitlik): $d_1 = a_1 + \varepsilon b_1$, $d_2 = a_2 + \varepsilon b_2$ ve $d_1 = d_2$ ise $a_1 = a_2\ ve$ $b_1 = b_2$ dir.

Tanım 3.1.3 (Eşlenik): $d = a + \varepsilon b \in \mathfrak{D}$ için $\bar{d} = a - \varepsilon b$ sayısına d nin eşleniği denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.4. (Ters eleman varlığı): $d = a + \varepsilon b, a \neq 0$ dual sayısı için d nin tersi $d^{-1} = (\frac{1}{a}, \frac{-b}{a^2})$ dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 3.1.1.

$d = (6{,}11)$, $d = 6 + 11\varepsilon$ formunda yazılabilir.

$\frac{1}{d} = \frac{1}{6+11\varepsilon}$ kesrinin hem pay hem paydası eşleniği ile genişletilirse

$$\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{6+11\varepsilon}\right).\left(\frac{6-11\varepsilon}{6-11\varepsilon}\right)$$

$$= \left(\frac{6-11\epsilon}{36-66\varepsilon+66\varepsilon+11\varepsilon^2}\right)$$

$$= \left(\frac{6-11\varepsilon}{36}\right) = \left(\frac{6}{36} - \frac{11}{36}\varepsilon\right)$$

$$= \left(\frac{6}{36} - \frac{11}{36}\varepsilon\right) = (\frac{1}{6}, \frac{-11}{36})$$

olduğu görülür.

Tanım 3.1.5. (Bölme) **:** $d_1, d_2 \in \mathfrak{D}, d_1 = a_1 + \varepsilon b_1, d_2 = a_2 + \varepsilon b_2\ , a_2 \neq 0$ için

$$\frac{d_1}{d_2} = d_1 . {d_2}^{-1}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 3.1.1. $(\mathfrak{D},\oplus,\otimes)$ üçlüsü bir halkadır.

İspat : Aşağıdaki halka aksiyomları sağlanır.

1) $(\mathfrak{D},\oplus)$ değişmeli gruptur,
2) $(\mathfrak{D},\otimes)$ yarı gruptur,
3) $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılmalıdır.

3.2. Dual Vektör

$\mathfrak{D}$ dual sayılar cümlesini göstermek üzere $\mathfrak{D}^3$ cümlesi

$\mathfrak{D}^3 = \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ olarak tanımlansın. $A \in \mathfrak{D}^3$ için

$$A = (A_1, A_2, A_3), \qquad A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, \qquad a_i, a_i^* \epsilon R$$

$\mathfrak{D}^3$ üzerinde toplama ve skalar ile çarpma işlemi şöyle tanımlanır

$$(A + B) = (\vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*) + (\vec{b} + \varepsilon\vec{b}^*) = \left(\vec{a} + \vec{b}, \varepsilon(\vec{a}^* + \vec{b}^*)\right),$$

$$\lambda. A = \lambda\vec{a} + \varepsilon\lambda\vec{a}^*.$$

Teorem 3.2.1. $(\mathfrak{D}^3, +)$ ikilisi bir gruptur.

İspat **:** Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) Kapalılık özelliği,
2) Birleşme özelliği,
3) Birim(etkisiz) eleman vardır,
4) Ters eleman vardır.

Teorem 3.2.2. $\mathfrak{D}^3, \mathfrak{D}$ üzerinde bir modüldür.

İspat: Aşağıda yazılı modül olma aksiyomları sağlanır.

M_1 : $\forall\, \alpha \in \mathfrak{D}$ ve $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathfrak{D}^3$ için;

$$\alpha(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A} + \alpha\mathrm{B},$$

M_2 : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{D}$ ve $\forall\, \mathrm{A} \in \mathfrak{D}^3$ için;

$$(\alpha + \beta)\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A},$$

M_3 : $\forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{D}$ ve $\forall\, A \in \mathfrak{D}^3$ için;

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),$$

M_4: $(1, 0) \in \mathfrak{D}$ elemanının $\mathbb{R}$ deki izomorfu 1 olmak üzere ve $\forall\, A \in \mathfrak{D}^3$ için

$$1. A = A$$

burada, $\mathfrak{D}$ dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modül "$\mathfrak{D} -$ modül" olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.2.1. Bir $A \in \mathfrak{D}^3$ dual vektörünün normu, $A = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ için

$$\|A\| = (\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|})$$

şeklinde tanımlı olan dual sayıdır.

Bir $A \in \mathfrak{D}^3$ için $\langle A, A \rangle = (1,0)$ ise A ya birim dual vektör denir. (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 3.2.1. $A = (1 - 2\varepsilon, -2 + 3\varepsilon, 1 + 14\varepsilon)$ ise $\|A\|$ normu

$$A = (1, -2, 1) + \varepsilon(-2, 3, 14)$$

$$\|A\| = \left(\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}, \frac{(1.(-2) + (-2).3 + 1.4)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.3. $A \in \mathfrak{D}^3$, $A = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ bir birim dual vektör ise, $\|\vec{a}\| = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ dır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: $\|A\| = 1$ ise $\left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|}\right) = (1,0)$ ve buradan $\|\vec{a}\| = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$ elde edilir.

3.3. Katı Dönüşümler

Bir linkin bir diğerine göre pozisyonu matematiksel olarak her bir katı cisme bağlanmış referans çatıları arasındaki koordinat transformasyonu ile verilmesi genel olarak kinematik zincir olarak tanımlanır.

Bir cismin bir diğerine bağlı pozisyonunu çalışmak için her bir cisme birer çatı bağlanır. Cisimlerden biri sabit diğeri hareketli kabul edilir. Bağlanan çatı sabit çatı olarak isimlendirilir ve bu çatı F ile gösterilir. Hareketli cisme bağlanan çatı, hareketli çatıdır ve M ile gösterilir. Koordinat transformasyonu

$$D: F \rightarrow M$$

şeklinde olup, M de ölçülen koordinatları, F deki koordinatlara dönüştürür. Bu transformasyon,

$$X = [A]x + d \tag{3.1}$$

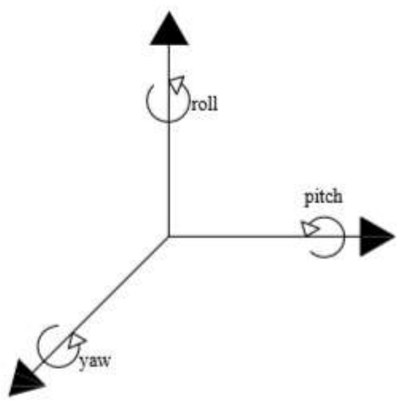
ile verilir; burada, x noktanın M deki yer vektörü, X ise F deki yer vektörüdür (Bottema ve Roth,1979).

$\mathbb{R}^{3}$'de bir dönme, dönme ekseni ile karakterize edilir. Temel olan üç dönme ekseni koordinat eksenleridir ve bunlara bağlı dönmeler özel olarak adlandırılır. Bu isimlendirmeler şöyledir:

Dönme ekseni x ekseni ise dönmeye yalpa (yaw),

Dönme ekseni y ekseni ise dönmeye iniş- çıkış (pitch),

Dönme ekseni z ekseni ise dönmeye yuvarlama (roll) adı verilir (Schilling, 1990; Parkin, 1991).



Şekil 3.1. Eksenlere göre dönmeler (roll (yuvarlama), pitch (iniş-çıkış), yaw (yalpa))

$\mathbb{R}^3$ te bir dönmenin, bir eksen etrafında olmasının anlamı dönmenin bir ekseni invaryant bırakması demektir. Bu kavram ise verilen bir matrisle belli olan lineer dönüşümün karakteristik vektörleriyle verilebilir. Söz konusu, ortogonal matrisler olduğu için $A \in O(3)$ matrisinin karakteristik vektörleri belirlenmelidir. Çözüm,

$$[A]\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{3.6}$$

matris denkleminin çözüm cümlesidir.

$\vec{X} = [A]\vec{x} + d$ ile verilen koordinat transformasyonunu, bir noktayı ilk konumundan şimdiki konumuna taşıyan bir operasyon olarak görmek sık yapılan bir eylemdir. Bu x vektörünün ölçülendirildiği koordinat çatısı hakkında karışıklığa yol açabilir. Bu transformasyon, M nin bütünü F ile çakışık olduğu ilk konumundan, x in daima M de ölçülendirildiği sunuş konumuna yerdeğiştirmesi olarak ele alınır. Bu transformasyon $D: F \to M$ ile gösterilir ve yerdeğiştirme olarak adlandırılır. n-boyutlu uzayda bir yerdeğiştirme D=(A, d) ile tanımlanır, burada; [A] bir nxn dönme matrisi ve d bir n-vektördür.

Bir yerdeğiştirme bir diğeri üzerine uygulanırsa bileşke bir yeni yerdeğiştirmedir. Böyle iki yerdeğiştirme $D_1: F \to M_1$, $D_2: M_1 \to M_2$ olmak üzere $D: D_1D_2: F \to M_2$ dir (Bottema ve Roth, 1979).

Tanım 3.3.1. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu uzayın yerdeğiştirmeleri cümlesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir cebirsel gruptur. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu uzayın yerdeğiştirmeleri grubu n-boyutlu uzayın Öklid Grubu olarak tanımlanır. Bu grup SE(n) ile gösterilir (Bottema ve Roth, 1979).

Bir dönme, katı cismin noktaları arasındaki uzaklığı korur. Böylece, $A \in O(n)$, $A\vec{x} = \vec{X}$ olmak üzere,

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$\langle\vec{X},\vec{X}\rangle - \langle\vec{x},\vec{x}\rangle + \langle\vec{x},\vec{X}\rangle - \langle\vec{x},\vec{X}\rangle = 0$$

ve buradan,

$$\left(\vec{X}-\vec{x}\right)^T\left(\vec{X}+\vec{x}\right) = 0 \qquad (3.10)$$

yazılabilir.

$$\vec{X}+\vec{x} = [A+I]\vec{x}$$

$$\vec{X}-\vec{x} = [A-I]\vec{x}$$

değerleri (3.10) da yerine yazılırsa ,

$$\vec{X}-\vec{x} = [A-I][A+I]^{-1}(X+\vec{x}) \qquad (3.11)$$

olur. $[A-I][A+I]^{-1}$ matrisi B ile gösterilsin. Dikkat edilirse, B matrisi $\vec{X}+\vec{x}$ vektörünü kendisine dik olan $\vec{X}-\vec{x}$ vektörüne dönüştürmektedir. (3.11) eşitliği $\vec{x}$ ve $\vec{X}$ in seçiminden bağımsız olduğuna göre, temsilci bir $\vec{y}$ vektörü için,

$$\langle\vec{y},[B]\vec{y}\rangle = 0$$

ve $B = [b_{ij}]$ açık bileşenleriyle yazılırsa;

$$\sum_{i\neq j}(b_{ij}+b_{\text{ji}})y_i y_j \ + \sum_{i=1} b_{ii}{y_i}^2 = 0 \qquad (3.12)$$

elde edilir. Bu eşitlik keyfi bir $\vec{y}$ vektörü için sağlandığından; her i, j için,

$$b_{ii} = 0,$$

$$b_{ij} = -b_{ji}$$

olmalıdır. Yani $[B] = -[B]^T$, bir başka ifadeyle B bir anti-simetrik matristir.

$$[B] = [A-I][A+I]^{-1}$$

eşitliğinden A matrisi çözülürse,

$$[A] = [I-B]^{-1}[I+B] \qquad (3.13)$$

elde edilir. Bu eşitlik, ortogonal matrisler için Cayley formülü olarak adlandırılır (McCarthy, 1990).

Dönme ekseni ile dönme arasındaki ilişki şöyledir:

Anti-simetrik bir $[B]_{3\times 3}$ matrisi,

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. [B] matrisi üç bağımsız bileşene sahiptir. 3x3 tipinden anti-simetrik matrisler cümlesi ile $\mathbb{R}^3$ uzayı arasında bir 1:1 eşleme kurulabilir. Eğer $b_{12} = -b_3$, $b_{13} = b_2$, $b_{23} = -b_1$ değişimi kullanılırsa;

$$A_3 \to \mathbb{R}^3$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \to (b_1, b_2, b_3)$$

şeklinde verilebilir ve bu dönüşüm,

$$[B]\,[y] = \vec{b} \times \vec{y}, \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \tag{3.14}$$

özelliğine sahip bir 1:1 eşlemedir.

Cayley formülü yardımıyla $[A]$ dönme matrisinden bir $[B]$ anti-simetrik matrisi elde edilir. $[B]$ den de yukarıda anlatılan $(b_1,b_2,b_3) = \vec{b}$ vektörü elde edilir. $\vec{b}$ vektörü, $[A]$ dönme matrisinin λ=1 karakteristik değerine karşı gelen karakteristik vektördür. Bunun için $[A]\vec{b} = \vec{b}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$A = [I + B][I - B]^{-1}$$

$$[A][I - B] = [I + B]$$

$$[A][I - B]b = [I + B]b$$

$$[A]b - [A][B]b = [I]b + [B]b, \quad [B]b = b \times b = 0$$

$$[A]b = b \tag{3.15}$$

4. KUATERNİYONLAR

18. yüzyılın başlarında çok araştırılan konuların başında yer almakta olan kompleks (karmaşık) sayılar için İrlandalı Sir William Rowan Hamilton, $\mathbb{R}^4$ Öklid 4-Uzayında dördeyler olarak da adlandırdığı kuaterniyonları tanımlamıştır (Hamilton, 1843).

$$K = \{q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k; a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Hamilton, bu çarpım kuralı ile birlikte her bir sıralı sayı dörtlüsüne “kuaterniyon” adını vermiştir.

4.1. Reel Kuaterniyon

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = K$$

$$+: K \times K \to K$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times K \to K$$

$$\otimes: K \times K \to K$$

$$K = \{q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \ \backslash a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çarpımı Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Kuaterniyon çarpım tablosu

$\otimes$	**1**	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
1	1	i	j	k
$\boldsymbol{i}$	i	-1	k	$-j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-k$	-1	i
$\boldsymbol{k}$	k	j	$-i$	-1

K cümlesinin her bir elemanına reel kuaterniyon denir. $\{i, j, k\}$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sistemi olarak alınabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

$Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ kuaterniyonun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı da $\overrightarrow{V_Q}$ omak üzere iki kısma ayrılır .

$Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$ olmak üzere $S_Q = a_0$ ve $\overrightarrow{V_Q} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dır.

$Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$, $\quad P = S_P + \overrightarrow{V_P}$ için reel kuaterniyonlar toplamı

$$Q + P = (S_P + S_Q) + (\overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_P})$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere skalar ile çarpma işlemi ise

$$\lambda . Q = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)i + (\lambda a_2)j + (\lambda a_3)k$$

eşitliği ile tanımlıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 4.1.1**.** Reel kuaterniyonların çarpımı

$$\otimes : K \otimes K \to K$$

$$(Q, P) \to Q \otimes P$$

$$Q \otimes P = (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \otimes (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)$$

$$Q \otimes P = S_Q S_P - \langle \overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P} \rangle + S_P \overrightarrow{V_Q} + S_Q \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_Q} \times \overrightarrow{V_P}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbb{R}^3$ teki iç çarpım $''\langle , \rangle''$ ile $\mathbb{R}^3$ teki vektörel çarpım $'' \times ''$ ile ifade edilmiştir (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 4.1.1. $Q = 3 + 4i + 5j + 6k$ ve $P = -2 - 4i + 3j - 2k$ olmak üzere $Q \otimes P$ kuaterniyonu için

$$S_Q = 3,\ S_P = -2, \overrightarrow{V_Q} = (4,5,6), \overrightarrow{V_P} = (-4,3,-2) \text{ dir.}$$

Kuaterniyon çarpımı:

$$Q \otimes P = S_Q S_P - \langle \overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P} \rangle + S_Q \overrightarrow{V_P} + S_P \overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_Q} \times \overrightarrow{V_P}$$

$$Q \otimes P = 3.(-2) - (-16 + 15 - 12) + (-2).(4,5,6) + 3.(-4,3,-2) + (4,5,6) \times (-4,3,-2)$$

$$= 7 - 48i - 17j + 14k$$

Tanım 4.1.2. Bir Q kuaterniyonunun eşleniği $\bar{Q}$ ile gösterilir.

$$(\bar{\ }):K \to K$$

$Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$ ise $\bar{Q} = S_Q - \overrightarrow{V_Q}$ veya

$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere $\bar{Q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ ile tanımlanır. $p, q \in K$ olmak üzere kuaterniyon eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir (Hacısalihoğlu, 1983; Morais ve ark, 2014).

i. $\overline{Q + P} = \bar{Q} + \bar{P}$,

ii. $\overline{Q \otimes P} = \bar{P} \otimes \bar{Q}$,

iii. $\overline{(\bar{Q})} = Q$.

Tanım 4.1.3. Bir Q kuaterniyonunun normu N_Q ile gösterilir.

$$N_Q : K \to \mathbb{R}$$

$$Q \to N(Q) = N_Q = Q \otimes \bar{Q} = \bar{Q} \otimes Q$$

şeklinde tanımlanır.

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$\bar{Q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

$$N_Q = Q \otimes \bar{Q} = {q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 \text{dir.}$$

$N_Q \geq 0$ dır ve norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Hacısalihoğlu, 1983).

$$i) N_{QP} = N_Q N_P,$$

$$ii) N_{\lambda Q} = \lambda^2 N_Q.$$

Örnek 4.1.2. $Q = 3 + 4i + 5j + 6k$ ise Q kuaterniyonunun normu

$$Q \otimes \bar{Q} = 9 - (-16 - 25 - 36) + (-12i - 15j - 18k)$$
$$+(12i + 15j + 18k) + (4,5,6) \times (-4, -5, -6)$$
$$= 86.$$

Tanım 4.1.4. $N_Q = 1$ olan $Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonuna birim reel kuaterniyon denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 4.1.5. Bir Q reel kuaterniyonun inversi(tersi) Q^{-1} ile gösterilir

$$(,)^{-1}: K \to K$$

$$Q \to Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N_Q}, N_Q \neq 0$$

yani

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

olmak üzere Q reel kuaterniyonun inversi(tersi)

$$Q^{-1} = \frac{q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k}{{q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

4.2. Birim Kuaterniyon

$Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ kuaterniyonun ekseni cinsinden kutupsal formu

$$Q_0 = \left(\frac{Q}{\sqrt{N_Q}}\right) = \frac{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}},$$

$$= \frac{a_0}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}} + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}} \cdot \frac{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

$$\frac{a_0}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}} + \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}} \cdot \frac{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$Q_0 = \frac{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{a_0}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}{\sqrt{{a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}},$$

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}},$$

olmak üzere reel kuaterniyonların kutupsal formu

$$Q_0 = \cos\theta + \overrightarrow{S_0}\sin\theta$$

dır. $\overrightarrow{S_0}$ birim vektörüne Q_0 ın ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 4.2.1: $Q = 3\sqrt{6} + 3i + \sqrt{5}j + 2k$ ise Q kuaterniyonunu kutupsal formda gösterimi;

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{3i + \sqrt{5}j + 2k}{\sqrt{18}},$$

$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}} = \frac{1}{2}$$

buradan $\theta = 30^0$ olur.

$$q_0 = \cos\theta + \overrightarrow{S_0}\sin\theta$$

$$q_0 = \cos 30^0 + \frac{3i+\sqrt{5}j+2k}{\sqrt{18}}\sin 30^0$$

elde edilir.

Birim kuaterniyon kullanımıyla $\mathbb{R}^3$ te bir dönme operatörü tarif edilebilir. Bu operatör $Ad_q(x) = q \otimes \vec{x} \otimes q^{-1}$ olarak tanımlanır. Ad_q q nun $\overrightarrow{S_0}$ etrafında 2θ lık bir dönme tanımlar.

$\overrightarrow{S_0}$ birim vektörü dönme eksenidir, şöyle ki;

$$q_0 \otimes \overrightarrow{S_0} \otimes {q_0}^{-1} = (\cos\theta + \overrightarrow{S_0}\sin\theta) \otimes \overrightarrow{S_0} \otimes (\cos\theta - \overrightarrow{S_0}\sin\theta)$$
$$= [\cos\theta\overrightarrow{S_0} - < \overrightarrow{S_0}\sin\theta\, , \overrightarrow{S_0} > + (\overrightarrow{S_0}\sin\theta \times \overrightarrow{S_0})] \otimes (\cos\theta - \overrightarrow{S_0}\sin\theta)$$
$$= [\cos\theta\overrightarrow{S_0} - < \overrightarrow{S_0}, \overrightarrow{S_0} > \sin\theta + (0)] \otimes (\cos\theta - \overrightarrow{S_0}\sin\theta)$$
$$= [\cos\theta\overrightarrow{S_0} - \sin\theta] \otimes (\cos\theta - \overrightarrow{S_0}\sin\theta)$$
$$= [-\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\,\overrightarrow{S_0}\sin\theta + \overrightarrow{S_0}\cos\theta\cos\theta$$
$$- < \cos\theta\,\overrightarrow{S_0}, -\overrightarrow{S_0}\sin\theta > + (\overrightarrow{S_0}\cos\theta - \sin\theta\,\overrightarrow{S_0})]$$
$$= -\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta\,\overrightarrow{S_0} + \sin^2\theta\,\overrightarrow{S_0} + \sin\theta\cos\theta\, . < \overrightarrow{S_0}, \overrightarrow{S_0} > +0$$
$$= \overrightarrow{S_0}$$

O halde $\overrightarrow{S_0}$ birim vektörü gerçekten dönme eksenidir.

4.2.1 Adjoint operatörü

K nın normlu(birim) kuaterniyonları cümlesi J ile gösterilsin,

$$J = \{Q_0 \in K | N(Q_0) = 1\}$$

$\mathbb{R}^4$ te birim küre S^3 olmak üzere $J \to S^3$, $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ eşlemesi $1{:}\,1$ dir.

ad dönüşümü şöyle tanımlıdır:

$$ad\colon J \to J, \qquad ad\colon g \to ad(g), \qquad adg(x) = gxg^{-1}$$

$Q_0 = \cos\varphi + \varepsilon_{Q_0}\sin\varphi \in J$ verilsin. adQ_0 ın ε_{Q_0} daki görüntüsü,

$$adq\left(\varepsilon_{Q_0}\right) = (\cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi)(\varepsilon_{Q_0})(\cos\varphi - \varepsilon\sin\varphi)$$

adq nun, $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart bazındaki değerleri,

$$adq(e_1) = e_1\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\langle e_1, \varepsilon\rangle\varepsilon + (\varepsilon \times e_1)\sin\varphi$$
$$adq(e_2) = e_2\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\langle e_2, \varepsilon\rangle\varepsilon + (\varepsilon \times e_2)\sin\varphi$$
$$adq(e_3) = e_3\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\langle e_3, \varepsilon\rangle\varepsilon + (\varepsilon \times e_3)\sin\varphi$$

böylece, $[\mathrm{a}_{ij}]$ dönme matrisinin a_{ij} bileşenleri;

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\langle e_i, \varepsilon\rangle\langle\varepsilon, e_j\rangle + \langle\varepsilon \times e_i, e_j\rangle\sin\varphi$$

$$a_{ij} = \delta_{ij}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\langle e_i, \varepsilon\rangle\langle \varepsilon, e_j\rangle + \langle \varepsilon_{ijk} e_k, \varepsilon\rangle \sin\varphi$$

burada, $\varepsilon = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

şeklinde ifade edilmek üzere;

$$\left[a_{ij}\right] = \delta_{ij}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)x_i x_j + \varepsilon_{ijk} x_k \sin\varphi$$

veya açık şekliyle;

$$\left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi){x_1}^2 & (1-\cos\varphi)x_1x_2 - x_3\sin\varphi & (1-\cos\varphi)x_3x_1 - x_2\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)x_1x_2 + x_3\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi){x_2}^2 & (1-\cos\varphi)x_3x_2 - x_1\sin\varphi \\ (1-\cos\varphi)x_3x_1 - x_2\sin\varphi & (1-\cos\varphi)x_2x_3 - x_1\sin\varphi & \cos\varphi + (1-\cos\varphi){x_3}^2 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla $A = \cos\varphi\, \mathrm{I}_3 + (1-\cos\varphi)\left[x_i x_j\right] + \sin\varphi \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$

şeklinde ifade edilebilir. A daki iki matris sırasıyla M ve N ile gösterilsin.

$$M = \left[x_i, x_j\right] = \begin{bmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & {x_3}^2 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. M ve N matrisleri ε un verilmesiyle tek türlü bellidir.

M ve N matrislerine ait bazı eşitlikler önemlidir (Yahşi ve Özgören, 1984).

$$N^2 = M - \mathrm{I}$$

$$N.M = M.N = 0$$

$$N^3 = -N$$

$$N^5 = N$$

$$\left[A_{ij}\right] = \mathrm{Rot}(\mathrm{n}, \theta) = \mathrm{I}\cos\theta + (1-\cos\theta)M + \sin\theta\, N$$

ifadesindeki cosinüs ve sinüs fonksiyonları Taylor serisine açılırsa

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{n}, \theta) = \mathrm{I} + \mathrm{N}\theta + \frac{1}{2}(\mathrm{N}\theta)^2 + \frac{1}{3}(\mathrm{N}\theta)^3 + \cdots$$

ve dolayısıyla;

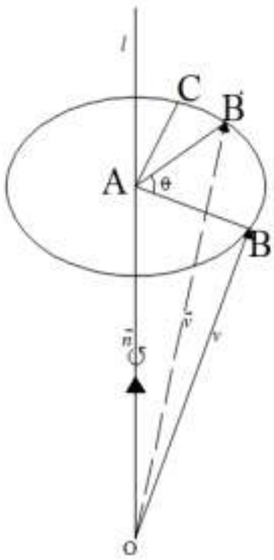
$$\mathrm{Rot}(\mathrm{n}, \theta) = e^{\mathrm{N}\theta}$$

elde edilir. Nθ antisimetrik olup, $e^{N\theta} \in O(3)$ ve $\det(e^{N\theta}) = 1$ olmaktadır.

Keyfi bir $v \in \mathbb{R}^3$ için;

$$N.v = n \times v$$
$$M.v = \langle n, v \rangle n.$$

eşitlikleri bir dönmenin ifade edilişi aşağıdaki gibi de verilebilir. $\vec{n}$ birim vektörüyle tanımlı eksen etrafında, bir $\vec{v}$ vektörü pozitif yönde θ derece döndürülsün.



Şekil 4.1. Bir eksen etrafında dönme

$\vec{v}$ vektörü için;

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

yazılabilir.

$$\mathrm{Rot}(n, \theta)(\vec{v}) = \vec{\vec{v}}$$
$$\vec{\vec{v}} = \overrightarrow{OB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cos\theta + \overrightarrow{AC} \sin\theta$$

burada,

$$\overrightarrow{OA} = \langle n, v \rangle n = Mv$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -Mv + v$$

olur, bu değerler

$$\bar{v} = Mv + (Mv + v)\cos\theta + Nv\sin\theta$$
$$\bar{v} = [\mathrm{I}\cos\theta + \sin\theta\, N + (1 - \cos\theta)M]v$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{n}, \theta) = \mathrm{I}\cos\theta + (1 - co\,s\,\theta)M + \sin\theta\, N$$

yazılabilir.

4.3. Dual Kuaterniyonlar

Bu kesimde dual kuaterniyonlar katsayıları dual sayılar olan kuaterniyonlar olarak tanımlanacaktır.

Bir A dual vektörü $A = a + \varepsilon a^*$ olarak tanımlanmıştır. Burada $a, a^* \in \mathbb{R}^3$ $ve\ \varepsilon^2 = 0$ dır.

$$Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad Q^* = a_0{}^* + a_1{}^* i + a_2{}^* j + a_3{}^* k$$

$Q = q + \varepsilon q^*$ şeklinde tanımlanan kuaterniyonlara dual kuaterniyon denir. Dual kuaterniyonlar cümlesi K_D ile gösterilir.

$Q = q + \varepsilon q^* = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ kuaterniyonun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V_Q}$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$$

burada $S_Q = A_0$ ve $\overrightarrow{V_Q} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ dır (Hacısalihoğlu, 1983).

4.3.1 Dual kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler

Tanım 4.3.1.1. İki dual kuaterniyonun reel ve dual kısımları, karşılıklı olarak, eşit iseler bu iki kuaterniyona eşittirler denir (Hacısalihoğlu1983).

$$Q = q + \varepsilon q^* = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$$
$$P = p + \varepsilon p^* = B_0 + B_1 i + B_2 j + B_3 k$$

eğer $A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2, A_3 = B_3$ ise $P = Q$ dır.

Tanım 4.3.1.2. İki dual kuaterniyonun toplamı karşılıklı olarak bu iki kuaterniyonun reel ve dual kısımlarının toplamıyla elde edilir. Aynı kaide fark için de geçerlidir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 4.3.1.3. $\otimes : K_D \times K_D \to K_D$

iki dual kuaterniyon

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon q^* = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k \\ P = p + \varepsilon p^* = B_0 + B_1 i + B_2 j + B_3 k \end{cases}$$

olsun. İki dual kuaterniyonun çarpımı şöyledir.

$$Q \otimes P = q \otimes p + \varepsilon.(q \otimes p^* + q^* \otimes p)$$
$$P \otimes Q = p \otimes q + \varepsilon.(p \otimes q^* + p^* \otimes q)$$

q, q^*, p, p^* kuaterniyonlar olduklarından $p \otimes q$ ve $q \otimes p$ çarpımları kuaterniyon çarpımından

$$\mathrm{Q} \otimes \mathrm{P} = \mathrm{S_Q}.\mathrm{S_P} + \mathrm{S_Q}\mathrm{V_P} + \mathrm{S_P}\mathrm{V_Q} - \langle \mathrm{V_Q}, \mathrm{V_P} \rangle + \mathrm{V_Q} \times \mathrm{V_P}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 4.3.1.1. $Q = (3 + 4i + 5j + 6k) + \varepsilon(2 - 2i + 2j + k)$

$$P = (1 + 2i + 2j + 3k) + \varepsilon(2 + 2i + j + 3k)$$

dual kuaterniyonlar için $Q \otimes P$ çarpımı için

$$Q \otimes P = q \otimes p + \varepsilon.(q \otimes p^* + q^* \otimes p)$$
$$q \otimes p = \mathrm{S_q}.\mathrm{S_p} - \langle \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q}, \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p} \rangle + \mathrm{S_q}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p} + \mathrm{S_p}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q} + \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q} \times \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p}$$
$$q \otimes p = 3.1 - < (4,5,6)\,,(2,2,3) > +$$
$$3(2i + 2j + 3k) + 1.(4i + 5j + 6k) + (4,5,6) \times (2,2,3)$$
$$= -33 + 13\mathrm{i} + 11\mathrm{j} + 13\mathrm{k}$$

$$q \otimes p^* = \mathrm{S_q}.\mathrm{S}_{p^*} - \langle \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q}, \vec{\mathrm{V}}_{p^*} \rangle + \mathrm{S_q}\vec{\mathrm{V}}_{p^*} + \mathrm{S}_{p^*}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q} + \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q} \times \vec{\mathrm{V}}_{p^*}$$
$$= 3.2 - < (4,5,6)\,,(2,1,3) > +$$

$$3(2i + 1j + 3k) + 2.(4i + 5j + 6k) + (4,5,6) \times (2,1,3)$$
$$= -25 + 23i + 13j + 15k$$

$$q^* \otimes p = \mathrm{S}_{q^*}.\mathrm{S}_\mathrm{p} - \langle \vec{\mathrm{V}}_{q^*}, \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p} \rangle + \mathrm{S}_{q^*}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p} + \mathrm{S}_\mathrm{p}\vec{\mathrm{V}}_{q^*} + \vec{\mathrm{V}}_{q^*} \times \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p}$$
$$= 2.1 - < (-2,2,1), (2,2,3) >$$
$$+2(2i + 2j + 3k) + 1.(-2i + 2j + k) + (-2,2,1) \times (2,2,3)$$
$$= -1 + 6i + 14j - k$$
$$Q \otimes P = q \otimes p + \varepsilon.(q \otimes p^* + q^* \otimes p)$$
$$Q \otimes P = -33 + 13\mathrm{i} + 11\mathrm{j} + 13\mathrm{k} + \varepsilon.(-26 + 29i + 27j + 14k)$$

olur.

Tanım 4.3.1.4. $Q = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k = \mathrm{S_Q} + \mathrm{V_Q}$ herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q'nun kuaterniyon eşleniği

$$\overline{(,)}: K \to K_D$$
$$Q \to \bar{Q}$$

işlemiyle tanımlı olup $\bar{Q} = A_0 - A_1 i - A_2 j - A_3 k = \mathrm{S_Q} - \mathrm{V_Q}$ şeklindedir. $P, Q \in K_D$ olmak üzere kuaterniyon eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$i)\overline{Q + P} = \bar{Q} + \bar{P}$

$ii)$ $\overline{QP} = \bar{P}\bar{Q}$

$iii)$ $\overline{(\bar{Q})} = Q$

Tanım 4.3.1.5. $Q = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q'nun normu

$$N: K_D \to D$$
$$Q \to N(Q)$$
$$N(Q) = N_Q = Q \otimes \bar{Q} = \bar{Q} \otimes Q$$

biçiminde tanımlı olup

$$N_Q = {A_0}^2 + {A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2$$

şeklinde olur ve norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$N_{Q\otimes P} = N_Q \otimes N_P$$
$$N_{Q\lambda} = \lambda^2 N_Q$$

burada λ herhangi bir sayı ve P ise herhangi bir dual kuaterniyondur (Hacısalihoğlu, 1983).

Örnek 4.3.1.2.

$$Q = (3 + 4i + 5j + 6k) + \varepsilon(2 - 2i + 2j + k)$$
$$\bar{Q} = (3 - 4i - 5j - 6k) + \varepsilon(2 + 2i - 2j - k)$$

dual kuaterniyonlar için

$$Q \otimes \bar{Q}$$

çarpımının sonucu

$$Q \otimes P = q \times p + \varepsilon.(q \times p^* + q^* \times p)$$

eşitliğinde P yerine $\bar{Q}$ yazılırsa

$$q \otimes p = \mathrm{S_q}.\mathrm{S_p} - \langle \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q}, \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p} \rangle + \mathrm{S_q}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p} + \mathrm{S_p}\vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q} + \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{q} \times \vec{\mathrm{V}}_\mathrm{p}$$
$$q \otimes p = 3.3 + 4.4 + 5.5 + 6.6 + 3(-4,-5,-6) + 3(4,5,6) + (-4,-5,-6) \times (4,5,6)$$
$$= 86$$

diğer işlemler aynı şekilde yapılırsa

$$q \otimes p^* = 14 + 21i + 20j - 9k$$
$$q^* \otimes p = 14 - 21i - 20j + 9k$$
$$Q \otimes P = 86 + 28\varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca

$$Q \otimes P = (3 + 2\varepsilon)^2 + (4 - 2\varepsilon)^2 + (5 + 2\varepsilon)^2 + (6 + \varepsilon)^2$$
$$= 86 + 28\varepsilon$$

şeklinde de bulunabilir.

Tanım 4.3.1.6. $Q \in K_D$ ve $N_Q = 1$ ise Q ya birim dual kuaterniyon denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 4.3.1.7. $Q = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$ bileşenleri sıfır olmayan herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere kuaterniyonun inversi(tersi)

$$(,)^{-1}: K_D \to K_D$$

$$Q \to Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N_Q}$$

$$Q^{-1} = \frac{A_0 - A_1 i - A_2 j - A_3 k}{{A_0}^2 + {A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

5. SPLİT KUATERNİYON

5.1. Lorentz Uzayı

Tanım 5.1. $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ ve } \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

vektörleri için,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon Lorentz iç çarpımı olarak adlandırılır. $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L)$ n-boyutlu Lorentz uzay olarak tanımlanır ve $\boldsymbol{L^n}$ ile gösterilir (O'neill, 1983).

$x \in \mathrm{L}^{\mathrm{n}}$ vektörü Lorentz iç çarpımına bağlı olarak 3 özel durumda olabilir ve buna göre isimlendirilir.

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise $\vec{x}$' e spacelike (Uzaysı)
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$' e timelike (Zamansı)
3. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ve $\vec{x} \neq 0$ ise $\vec{x}$' e lightlike (ışıksı) vektör

denir (Birman ve Nomizu, 1984).

Reel uzaydaki kinematik araçlar Lorentz uzayında Lorentz iç çarpımının özellikleri kullanılarak yeni bir form olarak ifade edilebilirler. Mesela Cayley formülü, Rodrigues denklemi, Euler parametreleri bunlardan bazılarıdırlar ve burada yeni formları aktarılacaktır.

Cayley formülünün Lorentz uzayındaki formu şöyle verilir.

$x \in L^3$ A, 3×3 L-ortogonal matris olmak üzere, orijin etrafındaki dönme

$$A_L x = X$$

olarak tanımlıdır. Ortogonal matrisler normu koruduğundan $\forall x \in L^3$ için

$$\langle x, x \rangle_L = \langle X, X \rangle_L$$

dır ve

$$\langle X - x, X + x \rangle_L = 0$$

yazılabilir.

$A_L x = -x,\ A + I$ matrisi regülerdir ve

$$B = (A - I)_L (A + I)^{-1}$$

eşitliğinden

$$B^T = -B$$

elde edilir. B anti simetrik bir matristir. $B = (A - I)_L (A + I)^{-1}$ dan Cayley formülü olarak

$$A = (I - B)^{-1}{}_L (I + B)$$

elde edilir. Bu Cayley formülünün Lorentz uzaydaki formudur.

L^3 uzayında Cayley formülü kullanılarak, her B anti simetrik matris bir L-ortogonal matrisi tanımlar. Şöyle ki;

$$A = (I - B)^{-1}{}_L (I + B),$$

$$A^T = (I - B)_L (I + B)^{-1}$$

dir ve $A^T{}_L A = I$ olduğundan A bir L-ortogonal matristir (Özkaldı ve Gündoğan, 2010).

Reel uzaydakine benzer olarak B anti simetrik matrisin bileşenlerinin özel gösterimi ile matris çarpımı ve vektörel çarpım geçişi Lorentz uzayında da karşılık bulur. Açık işlemleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$B_L y = B \wedge_L y$ eşitliğini sağlayan B matrisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \qquad y = (y_1, y_2, y_3), \qquad b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$b_{12} = b_3, \qquad b_{13} = -b_2$$

$$b_{21} = -b_3, \qquad b_{23} = -b_1$$

$$b_{31} = b_2, \qquad b_{32} = b_1$$

gösterimiyle B anti simetrik matris

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılsın. Bileşenlerin böyle seçimine bağlı olarak ve L-Cayley formülü kullanılarak, A dönme matrisi B antisimetrik matrisinden şöyle inşa edilir.

b spacelike olarak seçilsin.

$$A = (I - B)^{-1}{}_L(I + B) = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}{}_L \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{{b_1}^2 - {b_2}^2 - {b_3}^2 + 1} .$$

$$\begin{bmatrix} -({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + 1) & 2(b_3 - b_1 b_2) & -2(b_2 + b_1 b_3) \\ -2(b_3 - b_1 b_2) & -({b_1}^2 + {b_2}^2 - {b_3}^2 - 1) & -2(b_1 + b_2 b_3) \\ 2(b_2 - b_1 b_3) & 2(b_1 - b_2 b_3) & -({b_1}^2 - {b_2}^2 + {b_3}^2 - 1) \end{bmatrix}.$$

Benzer yaklaşımla Rodrigues denkleminin Lorentz uzaydaki formu aşağıdaki işlemlerle elde edilir.

A bir L-ortogonal matris olsun. L-Cayley formülü ile

$$X - x = B_L\,(X + x)$$

yazılabilir ve ayrıca

$$X - x = B \wedge_L (X + x)$$

dır.

Bu denklem Lorentz Rodrigues denklemi(ya da kısaca L-Rodrigues) olarak adlandırılır ve dönme için olan b vektörü Lorentz Rodrigues (veya L-Rodrigues) vektörü olarak bilinir.

L-ortogonal A matrisi için Cayley formülü φ dönme açısı ve birim vektör $\boldsymbol{s}$ olmak üzere,

$$B = (\tanh\tfrac{\varphi}{2})S,$$

dır ve Cayley formülü

$$A = \left(\left(\cosh\frac{\varphi}{2}\right)I - \left(\sinh\frac{\varphi}{2}\right)S\right)^{-1} \cdot_L \left(\left(\cosh\frac{\varphi}{2}\right)I + \left(\sinh\frac{\varphi}{2}\right)S\right) \tag{5.1}$$

eşitlik düzenlenirse

$A = I + (\sinh\varphi)\, S + (-1 + \cosh\varphi)S^2$

elde edilir (Özkaldı ve Gündoğan, 2010).

5.2 Split Kuaterniyonlar

Hamilton tarafından takdim edilen, kuaterniyonlardaki en önemli farklılık kuaterniyon çarpımında baz kuaterniyonların vektör parçalarının iç çarpımlarının negatif olması üstüne kurulmuştur.

Hamilton'un çalışmasının yayınlanmasından J. Cockle kuaterniyonların yeni bir sınıflandırmasını yayınlamıştır (Cockle, 1849). Cockle bu yayınında dördeyler adını verdiği cümle üstünde farklı dört tip çarpımı tanımlamıştır. Bunlardan biri Sir W Hamilton'un tanımladığı kuaterniyonlardır ve bunu yeni bir isimle isimlendirmiştir. Cockle'ın sınıflandırmasına göre dördeyler üzerlerinde tanımlanan çarpıma göre sınıflandırma şöyledir. The Quaternion of Sir W. R. Hamilton, 2. The Tessarine system, 3. The Coquaternion System ve 4. The Cotessarine system.

Bu tez kapsamında temel olarak split kuaterniyonlar (coquaternion) işlenecektir. Ancak konunun bütünlüğü açısından dört tip için temel bilgi aşağıda Cockle'ın makalesindeki notasyonlarla verilecektir. Temel işlem baz vektörlerinin çarpımı ile verilir. $Q = \omega + \alpha x + \beta y + \gamma x$ dördeyler cümlesine ait temsilci bir eleman olsun.

1. Hamilton Kuaterniyon Sistemi:

$$\alpha^2 = -1,$$
$$\beta^2 = -1,$$
$$\gamma^2 = -1$$
$$\alpha\beta = \gamma.$$

Q nun modülü

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

ifadesinin pozitif kareköküdür.

2. Tessarine Sistemi:
   Bu sistemde α, β, γ için çarpım

$$\alpha^2 = -1,$$
$$\beta^2 = 1,$$
$$\gamma^2 = -1$$
$$-1 = \alpha^2\beta^2$$

şeklinde verilir.

Q tessarine nin modülü

$$(w \pm y)^2 + (x \pm z)^2$$

nin pozitif kareköküdür.

3. Coquaternion Sistemi:

$$\alpha^2 = -1,$$
$$\beta^2 = 1,$$
$$\gamma^2 = 1$$

Q nun modülü

$$(w \pm y \pm z)^2 + x^2$$

nin pozitif karekökü olarak tanımlıdır.

4. Cotessarine Sistemi:

$$\alpha^2 = 1,$$
$$\beta^2 = 1,$$
$$\gamma^2 = 1 = \alpha^2\beta^2$$

Bu halde Q nun modülü

$$(w \pm x \pm y \pm z)^2$$

nin pozitif kareköküdür(Cockle, 1849).

Split kuaterniyonlar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ cümlesi üzerinde cebirsel bir yapı olarak aşağıdaki algoritma ve adımlarıyla ele alınacaktır.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{(S_r, S_V); S_r \in \mathbb{R}, S_V \in \mathbb{R}^3\}$$

cümlesinin bir elemanı

$$Q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$

olarak verilsin. Burada $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ baz cümlesidir. Baz vektörleri üstünden split kuaterniyon yapısını veren çarpma işlemi

$$e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k,$$
$$i^2 = -1,$$
$$j^2 = 1$$
$$k^2 = 1$$
$$ijk = 1,$$
$$ij = -ji = k,$$
$$jk = -kj = -i$$
$$ki = -ik = j$$

olarak tanımlıdır (Cockle, 1849).

Çarpım işleminin tablo formu çizelge 5.1 ile verilir.

Çizelge 5.1. Split kuaterniyon çarpımı

$\otimes$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{e_1}$	$\boldsymbol{e_2}$	$\boldsymbol{e_3}$
$\mathbf{1}$	1	e_1	e_2	e_3
$\boldsymbol{e_1}$	e_1	-1	e_3	$-e_2$
$\boldsymbol{e_2}$	e_2	$-e_3$	1	$-e_1$
$\boldsymbol{e_3}$	e_3	e_2	e_1	1

Bu çarpımla birlikte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ cümlesi split kuaterniyonlar cümlesi olarak isimlendirilir. Kuaterniyonlar da olduğu gibi split kuaterniyonlar cümlesinde de skaler ve vektörel kısımlar üstünden işlemleri yapmak daha kullanışlıdır.

Bir $Q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun skalar ve vektörel kısmı $S_Q = q_0$ ve $V_Q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere P ve Q split kuaterniyonları

$Q = S_q + V_q$ ve $P = S_p + V_p$ olarak da yazılabilir. Bu gösterime bağlı kalarak iki split kuaterniyonun toplamı

$$P + Q = S_p + S_q + V_p + V_q$$

ve split kuaterniyonun çarpımı

$$P \otimes Q = S_P S_Q + < \vec{V}_p , \vec{V}_q >_L + S_P \vec{V}_Q + S_Q \vec{V}_P + \vec{V}_P \times_L \vec{V}_Q$$

olarak da verilir. Burada

$$< \vec{V}_p , \vec{V}_q >_L = -p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

$$\begin{aligned} V_p \times_L V_q &= (p_0, p_1, p_2, p_3) \times_L (q_0, q_1, q_2, q_3) \\ &= (p_3 q_2 - p_2 q_3) i + (p_3 q_1 - p_1 q_3) j + (p_1 q_2 - p_2 q_1) k \end{aligned}$$

dır.

Örnek 5.2.1. $Q = 3 + 4i + 5j + 6k$ ve $P = -2 - 4i + 3j - 2k$ olmak üzere $Q \otimes P$ çarpımı

$$S_Q = 3, \qquad S_P = -2, \overrightarrow{V_Q} = (4,5,6), \overrightarrow{V_P} = (-4,3,-2)$$

$$Q \otimes P = S_Q S_P + \langle \overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P} \rangle + S_Q \overrightarrow{V_P} + S_P \overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_Q} \times \overrightarrow{V_P}$$

$$\begin{aligned} Q \otimes P &= 3.(-2) + (+16 + 15 - 12) + (-2).(4,5,6) + 3.(-4,3,-2) \\ &\quad + (4,5,6) \times (-4,3,-2) \\ &= 13 - 8i - 17j + 14k \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bir $Q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu ile $\lambda \in R$ skalerinin çarpımı

$$\lambda Q = Q \lambda = (\lambda q_0) + (\lambda q_1) i + (\lambda q_2) j + (\lambda q_3) k$$

şeklinde tanımlıdır.

Bir $Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{Q} = S_q - V_q = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

olarak tanımlanır.

Bir $Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$
split kuaterniyonun normu

$$N_Q = \|Q\| = \sqrt{|Q\bar{Q}|} = \sqrt{|q_0{}^2 + q_1{}^2 - q_2{}^2 - q_3{}^2|}$$

olarak tanımlanır. Eğer $N_Q = 1$ ise q'ya birim split kuaterniyon denir.

Bir Q split kuaterniyonu için, eğer $N_Q \neq 0$ ise $Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonun tersi vardır ve

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N_Q{}^2}$$

dır.

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

şeklinde de temsil edilebilir. O halde her split kuaterniyon E_2^4 ün bir elemanı olarak da düşünülebilir.

$(E^3, \langle , \rangle_L)$, 3 boyutlu Minkowski uzayıdır, burada $\langle , \rangle_L$ Lorentz iç çarpımı

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

olarak tanımlıdır. E_1^3 ile gösterilir.

E_1^3 de Lorentz vektörel çarpımı

$$\times_L : E_1^3 \times E_1^3 \to E_1^3$$

$$(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \to \mathrm{u} \times_L \mathrm{v} = (v_2 u_3 - u_2 v_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Her $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in E_1^3$ için u ve v vektörleri arasındaki açı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i. Eğer u ve v future pointing (past pointing) timelike vektörler ise $\mathrm{u} \times_L \mathrm{v}$ bir spacelike vektör olup

$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle_L = -\|\mathrm{u}\| \, \|\mathrm{v}\| \ \cosh \theta$$

ve

$$\|u \times_L v\| = \|u\| \, \|v\| \ \sinh\theta$$

olur. Burada θ ise u ve v vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.

ii. Eğer u ve v vektörleri

$$\langle u, v\rangle_L < \|u\| \, \|v\|$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler iseu $\times_L$ v bir timelike vektör olup

$$\langle u, v\rangle_L = \|u\| \, \|v\| \ \cos\theta$$

ve

$$u \times_L v = \|u\| \, \|v\| \ \sin\theta$$

dır, burada θ ise u ve v vektörleri arasındaki açıdır.

iii. Eğer u ve v vektörleri

$$|\langle u, v\rangle_L| > \|u\| \, \|v\|$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise u $\times_L$ v bir spacelike vektör olup

$$\langle u, v\rangle_L = -\|u\| \, \|v\| \ \cosh\theta$$

ve

$$u \times_L v = \|u\| \, \|v\| \ \sinh\theta$$

dır, burada θ ise u ve v vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır.

iv. Eğer u ve v vektörleri

$$|\langle u, v\rangle_L| = \|u\| \, \|v\|$$

eşitsizliğini sağlayan spacelike vektörler ise u $\times_L$ v bir lightlike vektördür (Birman ve Nomizu, 1984; Özdemir ve Ergin, 2006).

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ spacelike split kuaterniyonu için,

$$q_0{}^2 + q_1{}^2 - q_2{}^2 - q_3{}^2 < 0$$

ve

$$0 < q_0{}^2 < -q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2 = \langle V_q, V_q\rangle_L$$

olduğundan, q split kuaterniyonunun vektörel kısmı bir spacelike vektörüdür. Fakat bir timelike split kuaterniyonunun vektörel kısmı, spacelike, timelike veya nulldur.

Her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ split kuaterniyonu için,

i. Her spacelike kuaterniyon

$$q = N_q(\sinh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\cosh\theta)$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\sinh\theta = \frac{q_0}{N_q}$$

ve

$$\cosh\theta = \frac{\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}{N_q}$$

olup

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}$$

ise birim spacelike vektördür.

ii. Vektör kısmı spacelike olan her timelike kuaterniyon

$$q = N_q(\cosh\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sinh\theta)$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\cosh\theta = \frac{q_0}{N_q}$$

ve

$$\sinh\theta = \frac{\sqrt{-q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2}}{N_q}$$

olup

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{-q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}$$

ise birim spacelike vektördür.

i. Vektör kısmı timelike olan her timelike kuaterniyon

$$q = N_q(\cos\theta + \overrightarrow{\varepsilon_0}\sin\theta)$$

şeklinde yazılabilir., burada

$$\cos\theta = \frac{q_0}{N_q}$$

ve

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{{q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2}}{N_q}$$

olup

$$\overrightarrow{\varepsilon_0} = \frac{q_1 i + q_2 j + q_3 k}{\sqrt{{q_1}^2 - {q_2}^2 - {q_3}^2}}$$

ise birim timelike vektördür (Özdemir ve Ergin, 2006).

5.3. Mekanizma Kinematiği ve Matlab Uygulamaları

Mekanizma, birbirlerine bağlı olarak hareket eden katı cisimler ailesidir. Mekanizmanın her bir parçasının (link-mafsal) hareketi bir önceki katı cisme göre tarif edilir. Her bir yerdeğiştirme {dönme, öteleme} cümlesinin bir alt cümlesi ile verilir. Çalışma uzayı dört boyutlu Lorentz uzayı olduğu zaman dönme birim split kuaterniyonla verilir. Dört boyutlu Lorentz uzayında bir yerdeğiştirme ise birim dual split kuaterniyon kullanılarak verilir.

L^2 uzayında bir Lorentz ortogonal matrisi $A^T = A^{-1}$ olan, $|A| = 1$ olan bir matristir ve $\cosh\theta^2 - \sinh\theta^2 = 1$ bağıntısı kullanılarak gösterilebilir ki 2×2 Lorentz ortogonal matrisi form olarak aşağıdaki şekildedir.

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matris kullanılarak bir AB doğru parçası ile modellenen bir katı cismi orijin noktası etrafındaki bir devirlik hareketi aşağıdaki örnekle verilmiştir.

Örnek 5.6.1.

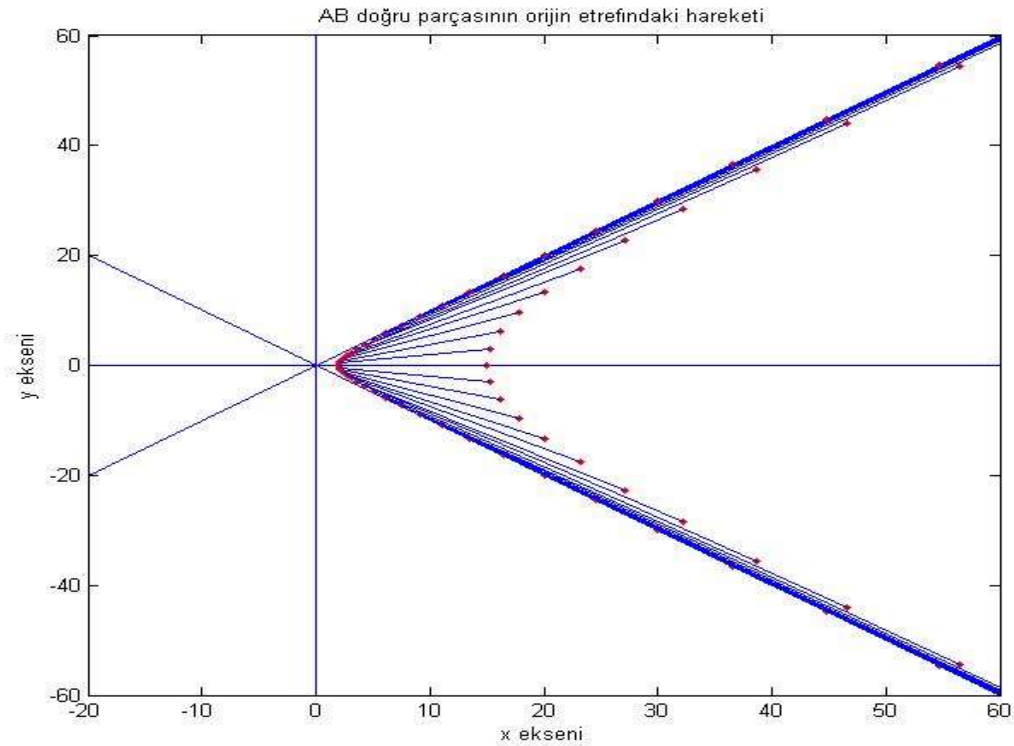
$$A = (2,0),$$
$$B = (5,0)$$

olmak üzere AB doğru parçasının modellediği katı cisim K olsun. K nın hareketi için Matlab programı ve yörünge aşamaları şekli şöyledir:

```
for t=0:0.2:4
     a=20
   for  u=1
    axis([-a 2*a -3*a 3*a])
    line([-a 4*a],[0 0])
     line([0 0],[-4*a 4*a])
       line([-40 40],[-40 40])
         line([-40 40 ],[40 -40])
     t1=0*u
    t2=0*u
    p1=2
    p2=0
    Q=[15          0
        1]
    A=[cosh(t) sinh(t) t1
        sinh(t) cosh(t) t2
        0 0 1]
    P=[p1
        p2
        1]
    B=[cosh(-t) sinh(-t) t1
        sinh(-t) cosh(-t) t2
```

```
    0 0 1]
  C=A*P
  D=A*Q
  plot(C(1),C(2),'.r')
  plot(D(1), D(2),'.r'
  line([C(1) D(1)], [C(2) D(2)])
  hold on
  pause(0.5)
 end
end
hold on
 for t=-4:0.2:0
  a=20
 for  u=1
  axis([-a 3*a -3*a 3*a])
   t1=0*u
  t2=0*u
  p1=2
  p2=0
  Q=[15       0
    1]
  A=[cosh(t) sinh(t) t1
    sinh(t) cosh(t) t2
    0 0 1]
  P=[p1
    p2
    1]
  C=A*P
  D=A*Q
```

```
    plot(C(1),C(2),'.r')
    plot(D(1), D(2),'.r')
    line([C(1) D(1)], [C(2) D(2)])
    hold on
    pause(0.5)
end
 end
```



Şekil 5.1. Lorentz düzleminde bir doğru parçasının hareketi

Yerdeğiştirmelerde sabit kalan noktaya pol (kutup) noktası adı verilir. Yerdeğiştirmenin dönmesini veren ortogonal matris A ve öteleme kısmını veren matris T ise

$$A.P + T = P$$

Özelliğine sahip noktaya pol noktası denir. Dönmelerin sabit noktası dönme merkezidir. Ötelemelerin sabit noktası yoktur. Yerdeğiştirmelerde ise bir noktanın pol noktası olmasını T öteleme kısmı üstlenir.

Böylece, denklemden T öteleme vektörü hesaplanırsa

$$T = (I - A)P$$

ve açık şekliyle T nin bileşenleri

$$t_1 = (1 - cosht).p_1 - p_2.sinht$$

$$t_2 = (1 - cosht)p_2 - p_1.sinht$$

şeklinde belirlenir.

Böylece pol noktası verilen bir Yerdeğiştirmenin matrisi aşağıdaki gibidir.

$$D = \begin{bmatrix} cosht & sinht & (1 - cosht)p_1 - p_2 \\ sinht & cosht & (1 - cosht)p_2 - p_1 sinht \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek 5.6.2.

P=(6,3) pol noktalı yer değiştirme altında A=(2,0) B=(4,0) AB doğru parçasının yerdeğiştirmesi :

```
   a=8
    axis([-a*0.5 a -a a])
    b=20
       line([-b b],[-b b])
      line([-b b],[b -b])
          line([-a 4*a],[0 0])
          line([0 0],[-2*a 4*a])
 hold on

 for t=0:0.1:1
        A=[2;0;  1]
```

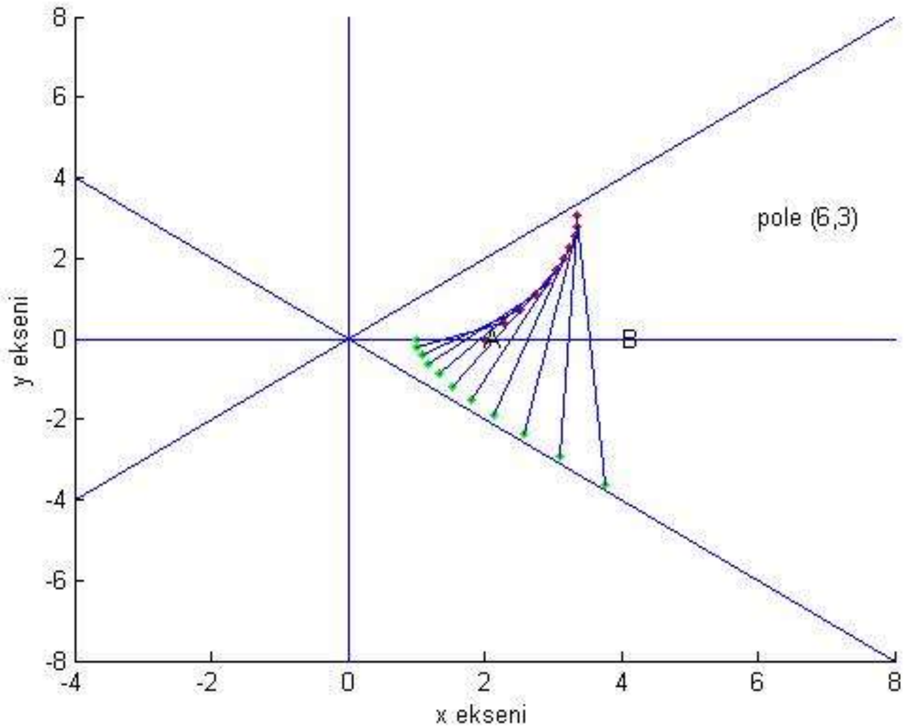
```
B=[4;0;1]

     pp1= 6
     pp2=3
B=[cosh(t)   sinh(t)    (1-sinh(t))-pp2*sinh(t)
   sinh(t)   cosh(t)    (1-cosh(t))*pp2-pp1*sinh(t)
   0           0                  1                  ]

E=B*A
  F=B*B

  plot(E(1),E(2),'.r')
  plot(F(1), F(2),'.g')

  line([E(1) F(1)], [E(2) F(2)])
   pause(0.2)
    hold on
     text(6,3, 'pole (6,3)')
      text(2,0,'A')
       text(4,0,'B')
end
```



Şekil 5.2. Lorentz düzleminde pol noktası verilen bir yerdeğiştirme hareketi

Örnek 5.6.3.

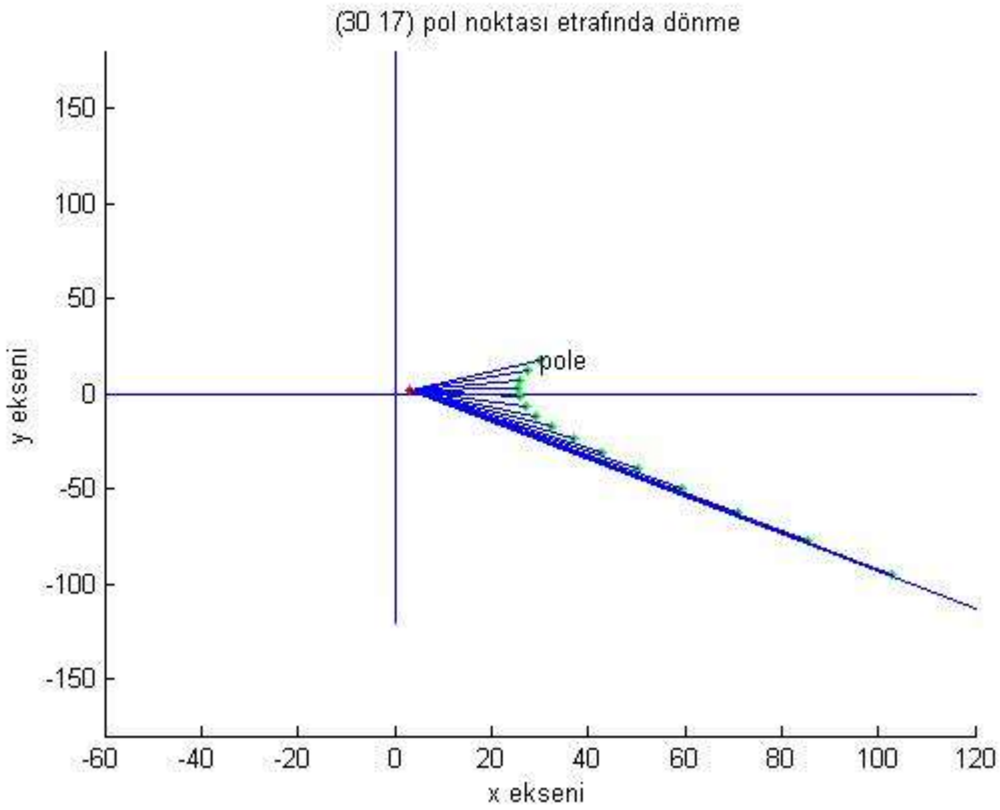
(30,17) noktasını pol noktası kabul eden Lorentz dönmesi :

```
for t=0:0.2:1
    a=60
   for  u=1
    axis([-a 2*a -3*a 3*a])
    line([-a 4*a],[0 0])
     line([0 0],[-2*a 4*a])
     t1=0*u
    t2=0*u
    p1=2
    p2=2
    Q=[15
        0
        1]
    A=[cosh(t) sinh(t) t1
        sinh(t) cosh(t) t2
        0 0 1]
    P=[p1
        p2
        1]
    B=[cosh(t) sinh(t) t1
        sinh(t) cosh(t) t2
        0 0 1]
    C=A*P
    D=A*Q
```

```
 % plot(C(1),C(2),'.r')
  % plot(D(1), D(2),'.r')


   %line([C(1) D(1)], [C(2) D(2)])
   hold on
   pause(0.5)
  end
end
hold on
 for t=0:0.2:3
    t=-t
     Pp=[3
          2
   1]
 Qq=[ 30
  17
   1.0000]
pp1= 3
  pp2=2
  B=[cosh(t) sinh(t)    (1-cosh(t))*pp1-pp2*sinh(t)
         sinh(t) cosh(t)    (1-cosh(t))*pp2-pp1*sinh(t)
  0 0 1]
  E=B*Pp
  F=B*Qq
   plot(E(1),E(2),'.r')
   plot(F(1), F(2),'.g')
```

```
  line([E(1) F(1)], [E(2) F(2)])
  pause(0.2)
  hold on
  text(30,17, 'pole')
end
```



Şekil 5.3. Lorentz düzleminde pol noktası etrafında dönme hareketi

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Dönme ve öteleme kavramları kinematikte temel kavramlardır. Ortogonal matrisler veya birim kuaterniyonlar kullanılarak dönme ifade edilebilmektedir. Dual kuaterniyonlarla ötelemeli dönme hareketi yani screw hareketi tanımlanmaktadır.

Kompleks sayıların bir genellemesi olarak Hamilton tarafından kuaterniyonların tanıtılmasıyla kinematik yeni bir araç olarak adjoint operatörü yardımıyla ve birim kuaterniyonları kullanarak yeni bir dönme operatörü kazanmıştır (Hamilton, 1843). Ortogonal matrislerin bazı üstünlükleri ve kuaterniyonların da başka kullanım kolaylıkları vardır (Bottema ve Roth, 1979; McCarthy, 1990). Bir kuaterniyon skaler kısım ve vektörel kısım olarak iki parçalı olarak ele alınabilir (Kuiper, 1999). Dönme ortogonal matrisle verilince dönme ekseni matrisin karakteristik vektörüdür. Eğer dönme kuaterniyon operatörü ile verilirse dönme ekseni birim kuaterniyonun vektör kısmıdır (McCarthy, 1990). Yerdeğiştirmelerde dönme kısmı için ortogonal matrisler kullanılırken öteleme kısmı için öteleme vektörü kullanılır. Yerdeğiştirmelerde hareketin öteleme kısmını vermesi için dual katsayılı dual kuaterniyonlar kullanılmaktadır (Clifford, 1873; McCarthy, 1990). J. Cockle, Hamilton tarafından tanıtılan kuaterniyonların indekse bağlı olarak dört temel formunu yayınlamıştır (Cockle, 1849). Bu sınıflandırma kuaterniyon teorisinin farklı uzaylarda kullanımına yol açmaktadır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanı Lorentz uzayında karşılık bulan coquaternionlardır. Daha sonra split kuaterniyon olarak adlandırılan coquaternion özellikle relativite teorisi için önemli bir araçtır. Lorentz uzayında kinematik ve mekanizma teorisi için önemli çalışmalar yapılmıştır (Inoguchi, 1998; Jiang ve ark., 2015; Jiang ve ark., 2018). Kinematik açıdan Lorentz uzayda yerdeğiştirmede dönme ve öteleme birlikte kullanılmak istenirse katsayıları dual sayılar olan dual split kuaterniyonlar kullanılabilir. Lorentz uzayının önemli farklılıklarından birisi de görsellik açısından oluşmaktadır. Örneğin bir noktanın dönme altındaki yörüngesi çember formunda olmasına karşı Lorentz uzayda bu yörünge Öklid uzayındaki hiperbol görünümlüdür, ancak bu Lorentz uzayda bir çemberdir. Bu durum bilgisayar destekli programlar ile desteklendiğinde yörüngelerin çizimleri de elde edilir.

Tez kapsamı içinde split kuaterniyonlara kadar olan bilgi dizini bütünlük içinde verilmiştir. Lorentz uzayındaki kullanımı ve gerekliliği vurgulanarak yapılan çalışmaların katkıları aktarılmıştır. CAGD için Matlab programı kullanılarak, noktaların dönme ve ötelemeli dönme (yerdeğiştirme) altında yörüngeler için algoritmik programlar yazılmış ve yörüngeler çizilmiştir.

KAYNAKLAR

Birman G. S., Nomizu, K., 1984. Trigonometry in Lorentzian geometry ***The American Mathematical Monthly,*** **91**(9): 543-549

Bottema, O., Roth, B., 1979. ***Theorical Kinematics***. North- Holland Publishing Company, Amsterdam. 557.

Clifford, W. K., 1873. Preliminary Sketch of Bi-quaternions. ***Proceeding of the London Mathematical Society,*** **4:** 381-395.

Cockle, J., *1849.* On systems of algebra involving more than one imaginary**.** ***Philosophical Magazine and Journal of Science*** **35**: 434-436.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983. ***Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi***. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara.

Hamilton, W. R., 1843. Theory of Quaternions. ***Proceedings of the Royal Irish Academy.*** **3**: 1-16.

Inoguchi, J., 1998. Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-Space. ***Tokyo Journal of Mathematics,*** **21** (1): 141-152.

Jiang, T., Zhang, Z. and Jiang, Z., 2018. Algebraic techniques for eigenvalues and eigenvectors of a split quaternion matrix in split quaternionic mechanics. ***Computer Physics Communications,*** **229:** 1-7.

Jiang, T., Jiang, Z. and Zhang, Z., 2015. Algebraic techniques for diagonalization of a split quaternion matrix in split quaternionic mechanics***. Journal of Mathematical Physics,*** **56**: 1-8.

Kuipers, J. B., 1999. ***Quaternions and Rotation Sequences.*** A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Kula, L. and Yaylı, Y., 2007. Split quaternions and rotations in semi Euclidean space. ***Journal of Korean Mathematical Society,*** **44**: 1313-1327.

McCarthy, J. M., 1990. ***Introduction to Theoretical Kinematics.*** The MIT Press, Massachusetts. 130.

Morais, J. P., Georgiev, S., Spröbig, W., 2014. ***Real Quaternionic Calculus Handbook*** Birkhauser, Springer Basel.

O'neill, B., 1983. ***Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.*** New York, NY, USA: Academic Press.

Özkaldı, S., Gündoğan, H., 2010., Cayley formula, Euler parameters and rotations in 3-Dimensional Lorentzian Space***, Advances in Applied Clifford Algebras,*** 367-377.

Özdemir, M. and Ergin, A.A. 2006. Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. ***Journal of Geometry and Physics,*** **56**: 322-336.

Parkin, R. E., 1991. ***Applied Robotics Analysis***. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 420.

Schilling, R. J., 1990. ***Fundamentals of Robotics***. Prentice Hall, New Jersey. 425.

Yahşi, S., Özgören, M. K., 1984. Minimal joint motion optimization of manipulators with extra degrees of freedom, ***Journal of Mechanisms and Machine Theory***, **19**(3)**:** 325-330.

ÖZ GEÇMİŞ

1990 yılında Ağrı ili Patnos ilçesi Özdemir Köyü'nde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Patnos'ta tamamladı. 2009 yılında İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne %100 burslu olarak yerleşti ve 2013 yılında mezun oldu. 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 19/12/2019

Tez Başlığı / Konusu:

Split Kuaterniyonlarla Mekanizma Kinematiği

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 20+51 sayfalık kısmına ilişkin, 19/12/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14 (Ondört) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

19/12/2019

Adı Soyadı: Mehmet Sıddık ÇETİNEL

Öğrenci No: 17910002120

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: Y. Lisans ■ Doktora □

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)