T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

STOKASTİK ISI DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Beytullah YAĞIZ
DANIŞMAN: Dr. Ögr. Üyesi Hatice TAŞKESEN

VAN-2019

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

STOKASTİK ISI DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Beytullah YAĞIZ

VAN-2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

İstatistik Anabilim Dalında, Dr.Ögr.Ü. Hatice TAŞKESEN danışmanlığında, Beytullah YAĞIZ tarafından sunulan **"Stokastik Isı Denklemlerinin Çözümlerinin Patlaması"** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince .../02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Necat POLAT İmza:

Üye: Prof. Dr.Fevzi ERDOĞAN İmza:

Üye: Dr.Ögr.Ü.. Hatice TAŞKESEN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/04/2019. tarih ve 2019/22-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

Prof.Dr.Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Beytullah YAĞIZ

ÖZET

STOKASTİK ISI DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

YAĞIZ, Beytullah
Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Ögr. Üyesi Hatice TAŞKESEN
Şubat 2019, 53 sayfa

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan stokastik dalga ve ısı denklemi çalışılmıştır. Bu amaçla ilk bölümde stokastik dalga ve ısı denklemi ve tarihi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde çalıştığımız stokastik dalga ve ısı denkleminin literatür bildirişleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tez boyunca kullanacağımız temel matematiksel tanım, teorem ve lemmalar hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, stokastik dalga ve ısı denklemlerinin çözümlerin patlaması (blow-up) ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde daha önceden çalışılmış parabolik tip doğrusal olmayan stokastik ısı denklemi uygun enerji eşitsizlikleri kullanılarak çözümün patladığı (blow-up) gösterilmiştir. Altıncı bölüm bu tezin orijinal kısmıdır. Doğrusal olmayan stokastik dalga denkleminin çözümünün patladığı incelenmiştir. Çalışmamızda uygun enerji eşitsizlikleri kullanılarak çözümün sonlu ve sonsuz zamanda var olup olmadığına bakılmıştır. Yedinci bölümde elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Çözümün patlaması (blow-up), Global çözüm, Lokal çözüm, Stokastik dalga ve ısı denklemi

ABSTRACT

THE EXPLOSION OF THE SOLUTIONS OF STOCASTIC HEAT EQUATIONS

YAĞIZ, Beytullah
M. Sc. Thesis, Department of Statistics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hatice TAŞKESEN
February 2019, 53 pages

In this thesis, nonlinear stochastic wave and heat equation are studied. For this purpose, stochastic wave and heat equation and history are given in the first chapter. In the second chapter, we present the literature about the stochastic wave and heat equation. In the third chapter, we give information about the basic mathematical description, theorems and lemma. In the fourth chapter, general information about blow-up of stochastic wave and heat equations is given. In the fifth chapter, the previously studied parabolic type nonlinear stochastic heat equation is shown to be the blow-up of the solution by using appropriate energy inequalities. The sixth chapter is the original part of this thesis. The solution of the nonlinear stochastic wave equation exploded. In our study, appropriate energy inequalities are used to determine whether the solution exists in finite and infinite time. The results obtained in the seventh chapter are summarized and some recommendations are made.

Keywords: Blow-up, Global solution, Local solution, Stochastic wave and heat equation

ÖN SÖZ

Çalışmalarımın başından sonuna kadar desteğini benden esirgemeyen, çalışmamın her aşamasında öneri, görüş ve bilgileriyle yönlendirmeleri sonucu tecrübe sahibi olup, tezimi bitirmemde bana ışık tutan ve tanımaktan onur duyduğum değerli tez danışman hocam Sayın Dr. Ögr. Üyesi Hatice TAŞKESEN’ e, tez jürimde bulunarak tezimin daha iyi bir duruma gelmesini sağlayan Sayın Prof. Dr. Necat POLAT’ a ve Sayın Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN' a, ayrıca hayatı paylaşmaktan gurur duyduğum tezim boyunca manevi desteği ve anlayışından dolayı eşim Kübra YAĞIZ’ a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum.

2019
Beytullah YAĞIZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Bilinmeyen fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere "diferansiyel denklem" denir. Gerçek hayatta kullanılan uygulamalarda, bu fonksiyonlar genellikle fiziksel niceliklere karşılık gelirken, türevler de onların değişim oranlarını temsil eder. Örnek olarak basit bir popülasyon büyüme modeli düşünülebilir. Farzedelim ki $N(t)$, t zamanındaki popülasyon büyüklüğü, $a(t)$, t zamanındaki deterministik büyüme hızı, $\frac{dN}{dt}$ popülasyon büyüklüğündeki değişim oranı ve N_0 verilmiş başlangıç değeri olsun. Bu durumda, popülasyon büyüme modeli

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= a(t)N(t), \\ N(0) &= N_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

problemine karşılık gelir. Eş. (1.1) denklemi, t zamanındaki nüfusun değişim oranının, büyüme hızının ve o zamandaki popülasyon büyüklüğünün çarpımına eşit olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte, genellikle $a(t)$ büyüme hızı tam olarak bilinmemekte ve bazı çevresel etkilere maruz kalmaktadır. Böylece (1.1) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a(t) = r(t) + \beta \; noise. \tag{1.2}$$

Burada $r(t)$ deterministik terim, β gerçel değerli bir sabit sayı ve noise (gürültü), rastgele terime (davranışı tam olarak bilinmemekte, sadece olasılık dağılımı bilinmektedir) karşılık gelmektedir. Bu gürültü terimi genellikle Brownian hareketi ile ilgili beyaz bir gürültü $W(t)$ olarak alınır. Bu durumda denklem

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (r(t) + \beta \; noise)N(t), \\ &= r(t) + \beta W(t)N(t); \end{aligned} \tag{1.3}$$

ve buradan da

$$dN(t) = r(t)N(t)d(t) + \beta N(t)dW(t). \tag{1.4}$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

Popülasyon büyüme modelinde olduğu gibi birçok doğa olayında küçük düzensizliklerin de hesaba katılması gerekir ki, bu da denkleme bir rastgele kuvvetin eklenmesini gerektirir. Bu kuvvet genellikle beyaz gürültü (white noise) olarak adlandırılır (Yang ve Zhao, 2013). Bu tür düzensizliklerin hesaba katılmasıyla oluşturulan diferansiyel denklemler *stokastik diferansiyel denklemler* olarak adlandırılır. Stokastik diferansiyel denklemler teorisi matematikçiler tarafından ilk olarak verilen difüzyon ve yığılma katsayıları için difüzyon süreçlerinin yörüngelerinin açık inşasında bir araç olarak geliştirilmiştir (Arnold, 1992). Stokastik diferansiyel denklemler biyoloji, kimya, epidemiyoloji, mekanik, mikroelektronik, ekonomi ve finans gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, bazı doğrusal olmayan stokastik ısı ve dalga denklemlerinin başlangıç/başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması (blow up) incelenecektir. Doğrusal olmayan evolüsyon problemlerinde blow up, t zamanı sonlu bir T zamanına yaklaşırken değişken ya da değişkenlerin sonsuza gitmesidir (Galaktionov, Vazquez, 2002).

Doğrusal olmayan parabolik denklemlerde başlangıç/başlangıç sınır değer problemlerinin global çözümlerinin patlaması üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. ilk çalışmalar 1940'lı ve 1950'li yıllarda patlama ve yanma teorisi, Semenov' un zincir reaksiyon teorisi ile ortaya çıkmıştır. 1960'lı yıllardan itibaren H. Fujita , V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya tarafından kapsamlı çalışmalar yapılmış ve günümüzde halen üzerinde çalışılmaktadır.

Doğrusal olmayan denklemlerdeki blow up ın en basit örneği $u = u(t)$ için,

$$\begin{cases} u_t = u^2, \ \ t > 0 \\ u(0) = a \end{cases} \tag{1.5}$$

başlangıç değer problemidir. $a > 0$ için tek çözüm $0 < t < T = \frac{1}{a}$ zaman aralığında mevcuttur. $u(t) = \frac{1}{T-t}$ formülü ile verilebildiğinden $t < T$ olmak üzere düzgün çözüm ve $t \to T^-$ için $u(t) \to \infty$ olur. Yani $t = T$ de çözüm patlar (Polat, 2005).

Eş. (1.5) probleminde olduğu gibi stokastik diferansiyel denklemler için

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t) \\ X(0) = x_0 > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

probleminde de sonlu zamanda blow up meydana gelebilir. Burada b ve σ düzgün pozitif fonksiyonlar, W ise verilen bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı Wiener sürecidir. Eş. (1.6) problemi için blow up, t genellikle belirli örneklem yoluna bağlı olan sonlu bir T zamanına yaklaşırken, çözüm eğrilerinin sonsuza gitmesi olarak yorumlanabilir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Stokastik ısı ve dalga denklemleri birçok yönden çalışılmış ve günümüzde de üzerinde etkin olarak çalışılmaktadır. Aşağıda bu çalışmalardan bir kaçı verilecektir.

Mueller ve Sowers (1993),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^\gamma \partial_t W(x,t), \\ u(t,0) = u(t,J) = 0, \qquad\qquad t > 0, \quad 0 \leq x \leq J, \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

rasgelelik içeren ısı denkleminin başlangıç-sınır değer problemi için çözümlerin davranışını incelemişlerdir. Burada $\gamma > 1$, W, 2-boyutlu beyaz gürültü (white noise) terimi, u_0 sürekli, negatif olmayan ve özdeş olarak sıfıra eşit olmayan başlangıç koşuludur. $\gamma < 3/2$ olması durumunda (2.1) probleminin çözümü her zaman var ve sonludur. $\gamma > 3/2$ durumunda ise, (2.1) probleminin çözümü sonlu bir zamanda pozitif olasılıkla patlar.

Mueller (2000),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(u) \partial_t W(x,t), \\ u(t,0) = u(t,J) = 0, \qquad\qquad , \quad t > 0, \ x \in \mathbf{I} \equiv [0,J] \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

probleminin çözümünün, $g(u)$ nun $[0,\infty)$ da bir lokal Lipschitz fonksiyon ve u_0 ın $\mathbf{I}$ üzerinde negatif olmayan ve uç noktalarda sıfır olan bir fonksiyon olması koşulları altında sonlu zamanda patladığını göstermiştir.

Chow (2009),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f(u) + \sigma(u)\partial_t W(x,t), \quad t > 0, \quad x \in D$$

$$u(x,0) = g(x)\ ,\ x \in D,$$

$$u(x,t) = 0\ ,\ x \in \partial D$$

başlangıç-sınır değer probleminde başlangıç koşulları, doğrusal olmayan terim ve gürültü terimi üzerine konan bazı koşullar altında çözümün ortalama L^p normunun $p \geq 1$ için sonlu zamanda patladığını göstermiştir.

Chow ve Liu (2012) de stokastik gecikmeli parabolik diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) + f(x, u(t-r,x)) + g(x, u(t-r,x)\partial_t W(t,x), \ t > 0, \quad x \in \mathcal{O},$$
$$u(t,x) = \phi(t,x), \ t \in [-r, 0], \ x \in \mathcal{O},$$
$$u(t,x) = 0, \ x \in \partial\mathcal{O}, \ t > 0$$

problemi incelenmiştir. İncelenen problemin bir tek çözümünün varlığını garantileyen koşullar verildikten sonra, çözümün ortalama L^p normunun $p \geq 1$ için sonlu zamanda patladığı ispatlanmıştır.

Dozzi ve Mimbela (2010), yarı lineer

$$du(t,x) = (\Delta u(t,x) - G\,(u(t,x)))\,dt + \kappa u(t,x)dW_t, \quad t > 0, \quad x \in D$$
$$u(0,x) = f(x), \quad x \in D,$$
$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial D.$$

denkleminin sınır değer probleminin çözümünün sonlu zamanda patladığını göstermişlerdir. Burada $\{W_t, \ \ t \geq 0\}$ bir-boyutlu standart Wiener süreci, κ pozitif bir sabittir.

Niu ve Xie (2012),

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) + G(u(t,x)) + \kappa_1 u(t,x)w_1(t) + \kappa_2 u(t,x)w_2(t), \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{O},$$
$$u(t,x) = 0, \qquad t \geq 0, x \in \partial\mathcal{O},$$
$$u_0(0,x) = f(x), \qquad x \in \mathcal{O}$$

probleminde Gaussian gürültünün çözümün patlama zamanı üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Burada (w_1, w_2) iki-boyutlu Brownian harekettir.

Ondrejat (2007), kaynak terim içeren stokastik dalga denkleminin

$$u_{tt} = \Delta u + f(u) + g(u)\partial_t W(x,t)$$

Cauchy problemi için çözümlerinin tekliğini ispatlamıştır.

Peszat (2002), doğrusal olmayan stokastik dalga denkleminin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) = Au(t) + F(t,u(t)) + B\left(t,u(t)\right)\partial_t W(x,t)$$

Cauchy problemi için bir Markovian çözümün varlık ve tekliğini incelemiştir.

Brzezniak ve ark (2016),

$$u_{tt} + A^2 u + \beta u_t + m\left(\left\|B^{1/2}u\right\|_H^2\right)Bu = G(u)dW(x,t)$$

$$u_{tt} = \Delta u - m^2 u - au\left|u\right|^{p-1} - \beta u_t + F + \eta g\left(u\right)\partial_t W$$

stokastik beam denklemini ve lineer olmayan stokastik sönümlü dalga denklemini doğrusal olmayan terimi polinom şeklinde alarak değişmez ölçümlerin (invariant measures) varlığını ispatlamışlardır.

Barbu ve Da Prato (2002), stokastik dalga denkleminin

$$dY_t + \left(AY + Y_t + g\left(Y\right)\right)dt = \sqrt{Q}dW\left(t\right)$$

başlangıç-sınır değer problemini kaynak terim üzerine konan $g\left(y\right) \leq C\left(\left|y\right|^p + 1\right)$ koşulu altında inceleyerek, geçiş yarıgrubu için değişmez ölçümlerin varlığını ispatlamışlardır. Çalışmada $A = -\Delta$, W, silindirik Wiener süreci ve $Q \in L\left(H\right)$, negatif olmayan, iz sınıfından (trace class) simetrik bir operatör olarak alınmıştır.

Bo ve ark. (2008) de

$$u_{tt} - \Delta u + Au_t = \mu\left|u\right|^{\rho}u + g\left(u, u_t, Du\right)\partial_t W(x,t)$$

stokastik diferansiyel denklemi ele alınmış, μ, ρ ve g üzerine konan koşullar altında zayıf damping ($A = \kappa I$) ve güçlü damping ($A = -\Delta$) durumlarında çözümlerin patlaması incelenmiştir.

Liang (2014),

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + \gamma\Delta^2 u - \left(m\left\|\nabla u\right\|^2\right)\Delta u + u_t = f(u) + \sigma\left(u, u_t, \nabla u, x, t\right)\partial_t W(x,t),& \\
, x \in D, \quad t \in (0,T)& \\
u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \in (0,T)& \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad x \in D&
\end{aligned}
$$

sönümlü lineer olmayan stokastik beam denkleminin uygun enerji eşitsizlikleri altında lokal çözümünün patladığını kanıtlamıştır.

3. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Stokastik diferansiyel denklemlerin analizleri için bazı tanım, teorem ve eşitsizliklerin bilinmesi önem arz etmektedir. Bu bölümde tezin daha iyi anlaşılması için bazı teorem ve eşitsizliklerin yanısıra, bazı özel fonksiyon uzayları, stokastik süreçler ve stokastik integrallere de yer verilmiştir.

3.1. Olasılık Teorisinin Temel Tanımları

Olasılık teorisi sonuçları şansla bağlantılı olan matematiksel modellerle ilgilenir. Bir olayın bütün sonuçları Ω ile, Ω kümesinin her bir elemanı da ω ile gösterilsin. Ω nın ilgilenilen olaylarının kümesi $\mathcal{F}$ olsun.

Tanım 3.1.1. Ω kümesinin alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{F}$, Ω yı içeriyor ve tümleyen sayılabilir birleşim işlemleri altında kapalıysa bir $\sigma-$ *cebir* olarak isimlendirilir (Klenke, 2008). Matematiksel bir ifadeyle,

i. $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, $A^c = \Omega - A$,

iii. $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

özelliklerini sağlayan $\mathcal{F}$ ailesi bir $\sigma-$ *cebir* denir. $(\Omega, \mathcal{F})$ ikilisi bir *ölçülebilir uzay*, $\mathcal{F}$ nin elemanları da $\mathcal{F}-$*ölçülebilir kümeler* olarak adlandırılır. Eğer C , Ω nın alt kümelerinin bir ailesi ise, o zaman Ω da C yi içeren en küçük bir $\sigma(C)$ vardır. Bu $\sigma(C)$ ye C tarafından üretilen $\sigma-$ *cebri* denir. Eğer $\Omega = R^d$ ise R^d nin tüm açık kümelerinin ürettiği $\sigma-$ *cebrine* de *Borel cebri* denir. Reel değerli bir $X : \Omega \to R$ fonksiyonu tüm $a \in R$ için $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ sağlanıyorsa $\mathcal{F}-$ *ölçülebilir* olarak adlandırılır. X fonksiyonuna reel değerli rasgele değişken de denir (Mao, 2011).

Tanım 3.1.2. $(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ fonksiyonu

i. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

ii. Herhangi bir ayrık (yani $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$) $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ için

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

özelliklerini sağlıyorsa bir *olasılık ölçümü* olarak adlandırılır. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ üçlüsüne *olasılık uzayı* denir.(Mao, 2011).

Tanım 3.1.3. X reel değerli rasgele bir değişken olsun

i. X integrallenebilir ise, X in *beklenen değeri*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

ii. X in karesi integrallenebilir ise, X in *varyansı*

$$V(X) = E(X - EX)^2.$$

iii. X ve Y karesi integrallenebilir rasgele değişkenler ise, X ve Y nin *kovaryansı*

$$Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

dir (Klenke, 2008).

Tanım 3.1.4. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ bir olasılık uzayı ve $B \in \mathcal{F}$ olsun. B verildiğinde herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ için koşullu olasılık

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, & \mathbf{P}(B) > 0, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanır (Klenke, 2008).

Tanım 3.1.5. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ bir olasılık uzayı, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ bir $\sigma - cebir$ ve $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olsun. Her $A \in \mathcal{G}$ için $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ olmak üzere

$$\int_A X dP = \int_A Y dP$$

koşulunu sağlıyor ise Y rasgele değişkenine X in $\mathcal{G}$ ye göre koşullu beklenen değeri denir ve $E(X \mid \mathcal{G})$ ile gösterilir. $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ve $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ $\sigma - cebri$ için X in koşullu beklenen değeri $E(X \mid \mathcal{G})$; X in ölçülebilir, karesi integrallenebilir rasgele değişkenlerin $\mathcal{G}$ alt uzayı üzerine izdüşümüdür.(Bobrowski, 2005).

Eğer φ konveks bir fonksiyon ve $\varphi(X)$ integrallenebilir ise

$$\varphi E(X \mid G) \leq E(\varphi(X) \mid G)$$

dir.

Tanım 3.1.6. μ beklenen değer, σ^2 varyans olmak üzere,

$$\mathbf{P}\{X > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} d\mu$$

fonksiyonu ile verilmiş bir X rasgele değişkeni *normal dağılıma* veya *Gauss dağılımına* sahiptir denir (Schuss, 2010).

3.2. Stokastik Süreçler

Toplum ve doğadaki sistemler zamana bağlı olarak rasgele değişmekte ve bu sistemler üzerindeki ölçümler de zaman endeksli rasgele değişkenler olmaktadır. Bir t anında belli bir yöredeki sıcaklık, hareketli bir parçacığın koordinatları veya taşıdığı enerji, borsa indeksleri, bir hisse senedinin değeri, bir toplumdaki fertlerin sayısı hep $X(t)$, $Y(t)$ gibi rasgele değişkenlerle ifade edilir. Böylece ortaya T zaman aralığı olmak üzere örneğin; $\{X(t)\}$, $(t \in T)$ gibi rasgele değişkenler ailesi çıkacaktır. Her t için rasgele değişken $X(t)$ nin farklı bir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde ölçüldüğü düşünülebilir. Ayrıca T nin de mutlaka zaman aralığı olması gerekmez. R veya R^n nin bir alt kümesi veya tamamen farklı soyut bir parametre uzayı da olabilir (Çapar, 2013). Bu düşüncelerden yararlanarak stokastik süreç, Brownian hareket, filtrasyon ve martingal kavramları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ bir olasılık uzayı olsun. Bu uzay üzerinde I parametre kümesi ile verilmiş R^d değerli $\{X(t)\}_{t \in I}$ rasgele değişkenlerinin ailesine *stokastik* *süreç* denir. Burada R^d *durum uzayı* olarak adlandırılır.

I parametre kümesi genellikle $R_+ = [0, \infty)$ olmakla birlikte, $[a, b]$ şeklinde bir aralık, pozfitif tamsayılar veya R^d nin herhangi bir alt kümesi de olabilir. Eğer I, $[0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, b]$ kümelerinden biri ise, süreç *sürekli zamanlı stokastik süreç,* T, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$ veya herhangi bir sayılabilir küme ise *ayrık zamanlı stokastik süreç* olarak adlandırılır. Herhangi bir $\omega \in \Omega$ için

$$I \ni t \to X(t)(\omega) \in R^d$$

fonksiyonu *sürecin örneklem eğrisi veya yolu (sample path)* olarak adlandırılır (Mao, 2011).

Tanım 3.2.2. Bir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı $X = \{X(t), \, t \geq 0\}$ rasgele süreci;

i. $X(0) = \alpha$,

ii. X süreci bağımsız artımlara sahiptir, yani $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ için $X(t_n) - X(t_{n-1})$, $X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), ..., X(t_2) - X(t_1)$ artımları bağımsızdır,

iii. X sürecinin örneklem eğrilerinin tümü süreklidir,

iv. Her $s < t$ için, $X(t) - X(s) \sim N(0, t-s)$ dir. Yani normal dağılıma sahiptir.

şartlarını sağlaması durumunda $\alpha \in R$ dan başlayan bir *Brownian hareket* olarak adlandırılır. $\alpha = 0$ olması durumunda $\{X(t), \, t \geq 0\}$ *standart Brownian hareket* adını alır (Mörters ve Peres, 2010).

Tanım 3.2.3. Bir $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ olasılık uzayı verilmiş olsun. Bir $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ $\sigma - cebirler$ topluluğu aşağıda verilmiş olan şartları sağlıyorsa *filtrasyon* adını alır:

i. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$

ii. $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Böylece $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ büyüyen bir bilgi akışıdır. $\mathcal{F}_t$, t anında vuku bulup bulmadığına karar verebileceğimiz olayların $\sigma - cebri$ dir (Çapar, 2013).

Tanım 3.2.4. Bir $X = \{X(t), t \geq 0\}$ sürecinde eğer her bir rasgele değişken $X(t)$, $\mathcal{F}_t$ ye göre ölçülebilir ise $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *filtrasyonuna adaptedir* denir (Mao, 2011).

Tanım 3.2.5. Bir τ, $(\Omega, \mathcal{F})$ de tanımlanan negatif olmayan bir rasgele değişken, herhangi bir $t \geq 0$ için, $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ise $\mathcal{F}_t-$durma zamanı (stopping time) olarak adlandırılır (Da Prato ve Zabczyk, 2014).

3.3. Stokastik İntegraller

Bu kısımda $\int_a^b f(t)\, d\omega(t)$ integrali ile ilgili detaylı bilgi verilecektir. $t \to \omega(t)$, $[a, b]$ aralığında sonlu varyasyona sahip olmadığından bu integral bir Riemann–Stieltjes integrali değildir. Bu yeni integral çeşidi ilk olarak K. Ito tarafından standart Brownian hareketine dayalı olarak ortaya konulmuş ve sonraları Ito integrali olarak adlandırılmıştır (Bobrowski, 2005). Konunun bütünlüğü açısından Riemann–Stieltjes integraline kısaca değinilecek, sonrasında Itô integraline geçilecektir.

Tanım 3.3.1.(Riemann-Stieltjes İntegrali) f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Her $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ bölüntüsü için $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ olmak üzere,

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[(g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

olsun. Eğer

$$\lim_{|P| \to 0} S_p = I$$

limiti var ise I ya $f(t)$ nin $g(t)$ ye göre *Riemann-Stieltjes integrali* denir ve

$$I = \int_a^b f(t)\, dg(t)$$

yazılır. Burada $|\mathbf{P}| = \max_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1})$ dir. Eğer $g(t)$ fonksiyonu sonlu varyasyona sahip ise yani, monoton artan iki fonksiyonun farkı ise ve $f(t)$ sürekli ise bu durumda I nın varlığından söz edilebilir (Schuss, 2010).

Uyarı. Buradaki $g(t)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olduğunda rahatlıkla

Reiman-Stieltjes integrali alınabilir. Ancak Brownian hareketin eğrilerinin, zamana göre türevi olmadığından, Itô integraline ihtiyaç vardır.

Tanım 3.3.2.(Itô İntegrali) $[a,b]$ aralığının karakteristik fonksiyonu

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq b \\ 0, & di\breve{g}er\ durumlarda \end{cases}$$

olsun. $0 \leq a < b \leq T$ için

$$\int_0^T \chi_{[a,b]}(t)\, d\omega(t) = \omega(b) - \omega(a)$$

tanımlansın. $f(t)$, $[0,T]$ aralığında bir *adım fonksiyonu (veya basit fonksiyon)* ise, bu durumda $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ olmak üzere,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\, \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(t)$$

olarak yazılabilir. $f(t)$ için Ito integrali

$$\int_0^T f(t) d\omega(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f(t_k)\left[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)\right]$$

şeklinde tanımlanır (Schuss, 2010).

Tanım 3.3.3.(Itô Formülü) Itô stokastik differansiyel denklemi aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$dX = b(X,t) + \sigma(X,t) d\omega.$$

bu stokastik differansiyel denklemin bir çözümünün $X(t)$ olduğunu, $f(X,t)$ nin de $f : R \times [0,\infty) \to R$ düzgün bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Verilen bu iki değişkenli $f(X,t)$ fonksiyonu için $\frac{\partial f}{\partial t}$ ikinci değişkene (zamana) göre kısmi türevi, $\frac{\partial f}{\partial X}$ de birinci değişkene göre kısmi türevi göstersin.

Teorem 3.3.4.(Itô Formülü) Herhangi bir $\{X(t)\}_{t \in R_+}$ Itô süreci ve herhangi bir $f \in C^{1,2}$ fonksiyonu için $Y(t) = f(X(t),t)$ olarak tanımlayalım. Y aşağıdaki stokastik differensiyel denklemi sağlar:

$$dY = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X,t) + b(X,t)\frac{\partial f}{\partial X}(X,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X,t)\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X,t)\right] dt + \sigma(X,t)\frac{\partial f}{\partial X}(X,t)d\omega.$$

Eğer $X = \omega$ alınırsa o zaman $b = 0$ ve $\sigma = 1$ olur ve Itô formülü aşağıdaki hali alır (Chow, 2014):

$$df(\omega,t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\omega,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}(\omega,t)\right] dt + \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega,t)d\omega.$$

Bazı Özel Fonksiyon Uzayları

3.4. Lebesque Uzayı

Tanım 3.4.1. μ, $R^n de$ bir ölçüm ve $f : R^n \to R$ fonksiyonu $B^*(R^n) - B(R)$ ye (burada $B(R)$ Borel σ-cebri, $B^*(R^n)$ Lebesgue σ-cebridir) göre ölçülebilir ve μ integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int f d\mu$$

integrali f nin *Lebesgue integrali* olarak adlandırılır (Klenke, 2008).

Tanım 3.4.2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $p \geq 1$ gerçel sayılar olmak üzere, Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir f fonksiyonlar sınıfı

$$\left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty$$

koşulu altında $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *uzayı* olarak adlandırılır. $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uzayı

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Bobrowski, 2005).

Tanım 3.4.3. Ω üzerinde ölçülebilir bir u fonksiyonu, Ω nın hemen hemen her yerinde (h.h.h) $|u(x)| \leq K$ sağlanacak şekilde bir K sabiti varsa *hemen hemen sınırlı* olarak adlandırılır. Böyle sabitlerin en büyük alt sınırına $|u|$ nun Ω üzerindeki esas (essential) supremumu denir ve $ess \sup\limits_{x\in\Omega}$ ile gösterilir. Ω üzerinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L^\infty(\Omega)$ *uzayı* denir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı aşağıdaki norm ile bir Banach uzayıdır (Adams ve Fournier, 2003).

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \, .$$

Tanım 3.4.4. X ve Y normlu vektör uzayları olsun.

i. X, Y nin bir alt vektör uzayı ve

ii. $\forall x \in X$ için, X normlu uzayından Y normlu uzayına $Ix = x$ ile tanımlanan birim operatör sürekli ise,

X, Y *ye gömülür* denir ve $X \rightarrow Y$ ile gösterilir. I operatörü lineer olduğundan ii) koşulu aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak negatif olmayan bir M sabitinin varlığına denktir (Adams ve Fournier, 2003).

$$\|I_X\|_Y \leq M \|x\|_X \ \ , \ \ x \in X$$

Tanım 3.4.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. $u \in L^q(\Omega)$ olması durumunda $u \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

sağlanır. Buradan da

$$L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

olur (Adams ve Fournier, 2003).

$G \subset R^n$ boş bir küme olmamak üzere, $\overline{G}$ kümesi G nin R^n deki kapanışını gösterir. Eğer $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$, R^n nin kompakt (yani kapalı ve sınırlı) bir alt kümesi ise, $G \Subset \Omega$ yazılır.

Tanım 3.4.6. Bir $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ölçüm uzayı üzerinde tanımlı, karesi integrallenebilir rasgele değişkenlerin oluşturduğu $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır (Bobrowski, 2005).

Tanım 3.4.7. $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ olsun. $\|f(.)\|_X \in L^p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) den X e tanımlanmış ölçülebilir f fonksiyonları uzayına $L^p(a,b;X)$ uzayı denir. $L^p(a,b;X)$ uzayı

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left\{\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt\right\}^{1/p}, & 1 \leq p \leq \infty \\ ess \sup\limits_{t \in (a,b)} \|f(t)\|_X \quad, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.4.8. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0,T];X)$ uzayı denir. $C^m([0,T];X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0 \leq |a| \leq m} \sup_{t \in [0,T]} \|D^a u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

3.5. Sobolev Uzayı

Tanım 3.5.1. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, pozitif α_j tamsayılarının $n-$bileşenlisi ise α çoklu-indis olarak adlandırılır ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ mertebeye sahip $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer olarak, $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, bu durumda

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferensiyel operatör belirtir. $D^{(0,...,0)}u = u$ olur (Adams ve Fournier, 2003).

Tanım 3.5.2. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu u nun $\alpha.zayıf\ türevi$ adını alır. v fonksiyonuna, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi de denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^\alpha u$ her zaman kısmi türevlere sahip olacak şe-kilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir (Adams ve Fournier, 2003).

Tanım 3.5.3. Ω, R^n de açık bir bölge, m herhangi bir tamsayı, $p \geq 1$ ve $u : \Omega \to R$ düzgün, reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left(\int_\Omega (D^\alpha u)^p \right)^{1/p}$$

normu verilsin. Aşağıdaki şekilde tanımlanan uzaylara *Sobolev uzayları* denir (Hebey, 1999).

$$H^{m,p}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{m,p}} < \infty\} \text{ nin } \|\cdot\|_{W^{m,p}} \text{ normuna göre tamlaması}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

Aşikar olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dır. Herhangi bir $m > 0$ tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 3.5.4. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 3.5.5. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|a|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır; burada $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır. $H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2}$$

şeklinde olur.

Teorem 3.5.6. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesinin bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt olması durumunda $|\Omega| < \infty$ dur.

Teorem 3.5.7. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq p < q$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

3.6. Operatörler

Tanım 3.6.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A : D_A \subset X \to Y$ dönüşümü X deki bir x elamanını Y de bir tek elemana götürüyorsa A ya operatör, D_A ya da A operatörünün tanım kümesi denir.

Tanım 3.6.2. $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne belli bir $M \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_A$ için

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliği ile birlikte sınırlı operatör denir.

Tanım 3.6.3. X ve Y iki Hilbert uzayı ve $(.,.)$ X uzayının, $[.,.]$ de Y uzayının iç çarpımı ve $A : X \to Y$ doğrusal, sınırlı operatörü tüm X Hilbert uzayında tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$[Ax, y] = (x, A^* y)$$

koşulunu sağlayan $A^* : Y \to X$ operatörüne, A operatörünün eş operatörü denir. Eğer $A = A^*$ ise böyle bir operatöre öz-eşlenik (self-adjoint) operatör denir.

Tanım 3.6.4.(Bir Operatörün İzi) E, G Banach uzayları olsun ve $L(E, G)$ alışılmış supremum normla verilmiş E den G ye sınırlı tüm lineer operatörlerin Banach uzaylardır. $L^1(E, E)$ in yerine $L^1(E)$ yazılır. E ve G nin dual uzayı E^* ve G^* şeklinde gösterilir. Eğer $\{\alpha_j\} \subset G, \{\phi_j\} \subset E^*$ iki dizisi varsa öyle ki,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\alpha_j\| \left\|\varphi_j\right\| < +\infty$$

ve T aşağıdaki şekilde ifade edilirse

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j(x) \ , \quad x \in E$$

$T \in L(E, G)$ elemanına çekirdek (nuclear) ya da iz sınıfı (trace class) operatörü olarak adlandırılır.

$$\|T\|_1 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|\alpha_j\| \left\|\varphi_j\right\| : Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j(x) \right\}$$

normu ile verilmiş E den G ye tüm nükleer operatörlerin uzaylarına Banach uzayı denir ve $L^1(E, G)$ şeklinde gösterilir. K bir diğer Banach uzayı olsun; eğer $T \in L^1(E, G)$ ve $S \in L(G, K)$ ise o zaman $TS \in L^1(E, K)$ ve $\|TS\|_1 \leq \|T\| \|S\|_1$ olduğu görülür. H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun ve $\{e_k\}$, H da bir tam ortonormal sistem olsun. Eğer $T \in L^1(H, H)$ ise

$$Tr\ T = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

şeklinde tanımlanır (Da Prato ve Zabczyk, 2014).

3.7. Eşitsizlikler

Tanım 3.7.1.(Cauchy Eşitsizliği) Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R^1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 3.7.2.(Hölder Eşitsizliği) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, u ve v, $[0, \infty]$ aralığında değerler alan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \geq 1$ olmak üzere

$$\int\limits_{\Omega} uv d\mu \leq \left(\int\limits_{\Omega} u^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} v^q d\mu\right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 3.7.3.(Minkowski Eşitsizliği) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ bir ölçüm uzayı, u ve v, $[0, \infty]$ aralığında değerler alan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $p \geq 1$ olmak üzere

$$\left(\int\limits_{\Omega} (u+v)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_{\Omega} u^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{\Omega} v^p d\mu\right)^{1/p}$$

Tanım 3.7.4.(Kısmi İntegral Alma Formülleri) $\Omega \subset R^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = (A_1(x), ..., A_n(x))$ vektörü $i = 1, ..., n$ olmak üzere $A_i(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1$ bileşenleri ile verilsin. $\operatorname{div} A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x) n(x) dS$$

olup burada $n(x)$ Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül, Ostrogradskii formülü olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ve $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} +$

$... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradskii formülüne göre

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u.n \mid_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir.

4. BLOW-UP

Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi kısmi diferansiyel denklemlerde de problemin çözümü sonlu zamanda blow-up olabilir. Blow-up incelenirken, konkavlık metodu, açık eşitsizlik metotları, öz fonksiyon metodu gibi birçok yöntem kullanılmaktadır. Bu çözüm metotlarından konkavlık metodu tezde kullanılan metot olduğundan bu bölümde detaylıca anlatılmaya çalışılacaktır.

4.1. Konkavlık Metodu

Bu metod daha önce de bahsettiğimiz gibi Levine (1974) tarafından kullanılmış ve matematiksel çalışmalarda geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Konkavlık metodunun ana fikri, problemin lokal çözümünün varlığı koşulu altında tanımlanan, kısmi diferansiyel denklemi ve sınır koşullarını temsil eden pozitif bir $F(t)$ fonksiyoneli inşa etmek ve daha sonra bazı $a > 0$ sayısı için t zamanına bağlı bir F^{-a} konkav fonksiyonu almaktır. Bu işlemlerde F fonksiyoneli

$$\frac{d^2 F^{-a}}{dt^2} \leq 0 \tag{4.1}$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizliğin integralinin alınması ile $F(t)$ için aşağıdaki alt sınır

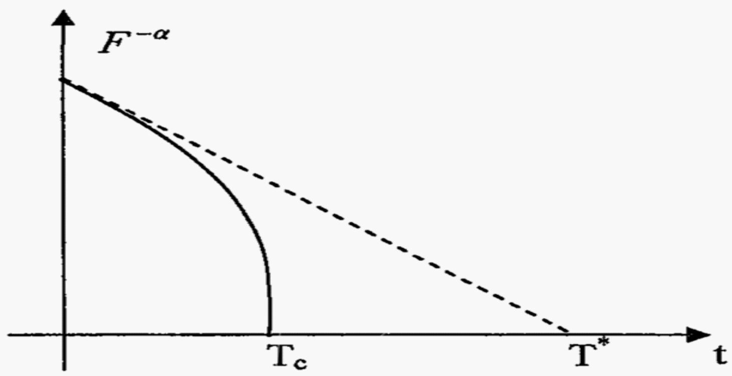
$$F^a(t) \geq \frac{F^{a+1}(0)}{F(0) - taF'(0)} \tag{4.2}$$

fonksiyonu bulunur. Bulunan $F^a(t)$ fonksiyonu bu yüzden $F'(0) > 0$ şartıyla sonlu zamanda blow-up olan alttan sınırlı bir fonksiyondur. T^* zamanından önce ya da tam

$$T^* = \frac{F(0)}{aF'(0)} > 0 \tag{4.3}$$

zamanında olmalıdır. Bu tartışma kendi başına $F(t)$ fonksiyonelinin gerçekten blow-up olduğunu göstermez.

Konkavlık metodunun daha iyi anlaşılması için bu metodun geometrik (grafik) yorumu Şekil 4.1 deki gibi gösterilebilir. Bu grafikte; $F^{-a}(t)$ nin grafiği, $y =$



Şekil 4.1. $F^{-\alpha}(t)$ fonksiyonu.

$F^{-a-1}(0)[F(0) - atF'(0)]$ doğru grafiğinin altında kalır. $F'(0) > 0$ iken bu doğrunun eğimi negatiftir ve F^{-a} fonksiyonu konkav olduğundan o zaman bu doğrunun altında kalır ve böylece çözümün bu noktaya kadar devam etmesi koşuluyla $T_c < \infty$ noktasında t eksenini keser (Polat, 2005).

Konkavlık metodunu bazı $T > 0$ ve $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 1)$ sınırlı bir bölge iken, $\Omega \times (0, T)$ de tanımlı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p \tag{4.4}$$

kısmi diferansiyel denklemine uygulayarak ifade etmeye çalışalım. Sonlu zamanda blow-up ın var olması için $p > 1$ olmalıdır. (Keyfi $p > 1$ değerleri için u^P yerine $u|u|^{p-1}$ almalıyız. $u = u(x,t)$ çözümü

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0 \tag{4.5}$$

sınır koşulu ve aynı zamanda

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{4.6}$$

başlangıç değerini sağlasın. Yukarıda bahsedilen (4.4) - (4.6) problemi için uygun bir $F(t)$ fonksiyoneli

$$F(t) = \int_0^t ||u||_2^2 dn + (T-t)||u_0||_2^2 + \beta(t+\tau)^2 \tag{4.7}$$

şeklinde oluşturulur ve $T, \beta, \tau > 0$ daha sonra seçileceklerdir. Bu fonksiyonel Levine (1973) tarafından Hilbert uzayında

$$Pu_1 = -Au + F(u)$$

soyut denklemi çalışılırken seçilen fonksiyonel olup, P ve A simetrik doğrusal (muhtemelen sınırsız) operatörler ve $F(u)$ fonksiyonu da doğrusal olmayan uygun bir fonksiyondur. İfade edelim ki Eş. (4.4) - Eş. (4.6) denkleminin doğrusallaştırılmış hali için çözümü kararlıdır ve çözümler hızlı olarak sıfıra gider. Böylece herhangi bir blow-up doğrusal olmayan terimden dolayıdır.

Konkavlık metodunu kullanmak için F fonksiyonelinin Eş. (4.1) ile belirtilen eşitsizliği sağladığını belirtmek gereklidir. Bu nedenle $F > 0$ için

$$\frac{d^2F^{-a}}{dt^2} = -aF^{-a-2}\left[F.F'' - (1+a)(F')^2\right] \tag{4.8}$$

olduğundan, F fonksiyonelinin

$$FF'' - (1+a)(F')^2 \geq 0 \tag{4.9}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağladığı gösterilmelidir. Böylece Eş. (4.7) fonksiyonelinin diferansiyelini alarak

$$\frac{dF}{dt} = 2\int_0^1 (u, u_\eta)d\eta + 2\beta(t+T) \tag{4.10}$$

bulunur. Burada $(.,.)$, $L_2(\Omega)$ uzayında iç çarpımı belirtir. Eş. (4.10) eşitliğinde Eş. (4.4) denkleminden u_η nın eşiti kullanılarak, Green formülünden de faydalanıp, integral alınarak F' yeniden yazılırsa

$$\frac{dF}{dt} = -2\int_0^1 ||\nabla u||_2^2 d\eta + 2\int_0^1\int_\Omega u^{p+1}dxd\eta + 2\beta(t+T) \tag{4.11}$$

bulunur. Bu ifade diferansiyellenerek biraz düzenlenip, kısmi integrasyon (Green formülü) uygulanır ise

$$F''(t) = 4\int_0^t (\Delta u, u_n) d\eta * 2||\nabla u_0||_2^2 + 2\int_\Omega u^{p+1} dx + 2\beta \tag{4.12}$$

elde edilir. Eş. (4.4) denkleminden Δu eşiti Eş. (4.10) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} F''(t) = {} & 4\int_0^1 ||u_\eta||_2^2 d\eta - \frac{4}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx + \frac{4}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1} dx - 2||\nabla u_0||_2^2 \\ & + 2\int_\Omega u^{p+1} dx + 2\beta \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde, Eş. (4.9) eşitsizliğinin sol tarafı dikkate alınarak tekrardan düzenlenirse

$$\begin{aligned} F''(t) = {} & 4(a+1)\left[\int_0^1 ||u_\eta||_2^2 d\eta + \beta\right] \\ & - 4a\int_0^1 ||u_\eta||_2^2 d\eta - 2(2a+1)\beta \\ & + 2\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int_\Omega u^{p+1} dx + 4\left[\frac{1}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1} dx - \frac{1}{2}||\nabla u_0||_2^2\right] \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir.

Eş. (4.9) denkleminin sol tarafını oluşturmak için Eş. (4.13), Eş. (4.7), Eş. (4.10) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} FF'' - (1+\alpha)(F')^2 = {} & 4(\alpha+1)S^2 \\ & + 4(\alpha+1)(T-t)||u_0||_2^2\left(\int_0^t ||u_\eta||_2^2 d\eta + \beta\right) \\ & + F\left\{\begin{array}{c} -4a\int_0^1 ||u_\eta||_2^2 d\eta - 2(2a+1)\beta + 2\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int_\Omega u^{p+1} dx \\ +4\left[\frac{1}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1} dx - \frac{1}{2}||\nabla u_0||_2^2\right] \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

denklemi bulunur. Burada S^2 ifadesi

$$S^2 = \left[\int_0^t ||u||_2^2 d\eta + \beta(t+\tau)^2\right]\left[\int_0^t ||u_\eta||_2^2 d\eta + \beta\right] - \left[\int_0^t (u, u_\eta) d\eta + \beta(t+\tau)\right]^2$$

ile tanımlanıp Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliğinden dolayı negatif olmadığı görülür.

Eş. (4.4) kısmi diferansiyel denklemini kullanarak kısmi integrasyon alındığında görülür ki

$$\int_0^1 ||u_\eta||_2^2 d\eta = \int_0^1 (u_n, \Delta u + u^p) d\eta = -\frac{1}{2}||\nabla u||_2^2 + \frac{1}{2}||\nabla u_0||_2^2 + \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx \tag{4.15}$$

denklemi sağlanır.

Eş. (4.14) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk iki terim negatif olmadığından göz ardı edilebilirler. Daha sonra Eş. (4.15) eşitliğini Eş. (4.14) eşitliğinin sağ tarafındaki süslü parantez içindeki ilk terimin yerine yazarak

$$FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq 2\alpha F||\nabla u||_2^2 + \left[2\left(\frac{p-1}{p+1}\right) - \frac{4\alpha}{p+1}\right] F \int_\Omega u^{p+1}dx + F\left[\frac{4(1+\alpha)}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx - 2(1+\alpha)||\nabla u_0||_2^2 - 2(2\alpha+1)\beta\right]$$

buluruz. Sağ tarafın 2. terimini yok etmek için

$$\alpha = \frac{p-1}{2} > 0 \tag{4.16}$$

şeklinde seçeriz. Bu α değeri denklemde yerine yazılırsa bu eşitsizlik

$$FF'' - (1+\alpha)(F')^2 \geq 2\alpha F||\nabla u||_2^2 - 2\beta pF + 2(p+1)F\left[\frac{1}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1}dx - \frac{1}{2}||\nabla u_0||_2^2\right] \tag{4.17}$$

haline dönüşür. Şimdi başlangıç değerlerini

$$\int_\Omega u_0^{p+1}dx > \left(\frac{p+1}{2}\right)||\nabla u_0||_2^2 \tag{4.18}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim. Daha sonra β sabiti

$$\frac{1}{p}\int_\Omega u_0^{p+1}dx - \left(\frac{p+1}{2p}\right)||\nabla u_0||_2^2 > \beta \tag{4.19}$$

koşulunu sağlayacak şekilde çok küçük olarak alınsın. β sabiti bu anlamda alındıktan sonra hemen farkedilir ki Eş.(4.17) eşitsizliğinden $FF'' - (1+a)(F')^2 \geq 0$ olup F fonksiyonelinin Eş. (4.1) eşitsizliğini sağladığı görülür. Böylece Eş. (4.4) - Eş. (4.6) probleminin $u(x,t)$ çözümü, genel anlamda Eş. (4.3) eşitliği ile verilen T^* zamanının ötesinde var olamaz. Mevcut durumda Eş. (4.3) eşitliğine göre

$$T^* = \frac{T||u_0||_2^2 + \beta\tau^2}{\beta\tau(p-1)}, T^* \in (0,T)$$

olur. Eş. (4.7) eşitliğinde ifade edilen F fonksiyonelindeki T sayısının başlangıçta

$$T \geq T^* = \frac{T||u_0||_2^2 + \beta\tau^2}{\beta\tau(p-1)}$$

olacak şekilde alınması gereklidir. Bu nedenle T sayısı

$$T \geq \frac{\beta\tau^2}{\beta\tau(p-1) - ||u_0||_2^2} \tag{4.20}$$

sağlanacak şekilde alınmalıdır. β katsayısı mevcut durumda Eş.(4.19) ile sınırlandırıldı. Şimdi

$$\tau > \frac{||u_0||_2^2}{\beta(p-1)} \tag{4.21}$$

olacak şekilde öyle büyük bir τ almalıyız ki, bu durumda Eş.(4.20) eşitsizliği sağlanır.

Böylece Eş.(4.4) - Eş. (4.6) probleminin çözümü T^* zamanında veya T^* zamanından önce F ölçümünde blow-up olmalıdır veya düzenliliğin yetersizliğinde çözümün varlığı yok olmalıdır. Bu durumda çözüm gerçekten blow-up olur

5. BEYAZ GÜRÜLTÜLÜ BİR REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN YOKLUĞU

Bu bölümde parabolik stokastik kısmi diferansiyel denklemlerde gürültü teriminin blow-up üzerine etkisinin anlaşılması için Bonder ve Groisman (Bonder ve Groisman, 2009) 'a ait bir çalışmaya yer verilecektir.

Bonder ve Groisman, toplamsal gürültülü

$$u_t = u_{xx} + f(u) + \sigma W(x,t) \tag{5.1}$$

parabolik stokastik kısmi diferansiyel denklemi homojen Dirichlet sınır koşulu ile $(0,1)$ aralığında incelemişlerdir. Burada W, 2 boyutlu Brownian yüzey, σ pozitif bir parametre ve f lokal Lipschitz, reel değerli bir fonksiyondur.

Çalışma, yüksek boyutlarda Eş. (5.1)'in çözümünün (var olması durumunda) fonksiyon değerli bir süreç olması beklenmediğinden ve dağılımsal anlamda bir çözüm olduğundan, bir boyut ile sınırlandırılmışıtr (daha fazla bilgi için (Pardoux, 2007)'ye bakılabilir).

Eş. (5.1) gibi yarı-doğrusal parabolik denklemler, bir akışkanın gözenekli bir ortamda difüzyonu, bir yarı iletkendeki taşınım, uzamsal difüzyon olasılığı olan kimyasal reaksiyonlar, popülasyon dinamikleri, biyolojik sistemlerdeki kimyasal reaksiyonlar vb. gibi fenomenolojik yaklaşımlarda ortaya çıkar. Bu durumların tümünde denklemlerin fenomenolojik yaklaşık karakteri nedeniyle, tanımlamanın stokastik pertürbasyon etkisi altında nasıl değiştiğini anlamak ilgi çekicidir.

f nin global Lipschitz sürekli olması durumunda çözümlerin global olarak var olması olasılığı birdir. Bu durum (Pardoux, 2007 ve Walsh, 1986) da incelenmiştir. Bununla birlikte f nin sadece lokal Lipschitz sürekli olması durumunda ($f(s) \sim s^p$, $p > 1$ ya da $f(s) \sim e^s$ durumları) bu problem üzerine literatürde bir sonuç bulunmamaktadır. Standart yaklaşım argümanları kullanılarak lokal çözümlerin varlığı ispatlanabilir ancak bu ispattan maksimal varlık zamanının davranışı elde edilemez. Diğer taraftan $\sigma = 0$, yani deterministik durum yeterince iyi anlaşılmıştır. Eş. (5.1) için dikkat çeken bir problem, başlangıç verileri ne kadar düzgün olursa olsun sonlu zamanda tekilliklerin meydana gelmesidir. Bu tekillikler blow up olarak bilinir. Yani çözümler sonlu bir zamanda sonsuza gider. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, öyle bir $T < \infty$ zamanı vardır ki,

$$\lim_{t \nearrow T} ||u(.,t)||_{\infty} = \infty$$

olur.

Bu olayı garantileyen iyi bilinen koşul, f negatif olmayan konveks bir fonksiyon iken, lineer olmayan f terimi üzerine konan

$$\int^{\infty} \frac{1}{f} < \infty$$

koşuludur (blow-up problemleri üzerine daha fazla bilgi için (Samarskii ve ark, 1995), (Bandle, 1998) ve (Galaktionov ve Vâzquez, 2002) ye bakılabilir).

f doğrusal olmayan fonksiyonunun büyük bir sınıfı için $\sigma = 0$ alındığında Eş. (5.1) probleminin durağan pozitif bir v çözümü vardır ve buradan da karşılaştırma prensibi sağlandığından her $u_0 < v$ başlangıç verisi için Eş. (5.1) in çözümleri globaldır.

Düzgün (küçük) pertürbasyonlar altında blow up ın sürdürüleceği iyi bilinmektedir. Diğer taraftan, Eş. (5.1) in düzgün pertürbasyonları $\sigma = 0$ ile global çözüme sahiptir. Özetle, bu problemin global/blow up çözümlerinin varlığı $\sigma = 0$ durumunda düzgün pertürbasyonlar altında kararlıdır. Deterministik durumda ($\sigma = 0$) küçük u_0 başlangıç verisi için $t \to \infty$ iken $u \to 0$ olurken, büyük u_0 lar için sonlu bir T zamanında $t \nearrow T$ iken $\|u\,(.,t)\|_{\infty} \nearrow +\infty$ olduğu (Cortázar ve Elgueta, 1991) de ispatlanmıştır. $\sigma << 1$ durumunda benzer bir davranış beklenebilir. $v = 0$, Eş. (5.1) denklemi için değişmez (invariant) olmadığından $t \to \infty$ iken sıfır çözüme yakınsama beklenemez, ancak deterministik denklemin sıfır çözümüne yakın bir değişmez ölçümün varlığından şüphelenebilinir ve $t \to \infty$ iken küçük başlangıç verisi için bu değişmez ölçüme yakınsama beklenebilir. Ancak durum böyle değildir. $\sigma > 0$ için global çözüm yoktur. Her negatif olmayan u_0 başlangıç verisi için Eş.(5.1) in çözümünün 1 olasılığı ile blow up olduğu ispatlanacaktır.

5.1. Problemin Formülasyonu

$(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$, F_0, F nin P-boş (null) kümelerini içermek üzere, sağdan sürekli olduğu kabul edilen $(F_t)_{t\geq 0}$ filtrasyonu ile verilmiş bir olasılık uzayı olsun. $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$ uzayı üzerinde tanımlı $R_+ \times [0,1]$ de bir uzay-zaman beyaz gürültüsü ve $u_0 \in C_0([0,1])$ verilmiş olsun. f nin global olarak Lipschitz olduğunu varsayalım. Eş. (5.1) denklemi $\varphi \in C^2((0,1)) \cap C_0([0,1])$ test fonksiyonu ile çarpılıp sonra da integrallenirse

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x,t)\varphi(x)dx - \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)dx = &\int_0^t \int_0^1 u(s,x)\varphi_{xx}(x)dxds \\ &+ \int_0^t \int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)dxds \\ &+ \sigma \int_0^t \int_0^1 \varphi(x)dW(x,s)\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir.

Alternatif olarak, problemin integral formülasyonu, $(0,1)$ aralığı için ısı denkleminin temel çözümü olan G fonksiyonu yardımıyla oluşturulur.

$$\begin{aligned}u(x,t) - \int_0^1 G_t(x,y)u_0(y)dy = &\int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)f(u(y,s))dyds \\ &+ \sigma \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)dW(y,s).\end{aligned}$$

(5.1) in bir çözümü olarak, her $\varphi \in C^\infty((0,1)) \cap C_0([0,1])$ için Eş. (5.2) yi sağlayan ve $C_0([0,1])$ da değer alan F_t ye adapte bir süreç anlaşılır.

(Buckdahn ve Pardoux, 1990) ve (Walsh, 1986)'da bu problemin bir tek çözümünün olduğu ve integral ve zayıf formülasyonların denk olduğu kanıtlanmıştır.

Lokal Lipschitz f için genel olarak global çözüm yoktur. Bununla beraber standart argümanlar yardımıyla lokal çözümlerin varlığı ispatlanır: Her $n \in N$ için Eş. (5.1)'in tek çözümünü f yi global Lipschitz $f_n(x) = f(-n)1_{(-\infty,-n]} + f(x)1_{(-n,n)} + f(n)1_{[n,+\infty)}$ fonksiyonu ile değiştirerek u^n i ele alalım.

T_n, $||u^n(.,t)||_\infty$'nun n değerine ulaştığı ilk zaman olsun. Bu durumda $(T_n)_n$

durma zamanlarının (stopping times) artan bir dizisidir ve Eş. (5.1) in maksimal varlık zamanı $T := \lim T_n$ olarak tanımlanır. $u^{n+1}\mathbf{1}_{\{t<T_n\}} = u^n\mathbf{1}_{\{t<T_n\}}$ $(t < T)$ olduğu kolayca görülür ve buradan da $u(x,t) = \lim u^n(x,t)$ limiti her $t < T$ için vardır ki

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x, t\wedge T)\varphi(x)\,dx - \int_0^1 u_0(x)\varphi(x)\,dx = & \int_0^{t\wedge T}\int_0^1 u(s,x)\varphi_{xx}(x)\,dxds \\ & + \int_0^{t\wedge T}\int_0^1 f(u(s,x))\varphi(x)\,dxds \\ & + \sigma\int_0^{t\wedge T}\int_0^1 \varphi(x)\,dW(x,s)\end{aligned} \quad (5.3)$$

eşitliğini doğrular. Burada $t\wedge s = min\{t,s\}$, $0 \le t,s \le T$. Dolayısıyla, T patlama zamanına kadar u nun, Eş. (5.1) in çözümü olduğu söylenebilir. Ayrıca $P(T<\infty) > 0$ ise u'nun sonlu zamanda blow up olacağı söylenebilir. $T(\omega) < \infty$ ise bu durumda

$$\lim_{t\nearrow T(\omega)} ||u(.,t,\omega)||_\infty = \infty$$

olduğu gözlemlenir.

5.2. Patlamalar

Bu bölümde, her $u_0 \in C_0([0,1])$ başlangıç verisi için Eş. (5.1)'in çözümlerinin 1 olasılığı ile sonlu zamanda blow up olacağı gösterilecektir. Bundan böyle f'nin negatif olmayan konveks bir fonksiyon dolayısıyla lokal Lipschitz olduğu kabul edilecektir. Ayrıca $\int^\infty 1/f < \infty$ olduğu farzedilmektedir. u'nun blow up olduğunu kanıtlamak için

$$\phi(t) := \int_0^1 \phi(x)u(x,t)dx$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada $\phi(x) > 0$, $(0,1)$ de Dirichlet Laplacian ın normalleştirilmiş ilk öz fonksiyonudur. Yani, $\phi(x) = \frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ dir ve buradan Eş. (5.2)'de bir test fonksiyonu olarak kullanılabilir:

$$\phi(t) - \phi(0) = -\lambda_1\int_0^t \phi(s)ds + \int_0^t\int_0^1 \phi(x)f(u(x,s))dxds + \sigma\int_0^t\int_0^1 \phi(x)dW(x,s).$$

$z_0 := \phi(0) = \int_0^1 \phi(x)u_0(x)dx$ olarak gösterilsin. f konveks olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$$\int_0^1 \phi(x)f(u(x,s))dx \geq f\left(\int_0^t \phi(x)u(x,s)dx\right) = f(\phi(s))$$

bulunur. ϕ, L^1 normu 1 olan pozitif bir fonksiyon olduğundan

$$B(t) := \frac{\sqrt{8}}{\pi}\int_0^t\int_0^1 \phi(x)dW(x,s)$$

nin standart bir Brownian hareket olduğu görülebilir. Bütün bu gerçekler birleştirilince, ϕ nin

$$d\phi(t) \geq (-\lambda_1\phi(t) + f(\phi(t)))dt + \frac{\pi}{\sqrt{8}}\sigma dB(t)$$

stokastik diferansiyel eşitsizliğini sağladığı sonucuna varılır. $z(t)$,

$$dz = (-\lambda_1 z + f(z))dt + \sigma dB$$

denklemini $z(0) = z_0$ başlangıç koşuluyla sağlayan bir boyutlu bir süreç olarak tanımlansın. Bu durumda $e(t) = \phi(t) - z(t)$

$$de \geq \left(-\lambda_1 e + \frac{f(\phi) - f(z)}{\phi - z}e\right)dt$$

eşitsizliğini sağlar. e nin deterministik bir diferansiyel denklemi sağladığı görülür. Buradan $e(0) = 0$ iken, tanımlı olduğu sürece $e\,(t) \geq 0$ olduğu kontrol edilebilir. Dolayısıyla, ϕ tanımlı olduğu sürece $\phi(t) \geq z(t)$'dir.

Aşağıdaki lemma, z nin 1 olasılığı ile blow up olduğunu kanıtlamaktadır.

Lemma 5.1. z

$$dz = (-\lambda_1 z + f(z))dt + \sigma dB, \quad z\,(0) = 0 \tag{5.4}$$

nin çözümü olsun. Bu durumda z, 1 olasılığı ile sonlu zamanda blow-up olur.

İspat: İspat sadece, patlamalar için Feller Testinin ((Karatzas ve Shreve, 1991),Bölüm 5) bir uygulamasıdır. (Karatzas ve Shreve, 1991)'de olduğu gibi, aynı notasyonları kullanarak Eş. (5.4) için ölçek fonksiyonu

$$p(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}\int_0^s b(\xi)d\xi\right) ds$$

dir. Burada $b(\xi) = -\lambda_1\xi + f(\xi)$ dir. $\int^\infty 1/f < \infty$ iken,

$$p(-\infty) = -\infty, \quad p(+\infty) < +\infty$$

olduğunu görmek kolaydır ve buradan da S, z nin patlama zamanı ise Feller Testinden

$$P\left(\lim_{t\nearrow S} z(t) = +\infty\right) = 1$$

elde edilir. $P(S < +\infty) = 1$ olduğunu ispatlamak için

$$v(x) = 2\int_0^x \frac{p(x) - p(y)}{\sigma^2 p(y)} dy$$

fonksiyonu ele alınmak zorundadır.

$+\infty$ da v nin davranışı $1/f$ ile verilir ve buradan $v(+\infty) < +\infty$ olur ki, bu da

$$P(S < \infty) = 1$$

olduğunu ifade eder. Bu da ispatı tamamlar.

Tüm bu gerçekler, hemen hemen kesin olarak (almost surely) öyle bir $T = T(\omega) < \infty$ rasgele zamanının varlığını gösterir ki,

$$\lim_{t\nearrow T} ||u(.,t)||_\infty = \infty$$

olur.

Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 5.2. f,

$$\int^{\infty} 1/f < \infty$$

olacak şekilde negatif olmayan konveks bir fonksiyon olsun. O halde, her negatif olmayan $u_0 \geq 0$ başlangıç koşulu için Eş. (5.1)'in çözümü olan u, sonlu bir (rasgele) T zamanında

$$P^{u_0}(T < \infty) = 1$$

ile blow up olur.

6. DOĞRUSAL OLMAYAN STOKASTİK DALGA DENKLEMİ

Bu bölümde doğrusal olmayan dalga denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + \lambda u - \Delta u = f(u) + \sigma(u, u_t, \nabla u)\partial_t W, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u\,(x,0) = u_0, \quad u_t\,(x,0) = v_0, \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

problemini $\Omega \subset R^d$ ele alacağız. Burada α ve λ pozitif sabitler olup, genelliği bozmayacağından 1 olarak alınacaktır. Eş. (6.1) problemi eşdeğer olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{cases} dZ\,(t) = \Lambda Z\,(t)\,dt + F\,(Z\,(t))\,dt + \Sigma\,(Z\,(t))\,dW\,(t) \\ Z\,(0) = Z_0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Burada

$$\begin{aligned} Z\,(t) &= \begin{pmatrix} u\,(t) \\ v\,(t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I + \Delta & 0 \end{pmatrix}, \\ F\,(Z\,(t)) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -v + f\,(u\,(t)) \end{pmatrix}, \quad \Sigma\,(Z\,(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(u, u_t, \nabla u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir. Λ operatörü, $\mathcal{H} = H_0^1 \times L^2$ da bir C_0-yarıgrubunun sonsuz küçük üretecidir.

Not: $\mathcal{H}$ dan olan tahmin edilebilir bir $Z(t)$, $t \in [0,T]$ süreci, $\forall t \in [0,T]$ için

$$Z(t) = e^{t\Lambda} Z_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} F(Z(s))ds + \int_0^t e^{(t-s)\Lambda} \Sigma(Z(s))dW(s)$$

eşitliğini sağlarsa Eş. (6.2) probleminin *mild çözümü* olarak adlandırılır (Knoche ve Frieler, 2001)

Blow up teoremini vermeden önce (Chow, 2002) deki yöntemle benzer şekilde ispatlanabilecek aşağıdaki lokal varlık teoremini ifade edeceğiz.

Teorem 6.1. f ve σ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın.

i. $u, u' \in H_0^1$ için

$$f(u) \leq C_1 (1 + |u|^p) |u|$$

$$|f(u) - f(u')| \leq C_2 \left(1 + |u|^p + |u'|^p\right) |u - u'|$$

$ii.$ Herhangi bir $\sigma : R^{d+2} \to R$ için $\sigma(\cdot)$ dönüşümü sürekli olsun. Herhangi bir $u, v, u', v' \in R$ ve $\nabla u, \nabla u' \in R^d$ için,

$$|\sigma(u, v, \nabla u)|^2 \leq C_3 \left(1 + |u|^{2(p+1)} + |v|^2 + |\nabla u|^2\right) \tag{6.3}$$

ve

$$\begin{aligned} |\sigma(u, v, \nabla u) - \sigma(u', v', \nabla u')|^2 \leq \; & C_4[(1 + |u|^{2p} + |u'|^{2p}) |u - u'|^2 \\ & + |v - v'|^2 + |\nabla u - \nabla u'|^2] \end{aligned} \tag{6.4}$$

olacak şekilde C_1, C_2, C_3, C_4 pozitif sabitleri vardır.

$iii.$ W, R kovaryans operatörü ile $TrR < \infty$ koşulunu sağlayan $\mathcal{H}-$değerli bir Wiener sürecidir.

Bu durumda $u_0 \in H_0^1$ ve $u_1 \in L^2$ için Eş. (6.2) probleminin $[0, T]$ aralığında $u \in C([0, T], H_0^1)$ ve $v \in C([0, T], L^2)$ olacak şekilde bir tek (u, v) mild çözümü vardır.

Not: R kovaryans operatörü

$$Re_k = \lambda_k e_k \tag{6.5}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\{\lambda_k\}$, R nin negatif olmayan sınırlı özdeğerlerinin dizisi ve $\{e_k\}$ karşılık gelen öz fonksiyonlarıdır. Bu durumda, $W(x, t)$

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k(t) e_k,$$

olarak yazılabilir. Burada $\{B_k(t)\}$ reel değerli bağımsız Brownian hareketlerin dizisidir.

Eş. (6.1) problemi ile ilişkili olarak $\varepsilon(t) : \mathcal{H} \to R$ enerji fonksiyoneli

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega f(u)dx, \quad t \geq 0 \tag{6.6}$$

şeklinde tanımlanır. Blow up teoreminden önce ispatta ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki lemmalar verilecektir.

Lemma 6.1. Teorem 6.1 in koşulları altında (u, v) nin $\mathcal{H}$ den değerler alan bir tek mild çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$E\varepsilon(t) \leq E\varepsilon(0) - E\int_0^t \|v\|^2 ds + \frac{1}{2}c_*^2 TrR \int_0^t \int_\Omega \sigma^2 dxds \tag{6.7}$$

eşitsizliği ve

$$E(u,v) = E(u_0, v_0) + E\int_0^t \|v\|^2 ds - \frac{1}{2}E\|u\|_{H_0^1}^2 - E\int_0^t \|u\|_{H^1}^2 ds + \frac{1}{2}E\|u_0\|_{H_0^1}^2 + E\int_0^t (u, f(u))\, ds \tag{6.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\|v\|^2$ için Ito formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \|v_0\|^2 + 2\int_0^t (v, dv) + \int_0^t (dv, dv) \\
&= \|v_0\|^2 - 2\int_0^t (\nabla u, \nabla v)\, ds - 2\int_0^t \|v\|^2 ds - 2\int_0^t (u,v)\, ds \\
&+ 2\int_0^t (v, f)\, ds + 2\int_0^t (v, \sigma dW) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t (\sigma Re_k, \sigma e_k)\, ds.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Doğrudan hesaplamalarla

$$2\int_0^t (u,v)\, ds = \|u\|^2 - \|u_0\|^2, \tag{6.10}$$

$$2\int_0^t (\nabla u, \nabla v)\, ds = \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u_0\|^2 \tag{6.11}$$

ve

$$2\int_0^t (v, f)\, ds = 2\int_\Omega (F(u) - F(u_0))\, dx \tag{6.12}$$

bulunur. Eş. (6.10)- Eş. (6.12) ve Eş. (6.5) in Eş. (6.9) da kullanılmasıyla

$$\|v\|^2 = 2\mathcal{E}(0) - \|\nabla u\|^2 - 2\int_0^t \|v\|^2 ds - \|u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)\,dx - \\ + 2\int_0^t (v,\sigma dW) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \int_0^t \int_\Omega \sigma^2 e_k^2(x)\,dxds \tag{6.13}$$

elde edilir. $c_* := \sup_{k\geq 1}\|e_k\|_\infty < \infty$ tanımlanır, $TrR = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k$ olduğu göz önünde bulundurulur ve Eş. (6.13) de beklenen değer alınırsa Eş. (6.7) elde edilir.

Eş. (6.8) in ispatı için (u,v) nin Eş. (6.2) nin bir global mild çözümü ise bu durumda her $k \geq 1$ için $\{\widetilde{e_k}\}_{k\geq 1}$, $L^2(\Omega)$ nın ortonormal bir tabanı olmak üzere, $\{(u(t),\widetilde{e}_k); t\geq 0\}$ $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ye adapte sonlu varyasyonlu, sürekli bir süreç ve $\{(v(t),\widetilde{e}_k); t\geq 0\}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ye adapte sürekli bir yarı martingaledir. Bu durumda Ito formülünden

$$(u(t),\widetilde{e}_k)(v(t),\widetilde{e}_k) = (u_0,\widetilde{e}_k)(v_0,\widetilde{e}_k) + \int_0^t (u(t),\widetilde{e}_k)\,d(v(t),\widetilde{e}_k) + \int_0^t (v(t),\widetilde{e}_k)\,d(u(t),\widetilde{e}_k)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}(u,v) &= (u_0,v_0) + \int_0^t (u,dv) + \int_0^t (v,du) \\ &= (u_0,v_0) - \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{H_0^1}^2 - \int_0^t \|u\|^2 ds - \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds \\ &+ \int_0^t \|v\|^2 ds + \int_0^t (u,f)\,ds + \int_0^t (u,\sigma dW)\end{aligned} \tag{6.14}$$

elde edilir. Eş. (6.14) ün beklenen değerinin alınmasıyla istenen eşitlik bulunur.

Lemma 6.2. [Li, Tsai, 2003] $\delta > 0$ ve $B(t) \in C^2(0,\infty)$

$$B''(t) - 4(\delta+1)B'(t) + 4(\delta+1)B(t) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0$$

ise, o zaman $t > 0$ için $B'(t) > K_0$ olur. Burada K_0 bir sabit ve $r_2 = 2(\delta+1) -$

$2\sqrt{(\delta+1)\delta}$

$$r^2 - 4(\delta+1)r + 4(\delta+1) = 0$$

denkleminin en küçük köküdür.

Lemma 6.3. [Li, Tsai, 2003] Eğer $J(t)$, $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ da artmayan bir fonksiyon ise ve

$$J'(t)^2 \geq R + S\ J(t)^{2+\frac{1}{\delta}} \quad , t \geq t_0$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda öyle sonlu bir T^* zamanı vardır ki,

$$\lim_{t \to T^{*-}} J(t) = 0$$

dır. Burada $R > 0$, $S \in R$ dir.

Not. Aşağıda verilecek blow up teoreminde σ nın Eş. (6.3) koşulu yerine

$$|\sigma(u, v, \nabla u)| \leq \frac{2\delta}{(2\delta+1)c_0^2 TrQ}\|v\|^2 \tag{6.15}$$

koşulunu sağladığı ve f nin de

$$sf(s) \geq (2+4\delta)F(s) \tag{6.16}$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

$$Y(t) = E\|u\|^2 + E\int_0^t \|u\|^2 d\tau\ , \qquad t \geq 0$$

fonksiyoneli tanımlansın. Doğrudan hesaplamalarla

$$Y'(t) = 2E(u, v) + E\|u\|^2$$

ve

$$Y''(t) = 2E\|v\|^2 - 2E\|u\|^2 + 2E\|\nabla u\|^2 + 2E(u, f(u)$$

bulunur. Buradan

$$Y''(t)-4(\delta+1)E\|v\|^2=-2E\|u\|^2+2E\|v\|^2+2E\|\nabla u\|^2+2E(u,f(u)-4(\delta+1)E\|v\|^2 \tag{6.17}$$

yazılır. Şimdi Eş. (6.6) denkleminin her iki tarafı $-(8\delta+4)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}-(4\delta+2)\|v\|^2 &= -(8\delta+4)E\varepsilon(t)+(4\delta+2)E\|\nabla u\|^2\\ &\quad+(4\delta+2)E\|u\|^2-(8\delta+4)E\int\limits_{\Omega}F(u)dx\end{aligned} \tag{6.18}$$

bulunur. Eş. (6.18), Eş. (6.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}Y''(t)-4(\delta+1)E\|v\|^2 &= -2E\|u\|^2-(8\delta+4)E\varepsilon(t)+(4\delta+2)E\|\nabla u\|^2\\ &\quad+(4\delta+2)E\|u\|^2-(8\delta+4)E\int\limits_{\Omega}F(u)dx\\ &\quad+2E\|\nabla u\|^2+2E\int\limits_{\Omega}uf(u)dx\end{aligned}$$

olur. Eş. (6.15) koşulunun Eş. (6.7) de yerine yazılmasıyla elde edilen

$$E\varepsilon(t)\le E\varepsilon(0)+\frac{-\delta-1}{2\delta+1}\int_0^t\|v\|^2d\tau \tag{6.19}$$

eşitsizliği ve f üzerine konan

$$sf(s)\ge(2+4\delta)F(s)$$

koşulu göz önünde bulundurulursa

$$Y''(t)-4(\delta+1)E\|v\|^2\ge-(8\delta+4)E\varepsilon(0)+(4\delta+4)E\int_0^t\|v\|^2d\tau \tag{6.20}$$

elde edilir.

Lemma 6.4. f lokal Lipschitz olsun ve σ ve f, Eş. (6.15) ve Eş. (6.16) koşullarını sağlasın.

(1) $E\varepsilon(0) < 0$

(2) $E\varepsilon(0) = 0$ ve $Y'(0) > E\|u_0\|^2$

(3) $E\varepsilon(0) > 0$ ve

$$Y'(0) > r_2\left(Y(0) + \frac{K_1}{4(\delta+1)}\right) + E\|u_0\|^2 \tag{6.21}$$

sağlansın. Bu durumda $t \geq t_0$ için $Y'(t) > E\|u_0\|^2$ olur. Burada $t_0 = t^*$ (1) durumu için Eş. (6.22) ile verilmiş, (2) ve (3) durumları için ise $t_0 = 0$ dır.

İspat. (1) Eğer $E\varepsilon(0) < 0$ ise Eş. (6.20) den

$$Y''(t) \geq -(8\delta+4)E\varepsilon(0) + 4(\delta+1)E\|v\|^2 + (4\delta+4)\int_0^t \|v\|^2 d\tau$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında 0 dan t'ye integral alınırsa,

$$Y'(t) \geq Y'(0) - (8\delta+4)E\varepsilon(0)t \quad , \quad t \geq 0$$

olur. Böylelikle $t \geq t^*$ için $Y'(t) > E\|u_0\|^2$ elde edilir. Burada

$$t^* = \max\left\{\frac{Y'(0) - E\|u_0\|^2}{(8\delta+4)E\varepsilon(0)}\right\} \tag{6.22}$$

dir.

(2) Eğer $E\varepsilon(0) = 0$ ise o zaman $t \geq 0$ için $Y''(t) \geq 0$ olur. Böylelikle, eğer $Y'(0) > E\|u_0\|^2$ ise $t \geq 0$ için $Y'(t) > E\|u_0\|^2$ elde edilir.

(3) Eğer $E\varepsilon(0) > 0$ ise ilk olarak

$$2E\int_0^t \int_\Omega uvdxd\tau = E\|u\|^2 - E\|u_0\|^2 \tag{6.23}$$

olur ki bu da şu sonuca varmamızı sağlar:

$$E\|u\|^2 \leq E\|u_0\|^2 + E\int_0^t \|u\|^2 d\tau + E\int_0^t \|v\|^2 d\tau.$$

Hölder ve Young eşitsizlikleri ve yukarıdaki eşitsizliğin kullanılmasıyla

$$2E(u,v) \leq E\|u\|^2 + E\|v\|^2$$

$$2E(u,v) + E\|u\|^2 \leq E\|u\|^2 + E\|v\|^2 + E\|u\|^2$$

$$2E(u,v) + E\|u\|^2 \leq E\|u_0\|^2 + E\|u\|^2 + E\int_0^t \|u\|^2 d\tau + E\|v\|^2 + E\|u\|^2$$

bulunur. Buradan

$$Y'(t) \leq Y(t) + E\|u_0\|^2 + E\|v\|^2 + E\int_0^t \|v\|^2 d\tau \tag{6.24}$$

elde edilir.

Eş. (6.20) ve Eş. (6.23) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$Y''(t) - 4(\delta+1)Y'(t) + 4(\delta+1)Y(t) + K_1 \geq 0$$

sonucu bulunur. Burada

$$K_1 = (8\delta+4)E\varepsilon(0) + 4(\delta+1)E\|u_0\|^2$$

dir.

$$B(t) = Y(t) + \frac{K_1}{4(\delta+1)} \quad , \quad t > 0$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $B(t)$

$$B''(t) - 4(\delta+1)B'(t) + 4(\delta+1)B(t) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlar. Eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0$$

ise lemmanın (3) durumunda verilen Eş. (6.21) eşitsizliğinden $t > 0$ için $Y'(t) >$

$E\|u_0\|^2$ sonucu elde edilir.

Bu lemmadan sonra blow up teoremi verilebilir:

Teorem 6.2. σ ve f, Eş. (6.15) ve Eş. (6.16) koşullarını sağlasın. Aşağıdaki durumlardan birinin

(i) $\quad E\varepsilon(0) < 0$

(ii) $\quad E\varepsilon(0) = 0$ ve $Y'(0) > E\|u_0\|^2$

(iii) $\; 0 < E\varepsilon(0) < \dfrac{(E(u_0, v_0))^2}{2(T_1+1)E\|u_0\|^2}$ ve Eş. (6.21) sağlansın. T_1 ispatta verilecek olan bir sabittir,

sağlanması halinde $u(t)$ mild çözümü için pozitif bir T^* zamanında

$$\lim_{t\to T^*} E\|u(t)\|^2 = +\infty$$

olur.

Ayrıca üç durum için T^* blow-up zamanlamasının üst sınırının tahminlerini de elde ederiz.

İspat. $\|.\|_{\mathcal{H}}$ normlu Eş. (6.1)'in $\{u(t); t \geq 0\}$ zayıf çözümünün ζ lifespan için, $p(\zeta = +\infty) = 1$ durumu için inceleyelim. Yeterince büyük $T_1 > 0$ için

$$J(t) = (Y(t) + (T_1 - t)E\|u_0\|^2)^{-\delta}\ , \qquad t\epsilon\,[0, T_1]$$

ile tanımlanan $J(t) : [0, T_1] \to R^+$ fonksiyoneli ele alınsın. Buradan

$$J'(t) = -\delta J^{1+\frac{1}{\delta}}(t)(Y'(t) - E\|u_0\|^2)$$

ve

$$J''(t) = -\delta J^{1+\frac{2}{\delta}}(t)V(t) \tag{6.25}$$

olur. Burada

$$V(t) = Y''(t)(Y(t) + (T_1 - t)E\|u_0\|^2) - (1+\delta)(Y'(t) - E\|u_0\|^2)^2 \tag{6.26}$$

dir. Eş. (6.23) denkleminden ve Hölder eşitsizliğinden faydalanarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} Y'(t) &= 2E(u,v) + E\|u\|^2 = 2E(u,v) + \int_0^t (u,v)d\tau + E\|u_0\|^2 \\ &\leq 2\left(\sqrt{E\|u\|^2 E\|v\|^2} + \sqrt{E\int_0^t \|u\|^2 d\tau E\int_0^t \|v\|^2 d\tau}\right) + E\|u_0\|^2 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Eş. (6.20)'dan aşağıdaki denklem elde edilir.

$$Y''(t) \geq -(4+8\delta)E\varepsilon(0) + 4(\delta+1)\left(E\|v\|^2 + E\int_0^t \|v\|^2 d\tau\right) \tag{6.28}$$

Böylece Eş. (6.27) denklemi ve Eş. (6.28) denklemlerinden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} V(t) \geq & \left(-(4+8\delta)E\varepsilon(0) + 4(\delta+1)\left(E\|v\|^2 + E\int_0^t \|v\|^2 d\tau\right)\right)(Y(t) + (T_1 - t)E\|u_0\|^2) \\ & - 4(1+\delta)\left(\sqrt{E\|u\|^2 E\|v\|^2} + \sqrt{E\int_0^t \|u\|^2 d\tau E\int_0^t \|v\|^2 d\tau}\right)^2 \\ & \geq -(4+8\delta)E\varepsilon(0)J^{\frac{-1}{\delta}}(t) + 4(\delta+1)(T_1 - t)\left(E\|v\|^2 + E\int_0^t \|v\|^2 d\tau\right)E\|u_0\|^2 \\ & + 4(\delta+1)\Bigg[(E\|v\|^2 + E\int_0^t \|v\|^2 d\tau)(E\|u\|^2 + E\int_0^t \|u\|^2 d\tau \\ & - \left(\sqrt{E\|u\|^2 E\|v\|^2} + \sqrt{E\int_0^t \|u\|^2 d\tau E\int_0^t \|v\|^2 d\tau}\right)^2\Bigg] \end{aligned}$$

Schwartz eşitsizliği yardımıyla yukarıdaki eşitsizlikteki son terim negatif değildir. Bu yüzden

$$V(t) \geq -(4+8\delta)E\varepsilon(0)J^{\frac{-1}{\delta}}(t) \quad , \qquad t \geq t_0 \tag{6.29}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eş. (6.25) ve Eş. (6.29) denklemleri yardımıyla aşağıdaki denklem elde edilir:

$$J''(t) \leq \delta(4+8\delta)E\varepsilon(0)J^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \quad , \quad t \geq t_0. \tag{6.30}$$

Lemma 6.3' den, $t > t_0$ için $J'(t) < 0$ dır. Eş. (6.20) denklemi ile $J'(t)$ çarpılır ve t_0 dan t 'ye integral alınırsa

$$J'(t)^2 \geq R + SJ^{2+\frac{1}{\delta}}(t), \ \ t \geq t_0$$

denklemi elde edilir. Burada

$$R = \delta^2 J^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0)((Y'(t_0) - E\|u_0\|^2)^2 - 8E\varepsilon(0)J^{\frac{-1}{\delta}}(t_0)) \ \ , \ S = 8\delta^2 E\varepsilon(0)$$

dır. $R > 0$ olması ancak ve ancak

$$E\varepsilon(0) < \frac{(Y'(t_0) - E\|u_0\|^2)^2}{8(Y(t_0) + (T_1 - t_0)E\|u_0\|^2)}$$

durumunda geçerlidir. Daha sonra Lemma 6.3 yardımıyla sonlu bir T^* zamanında $\lim_{t\to T^*} J(t) = 0$ eşitliği mevcuttur ve T^* ın üst sınırı $E\varepsilon(0)$ ın işaretine göre tahmin edilir; (i) durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{J(t_0)}{J'(t_0)}, \tag{6.31}$$

Ayrıca eğer $J(t_0) < \left\{1, \sqrt{R/-S}\right\}$ ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-S}} \ln \frac{\sqrt{R/-S}}{\sqrt{R/-S} - J(t_0)}.$$

Burada $t_0 = T^*$, Eş. (6.22) denkleminde verilmiştir. (ii) durumunda

$$T^* \leq -\frac{J(0)}{J'(0)}$$

veya

$$T^* \leq \frac{J(0)}{\sqrt{R}}.$$

(iii) durumunda

$$T^* \leq \frac{J(0)}{\sqrt{R}},$$

veya

$$T^* \leq 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta P}{\sqrt{R}} (1 - (1 + PJ(0))^{\frac{-1}{2\delta}})$$

dir. Burada $P = (R/S)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır. T_1 için bu üç duruma göre her hangi bir pozitif sabit olarak $T_1 \geq T^*$ seçilebilir. Yukarıdaki denklemden

$$\lim_{t \to T^{*-}} Y(t) = +\infty$$

elde edilir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında stokastik dalga ve ısı denklemlerinin çözümlerinin patlaması çalışılmıştır. Bu kapsamda çözümlerin sonlu bir $(0,T)$ aralığında sonsuz olup olmadığı yani çözümün patlaması (blow-up) araştırılmıştır. Tezin beşinci bölümünde (Bonder ve Groisman, 2009) tarafından çalışılmış parabolik tipten doğrusal olmayan

$$u_t = u_{xx} + f(u) + \sigma(u)\partial_t W(t,x) \tag{7.1}$$

reaksiyon difüzyon denkleminin blow-up çözümüne yer verilmiştir. $\sigma = 0$ durumunda, (7.1) denklemi homojen Dirichlet sınır koşuluyla verildiğinde f nin büyük bir sınıfı için durağan pozitif çözümlere sahip iken, $\sigma > 0$ durumunda global çözüm olmayıp, her negatif olmayan başlangıç verisi için çözümün bir olasılıkla blow up olduğu görülmüştür.

Altıncı bölümde, $\mathbb{R}^d$ de tanımlı damping terim içeren doğrusal olmayan stokastik dalga denkleminin

$$u_{tt} + \alpha u_t + \lambda u - \Delta u = f(u) + \sigma(u, u_t, \nabla u)\partial_t W \tag{7.2}$$

başlangıç- sınır değer problemi incelenmiştir. (7.2) denkleminin başlangıç değer problemi deterministik durumda ($\sigma = 0$), Runzhang (2010) tarafından incelenmiş, oluşturulan bir $I(u) = \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}$ fonksiyonelinin işaret değişmezliği yardımıyla çözümlerin global varlığı ve blow up ı başlangıç enerjisinin altkritik ve kritik durumları için ispatlanmıştır. Polat ve Taskesen (2014) de ise çözümlerin global varlığı potential well metodu için oluşturulan yeni bir $K(u) = \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1} - \|u_t\|^2$ fonksiyoneli kullanılarak üst kritik başlangıç enerjili durum için ispatlanmıştır. Tez çalışmasında (7.2) denkleminin başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün uygun enerji eşitsizliklerini sağlaması, f ve σ nın lokal Lipschitz fonksiyonlar olması ve bazı eşitsizlikleri sağlaması durumunda çözümün sonlu zamanda blow up olduğu gösterilmiştir. f ve σ üzerine konan lokal Lipschitz koşulunun global Lipschitz koşulu ile değiştirilmesi durumunda global mild çözümlerin varlığı garantilenirken, bu koşulun kaldırılması durumunda çözümler belli bir blow up zamanına kadar lokal olarak varlık gösterirler Tezde kullanılan yöntem tespit edilebilecek koşullar altında farklı terimler içeren dalga denklemlerine ve beşinci bölümde kullanılan yöntem de farklı parabolik tipten stokastik diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R., A., Fournier, J., J., F., 2003. ***Sobolev Space***. Academic Press. Second Edition, New York.

Arnold, L., 1992. ***Stochastic Differential Equations: Theory and Applications***. A Wiley - Inter Science Publication., USA.

Bandle, C., Brunner, H., 1998. Blowup in diffusion equations: ***A survey, J. Comput. Appl. Math.*** **97** (1-2): 3-22.

Barbu, V., Da Prato, G., 2002. The stochastic nonlinear damped wave equation, ***Appl. Math. Optim.*** **46**: 125-141.

Bo, L., Tang, D., Wang, Y., 2008. Explosive solutions of stochastic wave equations with damping on R^d. ***Journal of Differential Equations,*** **244:** 170–187.

Bobrowski, A., 2005. ***Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes-An Introduction***. Cambridge University Press.

Bonder, J. F., Groisman,P., 2008. *Time_space white noise eliminates global solutions in reaction_diffusion equations*. ***Physica*** D 238 209-215.

Brzezniak, Z., Ondrejat, M., Seidler, J., 2016 Invariant measures for stochastic nonlinear beam and wave equations. ***Journal Differential Equations.*** **260** 4157–4179.

Chow, P. L., 2002. Stochastic Wave Equations with Polynomial Nonlinearity, ***Ann. Appl. Probab.*****12 (1):** 361-381.

Chow, P., L., 2009. ***Stochastic Partial Differential Equations***. CRC Press, Second Edition, New York.

Chow, P. L., Liu, K., 2012. Positivity and explosion in mean L^p -norm of stochastic functional parabolic equations of retarded type, **Stochastic Processes and their Applications 122** 1709–1729.

Cortázar, C., Elgueta, M.,1991. Unstability of the steady solution ofa nonlinear reaction-diffusion equation, ***Houston J. Math***. **17** (2) 149_155.

Çapar, U., 2013. ***Ölçü Kuramsal Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş***. Odtü Yayıncılık, Ankara.

Da Prato, G., Zabczyk, J., 2014. ***Stochastic Equations in Infinite Dimensions.*** Second Edition, Cambridge University Press, Croydon.

Dozzi, M., Lopez-Mimbela J.A., 2010. Finite-time blow-up and existence of global positive solutions of a semi-linear SPDE, ***Stochastic Processes and Their Applications***, **120:**767-776.

Galaktionov, V., A., Vázquez, J., L., 2002. The problem of blow-up in nonlinearparabolic equations, ***Discrete Contin. Dyn. Syst***. **8** (2) 399-433.

Hebey, E., 1999. ***Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities.*** Courant Lecture Notes; 5, New York University.

Karatzas, I., Shreve, S., E., 1991.***Brownian Motion and Stochastic Calculus***. Second edition, in: Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York.

Klenke, A., 2008. ***Probability Theory.*** Springer.

Knoche, C., Frieler, K., 2001. ***Solutions of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Hilbert Spaces and Their Dependence on Initial Data***. Diploma Thesis. Bielefeld University, BİBoS-Preprint E02-04-083.

Levine, H., A., 1973. Some nonextence and instability theorems for solution of formly parabolic eqyetion of the form. Pu_t=-Au+F(u), **Arch. Rational Mech. Anal.**, **51**: 371-386.

Levine, H., A., 1974. Instability and nonexistence of global solution of nonlinear wave equation of the form . Pu_{tt}=Au+F(u), ***Trans. Amer. Math. Soc.,*** **192**: 1-21.

Liang, F., 2014. Explosive Solitions of Stochastic Nonlinear Beam Equations With Damping. ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***.**419**: 849-869.

Mao, X., 2010. ***Stochastic Differential Equations and Applications.*** Second Edition, Woodhead Publishing. USA.

Mörters, P., Peres, Y., 2010. ***Brownian Motion.*** Cambridge University Press, New York, ISBN-13 978-0511-74427-3.

Mueller, C., Sowers, R., 1993. Blow-up for the heat equation with a noise term, ***Probab. Theo. Relat. Fields*** **97**: 287-320.

Mueller, C., 2000. The Critical Parameter For The Heat Equation With a Noise Term To Blow Up in Finite time***, The Annals of Probability***, **28(4)**: 1735-1746.

Mueller, C., Sowers, R., 1993. Blowup for the heat equation with a noise term, ***Probab. Theory Related Fields,*** **97** (3): 287_320.

Niu, M., Xie, B., 2012. Impacts of Gaussiannoises on theblow-uptimes ofnonlinear stochastic partial differential equations, ***Real World Applications*** **13:**1346-1352.

Ondrejat, M., 2007. Uniqueness for stochastic non-linear wave equations. ***Nonlinear Analysis,*** **67:** 3287-3310.

Pardoux, E., 2007. SPDEs Mini Course Given at Fudan University, Shanghai, April 2007. ***http://www.cmi.univ-mrs.fr/~pardoux/spde-fudan.pdf.***

Peszat, S., 2002. The Cauchy problem for anonlinear stochastic wave equation in any dimension. ***Journal of Evolution Equations,*** **2:** 383-394.

Polat, N., 2005. ***Doğrusal olmayan Parabolik ve Hiperbolik Diferansiyel denklemelerde Global çözümlerin yokluğu(Blowup),*** Doktora tezi, Diyarbakır Dicle Üniversitesi.

Polat, N., Taskesen, H., 2014. On the Existence of Global Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon Equation, ***Filomat*** **28 (5)**: 1073–1079.

Samarskii, A., A., Galaktionov, V., A., Kurdyumov, S., P., Mikhailov, A., P., 1995. ***Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations***, in: de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 19, Walter de Gruyter & Co., Berlin, Translated from the 1987 Russian original by Michael Grinfeld and revised bythe authors.

Schuss, Z., 2010. ***Theory and Applications of Stochastic Differential Equations***. John Wiley & Sons. New York.

Walsh, J., B.,1986. An introduction to stochastic partial differential equations,in: ***École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV_1984, in: Lecture Notes in Math.,*** 1180, Springer, Berlin, 265-439.

ÖZ GEÇMİŞ

Van Özalp' ta 1985 yılında doğdu. İlk ve ortaöğrenimi Özalp' ta, liseyi Van' da tamamladı. 2001 yılında girmiş olduğu Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik bölümünden 2005 yılında mezun oldu. Aynı yılda başladığı tezsiz yüksek lisansı 2007 yılında tamamladı. 2016 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı' nda tezli yüksek lisansa başladı. 2007 yılının Haziran ayında başladığı öğretmenlik görevine halen devam etmektedir. Evli iki çocuk babasıdır.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 08/02/2019

Tez Başlığı / Konusu: Stokastik Isı Denklemlerinin Çözümlerinin Patlaması

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 48 sayfalık kısmına ilişkin, 03/01/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 7 (Yedi) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

08/02/2019

Adı Soyadı: Beytullah YAĞIZ

Öğrenci No: 159102123

Anabilim Dalı: İstatistik

Programı: İstatistik

Statüsü: Y. Lisans ☐ Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Dr. Öğr. Üyesi Hatice TAŞKESEN

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof.Dr.Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü