T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARKLI TÜRDEN g −BASKIN PREİNVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Emetullah YAĞIZ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN

VAN-2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FARKLI TÜRDEN g −BASKIN PREİNVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Emetullah YAĞIZ

VAN-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN danışmanlığında, Emetullah YAĞIZ tarafından sunulan **"Farklı Türden g −Baskın Preinveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler"** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 03/01/ 2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye	: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	İmza:
Üye	: Doç. Dr. Havva KAVURMACI-ÖNALAN	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Ü. Mahmut KARAKUŞ	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24./01./2020 tarih ve 2020/.6.-1.. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. ... ENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

E.Yağız
Emetullah YAĞIZ

ÖZET

FARKLI TÜRDEN g −BASKIN PREİNVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

YAĞIZ, Emetullah
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN
Ocak 2020, 49 sayfa

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmakta olup ilk iki bölüm konunun tarihsel gelişimini içermektedir. Üçüncü bölümde farklı türden konveks, g −baskın konveks ve preinveks fonksiyon sınıfları tanıtılıp örnekler sunulmuştur. Dördüncü bölümde bir önceki bölümde verilen fonksiyon sınıfları için literatürde mevcut olan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Beşinci bölümde farklı türden g −baskın konveks ve pre-inveks fonksiyon sınıfları bir arada düşünülerek yeni fonksiyon sınıfları tanımlanmıştır. Daha sonra tanımlanan bu yeni sınıflar kullanılarak yeni Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikler üretilmiştir. Son bölümde ise tezin özgünlüğü ve önemi tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: $g - b$askın konveks fonksiyon, g −baskın preinveks fonksiyon, Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik, Preinvekslik.

ABSTRACT

HERMITE-HADAMARD TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR DIFFERENT TYPES OF g −DOMINATED PREINVEX FUNCTIONS

YAĞIZ, Emetullah
M. Sc. Thesis, Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN
January 2020, 49 pages

This thesis study consists of six chapters and the first two chapters include the historical development of the subject. In the third chapter different types of convex, g-dominated convex and pre-invex function classes are introtuced and examples are introduced and examples are presented in the fourth section Hermite-Hadamard type inequalities in the literature are presented for the function classes given in previous section. In the fifth chapter new function classes are defined by considering are defined by considering different types of g-dominant convex and pre-invex function classes together. New Hermite-Hadamard type integral inequalities have been generated using these new classes. In the last part, the originality and importance of the thesis are discussed.

Keywords: g −convex-dominated function, $g - p$reinvex-dominated function, Hermite-Hadamard type inequalities, Preinvexity.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması süresince bilgileri ile bana yol gösteren, beni destekleyen, sabır ve fedakarlık gösteren kıymetli danışmanım Sayın Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN'a; eğitimim boyunca maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen daima yanımda olan annem Sayın Emine YAĞIZ ve babam Sayın İhsan YAĞIZ başta olmak üzere aileme ve arkadaşlarım Sayın Zozan OKTAN'a, Sayın Gülistan BUTAKIN'a, Sayın Sabahattin YATAR'a ve Sayın Recep TÜRKER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

2020
Emetullah YAĞIZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{C(I)}$	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{I}$	$\mathbb{R}$'de bir aralık
$\boldsymbol{I^{\circ}}$	I'nın içi
$\boldsymbol{J(I)}$	Jensen-konveks fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{JQC(I)}$	Jensen-quasi-konveks fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{K_m(b)}$	m −Konveks fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{K_m^{\alpha}(b)}$	(α, m) −Konveks fonksiyonlarının sınıfı
$\boldsymbol{K_n(b)}$	n −Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{K_s^2}$	İkinci anlamda s −konveks fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{L(I)}$	Log-konveks fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{L[a,b]}$	$[a,b]$ aralığında Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{L_1[a,b]}$	$[a,b]$ aralığında birinci mertebeden Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{\mathcal{L}_r(x,y)}$	Genelleştirilmiş logaritmik ortalama
$\boldsymbol{M_r(x,y;\lambda)}$	Kuvvet ortalaması
$\boldsymbol{P(I)}$	P −Fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{Q(I)}$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$\boldsymbol{QC(I)}$	Quasi-konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	n −boyutlu reel sayılar kümesi, $n \in \mathbb{N}$
$\boldsymbol{SV(h,I)}$	h −Konkav fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{SX(h,I)}$	h −Konveks fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{S^*(b)}$	Starshaped fonksiyonlar sınıfı

Simgeler	Açıklama
$\boldsymbol{W(I)}$	Wright-konveks fonksiyonların sınıfı
$\boldsymbol{WQC(I)}$	Wright-quasi-konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{f'}$	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$\boldsymbol{f''}$	f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$	Belirli integral
$\boldsymbol{lim}$	Limit
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\subseteq$	Alt kümesi veya eşittir
$\exists$	En az bir
$\forall$	Tüm
$\in$	Eleman
∞	Sonsuz
$\mid\ \mid$	Mutlak değer

1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi günümüzde matematiğin diğer dallarıyla yakın bir ilişki içerisindedir. Konvekslik kavramı eşitsizlik yardımıyla tanımlanır. Konvekslik şekiller etrafında gelişmiştir. Çalışmaları sırasında Archimedes, herhangi bir konveks şeklin çevresinin etrafına çizilen diğer bütün konveks şekillerin çevresinden küçük olduğunu fark etmiştir. 19. yy. sonlarında çıkan konvekslik Archimedes'in M.Ö. 250 yılında çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenleri kullanarak π sayısını hesaplamasına dayanır. Konvekslik kavramı matematik literatürüne Ekim 1881'de Hermite tarafından gönderilen bir mektupla Mathesis dergisinde ortaya çıkmıştır.

Hanson (1981), konveks fonksiyonların önemli bir genellemesi olarak inveks fonksiyonları tanıtmıştır. Hanson (1981)'un bu ilk çalışması diğer uygulamalı bilimlerin alt dallarında inveksliğin uygulamalarının ve rolünün genişletilmesi içerikli çalışmaların önünü açmıştır.

Elster ve Neshse (1980), Hayaski ve Komiya (1980), Hanson (1981), Craven (1981), Craven ve Glover (1985), Ben-Israel ve Mond (1986), Martin (1985), Hanson ve Mond (1987), Noor (1994), Weir ve Mond (1988), Pini (1991), Noor (2005), Antczak (2005) inveksllik ve preinvekslik üzerine yaptıkları temel çalışmalarla literatürde yerlerini almışlardır.

Preinveks fonksiyonların özel seçim halinde konveks fonksiyonlara dönüşmesiyle preinveks fonksiyon tanımı temel alınarak yeni sınıflar kurulup kurulamayacağı; bu sınıflar yardımıyla yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler üretilip üretilemeyeceği fikirleriyle yola çıkan araştırmacılar birçok çalışma yapmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Noor (2007), Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri preinveks ve log-preinveks fonksiyonlar yardımıyla kurmuştur. Noor ve ark. (2014) yaptıkları çalışmada ikinci anlamda $s-$preinveks, $P-$preinveks, $h-$preinveks, Godunova-Levin preinveks fonksiyon sınıflarının tanımlarını yapmış ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri sunmuştur. Noor ve ark. (2014), yaptıkları çalışmada birinci anlamda $s-$Godunova-Levin preinveks fonksiyon, ikinci anlamda $s-$Godunova-Levin preinveks fonksiyon, birinci anlamda log$-s-$Godunova-Levin preinveks fonksiyon ve ikinci anlamda log-$s-$Godunova-Levin preinveks fonksiyon sınıflarının tanımını yapmış ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunmuştur. Latif ve Shoaib (2015), m-preinveks ve (α, m)-preinveks fonksiyonu tanımlamışlar ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunmuşlardır. Noor ve ark. (2015), logaritmik $h-$preinveks fonksiyon, logaritmik $s-$preinveks fonksiyon, logaritmik $p-$preinveks fonksiyon, logaritmik $Q-$preinveks fonksiyonu tanımlamış ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunmuştur. Meftah ve ark. (2017), $(s,r)-$preinveks fonksiyon sınıfını tanımlamış ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunmuşlardır. Noor ve ark. (2017), birinci anlamda $s-$preinveks fonksiyonun tanımını yapmış ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunmuşlardır.

Yapılan bu çalışmaların yanı sıra preinveks fonksiyon sınıfları üzerine yapılmış tezler de mevcuttur.

Alp (2013), "Preinveks ve Log-Preinveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri Üzerine" başlıklı yüksek lisans tezini; Ermeydan (2016), "λ_{φ}-Preinveks Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezini; Aydın (2018), "Operatör Preinveks, Operatör $\alpha-$Preinveks ve Operatör $s-$Preinveks Fonksiyonlar" başlıklı yüksek lisans tezini; Başköy (2018), "Öz Eşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Operatör $h-$Preinveks Fonksiyonlar" başlıklı yüksek lisans tezini; Karpuz (2019), "Hilbert Uzaylarında Öz Eşlenik Operatörlerin Sürekli

Fonksiyonları İçin Operatör (α, m) −Preinveks Fonksiyonlar" başlıklı yüksek lisans tezini; Ünal (2019), "Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Operatör Q −Preinveks ve Operatör Preinveks P −Sınıfı" başlıklı yüksek lisans tezini yazmıştır.

Bu tezin amacı baskın konveks fonksiyon sınıflarından yararlanılarak yeni preinveks fonksiyon sınıfları tanımlamaktır. Tanımlanan bu yeni sınıflar vasıtasıyla Hermite-Hadamard formunda yeni eşitsizlikler üretmektir. Üretilen eşitsizliklerin bir kısmının özel seçimlerle literatürdeki baskın konveks fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş sonuçlara dönüştüğü bir kısmının da yeni sonuçlar doğurduğu sunulacaktır.

3. TEMEL TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER

3.1. Bazı Konveks Fonksiyonlar ve Ön Bilgiler

Bu bölümde, tezde kullanılacak gerekli ön bilgiler verilecektir.

Tanım 3.1.1. L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot: F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) $L, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha. x \in L$ dir.

L2. $\alpha.(x + y) = \alpha. x + \alpha. y$ dir.

L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha. x + \beta. x$ dir.

L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta. x)$ dir.

L5. $1. x = x$'dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L'ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L'ye karmaşık lineer uzay adı verilir (Anton, 1994).

Tanım 3.1.2. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 3.1.3. F bir cisim, V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T: V \to W$ dönüşümü,

a. $T(u+v) = T(u) + T(v)$

b. $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T'ye V üzerinde lineer dönüşüm denir (Anton, 1994).

Tanım 3.1.4. L bir lineer uzay $A \subseteq L$ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L:\ z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x'in ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar, 2000).

Tanım 3.1.5. I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-$konveks fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Tanım 3.1.6. Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

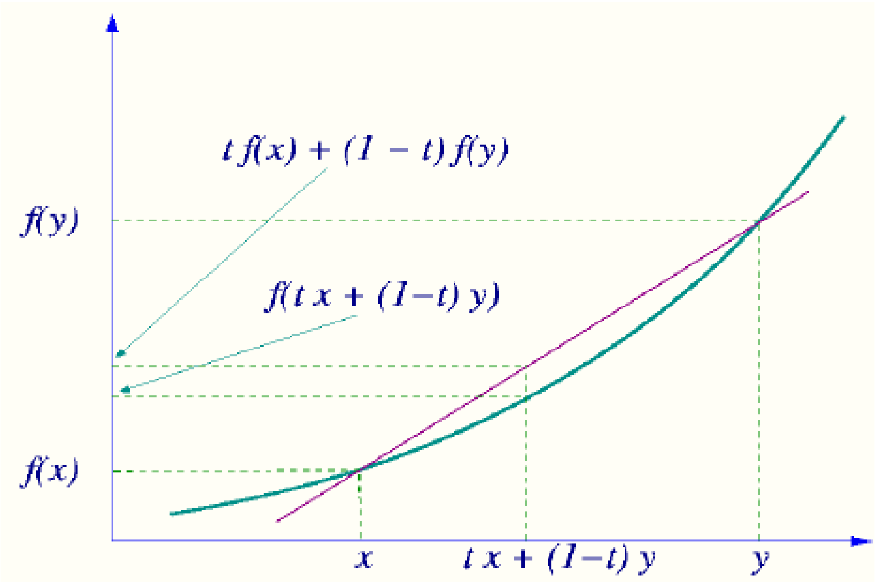
oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin $J-$konveks fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Tanım 3.1.7. I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \qquad (3.1.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (3.1.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić ve ark., 1992).

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Konveks fonksiyonun grafiği

Geometrik olarak $tx + (1-t)y$ noktasında f'nin eğri üzerinde aldığı değer $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür veya eşittir. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 3.1'den de görüldüğü gibi $t \in [0,1]$ olduğundan $tf(x) \leq f(x)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)f(y) \leq f(y)$ dir. Yani $tf(x)$, $f(x)$'in $(1-t)f(y)$ de $f(y)$'nin altındadır. Dolayısıyla $tf(x) + (1-t)f(y)$, $f(x)$ ile $f(y)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f'nin grafiğinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Aşağıda verilen ifadelerin her biri konveks fonksiyon kavramına denktir:

1. I aralığı üzerinde bir f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ ve $x \neq c$ için, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonunun I aralığında artan ya da azalmayan olmasıdır.

2. Her $c, x \in (a,b)$ için $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$ olacak biçimde bir $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ artan fonksiyonu vardır.
3. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f' fonksiyonu artandır.
4. f'' nün (a,b)' de mevcut olması durumunda $f'' \geq 0$ dır.
5. I aralığı üzerinde verilen grafik üzerinde seçilen üç ayrı P, Q, R noktaları için
$$eğim\ PQ \leq eğim\ PR \leq eğim\ QR$$
eşitsizliği sağlar (Roberts ve Varberg, 1973).
6. Her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonu en az bir destek doğrusuna sahiptir. Bu ise $\forall x \in (a,b)$ için
$$f(x) \leq f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$
eşitsizliği var demektir. Bu eşitsizlikte λ değişkeni x_0'a bağlıdır ve eğer f' var ise $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f_-{}'(x_0) \neq f_+{}'(x_0)$ ise $\lambda \in [f_-{}'(x_0), f_+{}'(x_0)]$' dir.

Aşağıda konvekslik ile bilinen süreklilik, mutlak süreklilik, Lipschitz şartı arasındaki ilişkiyi açıklayan bazı teoremlere yer verilecektir.

Teorem 3.1.1. $[a,b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve I°'de süreklidir (Pečarić ve ark., 1992).

Teorem 3.1.2. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

a. f, (a,b) aralığında süreklidir ve

b. f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Teorem 3.1.3. f, S'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S'de düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Tanım 3.1.8. $I, \mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$
ise f'ye *quasi*−konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Aynı şartlar altında
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}$$
ise f'ye kesin *quasi*−konveks fonksiyon denir.

Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi-$konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye kesin $quasi-$konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Örnek 3.1.1. $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2,-1], \\ t^2, & t \in (-1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $g(t)$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında quasi-konveks bir fonksiyon iken konveks bir fonksiyon değildir (Ion, 2007).

Tanım 3.1.9. f hem $quasi-$konveks hem de $quasi-$konkav ise f'ye $quasi-$monotonik denir (Greenberg ve Pierskalla, 1971).

Tanım 3.1.10. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x$, $\delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye $I \subseteq \mathbb{R}$'da wright$-$konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 3.1.11. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y+\delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f((1-\alpha)x + \alpha y)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x+\delta)] \leq \max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f'ye I'da wright$-quasi-$konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 3.1.12. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J-quasi-$konvekstir denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 3.1.13. $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: [a,b] \rightarrow [a,b]$ fonksiyonları verilsin. Her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\big(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\big) \leq tf\big(\varphi(x)\big) + (1-t)f\big(\varphi(y)\big)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $\varphi -$ konvekstir denir (Cristescu, 2004).

Tanım 3.1.14. $I, \mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna log $-$konvekstir denir (Pečarić ve ark., 1992).

Tanım 3.1.15. $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1-\alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova$-$Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak: $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova ve Levin, 1985).

Tanım 3.1.16. $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P $-$fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir ve ark., 1995).

Tanım 3.1.17. x, y pozitif sayılarının r. kuvvetine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1-\lambda) y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^{\lambda} y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 3.1.18. f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq M_r(f(x), f(y); \alpha)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r $-$konveks fonksiyon denir (Gill ve ark., 1997).

Bu tanımdan 0 $-$konveks fonksiyonların log $-$konveks fonksiyonlar ve 1$-$konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılır.

$r-$konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\begin{cases}\lambda f^r(x)+(1-\lambda)f^r(y), & r\neq 0\\ [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}, & r=0\end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce ve ark., 1998).

Tanım 3.1.19. $\mathbb{R}_+=[0,\infty), f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\le 1$ olsun. $\alpha^s+\beta^s=1$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_+$ ve her $\alpha,\beta\ge 0$ için

$$f(\alpha u+\beta v)\le\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. Birinci anlamda $s-$konveks fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Orlicz, 1961).

Tanım 3.1.20. $\mathbb{R}_+$=$[0,\infty)$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\le 1$ olsun. $\alpha,\beta\ge 0,\ \alpha+\beta=1$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u+\beta v)\le\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner, 1978).

Örnek 3.1.2. $s\in(0,1)$ ve $a,b,c\in\mathbb{R}$ olsun. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t)=\begin{cases}a, & t=0\\ bt^s+c, & t>0\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b\ge 0$ ve $0\le c\le a$ ise $f\in K_s^2$ dir.

(ii) $b>0$ ve $c<0$ ise $f\notin K_s^2$ dir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Tanım 3.1.21. $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in I,\alpha\in(0,1)$ için

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\ h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y) \tag{3.1.2}$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$konveks fonksiyon veya $SX(h,I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

(3.1.2) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$konkav fonksiyon denir yani $f\in SV(h,I)$'dır (Varošanec, 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha)=\alpha$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar; $h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ seçilirse $Q(I)$ sınıfına ait fonksiyonlar; $h(\alpha)=1$ seçilirse $P(I)$ sınıfına ait fonksiyonlar ve eğer $s\in(0,1)$ olmak üzere $h(\alpha)=\alpha^s$ seçilirse K_s^2 sınıfına ait fonksiyonlar elde edilir (Varošanec, 2007).

Tanım 3.1.22. $g:I\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $f:I\to\mathbb{R}$ reel bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için f ve g fonksiyonları

$$|\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)|$$
$$\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) - g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $g -$baskın konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Ionescu, 1990).

Lemma 3.1.1. $g: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1) f fonksiyonu I üzerinde $g -$baskın konveks fonksiyondur.
2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde konveks fonksiyonlardır.
3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı h, k gibi iki konveks fonksiyon vardır (Dragomir ve ark., 2002).

Tanım 3.1.23. $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ikinci anlamda $s -$konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \lambda \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|\lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)|$$
$$\leq \lambda^s g(x) + (1-\lambda)^s g(y) - g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(g, s) -$baskın konveks fonksiyon denir (Kavurmacı, 2012).

Lemma 3.1.2. $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ikinci anlamda $s -$konveks fonksiyon ve $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1) f fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde $(g, s) -$baskın konveks fonksiyondur.
2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları $\mathbb{R}_+$ üzerinde ikinci anlamda $s -$konveks fonksiyonlardır.
3) $f = \frac{1}{2}(h - k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h + k)$ şartlarını sağlayan $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı h, k gibi ikinci anlamda $s -$konveks iki fonksiyon vardır (Kavurmacı, 2012).

Tanım 3.1.24. $h \neq 0, h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1]$ olacak şekilde $g: I \to \mathbb{R}$ $h -$konveks fonksiyon olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)|$$
$$\leq h(\lambda)g(x)+h(1-\lambda)g(y)-g(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g,h) −baskın konveks fonksiyon denir (Kavurmacı, 2012).

Lemma 3.1.3. $h\neq 0, h:J\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x,y\in I$ ve $\lambda\in(0,1]$ olacak şekilde $g:I\to\mathbb{R}$ h −konveks fonksiyon ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f fonksiyonu I üzerinde (g,h) −baskın konveks fonksiyondur.
2) $g-f$ ve $g+f$ fonksiyonları I üzerinde h −konveks fonksiyonlardır.
3) $f=\frac{1}{2}(l-k)$ ve $g=\frac{1}{2}(l+k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı l,k gibi h −konveks iki fonksiyon vardır (Kavurmacı, 2012).

Tanım 3.1.25. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif r −konveks fonksiyon olsun. Eğer $\forall x,y\in[a,b]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|M_r(f(x),f(y);\lambda)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)|\leq M_r(g(x),g(y);\lambda)-g(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (g,r) −baskın konveks fonksiyon denir (Özdemir ve ark., 2012a).

Tanım 3.1.26. Negatif olmayan g fonksiyonu $g:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $Q(I)$ −sınıfına ait fonksiyon olsun. Eğer $\forall x,y\in I$ ve $\lambda\in(0,1)$ için $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\left|\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}-f(\lambda x+(1-\lambda)y)\right|\leq\frac{g(x)}{\lambda}+\frac{g(y)}{1-\lambda}-g(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(g,Q(I))$ −baskın konveks fonksiyon denir (Özdemir ve ark., 2012b).

Lemma 3.1.4. Negatif olmayan g fonksiyonu $g:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $Q(I)$ −sınıfına ait bir fonksiyon ve $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f fonksiyonu I üzerinde $(g,Q(I))$ −baskın konveks fonksiyondur.
2) $g-f$ ve $g+f$ fonksiyonları I üzerinde $Q(I)$ −sınıfına ait fonksiyonlardır.

3) $f = \frac{1}{2}(h-k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h+k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı h,k gibi $Q(I)$ $-$sınıfına ait iki fonksiyon vardır (Özdemir ve ark., 2012b).

Tanım 3.1.27. Negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $P(I)$ $-$sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$|[f(x)+f(y)] - f(\lambda x + (1-\lambda)y)| \leq [g(x)+g(y)] - g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(g, P(I))$ $-$baskın konveks fonksiyon denir (Özdemir ve ark., 2012b).

Lemma 3.1.5. Negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $P(I)$ $-$sınıfına ait bir fonksiyon $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f fonksiyonu I üzerinde $(g, P(I))$ $-$baskın konveks fonksiyondur.
2) $g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları I üzerinde $P(I)$ $-$sınıfına ait fonksiyonlardır.
3) $f = \frac{1}{2}(h-k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h+k)$ şartlarını sağlayan I üzerinde tanımlı h,k gibi $P(I)$ $-$sınıfına ait iki fonksiyon vardır (Özdemir ve ark., 2012b).

3.2. Bazı Preinveks Fonksiyonlar ve Özellikleri

Aşağıda preinveks fonksiyonlarla ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $K \subseteq R^n$ ve $\eta: K \times K \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall u, v \in K$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$u + \lambda\eta(v,u) \in K$$

ise K'ya η'ya göre inveks bir küme denir (Weir ve Mond, 1988).

Tanım esas olarak, K'da yer alan bir u noktasından başlayan bir yol olduğunu söyler. Bu v noktasının yolun son noktalarından biri olması gerekmiyor. Ancak $\forall u, v \in K$ için v yolun son noktası olmak üzere ve $\eta(v,u) = v - u$ olarak alınırsa invekslik konveksliğe dönüşür (Mohan ve Neogy, 1995).

Her konveks kümenin $\eta(v,u) = v - u$ fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Bu durumda konveks olmayan inveks kümeler de mevcuttur (Antczak, 2005a).

Tanım 3.2.2. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall u, v \in K$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(u + \lambda\eta(v, u)) \leq (1 - \lambda)\, f(u) + \lambda f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre preinveks fonksiyon denir (Weir ve Mond, 1988).

Ayrıca her konveks fonksiyon bir preinveks fonksiyondur fakat tersi doğru değildir (Yang ve Li, 2001).

Örnek 3.2.1.

$$\eta(b, a) = \begin{cases} b - a, & a.b > 0 \\ a - b, & a.b < 0 \end{cases}$$

η'ya göre $f(x) = -|x|$ fonksiyonu preinvekstir fakat konveks değildir (Weir ve Mond, 1988).

Not 3.2.1. f, η'ya göre preinveks ise aşağıdaki fonksiyon geçerlidir:

$$\eta(\, x, y) = \begin{cases} x - y, y \leq 0 \; ve \; x \leq 0 \\ x - y, y \geq 0 \; ve \; x \geq 0 \\ y - x, y > 0 \; ve \; x < 0 \\ y - x, y < 0 \; ve \; x > 0 \end{cases}$$

(Weir ve Mond, 1988).

η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur (Mohan ve Neogy, 1995).

C Koşulu: $\eta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; η fonksiyonunun herhangi bir x^1, x^2 noktası için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere C koşulunu sağladığını görürüz

$$\eta\big(x^2, x^2 + \lambda\eta(x^1, x^2)\big) = -\lambda\eta(x^1, x^2)$$

$$\eta\big(x^1, x^2 + \lambda\eta(x^1, x^2)\big) = (1 - \lambda)\eta(x^1, x^2)$$

Örnek 3.2.2. Aşağıdaki fonksiyon $[-7, -2] \cup [2,10]$ sınırı için koşul C'yi sağlar.

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x - y, (x \geq 0, y \geq 0) \\ x - y, (x \leq 0, y \leq 0) \\ -7 - y, (x \geq 0, y \leq 0) \\ 2 - y, (x \leq 0, y \geq 0) \end{cases}$$

(Mohan ve Neogy, 1995).

Tanım 3.2.3. K, η'ya göre inveks bir küme ve $f(.) > 0$ olmak üzere $\forall u, v \in K$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq (f(u))^{1-t}(f(v))^t$$

oluyorsa f'ye K kümesi üzerinde logaritmik preinveks fonksiyon denir (Mohan ve Neogy, 1995).

Tanım 3.2.4. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y \in K$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq \max\{f(u), f(v)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre prequasi-inveks fonksiyon denir (Pini, 1991).

Sonuç 3.2.1. Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki ifadelere ulaşabiliriz:

$$\begin{aligned} f\big(a + t\eta(b, a)\big) &\leq \big(f(a)\big)^{1-t}\big(f(b)\big)^{t} \\ &\leq (1-t)f(a) + tf(b) \\ &\leq max\{f(a), f(b)\} \end{aligned}$$

(Noor, 2007).

Tanım 3.2.5. K, η'ya göre inveks bir küme, f pozitif bir fonksiyon ve $r \geq 0$ olsun. $\forall u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq \begin{cases} [(1-\mathrm{t})f^r(u) + tf^r(v)]^{\frac{1}{r}}\ , & r \neq 0 \\ [f(u)]^{1-\mathrm{t}}[f(v)]^{\mathrm{t}}, & r = 0 \end{cases}$$

oluyorsa f'ye η'ya göre r-preinveks fonksiyon denir (Antczak, 2005b).

Burada $0-$preinveks fonksiyonlar logaritmik preinveks; $1-$preinveks fonksiyonlar preinveks fonksiyonlardır. f'nin $r-$preinveks olması durumunda, pozitif r için f^r'nin preinveks fonksiyon olduğu açıktır (Hwang ve Dragomir, 2016).

Tanım 3.2.6. $f: K \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. $\forall u, v \in K, t \in [0,1]$, $s \in (0,1)$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq (1-t)^s f(u) + t^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre ikinci anlamda s-preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014)

Tanım 3.2.7. $f: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in K$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq \frac{1}{1-t} f(u) + \frac{1}{t}\, f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre Godunova−Levin preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.8. $f: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in K, t \in (0,1)$ ve $s \in (0, 1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq \frac{f(u)}{1-t^s} + \frac{f(v)}{t^s}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre birinci anlamda s-Godunova−Levin preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Sonuç 3.2.2. $s = 1$ için s-Godunova−Levin preinveks fonksiyon Godunova−Levin preinveks fonksiyona dönüşür (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.9. $f: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in K$, $t \in (0,1)$ ve $s \in [0, 1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq \frac{f(u)}{(1-t)^s} + \frac{f(v)}{t^s}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre ikinci anlamda s-Godunova−Levin preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Sonuç 3.2.3. İkinci anlamda s-Godunova−Levin preinveks fonksiyon $s = 0$ için P −preinveks fonksiyona ve $s = 1$ için Godunova−Levin preinveks fonksiyona dönüşür (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.10. $f: K \to (0, \infty)$ fonksiyonu $\forall u, v \in K, t \in (0,1)$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f\big(u + t\eta(v, u)\big) \leq f(u)^{\frac{1}{1-t^s}} f(v)^{\frac{1}{t^s}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre birinci anlamda log−s-Godunova−Levin preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.11. $f: K \to (0, \infty)$ fonksiyon $\forall u, v \in K$, $t \in (0,1)$ ve $s \in [0,1]$ için

$$f\big(u + t\eta(v, u)\big) \leq f(u)^{\frac{1}{(1-t)^s}} f(v)^{\frac{1}{t^s}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre ikinci anlamda log−s −Godunova−Levin preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.12. $f: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u, v \in K$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq f(u) + f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre P-preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.13. $h: J \to \mathbb{R}$ burada $(0,1) \subseteq J$, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve K η'ya göre inveks bir küme olsun. $f: K \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\forall u, v \in K, t \in (0,1)$ için

$$f\,\big(u + t\eta(v, u)\big) \leq h(1-t)f(u) + h(t)f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre h-preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2014).

Sonuç 3.2.4. $h(t) = t$ ise h-preinveks fonksiyon preinveks fonksiyona indirgenir.

Sonuç 3.2.5. $h(t) = t^s$ ise $s \in (0,1)$ için h-preinveks fonksiyon ikinci anlamda $s-$preinveks fonksiyona indirgenir.

Sonuç 3.2.6. $h(t) = t^{-1}$ ise h-preinveks fonksiyon $Q-$preinveks fonksiyona indirgenir.

Sonuç 3.2.7. $h(t) = 1$ ise h-preinveks fonksiyon $P-$preinveks fonksiyona indirgenir (Noor ve ark., 2014).

Tanım 3.2.14. $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\eta : S \times S \to \mathbb{R}^n$'ye göre inveks bir küme $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$, $t \in [0,1]$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$f\big(u + t\eta(v,u)\big) \leq (1 - t^\alpha)f(u) + t^\alpha f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre $\alpha-$preinveks fonksiyon denir (Wang ve ark., 2014).

Sonuç 3.2.8. $\alpha = 1$ için $\alpha-$preinveks fonksiyon, preinveks fonksiyona indirgenir (Wang ve ark., 2014).

Tanım 3.2.15. $K \subseteq \mathbb{R}^n, \eta: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks küme ve $f: K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall x, y \in K$, $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v,u)) \;\leq\; (f(v))^{t^s}(f(u))^{(1-t)^s}$$

oluyorsa f'ye K kümesi üzerinde ikinci anlamda s-log-preinveks fonksiyon denir (Wang ve Liu, 2014).

Tanım 3.2.16. $K \subseteq [0, b^*]$, $b^* > 0$, η'ya göre inveks bir küme olsun. Bu durumda $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $m \in (0,1]$, $\forall\, u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\big(u + t\eta(v,u)\big) \leq (1 - t)f(u) + mtf\left(\frac{v}{m}\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna η dönüşümüne göre m-preinveks fonksiyon denir (Latif ve Shoaib, 2015).

Tanım 3.2.17. $K \subseteq [0, b^*], b^* > 0$, η'ya göre inveks bir küme olsun. Bu durumda $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $(\alpha, \mathrm{m}) \in (0,1] \times (0,1]$ ve $\forall\, u, v \in K, t \in [0,1]$ için,

$$f\big(u + t\eta(v,u)\big) \leq (1 - t^\alpha)f(u) + mt^\alpha f\left(\frac{v}{m}\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna, η dönüşümüne göre (α, m)-preinveks fonksiyon denir (Latif ve Shoaib, 2015).

Sonuç 3.2.9. Tanım 3.2.16.'da $m = 1$ alınırsa m-preinveks fonksiyonu preinveks fonksiyona dönüşür. Tanım 3.2.17.'de $\alpha = m = 1$ alınırsa (α, m)-preinveks fonksiyonu preinveks fonksiyona dönüşür. $\eta(v, u) = v - u$ alınırsa m-preinveks fonksiyonu ve (α, m)-preinveks fonksiyonu sırasıyla m-konveks ve (α, m)-konveks fonksiyonlara dönüşür (Latif ve Shoaib, 2015).

Tanım 3.2.18. $f: K \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, u, v \in K, t \in [0,1]$, $s \in (0,1]$ için

$$f\big(u + t\eta(v, u)\big) \leq (1 - t^s) f(u) + t^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye η'ya göre birinci anlamda s-preinveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2017).

Sonuç 3.2.10. Tanım 3.2.6. ve Tanım 3.2.18'de $s = 1$ için tanım klasik preinveks fonksiyona dönüşür. $s = 1$ ve $\eta(v, u) = v - u$ için de klasik konveks fonksiyona dönüşür (Noor ve ark., 2017).

Tanım 3.2.19. K, η ile ilgili olarak bir inveks küme, f pozitif bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in K, s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v, u)) \leq \begin{cases} [(1 - \mathrm{t})^s f^r(u) + t^s f^r(v)]^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ [f(u)]^{(1-\mathrm{t})^s} [f(v)]^{t^s}, & r = 0 \end{cases}$$

oluyorsa f'ye η'ya göre ikinci anlamda (s, r) $-$preinveks fonksiyon denir (Meftah ve ark., 2017).

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel lemmalar ve teoremler verilecektir.

4.1. Bazı Özel ve Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Aşağıda bazı özel eşitsizliklerin yanı sıra farklı türden konveks fonksiyon çeşitleri için literatürde mevcut olan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 4.1.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović ve ark., 1993).

Teorem 4.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve ark., 1993).

Teorem 4.1.3. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (4.1)$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić ve ark., 1992).

Teorem 4.1.4. $g: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $f: I \to \mathbb{R}$ g −baskın konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $a, b \in I$, $a < b$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bu eşitsizlikler de literatürde baskın konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Dragomir ve ark., 2002).

Teorem 4.1.5. $s \in (0,1]$ için $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(g,s)-$baskın konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a,b]$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - 2^{s-1} g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{g(a)+g(b)}{s+1} - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

dir (Kavurmacı, 2012).

Teorem 4.1.6. $h \neq 0$, $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1]$ olacak şekilde $g: I \to \mathbb{R}$ $h-$konveks fonksiyon ve $f: I \to \mathbb{R}$ $(g,h)-$baskın konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left|[f(a)+f(b)]\int_0^1 h(\lambda)d\lambda - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq [g(a)+g(b)]\int_0^1 h(\lambda)d\lambda - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

dir (Kavurmacı, 2012).

Teorem 4.1.7. $0 \leq a < b, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif $r-$konveks fonksiyon ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif $(g,r)-$baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a,b]$ ise

$$\left|\mathcal{L}_r\big(f(a), f(b)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \mathcal{L}_r\big(g(a), g(b)\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

dir (Özdemir ve ark., 2012a).

Teorem 4.1.8. $a < b, \forall a, b \in I$ olmak üzere negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $Q(I)-$sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\big(g, Q(I)\big)-$baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f, g \in L_1[a,b]$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{4}{b-a}\int_a^b g(x)dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)g(x)dx$$

dir. Burada $p(x)$ ifadesi Teorem 3.1.5'te tanımlandığı gibidir (Özdemir ve ark., 2012b).

Teorem 4.1.9. $a < b, \forall a, b \in I$ olmak üzere negatif olmayan g fonksiyonu $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $P(I)$ −sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g, P(I))$ −baskın konveks fonksiyon olsun. Eğer $f, g \in L_1[a, b]$ ise

$$\left|\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)dx - g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\left|[f(a)+f(b)] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq [g(a)+g(b)] - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$$

dir (Özdemir ve ark., 2012b).

Teorem 4.1.10. $a, b \in K^{\circ}$ ve $a < a + \eta(b,a)$ olmak üzere K° (K nın içi) reel sayı aralığı üzerinde $f: K = [a, a + \eta(b,a)] \to (0, \infty)$ bir preinveks fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(a+\eta(\mathrm{b},a))}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(Noor, 2009).

Teorem 4.1.11. $a, b \in K^{\circ}$ ve $\eta(b,a) > 0$ olmak üzere K° (K nın içi) reel sayı aralığı üzerinde $f: K = [a, a + \eta(b,a)] \subseteq [0, \infty) \to (0, \infty)$ bir $s-$preinveks fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$2^{s-1} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f\big(a+\eta(b,a)\big)}{s+1}$$

(Jue-You, 2010).

Teorem 4.1.12. Eğer $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ $h-$preinveks fonksiyon ise, C koşulundan η ve $a < a + \eta(b,a)$, $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(a + \frac{1}{2}\eta(b,a)\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{b} f(x)dx \leq [f(a)+f(b)] \cdot \int_{0}^{1} h(t)dt$$

(Matloka, 2013).

5. BULGULAR

Bu çalışmada literatürde bulunan bazı $g-$baskın konveks fonksiyon türleri ve pre-inveks fonksiyon türleri kullanılarak farklı türden $g-$baskın preinveks fonksiyon sınıfları tanımlanmıştır. Bu yeni sınıflar vasıtasıyla Hermite-Hadamard integral eşitsizliği formunda yeni teoremler yazılmıştır.

Tanım 5.1. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K \to \mathbb{R}$ preinveks bir fonksiyon ve $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $ʌ, ʍ \in K$ ve $ȶ \in [0,1]$ için f ve g fonksiyonları

$$\left|ȶf(ʍ) + (1-ȶ)f(ʌ) - f\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)\right| \qquad (5.1)$$

$$\leq ȶg(ʍ) + (1-ȶ)g(ʌ) - g\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna μ dönüşümüne göre $g-$baskın preinveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f fonksiyonuna μ dönüşümüne göre $g-$baskın prekonkav fonksiyon denir.

Sonuç 5.1. (5.1)'de $\mu(ʍ, ʌ) = ʍ - ʌ$ alındığında $g-$baskın preinveks fonksiyon, Tanım 3.1.22'deki $g-$baskın konveks fonksiyona dönüşür.

Aşağıdaki öncüller $g-$baskın preinveks fonksiyonlar için geçerlidir.

Lemma 5.1. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K \to \mathbb{R}$ preinveks bir fonksiyon ve $f: K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

1) f fonksiyonu K üzerinde μ'ye göre $g-$baskın preinveks fonksiyondur.

2) $g-f$ ve $g+f$ fonksiyonları K üzerinde μ'ye göre preinveks fonksiyondur.

3) $f = \frac{1}{2}(h-k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h+k)$ şartlarını sağlayan K üzerinde tanımlı μ'ye göre h, k iki preinveks fonksiyondur.

İspat: $1 \Rightarrow 2$ (5.1) tanımından hareketle

$$g\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big) - ȶg(ʍ) - (1 - ȶ)g(ʌ) \tag{5.2}$$

$$\leq ȶf(ʍ) + (1 - ȶ)f(ʌ) - f\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

$$\leq ȶg(ʍ) + (1 - ȶ)g(ʌ) - g\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

yazılır. $\forall ʌ, ʍ \in K$ ve $ȶ \in [0,1]$ için (5.2)'nin birinci kısmı düzenlenirse

$$g\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big) + f\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

$$\leq ȶ[g(ʍ) + f(ʍ)] + (1 - ȶ)[g(ʌ) + f(ʌ)],$$

$$(g + f)\big(ʌ + ȶʌ(ʍ, ʌ)\big)$$

$$\leq ȶ(g + f)(ʍ) + (1 - ȶ)(g + f)(ʌ)$$

elde edilir ve buradan $g + f$ fonksiyonunun μ'ye göre preinveks olduğu ispatlanmış olur. Benzer şekilde (5.2)'nin ikinci kısmı yeniden düzenlenirse

$$ȶf(ʍ) + (1 - ȶ)f(ʌ) - f\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

$$\leq ȶg(ʍ) + (1 - ȶ)g(ʌ) - g\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big),$$

$$g\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big) - f\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

$$\leq ȶ[g(ʍ) - f(ʍ)] + (1 - ȶ)[g(ʌ) - f(ʌ)],$$

$$(g - f)\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

$$\leq ȶ(g - f)(ʍ) + (1 - ȶ)(g - f)(ʌ)$$

elde edilir ve buradan $g - f$ fonksiyonunun μ'ye göre preinveks olduğu ispatlanmış olur.

$2 \Rightarrow 1$

$g - f$ ve $g + f$ fonksiyonları K üzerinde μ'ye göre preinveks fonksiyonlar olduğundan

$$(g + f)\big(ʌ + ȶ\mu(ʍ, ʌ)\big) \leq ȶ(g + f)(ʍ) + (1 - ȶ)(g + f)(ʌ)$$

ve

$$(g-f)\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)\leq ŧ(g-f)(ʍ)+(1-ŧ)(g-f)(ʌ)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak sırasıyla

$$-\big[ŧg(ʍ)+(1-ŧ)g(ʌ)-g\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)\big]$$

$$\leq ŧf(ʍ)+(1-ŧ)f(ʌ)-f\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

ve

$$ŧf(ʍ)+(1-ŧ)f(ʌ)-f\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

$$\leq ŧg(ʍ)+(1-ŧ)g(ʌ)-g\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

elde edilir. Son olarak elde edilen iki eşitsizlik birlikte düşünülürse

$$-\big[ŧg(ʍ)+(1-ŧ)g(ʌ)-g\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)\big]$$

$$\leq ŧf(ʍ)+(1-ŧ)f(ʌ)-f\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

$$\leq ŧg(ʍ)+(1-ŧ)g(ʌ)-g\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

yazılır ve buradan

$$\big|ŧf(ʍ)+(1-ŧ)f(ʌ)-f\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)\big|$$

$$\leq ŧg(ʍ)+(1-ŧ)g(ʌ)-g\big(ʌ+ŧ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

Şeklindeki istenilen ifadeye ulaşılır.

$2\Rightarrow 3$

f ve g, $f=\frac{1}{2}(h-k)$ ve $g=\frac{1}{2}(h+k)$ şeklinde iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sırasıyla toplanır ve çıkarılırsa $g+f=h$ ve $g-f=k$ fonksiyonları elde edilir. Lemma 5.1'in 2) öncülünden hareketle $g+f$ ve $g-f$ fonksiyonları K üzerinde μ'ye göre preinveks fonksiyon olduğundan h ve k fonksiyonlarının da K üzerinde μ'ye göre preinveks fonksiyonlar olduğu sonucuna varılır ve ispat tamamlanmış olur.

$3 \Rightarrow 2$

$f = \frac{1}{2}(h-k)$ ve $g = \frac{1}{2}(h+k)$ şeklinde yazılabilen K üzerinde tanımlı $h,\ k$ gibi μ'ye göre iki preinveks fonksiyon varsa bu ifadeler $g+f=h$ ve $g-f=k$ şeklinde yeniden düzenlenebilir. Lemma 5.1'in 3) öncülünden hareketle h ve k, μ'ye göre iki preinveks fonksiyon olduğundan $g+f$ ve $g-f$ de μ'ye göre iki preinveks fonksiyon olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K \to \mathbb{R}$ preinveks bir fonksiyon ve $f: K \to \mathbb{R}$ $g-$baskın preinveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon, \varepsilon+\mu(b,\varepsilon) \in K, \varepsilon < \varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ için

$$\left| f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right) - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda - g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\left| \frac{f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2} - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda \right|$$

$$\leq \frac{g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2} - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat: $f,\ g-$baskın preinveks fonksiyon olup Lemma 5.1'den $g+f$ ve $g-f$ fonksiyonları $[\varepsilon, b]$ aralığında preinveks fonksiyonlar olup preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinden

$$(g+f)\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} (g+f)(\Lambda)d\Lambda \qquad (5.3)$$

$$\leq \frac{(g+f)(\varepsilon)+(g+f)(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))}{2}$$

ve

$$(g-f)\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}(g-f)(\Lambda)d\Lambda \tag{5.4}$$

$$\leq \frac{(g-f)(\varepsilon)+(g-f)(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))}{2}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (5.3) ve (5.4) eşitsizliklerinin birinci kısmı kullanılarak

$$-\left[\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda - g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda - f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda - f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda - g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

eşitsizlikleri elde edilir ki bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur. Benzer şekilde (5.3) ve (5.4) eşitsizliklerinin ikinci kısmı kullanılarak

$$-\left[\frac{g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2} - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda\right]$$

$$\leq \frac{f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2} - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda$$

ve

$$\frac{f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(ʌ)d\,ʌ$$

$$\leq \frac{g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(ʌ)d\,ʌ$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde teoremin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

Sonuç 5.2. Teorem 5.1’de $\mu(b,\varepsilon)=b-\varepsilon$ yazılırsa eşitsizlik Teorem 4.1.4’te yer alan baskın konveks fonksiyonlar için Hermite- Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Aşağıda yukarıda verilen tanımı da içine alan daha genel bir baskın preinveks fonksiyon sınıfı sunulacak ve ardından özel seçimler yapılarak elde edilecek yeni sınıflar sunulup bu sınıflar için Hermite- Hadamard eşitsizlikleri üretilecektir.

Tanım 5.2. $h\colon J\longrightarrow\mathbb{R}$ burada $(0,1)\subseteq J$, $\mathbb{R}$ içinde bir aralık, $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu\colon K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. $\forall ʌ, ʍ\in K, ȶ\in(0,1)$ olmak üzere $g\colon K\to\mathbb{R}$ h −preinveks fonksiyon olsun. Eğer $f\colon K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\big|h(ȶ)f(ʍ)+h(1-ȶ)f(ʌ)-f\big(ʌ+ȶ\mu(ʍ,ʌ)\big)\big| \tag{5.5}$$

$$\leq h(ȶ)g(ʍ)+h(1-ȶ)g(ʌ)-g\big(ʌ+ȶ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna μ’ye göre g −baskın h −preinveks fonksiyon veya (g,h) −baskın preinveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f fonksiyonuna μ’ye göre (g,h) −baskın prekonkav fonksiyon denir.

Aşağıda μ’ye göre (g,h) −baskın preinveks fonksiyonun özel seçimlerinden bahsedilecektir.

Sonuç 5.3.

i) Eğer (5.5)’te $h(ȶ)=ȶ$ olarak seçilirse Tanım 5.2, Tanım 5.1’e dönüşür.

ii) Eğer (5.5)'te $s \in (0,1)$ için $h(ƫ) = ƫ^s$ seçilirse (g, s) $-$baskın preinveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 5.3. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K \to \mathbb{R}^+$ ikinci anlamda s $-$preinveks bir fonksiyon olsun. Her $ʌ, ʍ \in K$ ve $ƫ \in [0,1]$, $s \in (0,1)$ için $f: K \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\left|ƫ^s f(ʍ) + (1-ƫ)^s f(ʌ) - f\big(ʌ + ƫ\mu(ʍ, ʌ)\big)\right|$$

$$\leq ƫ^s g(ʍ) + (1-ƫ)^s g(ʌ) - g\big(ʌ + ƫ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna μ dönüşümüne göre ikinci anlamda g $-$baskın s $-$preinveks fonksiyon veya (g, s) $-$baskın preinveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f fonksiyonuna μ'ye göre ikinci anlamda (g, s) $-$baskın prekonkav fonksiyon denir.

iii) Eğer (5.5)'te $h(ƫ) = ƫ^{-1}$ seçilirse $\big(g, Q(K)\big)-$ baskın preinveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 5.4. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K \to \mathbb{R}$ Godunova-Levin preinveks fonksiyon olsun. Her $ʌ, ʍ \in K$ ve $ƫ \in (0,1)$ için $f: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\left|\frac{1}{1-ƫ} f(ʌ) + \frac{1}{ƫ} f(ʍ) - f\big(ʌ + ƫ\mu(ʍ, ʌ)\big)\right|$$

$$\leq \frac{1}{1-ƫ} g(ʌ) + \frac{1}{ƫ} g(ʍ) - g\big(ʌ + ƫ\mu(ʍ, ʌ)\big)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna μ'ye göre g $-$baskın Godunova-Levin preinveks fonksiyon veya $\big(g, Q(K)\big)-$ baskın preinveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f fonksiyonuna μ'ye göre $\big(g, Q(K)\big)-$ baskın prekonkav fonksiyon denir.

iv) Eğer (5.5)'te $h(ƫ) = 1$ olarak seçilirse $\big(g, P(K)\big)$ $-$baskın preinveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 5.5. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu: K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K \to \mathbb{R}$ P $-$preinveks fonksiyon olsun. Her $ʌ, ʍ \in K$ ve $ƫ \in [0,1]$ için $f: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\left|[f(ʌ)+f(ʍ)]-f\big(ʌ+ȶ\mu(ʍ,ʌ)\big)\right|$$

$$\leq [g(ʌ)+g(ʍ)]-g\big(ʌ+ȶ\mu(ʍ,ʌ)\big)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna μ'ye göre g −baskın P −preinveks fonksiyon veya $\big(g,P(K)\big)$ −baskın preinveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f fonksiyonuna μ'ye göre $\big(g,P(K)\big)$ − baskın prekonkav fonksiyon denir.

Sonuç 5.4. Tanım 5.2'de, Tanım 5.3'te, Tanım 5.4'te ve Tanım 5.5'te $\mu(ʍ,ʌ)=ʍ-ʌ$ alındığında sırasıyla Tanım 3.1.24'e, Tanım 3.1.23'e, Tanım 3.1.26'ya ve Tanım 3.1.27'ye ulaşılır.

Aşağıdaki öncüller (g,h) −baskın preinveks fonksiyonlar için geçerlidir ve Lemma 5.1'e benzer şekilde ispatı yapılır.

Lemma 5.2. $h{:}\,J\longrightarrow\mathbb{R}$ burada $(0,1)\subseteq J$ $\mathbb{R}$ içinde bir aralık, $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu{:}\,K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. $\forall ʌ,ʍ\in K, ȶ\in(0,1)$ olmak üzere $g{:}\,K\to\mathbb{R}$ h −preinveks fonksiyon ve $f{:}\,K\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

1. f fonksiyonu K üzerinde μ'ye göre (g,h) −baskın preinveks fonksiyondur.
2. $g-f$ ve $g+f$ fonksiyonları K üzerinde μ'ye göre h −preinveks fonksiyondur.
3. $f=\frac{1}{2}(l-k)$ ve $g=\frac{1}{2}(l+k)$ şartlarını sağlayan K üzerinde tanımlı l,k gibi μ'ye göre h −preinveks iki fonksiyon vardır.

Aşağıda verilecek teorem (g,h) −baskın preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizliğidir.

Teorem 5.2. $h{:}\,J\longrightarrow\mathbb{R}$ tanımlı, J $(0,1)$ kapsayan $\mathbb{R}$'de bir aralık, $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu{:}\,K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. $\forall\varepsilon,b\in K, ȶ\in(0,1)$ olacak şekilde $g{:}\,K\to\mathbb{R}$ h −preinveks fonksiyon ve $f{:}\,K\to\mathbb{R}$ (g,h) −baskın preinveks fonksiyon ve $\mathrm{h}\left(\frac{1}{2}\right)>0$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(ʌ)\,dʌ-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\mathrm{\Lambda})d\mathrm{\Lambda} - \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\left|\left[f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]\int_0^1 h(\mathrm{t}) - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\mathrm{\Lambda})d\mathrm{\Lambda}\right|$$

$$\leq \left[g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]\int_0^1 h(\mathrm{t}) - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\mathrm{\Lambda})d\,\mathrm{\Lambda}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: Bu teoremin ispatı iki farklı şekilde yapılabilir.

1) f fonksiyonu, (g,h) −baskın preinveks fonksiyon olduğundan Tanım 5.2'de $\mathrm{t}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{\Lambda}=(1-\lambda)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+\lambda\varepsilon$, $\mathrm{M}=(1-\lambda)\varepsilon+\lambda\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)$, $\lambda\in[0,1]$ alındığında

$$\left|h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left((1-\lambda)\varepsilon+\lambda\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right)+f\left((1-\lambda)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+\lambda\varepsilon\right)\right]\right.$$
$$\left.-f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[g\left((1-\lambda)\varepsilon+\lambda\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right)+g\left((1-\lambda)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+\lambda\varepsilon\right)\right]$$
$$-g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

yazılır. Daha sonra elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alındığında

$$\left|h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f\left((1-\lambda)\varepsilon+\lambda\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right)d\lambda\right.$$
$$\left.+h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f\left((1-\lambda)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+\lambda\varepsilon\right)d\lambda - f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{1} g\Big((1-\lambda)\varepsilon+\lambda\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\Big)\,d\lambda$$

$$+\,h\left(\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{1} g\Big((1-\lambda)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+\lambda\varepsilon\Big)\,d\lambda\ -g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\text{ʌ}=(1-\lambda)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+\lambda\varepsilon$, $\text{ʍ}=(1-\lambda)\varepsilon+\lambda\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\left|h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\text{ʌ})d\text{ʌ}+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mu(b,\epsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\text{ʍ})d\text{ʍ}\ -f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\text{ʌ})d\text{ʌ}+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\text{ʍ})d\text{ʍ}\ -g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

elde edilir ve

$$\left|\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\text{ʌ})d\text{ʌ}-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\text{ʌ})d\,\text{ʌ}-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. İspat tamamlanmış olur.

Teoremin ikinci kısmının ispatlanması için $\varepsilon+\text{ȶ}\mu(b,\varepsilon)=(1-\text{ȶ})\varepsilon+\text{ȶ}\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)$ olup $(g,h)-$baskın preinveks fonksiyon tanımında $\text{ʌ}=\varepsilon,\text{ʍ}=\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ seçilirse

$$\left|h(\text{ȶ})f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+h(1-\text{ȶ})f(\varepsilon)-f\big(\varepsilon+\text{ȶ}\mu(b,\varepsilon)\big)\right|$$

$$\leq h(\text{ȶ})g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+h(1-\text{ȶ})g(\varepsilon)-g\big(\varepsilon+\text{ȶ}\mu(b,\varepsilon)\big)$$

eşitsizliği yazılır. Daha sonra bu eşitsizliğin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden ȶ'ye göre integrali alınırsa teoremin ikinci kısmı elde edilir.

$$\left|\int_0^1 h(t)f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)dt+\int_0^1 h(1-t)f(\varepsilon)dt-\int_0^1 f\big(\varepsilon+t\mu(b,\varepsilon)\big)dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 h(t)g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)dt+\int_0^1 h(1-t)g(\varepsilon)dt-\int_0^1 g\big(\varepsilon+t\mu(b,\varepsilon)\big)dt,$$

$$\left|\big[f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\big]\int_0^1 h(t)-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\wedge)d\wedge\right|$$

$$\leq \big[g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\big]\int_0^1 h(t)-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\epsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\wedge)d\wedge$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

2) f fonksiyonu $(g,h)-$baskın preinveks fonksiyon ve g fonksiyonu $h-$preinveks fonksiyon olduğundan Lemma 5.2'nin 2) öncülü yardımıyla $g+f$ ve $g-f$ fonksiyonlarının $h-$preinveks fonksiyon olduğu sonucuna varılır. Buradan $h-$preinveks fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 4.1.12'deki eşitsizlik $g+f$ ve $g-f$ fonksiyonları için yazılırsa

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}(g+f)\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\leq\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta(b,\varepsilon)}(g+f)(\wedge)d\wedge \tag{5.6}$$

$$\leq\big[(g+f)(\varepsilon)+(g+f)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\big]\int_0^1 h(t)dt$$

ve

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}(g-f)\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\leq\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}(g-f)(\wedge)d\wedge \tag{5.7}$$

$$\leq\big[(g-f)(\varepsilon)+(g-f)\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\big]\int_0^1 h(t)dt$$

ifadelerine ulaşılır. (5.6) ve (5.7) eşitsizliklerinin birinci kısmı kullanılarak

$$-\left[\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right]$$

$$\leq\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

$$\leq\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda-\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

eşitsizlikleri yazılır. Elde edilen eşitsizlikler birlikte düşünüldüğünde teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Benzer şekilde (5.6) ve (5.7) eşitsizliklerinin ikinci kısmı kullanılarak

$$-\left[\left[g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]\int_0^1 h(t)dt-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda\right]$$

$$\leq\left[f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]\int_0^1 h(t)dt-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda$$

ve

$$\left[f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]\int_0^1 h(t)dt-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda$$

$$\leq\left[g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]\int_0^1 h(t)dt-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda$$

eşitsizlikleri elde edilir ve bu iki eşitsizlik birlikte düşünüldüğünde teoremin ikinci kısmı ispatlanmış olur.

Aşağıda μ'ye göre $(g,h)-$baskın preinveks fonksiyon için elde ettiğimiz Hermite-Hadamard eşitsizliğinden $h(t)$'nin özel seçimleriyle yeni eşitsizlikler üretilecektir.

Sonuç 5.5.

i) Teorem 5.2'de $\mu(b,\varepsilon)=b-\varepsilon$ için eşitsizlik Teorem 4.1.6'daki eşitsizliğe dönüşür.

ii) Eğer Teorem 5.2'de $s\in(0,1)$ için $h(\mathfrak{t})=\mathfrak{t}^s$ seçilirse ikinci anlamda (g,s) −baskın preinveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

Teorem 5.3. $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu: K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $s\in(0,1)$ için $g: K\to\mathbb{R}^+$ ikinci anlamda s −preinveks fonksiyon ve $\forall\varepsilon,\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\in K$, $\varepsilon<\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ için $f: K\to\mathbb{R}^+$ (g,s) −baskın preinveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L_1[\,\varepsilon,\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)]$ ise

$$\left|\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda-2^{s-1}f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda-2^{s-1}g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\left|\frac{f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{s+1}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\Lambda)d\Lambda\right|$$

$$\leq\frac{g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{s+1}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\Lambda)d\Lambda$$

eşitsizlikleri elde edilir.

iii) Eğer Teorem 5.2'de $h(\mathfrak{t})=\mathfrak{t}^{-1}$ seçilip gerekli şartlar konulduğunda $\big(g,Q(K)\big)-$ baskın preinveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler geçerli olur.

Teorem 5.4. $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu: K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme $\varepsilon<\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$, $\forall\varepsilon,\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\in K$ olmak üzere negatif olmayan g fonksiyonu $g: K\to\mathbb{R}$ Godunova-Levin preinveks fonksiyon sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: K\to\mathbb{R}$ g −baskın Godunova-Levin preinveks fonksiyon olsun. Eğer $f,g\in L_1[\varepsilon,\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)]$ ise

$$\left|\frac{4}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\wedge)d\wedge - f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{4}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\wedge)d\wedge - g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\left|\frac{f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2} - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} p(\wedge)f(\wedge)d\wedge\right|$$

$$\leq \frac{g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{2} - \frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} p(\wedge)g(\wedge)d\wedge$$

dir. Burada $p(\wedge) = \frac{(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)-\wedge)(\wedge-\varepsilon)}{\mu^2(b,\varepsilon)}$ olarak tanımlanır.

iv) Eğer Teorem 5.2'de $h(ŧ) = 1$ seçilip gerekli şartlar konulursa $\big(g, P(K)\big) -$ baskın preinveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler geçerli olur.

Teorem 5.5. $K \subseteq \mathbb{R}^n, \mu\ : K \times K \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme $\varepsilon < \varepsilon + \mu(b,\varepsilon)$, $\forall \varepsilon, \varepsilon + \mu(b,\varepsilon) \in K$ olmak üzere negatif olmayan g fonksiyonu $g: K \to \mathbb{R}$ P −preinveks fonksiyon sınıfına ait bir fonksiyon ve $f: K \to \mathbb{R}$ $\big(g, P(K)\big) -$ baskın preinveks fonksiyon olsun. Eğer $f, g \in L_1[\varepsilon, \varepsilon + \mu(b,\varepsilon)]$ ise

$$\left|\frac{2}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\wedge)d\wedge - f\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{2}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\wedge)d\wedge - g\left(\frac{2\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}{2}\right)$$

ve

$$\left|\left[f(\varepsilon)+f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\text{ʌ})d\text{ʌ}\right|$$

$$\leq\left[g(\varepsilon)+g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)\right]-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\text{ʌ})d\text{ʌ}$$

dir.

Sonuç 5.6. Teorem 5.3'te, Teorem 5.4'te ve Teorem 5.5'te $\mu(b,\varepsilon)=b-\varepsilon$ alınırsa sırasıyla Teorem 4.1.5, Teorem 4.1.8 ve Teorem 4.1.9'daki eşitsizliklere ulaşılır.

Tanım 5.7. $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu: K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme, $g: K\to\mathbb{R}^+$ pozitif r −preinveks fonksiyon olsun. Her $\text{ʌ},\text{ʌ}+\mu(\text{ʍ},\text{ʌ})\in K$ ve $\lambda\in[0,1]$ için $f: K\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\left|M_r\big(f\big(\text{ʌ}+\mu(\text{ʍ},\text{ʌ})\big),f(\text{ʌ});\lambda\big)-f\big(\text{ʌ}+\lambda\mu(\text{ʍ},\text{ʌ})\big)\right| \tag{5.13}$$

$$\leq M_r\big(g\big(\text{ʌ}+\mu(\text{ʍ},\text{ʌ})\big),g(\text{ʌ});\lambda\big)-g\big(\text{ʌ}+\lambda\mu(\text{ʍ},\text{ʌ})\big)$$

oluyorsa f fonksiyonuna μ dönüşümüne göre g −baskın r −preinveks fonksiyon veya (g,r) −baskın preinveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f fonksiyonuna μ dönüşümüne göre (g,r) −baskın prekonkav fonksiyon denir.

Sonuç 5.7. (5.13)'te $\mu(\text{ʍ},\text{ʌ})=\text{ʍ}-\text{ʌ}$ alındığında (g,r) −baskın preinveks fonksiyonu, Tanım 3.1.25'teki (g,r) −baskın konveks fonksiyona dönüşür.

Teorem 5.4. $K\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mu: K\times K\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne göre inveks bir küme $0\leq\varepsilon<\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ olmak üzere $g: K\to\mathbb{R}$ pozitif r −preinveks fonksiyon ve $f: K\to\mathbb{R}$ (g,r) −baskın preinveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L_1[\varepsilon,\varepsilon+(b,\varepsilon)]$ ise

$$\left|\mathcal{L}_r\Big(f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big),f(\varepsilon)\Big)-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\text{ʌ})d\text{ʌ}\right|$$

$$\leq\mathcal{L}_r\Big(g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big),g(\varepsilon)\Big)-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\text{ʌ})d\text{ʌ}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:1. Durum ($r=0$ ve $f(\varepsilon)\neq f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)$): f fonksiyonu μ'ye göre $r-$baskın preinveks fonksiyon olduğundan tanımda $\wedge=\varepsilon$, $\text{ʍ}=\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ seçilip $M_r(\text{ʍ},\wedge;\lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\left|f^{\lambda}\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)f^{(1-\lambda)}(\varepsilon)-f\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)\right|$$

$$\leq g^{\lambda}\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)g^{(1-\lambda)}(\varepsilon)-g\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alındığında

$$\left|f(\varepsilon)\int_0^1\left[\frac{f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{f(\varepsilon)}\right]^{\lambda}d\lambda-\int_0^1 f\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)d\lambda\right|$$

$$\leq g(\varepsilon)\int_0^1\left[\frac{g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)}{g(\varepsilon)}\right]^{\lambda}d\lambda-\int_0^1 g\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)d\lambda$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\left|\frac{f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)-f(\varepsilon)}{lnf\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)-lnf(\varepsilon)}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\wedge)d\wedge\right|$$

$$\leq\frac{g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)-g(\varepsilon)}{lng\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)-lng(\varepsilon)}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\wedge)d\wedge$$

elde edilir ve burada $\mathcal{L}_r(x,y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 1. Durum için ispatlanmış olur.

2. Durum ($r=0$ ve $f(\varepsilon)=f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)$): f fonksiyonu μ'ye göre $r-$baskın preinveks fonksiyon olduğundan tanımda $\wedge=\varepsilon$, $\text{ʍ}=\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ seçilip $M_r(\text{ʍ},\wedge;\lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\left|f(\varepsilon)-f\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)\right|$$

$$\leq g(\varepsilon)-g\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alınıp $\mathcal{L}_r(x,y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 2. Durum için ispatlanmış olur.

3. Durum ($r \neq 0,-1$ ve $f(\varepsilon) \neq f(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))$): f fonksiyonu $r-$baskın preinveks fonksiyon olduğundan tanımda $\wedge = \varepsilon$, $\wedge\!\!\wedge = \varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ seçilip $M_r(\wedge\!\!\wedge,\wedge;\lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\left|\left(\lambda f^r(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))+(1-\lambda)f^r(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{r}}-f(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon))\right|$$

$$\leq \left(\lambda g^r(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))+(1-\lambda)g^r(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{r}}-g(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon))$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin $[0,1]$ üzerinden λ'ya göre integrali alındığında

$$\left|\int_0^1 \left(\lambda f^r(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))+(1-\lambda)f^r(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{r}}d\lambda-\int_0^1 f(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon))d\lambda\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left(\lambda g^r(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))+(1-\lambda)g^r(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{r}}d\lambda-\int_0^1 g(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon))d\lambda,$$

$$\left|\frac{r}{r+1}\frac{f^{r+1}(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))-f^{r+1}(\varepsilon)}{f^r(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))-f^r(\varepsilon)}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} f(\wedge)d\wedge\right|$$

$$\leq \frac{r}{r+1}\frac{g^{r+1}(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))-g^{r+1}(\varepsilon)}{g^r(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))-g^r(\varepsilon)}-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)} g(\wedge)d\wedge$$

elde edilir ve burada $\mathcal{L}_r(x,y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 3. Durum için ispatlanmış olur.

4.Durum ($r \neq 0,-1$ ve $f(\varepsilon) = f(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))$): f fonksiyonu $r-$baskın preinveks fonksiyon olduğundan tanımda $\wedge = \varepsilon$, $\wedge\!\!\wedge = \varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ seçilip $M_r(\wedge\!\!\wedge,\wedge;\lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\left|\left(f^{r}(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{r}}-f\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)\right|$$

$$\leq\left(g^{r}(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{r}}-g\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alınıp $\mathcal{L}_r(x,y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 4. Durum için ispatlanmış olur.

5.Durum ($r=-1$ ve $f(\varepsilon)\neq f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)$): f fonksiyonu $r-$baskın preinveks fonksiyon olduğundan tanımda $\text{ʌ}=\varepsilon$, $\text{ʍ}=\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)$ seçilip $M_r(\text{ʍ},\text{ʌ};\lambda)$ ortalaması kullanıldığında

$$\left|\Big(\lambda f^{-1}\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+(1-\lambda)f^{-1}(\varepsilon)\Big)^{-1}-f\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)\right|$$

$$\leq\Big(\lambda g^{-1}\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)+(1-\lambda)g^{-1}(\varepsilon)\Big)^{-1}-g\big(\varepsilon+\lambda\mu(b,\varepsilon)\big)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizliğin [0,1] üzerinden λ'ya göre integrali alındığında

$$\left|\frac{f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)f(\varepsilon)}{f\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)-f(\varepsilon)}\int_{\frac{1}{f(\varepsilon)}}^{\frac{1}{f(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))}}\lambda^{-1}d\lambda-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}f(\text{ʌ})d\text{ʌ}\right|$$

$$\leq\frac{g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)g(\varepsilon)}{g\big(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)\big)-g(\varepsilon)}\int_{\frac{1}{g(\varepsilon)}}^{\frac{1}{g(\varepsilon+\mu(b,\varepsilon))}}\lambda^{-1}d\lambda-\frac{1}{\mu(b,\varepsilon)}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\mu(b,\varepsilon)}g(\text{ʌ})d\text{ʌ}$$

elde edilir ve $\mathcal{L}_r(x,y)$ ortalaması göz önünde bulundurularak gerekli düzenlemeler yapıldığında 5. Durum için ispatlanmış olur.

Sonuç 5.8. Teorem 5.4'te $\mu(b,\varepsilon)=b-\varepsilon$ alındığında Teorem 4.1.7'deki eşitsizlik elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Dragomir ve Ionescu (1990) tanımladığı $g-$baskın konveks fonksiyon sınıfı ve daha sonra diğer araştırmacılar tarafından ortaya konulan çeşitli baskın konveks fonksiyon sınıfları ve preinveks fonksiyon sınıfı uygun koşullar altında bir araya getirilerek yeni tanımlamalar yapılmıştır. Tanımlanan $(g,h)-$baskın preinveks fonksiyon tanımında uygun seçimler altında ikinci anlamda $(g,s)-$baskın preinveks fonksiyon, $\left(g,Q(K)\right)-$baskın preinveks fonksiyon ve $\left(g,P(K)\right)-$baskın preinveks fonksiyon tanımları üretilmiş; ayrıca $g-$baskın preinveks ve $(g,r)-$baskın preinveks fonksiyon tanımlanmıştır. Yapılan bu tanımların uygun koşullar altında konveks fonksiyon sınıflarını içerdiği gözlemlenmiştir. Konveks bir fonksiyonun ortalama değerinin sınırlandırılması şeklinde yorumlayabileceğimiz Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tipinde yeni genel eşitsizlikler literatüre katılmıştır.

Bu çalışma farklı baskın konveks ve preinveks fonksiyon sınıflarının bir araya getirilerek yeni kavramların sunulması, bu yeni kavramlarla yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin elde edilmesi ve elde edilen tüm tanımların ve eşitsizliklerin birbiriyle ve literatürle uyumlu olması bakımından özgün ve kıymetli bir çalışmadır.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar sunulan yeni kavramları kullanarak farklı türden eşitsizlikler elde edebilecekleri gibi verilecek örneklerle de konunun desteklenmesine katkı sunabilirler.

KAYNAKLAR

Alp, N., 2013. ***Preinveks ve Log-Preinveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri Üzerine*** (Yüksek Lisans Tezi). Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Antczak, T., 2005a. Mean value in invexity analysis. ***Nonlinear Anal.***, **60**: 1473-1484.

Antczak, T., 2005b. $r-$preinvexity and $r-$invexity in mathematical programming. ***Comput. Math. Appl*,.** 50: 551-556.

Anton, H., 1994. ***Elementary Linear Algebra***. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Aydın, D., 2018. ***Operatör Preinveks, Operatör $\alpha-$Preinveks Ve Operatör $s-$Preinveks Fonksiyonlar*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Azpeitia, A. G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. ***Rev. Colombiana Mat.***, **28**: 7-12.

Başköy, E., 2018. ***Öz Eşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Operatör $h-$Preinveks Fonksiyonlar*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Bayraktar, M., 2000. ***Fonksiyonel Analiz***. Gazi Kitapevi, Ankara.

Bayraktar, M., 2010. ***Analiz***. Nobel Akademik Yayıncılık.

Ben-Israel, A., Mond B., 1986. What is invexity?. ***J. Austral Math. Soc. Ser. B.***, **28**: 1-29.

Breckner, W. W., 1978. Stetigkeitsaussagenf üreine klas ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen räumen. ***Publ. Inst. Math. (Beograd)***, **23**: 13-20.

Craven, B. D., 1981. Invex fonctions and constrained local minima. ***Bull. Austral. Math. Soc***., **24**: 357-366.

Craven, B. D., Glover, B. M., 1985. Invex fonctions and duality. ***J. Austral Math. Soc. Ser. A.***, **39**: 1-20.

Cristescu, G., 2004. ***Hadamard Type Inequalities for $\phi-$convex Functions***. Annals of the University of Oradea, Fascicle of Management and Technological Engineering, C-Rom Edition, III (XIII).

Dragomir, S. S., Ionescu, N. M., 1990. On some inequalities for convex-dominated functions. ***Anal. Num. Theor. Approx.***, **19**: 21-28.

Dragomir, S. S., Pečarić, J., Persson, L. E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. ***Journal of Mathematics***, **21** (3): 335-341.

Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. ***Bulletin Australian Mathematical Society***, **57**: 377–385.

Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications. ***http://rgmia.org/papers/monographs/Master.pdf.*** RGMIA. Erişim tarihi: 29.09.2019.

Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M., Pečarić, J. E., 2002. Means, $g-$convex dominated & Hadamard-type inequalities. ***Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences***, **18** (2): 161-173.

Elster, K. H., Neshe, R., 1980. ***Optimality Conditions for Some Non-convex Problems***. Springer-Verlog, New York.

Ermeydan, S., 2016. ***$\lambda_{\varphi}-$Preinvex Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçin Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Kahramanmaraş.

Gill, P. M., Pearce, C. E. M., Pečarić, J. E., 1997. Hadamard's inequality for convex functions. ***J. Math. Anal. Appl.***, **215**: 461-470.

Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel. ***Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva***, 138-142.

Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P., 1971. A review of quasi−convex functions. ***Reprinted from Operations Research***, **7**: 1553-1570.

Hanson, M. A., 1981. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. ***J. Math. Anal. Appl.***, **80**: 545-550.

Hanson, M. A., Mond, B., 1987. Convex Transformable Probamming Problems and Invexity. ***J. Inf. Opt. Sci.*** **8**: 201-207.

Hayaski, M., Komiya, H., 1980. Perfect duality for convexlike programs. ***J. Optim. Theory Appl.*** **38**: 179-189.

Hudzik, H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on convex functions. ***Aequationes Math.***, **48**: 100-111.

Hwang, D. Y., Dragomir, S. S., 2016. Some Extended Means And Hermite-Hadamard Inequality For r −Preinvex Functions On Invex Set. http://rgmia.org/papers/v19/v19a137.pdf. RGMIA. Erişim tarihi: 29.09.2019.

Ion, D. A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. ***Annals of University of Craiova Mathematics and Computer Science***, **34**: 82-87.

Li, J.-Y., 2010. On Hadamard-typ inequalities for s −preinveks functions. ***Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*** **27**: 5-8.

Karpuz, H., 2019. ***Hilbert Uzaylarında Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Operatör (α, m) −Preinveks Fonksiyonlar*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Kavurmacı, H., 2012. ***Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Latif, M. A., Shoaib, M., 2015. Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities For Differentiable m-Preinvex And (α,m)-Preinvex Functions. ***Journal of the Egyptian Mathematical Society***, **23**: 236-241.

Martin, D. H., 1985. The essence of invexity. ***J. Optim. Theory Appl.***, **47**: 65-76.

Matloka, M., 2013. On some Hadamard-type inequalities for (h_1, h_2) −preinvex functions on the co-ordinates. ***Journal of Inequalities and Applications, 2013***: 227.

Meftah, B., Boukerrioua, K., Chiheb, T., 2017, On Some New Hadamard Type Inequalities For (s,r)- Preinvex Functions In The Second Sense. ***Konuralp Journal Of Mathematics***, **1**: 24-42.

Mitrinović, D. S., 1970. ***Analysis Inequalities***. Springer-Verlag, Berling.

Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., 1993. ***Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers***. Dordrecht/Boston/London. 740.

Mohan, S. R., Neogy, S. K., (1995), On invex sets and preinvex functions. ***J. Math. Anal. Appl.***, **189**: 901-908.

Noor, M. A., 1994. Variational-like inequalities. ***A Jour. Math. Prog. and Op. R.***, **30**: 323-330.

Noor, M. A., 2005. Invex equilibrium problems. ***J. Math. Anal. Appl.***, **302**: 463–475.

Noor, M. A., 2007.On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions. ***J. Inequal. Pure Appl. Math.***, **3**: 1-6.

Noor, M. A., 2009. Hadamard integral inequalities for product of two preinvex function. ***Nonl. Anal. Forum***, **14**: 167-173.

Noor, M. A., Noor K. I., Awan, M. U., KHAN, S., 2014. Hermite-Hadamard IneŞqualities For s-Godunova-Levin Preinvex Functions. ***J. Adv. Math. Stud.***, **2**: 12-19.

Noor, M. A., Noor, K. I., Awan, M. U., Li, J., 2014. On Hermite-Hadamard Inequalities for h-preinvex functions. ***Filomat***, **8** (7): 1463-1474.

Noor, M. A., Noor, K. I., Awan, M. U., Qi, F., 2015. Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for logarithmically h −preinvex functions. ***Cogent Mathematics***, **2**: 1-10.

Noor, M. A., Noor, K. I., Awan, M. U., 2017. Fractional Hermite-Hadamard inequalities for two kinds of s-preinvex functions. ***Nonlinear Sci. Lett. A.***, **1**: 11-24.

Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. ***Phsy.***, **9**: 157-162.

Özdemir, M. E., Kavurmacı, H., Tunç, M., 2012a. Hermite-Hadamard-type inequalities for new different kinds of convex dominated functions. ***https://www.researchgate.net/publication/221662975.*** Reserchgate. Erişim tarihi: 29.11.2019.

Özdemir, M. E., Tunç, M., Kavurmacı, H., 2012b. Two new different kinds of convex dominated functions and inequalities via hermite-hadamard type. ***https://www.researchgate.net/publication/2216629756.*** Reserchgate. Erişim tarihi: 29.11.2019.

Pini, R., 1991. Invexity and generalized convexity. ***Optimization***, **22**: 513-525.

Pečarić, J., Proschan, F., Tong, Y. L., 1992. ***Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications***. Academic Press, Inc., Boston. 469.

Roberts, A. W., Varberg, D. E., 1973. Convex Functions. ***Academic Press***, New York. 300.

Ünal, C., 2019. ***Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Operatör Q −Preinveks Ve Operatör Preinveks P −Sınıfı*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Varošanec, S., 2007. On h −convexity. ***J. Math. Anal. Appl.***, **326**: 03-311.

Wang, Y., Zheng, M. M., Qi, F., 2014. Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose derivatives are α −preinvex. ***J. Inequal. Appl.***, **2014**: 97.

Wang, S., Liu, X., 2014. New Hermite- Hadamard type inequalities for n-times differentiable and s-logarithmically preinvex functions. ***Abstr. Appl. Anal.***, **2014**: 1-11.

Weir, T., Mond, B., 1988. Preinvex functions in multiple objective optimization. ***J. Math. Anal. Appl.***, **136**: 29–38.

Yang, X. M., Li, D., 2001. On properties of preinvex functions. ***J. Math. Anal. Appl.***, **256**: 229-241.

ÖZ GEÇMİŞ

1992 yılında Diyarbakır'ın Bismil ilçesinde doğdu. İlköğretim ve liseyi Bismil'de okudu. 2011 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne başladı ve 2016 yılında mezun oldu. 2017 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne başladı ve 2019 yılında mezun oldu. 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başlayıp 2018 güz döneminde yatay geçiş ile Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalına geçiş yapmıştır.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 24/01/2020

Tez Başlığı / Konusu: FARKLI TÜRDEN g −BASKIN PREİNVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 49 sayfalık kısmına ilişkin, 24/01/2020 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 3 (üç) tür.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

24/01/2020
Tarih ve İmza

Adı Soyadı: EMETULLAH YAĞIZ

Öğrenci No:18910002004

Anabilim Dalı:Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Statüsü: Y. Lisans **X** Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. [illegible] SOY
Enstitü Müdürü