T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Recep TÜRKER
DANIŞMAN: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN

VAN-2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Recep TÜRKER

VAN-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN danışmanlığında, Recep TÜRKER tarafından sunulan **"Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller Yardımıyla Bazı Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler"** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 03/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV İmza:

Üye: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR İmza: A. Akdemir

Üye: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/01/2020 tarih ve 2020/6-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

....

Enstitü Müdürü

T.C. AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Recep TÜRKER

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

TÜRKER, Recep
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN
Ocak 2020, 66 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümünde eşitsizlik tarihinden bahsedildi.

İkinci bölümünde, tezin oluşmasında önemli rol oynayan kaynaklara yönelik kısa bir tarihçeye ve konveks fonksiyonlarla ilgili tanımlara, teoremlere ve örneklere yer verildi.

Tezin üçüncü bölümünde, Riemann integrali, Riemann-Liouville kesirli integrali ve genelleştirilmiş kesirli integral kullanılarak üretilmiş literatürde mevcut Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere yer verildi.

Tezin dördüncü bölümünde, $h-$konveks fonksiyon ve $quasi-$konveks fonksiyon sınıfları yardımıyla elde edilmiş eşitsizlikler incelenerek genelleştirilmiş kesirli integraller için yeni eşitsizlikler üretildi.

Tezin son bölümde ise tezin literatüre katkısı ve öneminden bahsedilerek çalışma sonlandırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Eşitsizlik, Hermite-Hadamard eşitsizliği, $h-$konveks fonksiyon, konveks fonksiyon, Riemann-Liouville kesirli integral. $quasi-$konveks fonksiyon.

ABSTRACT

HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR SOME CONVEX FUNCTIONS WITH THE HELP OF GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRALS

TÜRKER, Recep
M. Sc. Thesis, Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Havva KAVURMACI-ÖNALAN
January 2020, 66 pages

This thesis consists of five chapters. In the first part of the thesis, history of inequality is mentioned.

In the second part of the thesis, some important literature which used in thesis briefly and definitions, theorems and examples related to convex functions are given.

In the third part of the thesis, Hermite-Hadamard type inequalities which are produced by using Riemann integral, Riemann-Liouville fractional integral and generalized fractional integral are given.

In the fourth part of the thesis, inequalities obtained with the help of h −convex function and $quasi$ −convex function classes are examined and new inequalities are generated for generalized fractional integrals.

In the last chapter of thesis, the contribution and importance of the thesis to the literature was mentioned and the study was concluded.

Keywords: Convex function, Inequalities, Hermite-Hadamard Inequality, h −convex function, Rieamann-Liouville fractional integral, $quasi$ −convex function.

.

ÖN SÖZ

Tez çalışmamım tüm aşamalarında bilgi birikimini ve değerli görüşlerini esirgemeyen, her türlü desteği sağlayan değerli danışman hocam Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN’a teşekkür ederim. Ayrıca tezin her aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma, özellikle annem Fahriye TÜRKER’e ve babam Abdulhamit TÜRKER’e teşekkür ederim.

2020
Recep TÜRKER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT iii
ÖN SÖZ v
İÇİNDEKİLER viii
ŞEKİLLER LİSTESİ ix
SİMGELER VE KISALTMALAR xi
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ 3
2.1. Genel Kavramlar 10
3. MATERYAL VE YÖNTEM 19
3.1. Bazı Özel ve Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 19
3.2. Riemann-Liouville Kesirli İntegraller ve İlgili Eşitsizlikler 26
3.3. Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Eşitsizlikler 32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 37
4.1. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegraller Yardımıyla h −Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler 37
4.2. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegraller Yardımıyla $quasi$ −Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler 44
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 61
KAYNAKLAR 63
ÖZ GEÇMİŞ 67

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Konveks kümeler 11

Şekil 2.2. Konkav kümeler 11

Şekil 2.3. Konveks Fonksiyon 12

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Küme veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
Γ	Gamma Fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
I°	I'nın İçi
$J_{a^+}^{\alpha} f(x)$	α. Dereceden Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{b^-}^{\alpha} f(x)$	α. Dereceden Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_{a^+}I_{\varphi} f(b)$	Genelleştirilmiş Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_{b^-}I_{\varphi} f(a)$	Genelleştirilmiş Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

Simgeler	**Açıklama**
$L_1[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında Mutlak Değeri İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
max	Maksimum
min	Minimum

Kısaltmalar	**Açıklama**
K_s^1	Birinci Anlamda s −Konveks Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s −Konveks Sınıfı
$SX(h,I)$	h −Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h,I)$	h −Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
H-H	Hermite-Hadamard eşitsizliği

1. GİRİŞ

Konvekslik kavramına eski Mısır döneminde rastlansa da ilk olarak Archimes'in π sayısını hesaplamasıyla ortaya çıktığı düşünülmektedir. Konvekslik geometri, analiz, topoloji, optimizasyon, oyun teorisi gibi birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisiyle de yakından ilişkilidir ve hatta konveksliğin tanımı bir eşitsizlik üzerinden verilmiştir. Ayrıca önemli birçok eşitsizliği konveks fonksiyon uygulamaları şeklinde yazmak mümkündür. Bu sebepledir ki eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Literatüre bakıldığında Hermite (1881), Hadamard (1893), Jensen (1906), Hardy ve arkadaşları (1934), Beckenbach ve Bellman (1961), Mitrinović (1970), Roberts ve Varberg (1973), Pečarić ve ark. (1992), Niculescu ve Persson (2006) gibi çalışmaların konveks fonksiyonlar ile eşitsizlikler üzerine yapılmış temel çalışmalar olduğu görülür.

Burada kesirli analizin nasıl ortaya çıktığından ve konvekslikle ilişkisinden bahsedilecektir.

Tam sayı olmayan bir basamaktan türev veya integral alma fikri 1695 yılında Leibnitz'e, L'Hospital tarafından yöneltilen şu soruyla ortaya çıkmıştır: "$n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ olmak üzere $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ olursa ne olur?". Leibnitz ise "Bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır." cevabını vermiştir.

Kesirli analizin geçmişi son üç yüzyıla dayanmasına rağmen hak ettiği kıymeti mühendislik ve bilim çevresince görmediği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte yapılan çalışmalarda kurulan modellerde tam sayıların yerini kesirli sayıların alabilmesi hâli yaşamın daha doğru yorumlanmasını ve aslına daha yakın durumlarla karşılaşılmasını sağlamaktadır. Bu durum önümüzdeki yıllarda kesirli analizle ilgili birçok uygulamanın ortaya çıkacağının ve konunun giderek kıymet kazanacağının bir göstergesidir.

Kesirli türevi ve kesirli integral kavramını ilk ifade eden araştırmacı Liouville iken kesirli türev kullanarak ilk makaleyi 1819'da Lacroix yayımlamıştır. Euler daha sonra başka bir kesirli türev tanımı yapmıştır. Riemann, Euler, Lacroix, Liouville, Lagrange, Fourier, Laplace, Abel, Grünwald-Letnikov, Wely gibi birçok araştırmacının öncü çalışmalarıyla bu konuda hızlı bir gelişme gösterilmiştir. Kesirli hesaplamalara yönelik konferansların düzenlenmesi ve çeşitli tezlerin yazılması 1970'li yıllardan sonra olmuştur. B. Ross kesirli analiz konusunda doktora tezini hazırladıktan sonra New Haven Üniversitesi' nde ilgili alandaki ilk konferans etkinliğini "First Conference on Fractional Calculus and Its Applications" ismiyle Haziran 1974'te düzenlemiştir. A. Kilbas, S. Samko ve O. Marichev'in 1993'te önce Rusça daha sonra İngilizce olarak yayımlandığı "Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications" isimli kitabı kesirli analizin bilinen ilk ansiklopedisidir. F. Mainardi, V. Kiryakova ve J. T. Machado'nın 2011 yılında yayımladıkları "Recent History of Fractional Calculus" başlıklı makalede son zamanlarda yayımlanmış olan kitap, dergi ve konferanslar ile ilgili geniş bir literatür mevcuttur.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları kullanılarak konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler alanında yeni çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Sarıkaya ve arkadaşlarının 2013 yılında yayımladığı "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities" başlıklı çalışma bir konveks fonksiyonun ortalamasına yönelik çalışmaların kesirli integral yardımıyla genellenebileceğini kanıtlamıştır.

Bu tezin amacı literatürde mevcut kesirli integral formlarından biri olan genelleştirilmiş kesirli integral formundan yararlanarak $h-$konveks fonksiyon ve $quasi-$konveks fonksiyon sınıfları için genelleştirilmiş kesirli integral eşitsizlikleri üretmek; üretilen bu eşitsizliklerde yer alan dönüşümleri özelleştirerek sonuçların literatürdeki çalışmaların bir kısmının genellemesi olduğunu ortaya koymaktır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Birçok araştırmacı sürekli konveks bir fonksiyonun ortalama değerinin fonksiyonun bu aralığın orta noktasındaki değerinden büyük ve uç noktalardaki değerlerinin aritmetik ortalamasından küçük olduğunu gösteren Hermite-Hadamard eşitsizliği eşitsizlik üzerine çalışmaktadır. İsmi verilen bu eşitsizliğin konveks fonksiyonlar için birçok uygulama ve geometrik yorum içeren ilk temel sonuç olduğu bilinir.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin diğer konveks fonksiyon çeşitleri için elde edilen sonuçları: ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Dragomir'in ve Fitzpatrick'in 1999'da yaptığı çalışmada; $quasi-$konveks fonksiyonlar için Dragomir'in ve Pearce'ın 1998'de yaptığı çalışmada; $m-$konveks fonksiyonlar için Dragomir'in 2002'de yaptığı çalışmada; $g-$baskın konveks fonksiyonlar için Dragomir ve ark.'nın 2002'de yaptığı çalışmada; $h-$konveks fonksiyonlar için Sarıkaya ve ark.'nın 2008'de yaptığı çalışmada; $Q(I)$ ve $P(I)$ fonksiyon sınıfları için Dragomir' in ve Pečarić'in 1995'de yaptığı çalışmada bulunabilir.

Bu alanda yayınlanmış birçok yurtiçi ve yurtdışı master ve doktora tezleri de mevcuttur.

"Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı doktora tezinde $E-$konveks ve $E-m-$konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden $E-$konveks ve $E-m-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan $m-$konveks, $(\alpha,m)-$konveks , $log-$konveks, $quasi-$konveks, $s-$konveks, $r-$konveks ve $h-$konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set, 2010).

"Bazı Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları" başlıklı doktora tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Tunç, 2010).

"Hermite-Hadamard Inequality in the Geometry of Banach Spaces" başlıklı doktora tezinde p −norm ile p −HH-normları arasında karşılaştırma yapmak için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. p −HH-normları için Grüss tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. (Kikianty, 2010).

"Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler" başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; s −konveks ve r −konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Kavurmacı, 2012).

"Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler" başlıklı doktora tezinde yeni konveks fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve bu yeni fonksiyon sınıfı için eşitsizlikler elde edilmiştir. φ_h −konveks fonksiyonlar, konveks fonksiyonlar ve ikinci anlamda s −konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Ardınç, 2013).

"Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerinde İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyonlara ve bunların bileşkelerine dair bazı özellikler bulunmuş, farklı türden konveks fonksiyonların çarpımına dair bazı integral eşitsizlikler elde edilmiş ve elde edilen eşitsizliklerin bazılarına uygulamalar verilmiştir (Gürbüz, 2013).

"s −Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde geometrik konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler incelenerek Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Yüksel, 2014).

"Klasik Eşitsizlik Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler" başlıklı doktora tezinde konveks fonksiyonlarla ilgili bu çalışmada elde edilen eşitsizlik ve genelleştirmelere yer verilmiştir. Konveks fonksiyonlar sınıfının daha genel bir hali olan yeni bir sınıf tanımı yapılmış, bu sınıfın temel özellikleri ve bazı fonksiyonellerle olan ilişkisi açıklanmıştır. $quasi$ −konveks fonksiyonlarla ilgili eşitsizliklere de yer verilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Ekinci, 2014).

"Hermite-Hadamard-Type İnequalities for Generalized Convex Functions" başlıklı doktora tezinde (ω_1, ω_2) −konveks fonksiyon sınıfını kullanılarak Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir. (Mih$\hat{a}$ly, 2004).

"Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve h −Konvekslik Üzerine" başlıklı yüksek lisans tezinde h −konveks fonksiyonuyla bazı konveks fonksiyon sınıfları, birinci ve ikinci anlamda s −konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Göktan, 2016).

"GA −Konveks ve Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Yeni İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" başlıklı doktora tezinde geometrik- aritmetik konveks fonksiyonlar, harmonik konveks fonksiyonlar ve $quasi$ −geometrik konveks fonksiyonlarla ilgili yeni lemmalar, teoremler ve sonuçlar elde edilmiş ve Elde edilen bu yeni sonuçlar için çeşitli ortalamalar ve hiper geometrik fonksiyon kullanılarak farklı uygulamalar verilmiştir (Turhan, 2016).

"Geometrik-Aritmetik Konveks ve Geometrik-Geometrik Konveks Fonksiyon Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler" başlıklı yüksek lisans tezinde tanımlanan yeni lemmalar yardımıyla ve temel eşitsizliklerin kullanılmasıyla özel ortalamalara bağlı konveks fonksiyonlar ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulunan bu eşitsizlikler Hermite–Hadamard tipinde eşitsizlik içermektedir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Yıldız, 2017).

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları kullanılarak konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler alanında yeni çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bunların bir kısmından giriş bölümünde bahsedilmişti.

Sarıkaya ve arkadaşları tarafından kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir (Sarıkaya 2007). Tunç tarafından kesirli integraller yardımıyla h −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir (Tunç 2012). Sarıkaya ve Ertuğral tarafından genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir (Sarıkaya ve Ertuğrul, 2017). Sarıkaya ve arkadaşları tarafından genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla Minkowski ve Ters Minkowski için bazı integral eşitsizlikleri verilmiştir (Sarıkaya ve ark., 2017). Sarıkaya ve arkadaşları tarafından genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için yeni genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir (Sarıkaya ve ark., 2017). Sarıkaya ve arkadaşları tarafından genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği verilmiştir (Sarıkaya ve ark., 2018).

Bu alanda yayınlanmış birçok yurtiçi ve yurtdışı master ve doktora tezleri de mevcuttur.

"Kesirli İntegraller için Hermite-Hadamard Eşitsizliği" başlıklı yüksek lisans tezinde konveks ve farklı tip konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Yaldız, 2012).

"Kesirli İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde $\alpha -$mertebeli Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün bazı eşitsizliklere uygulaması incelenmiştir ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörü kullanılarak bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Yılmazoğlu, 2013).

"Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikleri Üzerine" başlıklı yüksek lisans tezinde Riemann-Liouville Fractional integrallerinde Montogomery özdeşliklerinin genelleştirilmesi elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Filiz, 2013).

"Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Bazı İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde kesirli türev ve integral genelleştirmeler için bazı integral eşitsizliği verilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Akkurt, 2014).

"$k -$Kesirli İntegraller için Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikler Üzerine" başlıklı yüksek lisans tezinde Riemann-Liouville kesirli integralin genelleşmesi olan k-Riemann-Liouville kesirli integral olarak adlandırılan kesirli integrali verilerek bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra $k -$Riemann-Liouville kesirli integrali kullanılarak bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir (Karaca, 2014).

“(β, α, n, m) −Konvekslik ve Kesirli İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı yüksek lisans tezinde konvekslik için yeni tanımlar yapılmıştır. Bu tanımlama yardımıyla mevcut konveks fonksiyon tanımı genelleştirilmiş ve bu genellemelere bağlı klasik ve kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Balgeçti, 2015).

“Kesirli İntegrallerden Yararlanarak $s-$ Konveks Fonksiyonlar için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipindeki İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı yüksek lisans tezinde kesirli integrallerden yararlanarak $s-$ konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipinde eşitsizlik elde etmektir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Ertuğral, 2015).

“Kesirli İntegraller için Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlikler” başlıklı yüksek lisans tezinde Riemann−Liouville kesirli integral yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler ve s −konveks fonksiyonlar için Riemann−Liouville kesirli integralleri içeren bazı yeni Hermite−Hadamard−Fejer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Kara, 2016).

“Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler” başlıklı yüksek lisans tezinde uyumlu kesirli integraller içeren iki yeni integral eşitliği inşa edilmiştir. Bu integral eşitlikleri ve Hölder, Powermean gibi çeşitli integral eşitsizlikleri yardımıyla uyumlu kesirli integraller için integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Yalçın, 2016).

“λ_φ −Preinvex Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı yüksek lisans tezinde preinvex fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. Türevlenebilir preinvex fonksiyonlar için sağlayan bazı Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. Geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için Hermite- Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Ermeydan, 2016).

“Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı yüksek lisans tezinde Grüss eşitsizliği ve ispatı verilip bazı ağırlık fonksiyonlarına göre Grüss tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son olarak, beşinci bölümde genelleştirilmiş $k-$Riemann-Liouville kesirli integralleri için Grüss tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Kaçar, 2016).

"Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Yardımıyla Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Yeni Eşitsizlikler" başlıklı yüksek lisans tezinde $m-$konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. İkinci kısmında $(\alpha, m)-$konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Yine bu bölümün üçüncü kısmında ise m$-$ konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Karataş, 2016).

"Hipergeometrik Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde Hipergeometrik fonksiyonların genişletilmesi ele alınarak farklı ispatları verilmiştir. Elde edilen genelleştirmeler için bazı Hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri için integral eşitsizlikleri verilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Kılınç, 2016).

"Kesirli İntegraller ile İlgili Bazı Eşitsizlikler" başlıklı doktora $\varphi-$konveks fonksiyonlar kullanılarak, Riemann-Liouville kesirli integrali için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri vererek ve daha sonra yeni integral eşitsizlikleri elde etmek için önemli bir özdeşlik verilmiştir. Bu özdeşlik yardımıyla önemli genelleştirmeler yapılmıştır. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Yaldız, 2016).

"Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri için Eşitsizlikler" başlıklı yüksek lisans tezinde Kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler ve farklı iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Çelik, 2017).

"Fonksiyoneller Yardımıyla p −Konveks Fonksiyonlar için Kesirli İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde p −konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak elde edilmiş olan Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliklerinin sol tarafları fonksiyoneller aracılığıyla elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Kırömeroğlu, 2017).

"(k, h) −Konveks Fonksiyonlar ve Bazı İntegral Eşitsizlikleri Üzerine" başlıklı yüksek lisans tezinde Riemann−Liouville kesirli integral yardımıyla (k, h) −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği, uyumlu kesirli integraller yardımıyla (k, h) −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği ve Katugampola kesirli integral yardımıyla (k, h) −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Karaoğlan, 2017).

"Konveks Fonksiyonların Farklı Sınıfları için Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler" başlıklı yüksek lisans tezinde Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanarak $quasi$ −konveks fonksiyonlar, (α^*, m) −konveks fonksiyonlar, üstel çekirdekli kesirli integraller ve genelleştirilmiş kesirli integraller kullanılarak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Korkut, 2017).

"Konveks Fonksiyon Sınıfları için Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler" başlıklı doktora tezinde Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla literatürde bulunan ve bu çalışmada daha genel halleri elde edilen bazı lemmalar ile bu lemmalar yardımıyla elde edilen sonuçlar bulunmaktadır. Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla literatürde bulunan daha genel halleri elde edilen bazı lemmalar ile bu lemmalar yardımıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir (Gözpınar, 2018).

"Genelleştirilmiş h, k −Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı yüksek lisans tezinde Kesirli integralin genişletilmesi ele alınarak farklı ispatlar elde edilmiştir. Elde edilen genelleştirmeler için bazı Grüss tipli eşitsizlikler yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri için integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen eşitsizlikler için özel uygulamalar ve sonuçlar verilmiştir (Marangozoğlu, 2018).

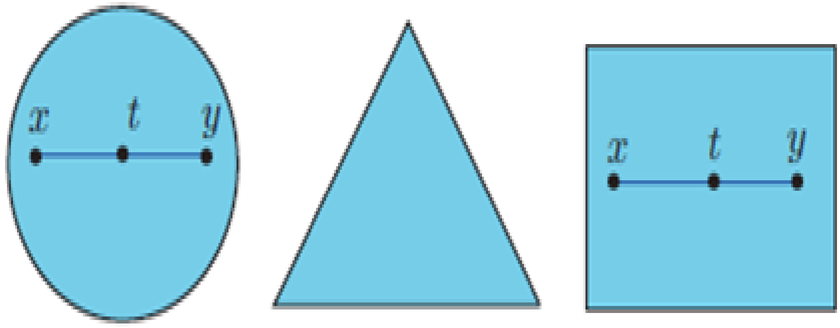
Aşağıda çalışmanın literatüründe yer alan bazı temel tanımlara, teoremlere, temel özelliklere ve bunların konvekslik ile ilişkisinin açıklandığı sonuçlara yer verilecektir.

2.1 Genel Kavramlar

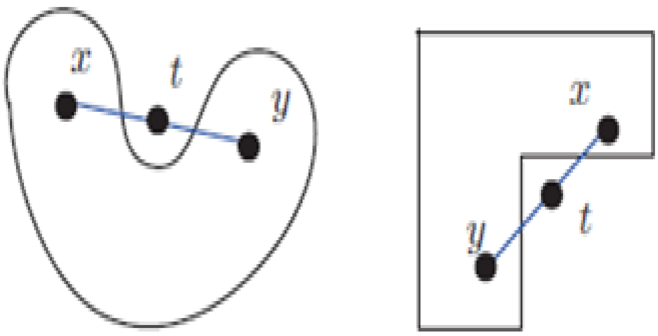
Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.
$+: L \times L \to L$ ve $\cdot: F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:
A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,
G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$'dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.
B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartı sağlar.
L1. $\alpha . x \in L$'dir.
L2. $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$ dir.
L4. $(\alpha\beta) . x = \alpha(\beta . x)$ dir.
$L5$. $1 . x = x$ dir (Burada $1, F$ nin birim elemanıdır).
$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks uzay adı verilir (Anton ve Rorres, 2006).
Tanım 2.1.2. F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T: V \to W$ dönüşümü,
(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
(b) $T(cu) = cT(u)$
şartını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir (Anton ve Rorres, 2006).
Tanım 2.1.3. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L:\ z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \ell x + (1-\ell)y$ eşitliğindeki x ve y' nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar, 2000).



Şekil 2.1: Konveks Kümeler



Şekil 2.2: Konkav Kümeler.

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$,

$a \le x < y \le b,\ a,b \in I$ ve $\ell \in [0,1]$ için

$$f(\ell x + (1-\ell)y) \le \ell f(x) + (1-\ell)f(y) \qquad (2.1)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Niculescu ve Persson, 2006). Eğer ℓ'yi $[0,1]$ kapalı aralığının uç noktaları dışında seçersek o zaman konveks fonksiyon şartındaki "≤" yerine "<" gelir yani

$$f(\ell x + (1-\ell)y) < \ell f(x) + (1-\ell)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir.

$x, y \in I$, $p, q \geq 0$, $p + q > 0$ için

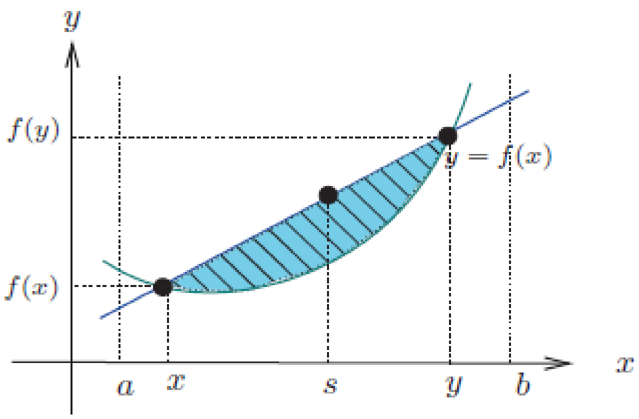
$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir.

"$-f$" konveks (kesin konveks) ise o zaman f'ye konkav (kesin konkav) denir.

Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afin dönüşümdür. Bu afin dönüşüm uygun m ve n sabitleri için $mx + n$ şeklindedir.

Geometrik olarak $s = \ell x + (1 - \ell)y$ noktasında f'nin aldığı değer $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerlerden her zaman daha küçüktür; yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.



Şekil 2.3: Konveks Fonksiyon

Teorem 2.1.1. f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović, 1970).

Aşağıda konveks fonksiyonlarla ilgili birkaç örneğe yer verilecektir.

Örnek 2.1.1. $n \geq 1$ için $f(x) = x^n$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$'da konveks iken, n çift olmak şartıyla $f(x) = x^n$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de konvekstir.

Örnek 2.1.2. $f(x) = e^x$ üstel fonksiyonu $\mathbb{R}$'de konvekstir.

Örnek 2.1.3. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n$ reel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

geçerlidir.

Önerme 2.1.1. (Konveks fonksiyonlarla ilgili işlemler):

i. Aynı aralık üzerinde tanımlı iki fonksiyonun toplamı yine bir konveks fonksiyondur. Bu toplamda biri kesin konveks ise toplam da kesin konvekstir.

ii. Bir (kesin) konveks fonksiyonun pozitif bir skalerle çarpımı da (kesin) konveks fonksiyondur.

iii. Tanımlandığı aralığın bir alt aralığına kısıtlanmış her (kesin) konveks fonksiyon yine bu aralıkta (kesin) konveks fonksiyondur.

iv. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ bir kesin konveks fonksiyon ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan (artan) bir konveks fonksiyon ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da (kesin) konveks fonksiyondur

v. f, I ve J aralıkları arasında tam bir eşleme (birebir ve örten) olsun. Eğer f artan ise f'nin (kesin) konveks olması için gerek ve yeter şart f^{-1} in (kesin) konkav olmasıdır. Eğer f azalan bir eşleşme ise f ve f^{-1} aynı tip konvekstir.

(Niculescu ve Persson, 2006)

Tanım 2.1.5. (J −Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon aynı zamanda J −konveks fonksiyondur.

Tanım 2.1.6. (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$x \in S\ ve\ |x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f,\ x_0$' da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.7. (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. Her $x_1, x_2 \in S$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f,\ S$'de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.8. (Mutlak Süreklilik): $I, \mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I'nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Şayet $\forall\varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n}|b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter ve Brunt, 2000).

Tanım 2.1.9. (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S'de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar, 2010).

Sonuç 2.1.2. f, S'de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S'de düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak sürekliliklerin arasındaki ilişkiyi gösteren teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.2. $[a, b] \subseteq I^{\circ}$ olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve I°'de süreklidir (Pečarić ve ark., 1992).

Teorem 2.1.3. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a. $f, (a, b)$ aralığında süreklidir.

b. $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 2.1.10. (Birinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty), f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s −konveks fonksiyon denir (Orlicz, 1961).

Tanım 2.1.11. (İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+$=$[0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$için

$$f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner, 1978).

Yukarıda verilen her iki $s-$konvekslik tanımında $s = 1$ alındığında bilinen klasik konvekslik elde edilir.

Örnek 2.1.4. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\ell) = \begin{cases} a, & \ell = 0 \\ b\ell^s + c, & \ell > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \ge 0$ ve $0 \le c \le a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Tanım 2.1.12. ($quasi$ $-$Konveks Fonksiyon): $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\ell \in [0,1]$ için

$$f(\ell x + (1-\ell)y) \le max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ $-$konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Eğer

$$f(\ell x + (1-\ell)y) < max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye kesin $quasi$ $-$konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\ell x + (1-\ell)y) \ge max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ $-$konkav fonksiyon ve

$$f(\ell x + (1-\ell)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye kesin $quasi$ $-$konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.1.13. f hem $quasi-$konveks hem de $quasi-$konkav ise f'ye $quasi$ $-$monotonik denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Not 2.1.1. Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir $quasi$ $-$konveks fonksiyondur. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani konveks fonksiyon olmadığı halde $quasi$ $-$konveks olan fonksiyon vardır. Örneğin;

Örnek 2.1.5 $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(\ell) = \begin{cases} 1, & \ell \in [-2,-1] \\ \ell^2, & \ell \in (-1,2]. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu $g(\ell)$ fonksiyonu $[-2,2]$'de $quasi-$konveks fonksiyondur; fakat konveks fonksiyon değildir (Ion, 2007).

Tanım 2.1.14. ($J-quasi-$Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J-quasi-$konvekstir denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.1.15. ($J-Wright-Quasi-$Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\ell \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(\ell x+(1-\ell)y)+f((1-\ell)x+\ell y)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

(Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.1.16. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I, \ell \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\ell x+(1-\ell)y) \leq \frac{f(x)}{\ell}+\frac{f(y)}{1-\ell}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova ve Levin, 1985).

Tanım 2.1.17. ($P-$Fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I, \ell \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\ell x+(1-\ell)y) \leq f(x)+f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $P-$fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir ve ark., 1995).

Tanım 2.1.18. ($h-$Konveks Fonksiyon): $h \not\equiv 0$ olmak üzere $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer negatif olmayan f fonksiyonu her $x, y \in I, \tau \in (0,1)$ için

$$f(\tau x+(1-\tau)y) \leq h(\tau)f(x)+h(1-\tau)f(y) \qquad (2.2)$$

şartını sağlıyorsa $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$konveks fonksiyon veya $SX(h,I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

(2.2) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h −konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$'dır (Varošanec, 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\tau) = \tau$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\tau) = \frac{1}{\tau}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\tau) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ sınıfına aittir; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\tau) = \tau^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ sınıfına aittir (Varošanec, 2007).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın bulgular kısmındaki sonuçlar elde edilirken kullanılacak olan bazı temel lemmalara ve teoremlere yer verilecektir. Araştırma verileri elde edilirken temel cebirsel hesaplamalardan yararlanılmıştır. Çalışma süresi boyunca konu ile ilgili kitaplar, e-kitaplar, makaleler, tebliğler, tezler üniversitemiz kütüphanesinden, Yök Tez sayfasından ve diğer elektronik veri tabanlarından yararlanılarak taranmıştır.

3.1. Bazı Özel ve Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Aşağıda bazı özel eşitsizlikler ve farklı türden konveks fonksiyon çeşitleri için literatürde mevcut olan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.1.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y| \\ \big||x|-|y|\big| &\leq |x-y| \\ \big||x|-|y|\big| &\leq |x+y| \end{aligned}$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1+\cdots+x_n| \leq |x_1|+\cdots+|x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović ve ark., 1993).

Teorem 3.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve ark., 1993).

Teorem 3.1.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p>1$ ve $p^{-1}+q^{-1}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve ark., 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power-Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.1.1 (Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve $g, [a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Aşağıda literatürde mevcut olan klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği ve daha sonra diğer konveks fonksiyon çeşitleri için üretilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere yer verilecektir.

Teorem 3.1.4. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić ve ark., 1992).

Teorem 3.1.5. f fonksiyonu $s \in (0,1)$ ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ikinci anlamda s $-$konveks fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir ve Fitzpatrik, 1999).

Teorem 3.1.6. $a < b, \forall a, b \in I$ olmak üzere negatif olmayan f fonksiyonu $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(I)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in L_1[a,b]$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq [f(a)+f(b)]$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir ve ark.,1995).

Teorem 3.1.7. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $quasi$ $-$konveks bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $a, b \in I \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq max\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği elde edilir.(Dragomir ve Pearce, 2000).

Teorem 3.1.8. $[0,1] \subseteq J$ olacak şekilde I ve J, $\mathbb{R}$'nin iki alt aralığı, h ve f fonksiyonları sırası ile I ve J üzerinde tanımlı negatif olmayan iki reel fonksiyon olsun. $a < b$ ile birlikte $a, b \in I$ için $f \in SX(h, I)$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(\ell)d\ell$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya ve ark., 2008).

(i) Eğer $h(\ell) = \ell$ alınırsa, Teorem 3.1.8'deki eşitsizlik Teorem 3.1.4'deki Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

(ii) Eğer $h(\ell) = \ell^s$ alınırsa, Teorem 3.1.8'deki eşitsizlik Teorem 3.1.5'teki ikinci anlamda s −konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

(iii) Eğer $h(\ell) = 1$ alınırsa, Teorem 3.1.8'deki eşitsizlik Teorem 3.1.6'daki Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

Lemma 3.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a, b]$ ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1 - 2\ell) f'(\ell a + (1-\ell)b) d\ell$$

eşitliği sağlanır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 3.1.9. $f: I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ için $a, b \in I^{\circ}$ olsun. $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 3.1.10. $f: I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $a, b \in I^{\circ}$ olsun. $|f'|^{p/p-1}$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{p/p-1}} \left(\frac{|f'(a)|^{p/p-1} + |f'(b)|^{p/p-1}}{2} \right)^{p/p-1}$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Aşağıda Kırmacı ve arkadaşlarının Lemma 3.1.1. yardımıyla elde etmiş oldukları s −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik verilecektir.

Teorem 3.1.11. $a, b \in I, a < b$ ve $f' \in L_1[a,b]$ olacak şekilde $f: I \subset [0,\infty] \to \mathbb{R}$ I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $s \in (0,1)$ ve $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $s-$ konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{\mathrm{b-a}}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir (Kırmacı ve ark., 2007).

Aşağıda $quasi$ −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ve buna bağlı teoremlere ve lemmalara yer verilecektir.

Ion, Lemma 3.1.1' i kullanarak aşağıdaki iki teoremi elde etmiştir.

Teorem 3.1.12. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|, [a,b]$ üzerinde $quasi-$ konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\, max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

eşitsizliği elde edilir (Ion, 2007).

Teorem 3.1.13. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $p > 1$ için $|f'|^{p/p-1}$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[max\left\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. (Ion, 2007).

Alomari ve arkadaşları Lemma 3.1.1' i kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.1.14. $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $q \geq 1$ ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\,max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\right]^{\frac{1}{q}}$$

dır (Alomari ve ark., 2009).

Aşağıda Kırmacı' nın 2004 yılında üretmiş olduğu Lemma verilecektir.

Lemma 3.1.2. $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I°$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\int_0^1 K(\ell)\,f'(\ell a+(1-\ell)b)d\ell$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$K(\ell)=\begin{cases} \ell, & \ell \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \ell-1, & \ell \in \left(\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

dır (Kırmacı, 2004).

Alomari ve arkadaşları yukarıda verilen Lemma 3.1.2' yi kullanarak Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı için yeni üst sınırlar elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.15. $a, b \in I°$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f', I°$ üzerinde $quasi-$konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}+max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(a)|\right\}\right]$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari ve ark., 2009).

Aşağıda Hölder eşitsizliği yardımıyla $quasi-$konveks fonksiyon sınıfı için elde edilen teorem verilecektir.

Teorem 3.1.16. $a, b \in I°$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $I°$ üzerinde $quasi-$konveks ve $p > 1$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left. + \left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari ve ark., 2009)

Aşağıda power-mean eşitsizliği yardımıyla $quasi$ −konveks fonksiyon sınıfı için elde edilen teorem verilecektir.

Teorem 3.1.17. $a, b \in I°$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $I°$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $q \geq 1$ ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, |f'(b)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, |f'(a)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari ve ark., 2009)

Alomari ve arkadaşları aşağıdaki Lemma'yı 2010'da üreterek bu Lemma yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için yeni üst sınırlar elde etmişlerdir.

Lemma 3.1.3. $a, b \in I°$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I° \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a, b]$ ise aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 (-\ell) f'\left(\frac{1+\ell}{2}a + \frac{1-\ell}{2}b\right) d\ell\right.$$

$$\left. + \int_0^1 (\ell) f'\left(\frac{1-\ell}{2}a + \frac{1+\ell}{2}b\right) d\ell\right]$$

(Alomari ve ark., 2010).

Teorem 3.1.18. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer f', $[a, b]$ üzerinde $quasi$ −konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{8}\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f'(b)|\right\}+max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|, |f'(a)|\right\}\right]$$

elde edilir (Alomari ve ark., 2010).

Teorem 3.1.19. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a, b]$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $p > 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$
$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari ve ark., 2010).

Teorem 3.1.20. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $|f'|^{q}$, $[a, b]$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $q \geq 1$ ise bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, |f'(b)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}, |f'(a)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir (Alomari ve ark., 2010).

3. 2. Riemann-Liouville Kesirli İntegraller ve İlgili Eşitsizlikler

Aşağıda Riemann-Liouville kesirli integral tanımları ve bu integraller yardımıyla farklı türden konveks fonksiyon çeşitleri için elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 3.2.1. $f(x) \in L_1[a,b]$ ve $a < x < b$ olsun. Bu durumda $\alpha.\,(\alpha > 0)$ mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\ell)(x-\ell)^{\alpha-1} d\ell, \qquad x > a$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(\ell)(\ell-x)^{\alpha-1} d\ell, \qquad x < b$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\ell} \ell^{x-1} d\ell,\ x > 0$ dir.

(i) $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$

(ii) Eğer $\alpha = 1$ alırsak, Riemann-Liouville kesirli integralleri Riemann integraline dönüşür.

Sarıkaya ve arkadaşları Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.1. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonu, $f \in L_1[a,b]$ ve $a < b$ olsun. f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Bu eşitsizlik $\alpha > 0$ için literatürde kesirli integraller için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Sarıkaya ve ark., 2013).

Burada $\alpha = 1$ alındığında yukarıdaki eşitsizliğin klasik Hermite-Hadaamard eşitsizliğine dönüştüğü kolayca görülür.

Aşağıda $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral eşitsizliği verilecektir.

Teorem 3.2.2: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in L_1[a,b]$ ve $0\le a<b$ için pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ise, $\alpha>0$ ve $s\in(0,1)$ için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır;

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\frac{J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(\mathrm{a})}{2}\right]$$

$$\le\left[\frac{1}{(\alpha+s)}+\beta(\alpha,s+1)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Burada $\beta(x,y)=\int_0^1 \ell^{x-1}(1-\ell)^{y-1}dt$ olarak tanımlanan Euler Beta fonsiyonudur (Set ve ark., 2014).

Özdemir ve Yıldız, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla $quasi-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.3: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in L_1[a,b]$ ve $0\le a<b$ için pozitif bir fonksiyon olsun. f, $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks fonksiyon ve $\alpha>0$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}f(b)+J_{b^-}f(a)\right]\le max\{f(a),f(b)\}$$

(Özdemir ve Yıldız, 2013).

Aşağıda $h-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral eşitsizliği verilecektir.

Teorem 3.2.4.$a,b\in I$ için $a<b$ ve $f\in L_1[a,b]$ olmak üzere $f\in SX(h,I)$ olsun. Bu durumda $h-$konveks fonksiyonlar için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği geçerlidir.

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$\le[f(a)+f(b)]\int_0^1 \ell^{\alpha-1}[h(\ell)+h(1-\ell)]\,d\ell$$

$$\le\frac{2[f(a)+f(b)]}{(\alpha p-p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (h(\ell)^q)\,d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada $p^{-1}+q^{-1}=1$ dir (Tunç, 2013).

Sarıkaya ve arkadaşları Dragomir ve Agarwal'ın 1998'de Hermite-Hadamard'ın sağ tarafına yönelik yazdıkları Lemmayı Riemann-Liouville kesirli integralleri için aşağıdaki gibi yeniden düzenlemişlerdir.

Lemma 3.2.1. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise kesirli integral için

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 [(1-\ell^\alpha) - \ell^\alpha]\, f'(\ell a + (1-\ell)b)\, d\ell$$

özdeşliği vardır. (Sarıkaya ve ark., 2013).

Yukarıda verilen Lemma 3.2.1 kullanılarak konveks fonksiyon için Riemann-Liouville kesirli integraller verilecektir.

Teorem 3.2.5: $a<b$ ve $a,b \in I^\circ$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right]$$

elde edilir (Sarıkaya ve ark., 2013).

Teorem 3.2.6: $a<b$ ve $a,b \in I^\circ$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$ ve $|f'|^q, I^\circ$ üzerinde konveks ise aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

elde edilir (Özdemir ve ark., 2013).

Aşağıda Lemma 3.2.1 kullanılarak $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraller verilecektir.

Teorem 3.2.7: $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere $f:[a,b] \subset [0,\infty] \to \mathbb{R}$ (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda $s-$ konveks ise keyfi $s \in (0,1)$ ve $q \geq 1$ için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2}\left[\frac{2}{(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\right]^{\frac{q-1}{q}} \left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{1/q}$$

$$\times\left\{\beta\left(\frac{1}{2}; s+1, \alpha+1\right) - \beta\left(\frac{1}{2}; \alpha+1, s+1\right) + \frac{2^{\alpha+s}-1}{(\alpha+s+1)2^{\alpha+s}}\right\}$$

elde edilir (Set ve ark., 2014).

Özdemir ve arkadaşlarının Lemma 3.2.1 yardımıyla elde ettiği $quasi$ −konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integrallerin başka sonuçlarına yer verilecektir.

Teorem 3.2.8: $a < b$ olmak üzere $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\alpha > 0$ ve $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon ise aşağıdaki kesirli integral için ifade sağlanır;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(\mathrm{a})\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

(Özdemir ve Yıldız, 2013).

Teorem 3.2.9. $f' \in L_1[a,b]$ ve $a < b$ olmak üzere $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $quasi-$ konveks ve $p > 1$, $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

(Özdemir ve Yıldız, 2013).

Teorem 3.2.10. $f' \in L_1[a,b]$ ve $a < b$ olmak üzere $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ $-$konveks ve $p \geq 1$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(\mathrm{a})\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

Burada $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ve $\alpha \in [0,1]$ (Özdemir ve Yıldız, 2013).

Aşağıda h $-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla elde edilmiş bir teorem verilecektir.

Teorem 3.2.11. $h: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonları için $0 \leq a < b$ ve $h^p \in L_1[a,b], f \in L_1[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde h $-$konveks bir dönüşüm ise aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)(|f'(b)|+|f'(a)|)}{2}\left[\left(\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \times \left(\int_0^{1/2} \left(\mathrm{h}(\ell)\right)^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_{1/2}^{1} \left(\mathrm{h}(\ell)\right)^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada $\alpha > 0,\ p > 1$ ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (Tunç, 2013).

Aşağıda Shi ve arkadaşlarının 2014 yılında yazmış oldukları lemma verilecektir.

Lemma 3.2.2. $a < b$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_1[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\phi_\alpha(a,b) = \frac{b-a}{16}\left[\int_0^1 (1-\ell^\alpha) f'\left(\ell\frac{3a+b}{4} + (1-\ell)\frac{a+b}{2}\right) d\ell\right.$$

$$-\int_0^1 \ell^\alpha f'\left(\ell a+(1-\ell)\frac{3a+b}{4}\right)d\ell$$

$$+\int_0^1 (1-\ell^\alpha) f'\left(\ell\frac{a+3b}{4}+(1-\ell)b\right)d\ell$$

$$\left.-\int_0^1 \ell^\alpha f'\left(\ell\frac{a+b}{2}+(1-\ell)\frac{a+3b}{4}\right)d\ell\right]$$

Burada $\alpha>0$ için $\phi_\alpha(a,b)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi_\alpha(a,b)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}$$
$$\times\left[J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+J_{\left(\frac{3a+b}{4}\right)^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+J_{\left(\frac{a+3b}{4}\right)^+}^\alpha f(b)\right]$$

kolayca görülebilir ki;

$$\phi_1(a,b)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir (Shi ve ark. 2014).

Teorem 3.2.12. $a<b$ ve $f'\in L_1[a,b]$ olmak üzere $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ I° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $p\geq 1$ ise

$$|\phi_\alpha(a,b)|$$
$$\leq\frac{b-a}{16}$$
$$\times\left[\frac{1}{\alpha+1}\left(\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[max\left\{|f'(a)|^q,\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{\alpha+1}\left(\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}}\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Set ve Çelik, 2016).

Teorem 3.2.13. $a < b$ ve $f' \in L_1[a,b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $p \geq 1$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|\phi_{\alpha}(a,b)| \leq \frac{b-a}{16}[\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[max\left\{|f'(a)|^q, \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right\} + max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{\alpha}+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[max\left\{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\} + max\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}\right]^{\frac{1}{q}}]$$

(Set ve Çelik, 2016).

3.3. Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Eşitsizlikler

Aşağıda literatürde mevcut olan Genelleştirilmiş kesirli integral olarak bahsedilen integral tanımına yer verilecektir.

Tanım 3.3.1. $f \in L_1[a,b]$ olsun. ${}_{a^+}I_{\varphi}f(x)$ ve ${}_{b^-}I_{\varphi}f(\mathrm{x})$ $\alpha \geq 0$ ile tanımlanan kesirli integraller;

$${}_{a^+}I_{\varphi}f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(x-\ell)}{x-\ell} f(\ell)d\ell, \;\; x > a$$

$${}_{b^-}I_{\varphi}f(x) = \int_x^b \frac{\varphi(\ell-x)}{\ell-x} f(\ell)d\ell, \quad x < b$$

$\varphi: [0,\infty] \to [0,\infty]$ ve $\int_0^1 \frac{\varphi(\ell)}{\ell} d\ell < \infty$ şartını sağlayan bir fonksiyondur.

Ayrıca bu genelleştirilmiş kesirli integral tanımında $\varphi(\ell)$' nin bazı özel seçimleri yardımıyla Riemann-Liouville integralleri, Riemann-Liouville kesirli integralleri, k-Riemann-Lioville kesirli integralleri, Katugampola kesirli integralleri, uyumlu (conformable) kesirli integralleri elde edilir:

(i) Eğer $\varphi(\ell) = \ell$ alınırsa, eşitlik Riemann integraline dönüşür.

$$I_{a^+}f(x) = \int_a^x f(\ell)d\ell, \qquad x > a$$

$$I_{b^-}f(x) = \int_x^b f(\ell)d\ell, \qquad x < b$$

(ii) Eğer $\varphi(\ell) = \frac{\ell^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, eşitlik Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\ell)^{\alpha-1}f(\ell)d\ell, \qquad x > a$$

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (\ell-x)^{\alpha-1}f(\ell)d\ell, \qquad x < b$$

(iii) Eğer $\varphi(\ell) = \frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\ell^{\frac{\alpha}{k}}$ alınırsa, eşitlik k −Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

$$I_{a^+k}^\alpha\, f(x) = \frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-\ell)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(\ell)d\ell, \qquad x > a$$

$$I_{b^-k}^\alpha\, f(x) = \frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b (\ell-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(\ell)d\ell, \qquad x < b$$

(iv) Eğer

$$\varphi(\ell) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ell(x-\ell)^s(x^{s+1}-\ell^{s+1})^{\alpha-1}$$

$$\varphi(\ell) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ell(\ell-x)^s(\ell^{s+1}-x^{s+1})^{\alpha-1}$$

alınırsa, $\alpha > 0$ ve $s \neq 1$ için eşitlik Katugampola kesirli operatörlere dönüşür (Sarıkaya ve Ertuğral, 2017).

Ertuğral ve Sarıkaya Genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.1 $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun. f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integral için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{a^+}I_\varphi f(b) + {}_{b^-}I_\varphi f(\mathrm{a})\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sağlanır. Burada $\Lambda(1) = \int_0^1 \frac{\varphi((b-a)\ell)}{\ell}d\ell$ (Sarıkaya ve Ertuğrul, 2017).

(i) Eğer $\varphi(\ell) = \ell$ alınırsa, Teorem 3.3.1' deki eşitsizlik Teorem 3.1.4' teki Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

(ii) Eğer $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 3.3.1'deki eşitsizlik Teorem 3.2.1' deki Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

(iii) Eğer $\varphi(t) = \frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\ell^{\frac{\alpha}{k}}$ alınırsa, Teorem 3.3.1' deki eşitsizlik k−Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^{\alpha}_{a^+k}\, f(x) + I^{\alpha}_{b^-k}\, f(x)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Teorem 3.3.2. $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|$, $[a, b]$ konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{[f(a)+f(b)](b-a)}{2\Lambda(1)}\int_0^1 \ell|\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)|\,d\ell$$

dir. Burada $\Lambda(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\varphi((b-a)u)}{u}du$ şeklindedir (Sarıkaya ve Ertuğrul, 2017).

Aşağıdaki Lemma genelleştirilmiş kesirli integraller için elde edilmiştir.

Lemma 3.3.1. $a < b$ ve $f' \in L_1[a, b]$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{a^+}I_{\varphi}f(b) + {}_{b^-}I_{\varphi}f(a)\right]$$
$$= \frac{b-a}{2\Lambda(1)}\int_0^1 [\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)]\, f'(\ell a + (1-\ell)b)d\ell$$

Burada $\Lambda(1) = \int_0^1 \frac{\varphi((b-a)\ell)}{\ell}d\ell$ (Sarıkaya ve Ertuğral, 2017).

Budak ve arkadaşları, Genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki teoremi ve lemmayı elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.3 $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun. f, $[a, b]$ üzerinde bir konveks fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integral için ifade sağlanır;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}I_{\varphi}f(b) + {}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}I_{\varphi}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Burada $\Psi\colon [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$\Psi(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau$$

dir (Budak ve ark., 2017).

Lemma 3.3.2. $a < b$ ve $f' \in L_1[a,b]$ olmak üzere $f\colon [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}I_{\varphi}f(b) + {}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}I_{\varphi}f(a)\right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$= \frac{b-a}{4\Psi(1)}\left[\int_0^1 \Psi(\ell)\, f'\left(\frac{\ell a}{2} + \frac{(2-\ell)b}{2}\right) d\ell - \int_0^1 \Psi(\ell)\, f'\left(\frac{(2-\ell)a}{2} + \frac{\ell b}{2}\right) d\ell\right]$$

Burada $\Psi(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\varphi\left(\frac{(b-a)}{2}\tau\right)}{\tau} d\tau$' dir (Budak ve ark., 2017).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, araştırmada elde edilen bazı bulgulara yer verilecektir. İlk kısımda literatürde mevcut olan $h-$konveks fonksiyon kavramından faydalanılarak genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için yeni H-H tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. İkinci kısımda ise literatürde mevcut olan $quasi-$konveks fonksiyon kavramından faydalanılarak genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için yeni H-H tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Sonra $quasi-$konveks fonksiyonlar için bazı sonuçlar bulunmuş ve literatürdeki lemmalardan yararlanarak konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral yardımıyla H-H tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

4.1. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Yardımıyla $h-$Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Aşağıdaki teoremde literatürde H-H eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik $h-$konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integraller kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. $\sigma < \rho, \sigma, \rho \in I, f \in L_1[\sigma, \rho]$ ve $h \not\equiv 0$ olmak üzere $f \in SX(h, I)$ olsun. Bu durumda $\Lambda(1) = \int_0^1 \frac{\varphi((\rho-\sigma)u)}{u} du$ ve $\Lambda(1) \neq 0$ için

$$\frac{f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)}{h\left(\frac{1}{2}\right)}\Lambda(1) \leq \left[\ _{\sigma^+}I_{\varphi} f(\rho) + \ _{\rho^-}I_{\varphi} f(\sigma)\right]$$

$$\leq [f(\sigma) + f(\rho)] \int_0^1 \frac{\varphi((\rho-\sigma)\ell)}{\ell}[h(\ell) + h(1-\ell)]d\ell$$

$$\leq 2[f(\sigma) + f(\rho)]\left(\int_0^1 \left(\frac{\varphi((\rho-\sigma)\ell)}{\ell}\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(h(\ell)\right)^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $p^{-1} + q^{-1} = 1, p > 0$.

İspat: (2.2)' de $x = \ell\sigma + (1-\ell)\rho$, $y = (1-\ell)\sigma + \ell\rho$ ve $\tau = \frac{1}{2}$ seçildiğinde;

$$f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right) f(\ell\sigma + (1-\ell)\rho)$$

$$+h\left(\frac{1}{2}\right)f\big((1-\ell)\sigma+\ell\rho\big)$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)$$

$$+f\big((1-\ell)\sigma+\ell\rho\big)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin iki tarafı $\frac{\varphi((\rho-\sigma)\ell)}{\ell}$ ile çarpılıp ardından elde edilen eşitsizlikte $\ell \in (0,1]$ için integral alınırsa;

$$f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}d\ell$$

$$\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}f(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)d\ell\right.$$

$$\left.+\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}f(\ell\rho+(1-\ell)\sigma)d\ell\right]$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$\frac{f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)}{h\left(\frac{1}{2}\right)}\Lambda(1) \leq \left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+\,{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]$$

olduğu görülür ve birinci ispatımız tamamlanmış olur.

İkinci eşitsizliğin ispatı için $f \in SX(h,I)$ olduğu kullanıldığında;

$$f(\ell x+(1-\ell)y) \leq h(\ell)f(x)+h(1-\ell)f(y)$$

ve

$$f\big((1-\ell)x+\ell y\big) \leq h(1-\ell)f(x)+h(\ell)f(y)$$

yazılır. Her iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa;

$$f(\ell x+(1-\ell)y)+f((1-\ell)x+\ell y) \leq [h(\ell)+h(1-\ell)][f(x)+f(y)]$$

elde edilir. Burada $x=\sigma$ ve $y=\rho$ seçilirse;

$$f(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)+f((1-\ell)\sigma+\ell\rho \leq [h(\ell)+h(1-\ell)][f(\sigma)+f(\rho)]$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{\varphi((\rho-\sigma)\ell)}{\ell}$ ile çarpılıp ardından eşitsizlikte $\ell \in (0,1]$ için integral alınırsa;

$$\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}f(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)d\ell$$

$$+\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell} f((1-\ell)\sigma+\ell\rho)d\ell$$

$$\leq [f(\sigma)+f(\rho)]\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}[h(\ell)+h(1-\ell)]\,d\ell$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$\left[{}_{\sigma^+}I_\varphi f(\rho)+{}_{\rho^-}I_\varphi f(\sigma)\right]$$

$$\leq [f(\sigma)+f(\rho)]\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}[h(\ell)+h(1-\ell)]d\ell$$

sonucuna ulaşılır. Böylece eşitsizliğin ikinci kısmının ispatı tamamlanmış olur. Eşitsizliğin üçüncü kısmının ispatında son eşitsizlikte $p>1$ ve $p^{-1}+q^{-1}=1$ için Hölder eşitsizliği kullanılarak son kısma ulaşıldığı görülür.

$$\int_0^1 \frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}[h(\ell)+h(1-\ell)]d\ell$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left(\frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 [h(\ell)+h(1-\ell)]^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1. Eğer Teorem 4.1.1' de $h(\ell)=\ell$ ve $\varphi(\ell)=\ell$ alırsak, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik Teorem 3.1.4'teki klasik H-H eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.2. Eğer Teorem 4.1.1' de $\varphi(\ell)=\ell$ ve $h(\ell)=\ell^s$ alırsak, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik Teorem 3.1.5'teki ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için H-H eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.3. Eğer Teorem 4.1.1' de $\varphi(\ell)=\ell$ alırsak, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik Teorem 3.1.8'deki $h-$konveks fonksiyonlar için H-H eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.4. Eğer Teorem 4.1.1' de $h(\ell)=\ell$ ve $\varphi(\ell)=\frac{\ell^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alırsak, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik Teorem 3.2.1'deki Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 4.1.5. Eğer Teorem 4.1.1' de $\varphi(\ell)=\frac{\ell^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ve $h(\ell)=\ell^s$ alınırsa, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik Teorem 3.2.2'deki ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 4.1.6. Eğer Teorem 4.1.1' de $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alırsak, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik Teorem 3.2.4'teki h −konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 4.1.7. Eğer Teorem 4.1.1' de $\varphi(\ell) = \frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\ell^{\frac{\alpha}{k}}$ ve $h(\ell) = \ell$ alınırsa, Teorem 4.1.1'deki eşitsizlik k −Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür (Hussain ve ark., 2015).

$$f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right) \le \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^{\alpha}_{\sigma^+k}\, f(x) + I^{\alpha}_{\rho^-k}\, f(x)\right] \le \frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}.$$

Aşağıda literatürde mevcut olan bir Lemma kullanılarak h −konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla H-H eşitsizliğinin sağ tarafına yönelik yeni teoremler ve bu teoremlerin sonuçları verilecektir.

Teorem 4.1.2. $0 \le \sigma < \rho$ ve $h \in L_1[\sigma,\rho]$, $f \in L_1[\sigma,\rho]$ olmak üzere $h: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f: [\sigma,\rho] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonları verilsin. Eğer $|f'|$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde h −konveks bir dönüşüm ise,

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\le \frac{(\rho-\sigma)}{\Lambda(1)}\int_0^1 h(\ell)|\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,dt\,\frac{|f'(\sigma)|+|f'(\rho)|}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Lambda(\ell) = \int_0^{\ell}\frac{\varphi((\rho-\sigma)u)}{u}du$ ve $\Lambda(\ell) \ne 0$.

İspat: Lemma 3.3.1. ve modül özellikleri kullanıldığında;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\le \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,|f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|d\ell$$

yazılır. Buradan $|f'|$ nin $[\sigma,\rho]$ üzerinde h −konveks olduğu kullanıldığında;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left\{|f'(\sigma)|\int_0^1 h(\ell)|\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell|\,d\ell\right.$$

$$\left.+|f'(\rho)|\int_0^1 h(1-\ell)|\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,d\ell\right\}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapıldığında ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.8. Eğer Teorem 4.1.2.' de $\varphi(\ell)=\ell$ ve $h(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.1.2'deki eşitsizlik Teorem 3.1.9.' daki Dragomir ve Agarwal' ın H-H eşitsizliğinin sağ tarafı için elde etmiş oldukları eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 4.1.9. Eğer Teorem 4.1.2.' de $\varphi(\ell\,)=\frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ve $h(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.1.2'deki eşitsizlik Teorem 3.2.5.' teki konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleriyle elde edilmiş eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 4.1.10. Eğer Teorem 4.1.2.' de $\varphi(\ell)=\frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa ve $h(\ell)=\ell^{s}$, Teorem 4.1.2'deki eşitsizlik Teorem 3.2.2.' deki $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleriyle elde edilmiş eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 4.1.11. Eğer Teorem 4.1.2' de $\varphi(\ell\,)=\frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\ell^{\frac{\alpha}{k}}$ ve $h(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.1.2'deki eşitsizlik $k-$Riemann-Liouville kesirli integraliyle elde edilmiş eşitsizliğe dönüşür (Hussain ve ark., 2015).

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^{\alpha}_{\sigma^+k}\,f(x)+I^{\alpha}_{\rho^-k}\,f(x)\right]\right|$$

$$\leq\frac{(\rho-\sigma)}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right)\left[\frac{|f'(\sigma)|+|f'(\rho)|}{2}\right]$$

Sonuç 4.1.12. Eğer Teorem 4.1.2.' de $h(\ell)=\ell$ alırsak, Teorem 4.1.2. deki eşitsizlik Teorem 3.3.2.' deki konveks fonksiyonlar için Genelleştirilmiş Kesirli integrallerle elde edilmiş H-H eşitsizliğinin sağ tarafına yönelik eşitsizliğe dönüşür.

Teorem 4.1.3. $0\leq\sigma<\rho$, $h^{p}\in L_1[\sigma,\rho]$ ve $f\in L_1[\sigma,\rho]$ olmak üzere $h\colon J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h\neq 0$ ve $f\colon[\sigma,\rho]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pozitif fonksiyonları verilsin. $|f'|$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $h-$konveks bir fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$
$$\leq\frac{(\rho-\sigma)(|f'(\rho)|+|f'(\sigma)|)}{2\Lambda(1)}$$
$$\times\left[\left(\int_{1/2}^{1}[\Lambda(\ell)]^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int_{0}^{1/2}[\Lambda(\ell)]^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$
$$\times\left[\left(\int_{0}^{1/2}\big(\mathrm{h}(\ell)\big)^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{1/2}^{1}\big(\mathrm{h}(\ell)\big)^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

dir. Burada $p>1$ için $p^{-1}+q^{-1}=1$ ve $\Lambda(\ell)=\int_0^{\ell}\frac{\varphi((\rho-\sigma)u)}{u}du$ ve $\Lambda(\ell)\neq 0.$

İspat: Lemma 3.3.1. ve modülün özellikleri kullanılırsa

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$
$$\leq\frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\int_0^1|\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,|f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|d\ell$$
$$=\frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left\{\int_0^{1/2}\big(\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)\big)\,|f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|d\ell+\int_{1/2}^{1}\big(\Lambda(\ell)\right.$$
$$\left.-\Lambda(1-\ell)\big)\,|f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|d\ell\right\}$$

elde edilir daha sonra $|f'|$ nin $[\sigma,\rho]$ üzerinde h −konveks olduğu kullanıldığında

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$
$$\leq\frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left\{\int_0^{1/2}\big(\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)\big)\,[h(\ell)|f'(\sigma)|+h(1-\ell)|f'(\rho)|]d\ell\right.$$
$$\left.+\int_{1/2}^{1}\big(\Lambda(\ell)-\Lambda(1-\ell)\big)[h(1-\ell)|f'(\sigma)|+h(\ell)|f'(\rho)|]d\ell\right\}$$

$$= \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left\{\int_0^{1/2}\Lambda(1-\ell)h(\ell)\,|f'(\sigma)|d\ell - \int_0^{1/2}\Lambda(\ell)h(\ell)|f'(\sigma)|d\ell\right.$$

$$+\int_0^{1/2}\Lambda(1-\ell)h(1-\ell)|f'(\rho)|d\ell - \int_0^{1/2}\Lambda(\ell)h(1-\ell)|f'(\rho)|d\ell$$

$$+\int_{1/2}^{1}\Lambda(\ell)h(\ell)|f'(\sigma)|d\ell - \int_{1/2}^{1}\Lambda(1-\ell)h(\ell)|f'(\sigma)|d\ell$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1}\Lambda(\ell)h(1-\ell)|f'(\rho)|d\ell - \int_{1/2}^{1}\Lambda(1-\ell)h(1-\ell)|f'(\rho)|d\ell\right\}$$

ifadesine ulaşılır. $p > 1$ ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$ için Hölder eşitsizliği

$$\int_0^{1/2}\Lambda(1-\ell)h(\ell)\,d\ell = \int_{1/2}^{1}\Lambda(\ell)h(1-\ell)d\ell$$

$$\leq \left(\int_0^{1/2}[\Lambda(1-\ell)]^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{1/2}[h(\ell)]^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_0^{1/2}\Lambda(1-\ell)h(1-\ell)\,d\ell = \int_{1/2}^{1}\Lambda(\ell)h(\ell)d\ell$$

$$\leq \left(\int_{1/2}^{1}[\Lambda(\ell)]^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{1/2}^{1}[h(\ell)]^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_0^{1/2}\Lambda(\ell)h(\ell)\,d\ell = \int_{1/2}^{1}\Lambda(1-\ell)h(1-\ell)d\ell$$

$$\leq \left(\int_0^{1/2}[\Lambda(\ell)]^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{1/2}[h(\ell)]^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}},$$

ve

$$\int_0^{1/2}\Lambda(\ell)h(1-\ell)\,d\ell = \int_{1/2}^{1}\Lambda(1-\ell)h(\ell)d\ell$$

$$\leq \left(\int_{1/2}^{1}[\Lambda(1-\ell)]^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{1/2}^{1}[h(\ell)]^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde uygulanıp gerekli işlemler yapıldığında istenilen sonuca ulaşılır. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.1.13. Eğer Teorem 4.1.3. de $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ve $h(\ell) = \ell$ alırsak, Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik Teorem 3.2.6.' daki Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 4.1.14. Eğer Teorem 4.1.3. de $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ve $h(\ell) = \ell^{s}$ alırsak, Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik Teorem 3.2.7.' deki ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 4.1.15. Eğer Teorem 4.1.3. de $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik Teorem 3.2.11.' deki $h-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 4.1.16. Eğer Teorem 4.1.3' de $\varphi(\ell) = \frac{1}{\mathrm{k}\Gamma_k(\alpha)}\ell^{\frac{\alpha}{k}}$ ve $h(\ell) = \ell$ alınırsa, Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik $k-$Riemann-Liouville kesirli integraliyle elde edilmiş aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür (Hussain ve ark., (2015).

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(\rho-\sigma)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[I^{\alpha}_{\sigma^+ k}\, f(x) + I^{\alpha}_{\rho^- k}\, f(x)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(\rho-\sigma)}{2\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(\sigma)|^{q}+|f'(\rho)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

4.2. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Yardımıyla $quasi-$ Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Aşağıda literatürdeki $quasi-$konveks fonksiyonlar için verilen H-H eşitsizliği genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla farklı bir formda elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1. $f \in L_1[\sigma,\rho]$ ve $0 \leq \sigma < \rho$ olmak üzere $f\colon[\sigma,\rho] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. f, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$ konveks fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right] \leq max\{f(\sigma), f(\rho)\}.$$

Burada $\Lambda(1) = \int_0^1 \frac{\varphi((\rho-\sigma)\ell)}{\ell}d\ell$ ve $\Lambda(1) \neq 0$.

İspat: $f,\ [\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)\le\ max\{f(\sigma),f(\rho)\}$$

ve

$$f((1-\ell)\sigma+\ell\rho)\le max\{f(\sigma),f(\rho)\}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$\frac{1}{2}\left[f(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)+f\big((1-\ell)\sigma+\ell\rho\big)\right]\le\ max\{f(\sigma),f(\rho)\}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\varphi((\rho-\sigma)\ell)}{\ell}$ ile çarpılıp $\ell\in(0,1]$ üzerinde integral alındığında

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1\frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}f(\ell\sigma\ +\ (1\ -\ell)\rho)d\ell+\int_0^1\frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}f((1\ -\ \ell)\sigma+\ \ell\rho)d\ell\right]$$
$$\le\ max\{f(\sigma),f(\rho)\}\int_0^1\frac{\varphi\big((\rho-\sigma)\ell\big)}{\ell}d\ell$$

ulaşılır ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_\varphi f(\rho)+\ {}_{\rho^-}I_\varphi f(\sigma)\right]\le max\{f(\sigma),f(\rho)\}$$

ile ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.1. Eğer Teorem 4.2.1’de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.2.1’deki eşitsizlik Teorem 3.1.7’deki $quasi$ −konveks fonksiyonlar için H-H eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.2.2. Eğer Teorem 4.2.1’de $\varphi(\ell)=\frac{\ell^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.2.1’deki eşitsizlik Teorem 3.2.3’deki $quasi$ −konveks fonksiyon için Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

Şimdi literatürde bulunan bir Lemma yardımıyla $quasi$ −konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integrasyona yönelik teoremler verilecektir.

Teorem 4.2.2. $f\in L_1[\sigma,\rho]$ ve $0\le\sigma<\rho$ olmak üzere $f:[\sigma,\rho]\to\mathbb{R}$, (σ,ρ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_\varphi f(\rho)+\ {}_{\rho^-}I_\varphi f(\sigma)\right]\right|$$
$$\le\frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}max\{|f'(\sigma)|,|f'(\rho)|\}\int_0^1|\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,d\ell$$

Burada $\Lambda(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\varphi((\rho-\sigma)u)}{u} du$ ve $\Lambda(\ell) \neq 0$.

İspat: Lemma 3.3.1, modül özellikleri ve $|f'|$' nin $quasi$ −konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \int_0^1 |\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)|\,|f'(\ell\sigma + (1-\ell)\rho)| d\ell$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \int_0^1 |\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)| max\{|f'(\sigma)|, |f'(\rho)|\}\, d\ell$$

$$= \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} max\{|f'(\sigma)|, |f'(\rho)|\} \int_0^1 |\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)|\, d\ell$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.3. Eğer Teorem 4.2.2'de $\varphi(\ell) = \ell$ alınırsa, Teorem 4.2.2'deki eşitsizlik Teorem 3.1.12'deki eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 4.2.4. Eğer Teorem 4.2.2'de $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.2.2'deki eşitsizlik Teorem 3.2.8'deki eşitsizliğe dönüşür.

Teorem 4.2.3. $f' \in L[\sigma,\rho]$ olmak üzere $f: [\sigma,\rho] \to (\sigma,\rho)$üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$ $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ − konveks ve $p > 1$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \left(\int_0^1 |\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)|^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}} \{max|f'(\sigma)|^q, |f'(\rho)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

Burada $\Lambda(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{\varphi((\rho-\sigma)u)}{u} du$ ve $\Lambda(\ell) \neq 0$.

İspat: Lemma 3.3.1 ve Hölder eşitsizliği kullanıldığında;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho) + {}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)} \int_0^1 |\Lambda(1-\ell) - \Lambda(\ell)|\,|f'(\ell\sigma + (1-\ell)\rho)| d\ell$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left(\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$ konveks olduğundan;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left(\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\{max|f'(\sigma)|^q,|f'(\rho)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.5. Eğer Teorem 4.2.3'de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.2.3'deki eşitsizlik Teorem 3.1.14'teki H-H tipli eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 4.2.6. Eğer Teorem 4.2.3'de $\varphi(\ell)=\frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.2.3'deki eşitsizlik Teorem 3.2.9'daki eşitsizliğe dönüşür.

Teorem 4.2.4. $f'\in L_1[\sigma,\rho]$ ve $\sigma<\rho$ olmak üzere $f:[\sigma,\rho]\to\mathbb{R}$, (σ,ρ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$ konveks ve $p\geq 1$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\{max|f'(\sigma)|^q,|f'(\rho)|^q\}^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|^p d\ell\right)$$

Burada $\Lambda(\ell)=\int_0^{\ell}\frac{\varphi((\rho-\sigma)u)}{u}du$ ve $\Lambda(\ell)\neq 0$.

İspat: Lemma 3.3.1 ve power-mean eşitsizliği kullanıldığında;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,|f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|d\ell$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left(\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1 |\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|\,|f'(\ell\sigma+(1-\ell)\rho)|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ $-$konveks olduğundan;

$$\left|\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[\,{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f(\rho)+\,{}_{\rho^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]\right|$$

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{2\Lambda(1)}\left(\int_0^1|\Lambda(1-\ell)-\Lambda(\ell)|d\ell\right)\{max|f'(\sigma)|^q,|f'(\rho)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.7. Eğer Teorem 4.2.4' de $\varphi(\ell)=\frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.2.4' teki eşitsizlik Teorem 3.2.9.' deki Riemann-Liouville kesirli integral tipli eşitsizliğine dönüşür.

Aşağıdaki H-H eşitsizliğinin sol tarafına yönelik sunulan teorem $quasi-$ konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 4.2.5. $f'\in L_1[\sigma,\rho]$ ve $\sigma<\rho$ olmak üzere $f:[\sigma,\rho]\to\mathbb{R}$, (σ,ρ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$konveks fonksiyon ise aşağıdaki genelleştirilmiş kesirli integral için ifade sağlanır;

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[\,{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_{\varphi}f(\rho)+\,{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]-f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1|\Psi(\ell)|\,d\ell\right)\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|,|f'(\rho)|\right\}+max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|,|f'(\sigma)|\right\}\right]$$

Burada $\Psi(1)\;=\int_0^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{2}\ell\right)}{\ell}d\ell$ ve $\Lambda(\ell)\neq 0$.

İspat: Lemma 3.3.2. ve $|f'|$ nin $quasi-$konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa;

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[\,{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_{\varphi}f(\rho)+\,{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_{\varphi}f(\sigma)\right]-f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left[\int_0^1|\Psi(\ell)|\left|f'\left(\frac{\ell}{2}\sigma+\frac{2-\ell}{2}\rho\right)\right|d\ell+\int_0^1|\Psi(\ell)|\left|f'\left(\frac{2-\ell}{2}\sigma+\frac{\ell}{2}\rho\right)\right|d\ell\right]$$

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\int_0^1|\Psi(\ell)|\,max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|,|f'(\rho)|\right\}d\ell$$

$$+\int_0^1|\Psi(\ell)|\;max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|,|f'(\sigma)|\right\}d\ell$$

$$=\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1|\Psi(\ell)|\,d\ell\right)\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|,|f'(\rho)|\right\}+max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|,|f'(\sigma)|\right\}\right]$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.8. Eğer Teorem 4.2.5' de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.2.5' teki eşitsizlik Teorem 3.1.15.' deki eşitsizliğe dönüşür.

Aşağıdaki teoremde H-H eşitsizliği $quasi-$ konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integraller ve Hölder eşitsizliği kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 4.2.6. $f'\in L_1[\sigma,\rho]$ ve $\sigma<\rho$ olmak üzere $f:[\sigma,\rho]\to\mathbb{R}$, (σ,ρ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$ konveks ve $p>1$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_\varphi f(\rho)+{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_\varphi f(\sigma)\right]-f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\le\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1|\Psi(\ell)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}},|f'(\rho)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}},|f'(\sigma)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

Burada $\Psi(1)=\int_0^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{2}\ell\right)}{\ell}d\ell$ ve $\Psi(1)\neq0$.

İspat: Lemma 3.3.2. ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_\varphi f(\rho)+{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_\varphi f(\sigma)\right]-f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\le\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1|\Psi(\ell)|^p\,d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{\ell}{2}\sigma+\frac{2-\ell}{2}\rho\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}d\ell\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{2-\ell}{2}\sigma+\frac{\ell}{2}\rho\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}d\ell\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$ konveks olduğundan;

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_\varphi f(\rho)+{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_\varphi f(\sigma)\right]-f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1 |\Psi(\ell)|^p\, d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(\rho)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.$$

$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(\sigma)|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

ulaşılır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.9. Eğer Teorem 4.2.6. de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.2.6. daki eşitsizlik Teorem 3.1.16.' teki eşitsizliğe dönüşür.

Teorem 4.2.7. $f' \in L_1[\sigma,\rho]$ ve $\sigma<\rho$ olmak üzere $f:[\sigma,\rho]\to\mathbb{R}$, (σ,ρ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$ konveks ve $p\geq 1$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_\varphi f(\rho) + {}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_\varphi f(\sigma)\right] - f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1 |\Psi(\ell)|\, d\ell\right)\times\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q, |f'(\rho)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q, |f'(\sigma)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Burada $\Psi(1)=\int_0^1 \frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{2}\ell\right)}{\ell}\, d\ell$ ve $\Psi(1)\neq 0$.

İspat: Lemma 3.3.2. ve power-mean eşitsizliği özellikleri kullanıldığında;

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_\varphi f(\rho) + {}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^-}I_\varphi f(\sigma)\right] - f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left[\int_0^1 |\Psi(\ell)|\left|f'\left(\frac{\ell}{2}\sigma+\frac{2-\ell}{2}\rho\right)\right| d\ell + \int_0^1 |\Psi(\ell)|\left|f'\left(\frac{2-\ell}{2}\sigma+\frac{\ell}{2}\rho\right)\right| d\ell\right]$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1 |\Psi(\ell)|\, d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 |\Psi(\ell)|\left|f'\left(\frac{\ell}{2}\sigma+\frac{2-\ell}{2}\rho\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 |\Psi(\ell)|\left|f'\left(\frac{2-\ell}{2}\sigma+\frac{\ell}{2}\rho\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

yazılır ve $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ −konveks olduğundan;

$$\left|\frac{1}{2\Psi(1)}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{+}}I_{\varphi}f(\rho)+{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{-}}I_{\varphi}f(\sigma)\right]-f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{4\Psi(1)}\left(\int_0^1|\Psi(\ell)|\,d\ell\right)\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q,|f'(\rho)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q,|f'(\sigma)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

bulunur ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.10. Eğer Teorem 4.2.7' de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.2.7' deki eşitsizlik Teorem 3.1.17.' deki eşitsizliğe dönüşür.

Aşağıda literatürde mevcut olan bir Lemma genelleştirilmiş kesirli integralin uygulanmasına uygun bir hale getirilmiş ve ardından bu Lemma kullanılarak literatürdeki bazı teoremler genelleştirilmiştir.

Lemma 4.2.1. $\sigma<\rho$ ve $\sigma,\rho\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f:[\sigma,\rho]\to\mathbb{R}$, (σ,ρ) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[\sigma,\rho]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)=\frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\int_0^1 \mathrm{O}(\ell)f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)d\ell\right.$$

$$-\int_0^1\Omega(\ell)f'\left(\ell\rho+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)d\ell$$

$$+\int_0^1 \mathrm{O}(\ell)f'\left(\ell\frac{\sigma+3\rho}{4}+(1-\ell)\rho\right)d\ell$$

$$\left.-\int_0^1\Omega(\ell)f'\left(\ell\frac{\sigma+\rho}{2}+(1-\ell)\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)d\ell\right].$$

Burada $\Omega:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\Omega(\ell)=\int_0^\ell\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du$, $\Omega(\ell)\neq0$ ve $\mathrm{O}:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathrm{O}(\ell)=\int_\ell^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}+f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right]-\frac{1}{4\Omega(1)}$$

$$\times\left[{}_{\sigma^{+}}I_{\varphi}f\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)+{}_{\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)^{+}}I_{\varphi}f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)+{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^{+}}I_{\varphi}f\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)+{}_{\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)^{+}}I_{\varphi}f(\rho)\right]$$

şeklindedir.

İspat: Lemmada geçen eşitliğin sağ tarafındaki integraller dört parça halinde çözümlendiğinde

$$I_1=\int_0^1 \mathrm{O}(\ell)f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)d\ell$$

$$=\int_0^1\left[\int_\ell^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du\right]f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)d\ell$$

$$=\frac{4}{\sigma-\rho}\left[\left(\int_\ell^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du\right)f\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right]_0^1$$

$$+\frac{4}{\sigma-\rho}\int_0^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}\ell\right)}{\ell}f\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)d\ell$$

$$=\frac{4}{b-\sigma}f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\left(\int_0^1\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du\right)$$

$$-\frac{4}{b-\sigma}\int_{\frac{3\sigma+\rho}{4}}^{\frac{\sigma+\rho}{2}}\frac{\varphi\left(\frac{\sigma+\rho}{2}-\ell\right)}{\frac{\sigma+\rho}{2}-\ell}f(\ell)\,d\ell$$

$$=\frac{4}{\rho-\sigma}f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\Omega(1)-\frac{4}{\rho-\sigma}\left[{}_{\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)^{+}}I_{\varphi}f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right]$$

ve

$$I_2=-\int_0^1\Omega(\ell)f'\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)d\ell$$

$$=-\int_0^1\left[\int_0^\ell\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du\right]f'\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)d\ell$$

$$= \frac{4}{\rho-\sigma}\left[\left[\int_0^{\ell}\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du\right]f\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right]_0^1$$

$$-\frac{4}{\rho-\sigma}\int\limits_{\sigma}^{\frac{3\sigma+\rho}{4}}\frac{\varphi\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}-\ell\right)}{\frac{3\sigma+\rho}{4}-\ell}f(\ell)d\ell$$

$$= \frac{4}{\rho-\sigma}f(\sigma)\Omega(1)-\frac{4}{\rho-\sigma}\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right]$$

ve benzer şekilde

$$I_3 = \int\limits_0^1 \Omega(\ell)f'\left(\ell\frac{\sigma+3\rho}{4}+(1-\ell)\rho\right)d\ell$$

$$= \frac{4}{\rho-\sigma}f(\rho)\Omega(1)-\frac{4}{b-\sigma}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)^+}I_{\varphi}f(\rho)\right]$$

ve

$$I_4 = -\int\limits_0^1 \Omega(\ell)f'\left(\ell\frac{\sigma+\rho}{2}+(1-\ell)\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)d\ell$$

$$= \frac{4}{\rho-\sigma}f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\Omega(1)-\frac{4}{b-\sigma}\left[{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_{\varphi}f\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right]$$

olarak hesaplanır. Ardından gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho) &= \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\sum_{k=1}^{4}I_k\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}+f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right]-\frac{1}{4\Omega(1)}\\ &\times\left[{}_{\sigma^+}I_{\varphi}f\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)+{}_{\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)^+}I_{\varphi}f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right.\\ &\left.+{}_{\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)^+}I_{\varphi}f\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)+{}_{\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)^+}I_{\varphi}f(\rho)\right]\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

Sonuç 4.2.11. Eğer Lemma 4.2.1'de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Lemma 4.2.10'daki eşitlik;

$$\phi_1(\sigma,\rho)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(\sigma)+f(\rho)}{2}+f\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right]-\frac{1}{\rho-\sigma}\int_{\sigma}^{\rho}f(x)dx$$

olduğu kolayca görülür.

Sonuç 4.2.12. Eğer Lemma 4.2.1'de $\varphi(\ell)=\frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alındığında, Lemma 4.2.1'deki eşitlik Lemma 3.2.2'deki eşitliğe dönüşür.

Teorem 4.2.8. $f'\in L_1[\sigma,\rho]$ ve $\sigma<\rho,\ \sigma,\rho\in I$ olmak üzere $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ I^{\circ}$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^{q}$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi-$konveks fonksiyon ve $p\geq 1$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
&\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right|\\
&\qquad\leq\frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\left(\int_0^1 \mathrm{O}(\ell)d\ell\right)\right.\\
&\qquad\times\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^{q},\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\qquad\left.+max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^{q},|f'(\rho)|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right]\\
&\qquad+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^{q},|f'(\sigma)|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\qquad\left.\left.+max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^{q},\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right]\right]
\end{aligned}$$

Burada $\Omega(\ell)=\int_0^{\ell}\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du,\ \Omega(\ell)\neq 0.$

İspat: Lemma 4.2.1 ve power-mean eşitsizliği kullanıldığında;

$$\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\int_0^1 \mho(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|d\ell\right.$$

$$+\int_0^1 \Omega(\ell)\left|f'\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|d\ell$$

$$+\int_0^1 \mho(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{\sigma+3\rho}{4}+(1-\ell)\rho\right)\right|d\ell$$

$$\left.+\int_0^1 \Omega(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{\sigma+\rho}{2}+(1-\ell)\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|d\ell\right]$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left(\int_0^1 \mho(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \mho(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \Omega(\ell)\left|f'\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \mho(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \mho(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{\sigma+3\rho}{4}+(1-\ell)\rho\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \Omega(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{\sigma+\rho}{2}+(1-\ell)\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Daha sonra $|f'|^q$ nin, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ −konveks fonksiyon oluşu kullanıldığında;

$$\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\left(\int_0^1 \mho(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \mho(\ell)max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q\right\}d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \Omega(\ell)max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\sigma)|^q\right\}d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 O(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 O(\ell)max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\rho)|^q\right\}d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \Omega(\ell)max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q\right\}d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

ulaşılır. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right| \leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\left(\int_0^1 O(\ell)d\ell\right)max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\sigma)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 O(\ell)d\ell\right)max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\rho)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra;

$$\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right|$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\left(\int_0^1 O(\ell)d\ell\right)\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} + max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\rho)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right]\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \Omega(\ell)d\ell\right)\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\sigma)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} + max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right]\right]$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.13. Eğer Teorem 4.2.8' de $\varphi(\ell) = \frac{\ell^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.2.8' deki eşitsizlik Teorem 3.2.12.' deki eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 4.2.14: Eğer Teorem 4.2.8. de $\varphi(\ell)=\ell$ alınırsa, Teorem 4.2.8 deki eşitsizlik

$$\phi_1(\sigma,\rho)$$

$$\leq \frac{\rho-\sigma}{32}\left[max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\sigma)|^q\right\}^{\frac{1}{q}} + max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \; max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} + max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\rho)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliğine dönüşür (Set ve Çelik, 2016).

Teorem 4.2.9: $f' \in L_1[\sigma,\rho]$ ve $\sigma<\rho$, $\sigma,\rho \in I$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ −konveks ve $q>1$ ve $\mathrm{p}^{-1}+\mathrm{q}^{-1}=1$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right| \leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left\{\left(\int_0^1 \left(\mathrm{O}(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left. + \left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\rho)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\left(\int_0^1 \left(\Omega(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q, |f'(\sigma)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.\left. + \left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

Burada $\Omega(\ell)=\int_0^{\ell}\frac{\varphi\left(\frac{(\rho-\sigma)}{4}u\right)}{u}du$, $\Omega(\ell)\neq 0$.

İspat: Lemma 4.2.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak;

$$\left|\phi_{\varphi(\ell)}(\sigma,\rho)\right| \leq \frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\int_0^1 \mathrm{O}(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|d\ell\right.$$

$$+\int_0^1 \Omega(\ell)\left|f'\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|d\ell$$

$$+\int_0^1 \mho(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{\sigma+3\rho}{4}+(1-\ell)\rho\right)\right|d\ell$$

$$\left.+\int_0^1 \Omega(\ell)\left|f'\left(\ell\frac{\sigma+\rho}{2}+(1-\ell)\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|d\ell\right]$$

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\left(\int_0^1 \left(\mho(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\ell\frac{3\sigma+\rho}{4}+(1-\ell)\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 \left(\Omega(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\ell\sigma+(1-\ell)\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \left(\mho(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\ell\frac{\sigma+3\rho}{4}+(1-\ell)\rho\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \left(\Omega(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\ell\frac{\sigma+\rho}{2}+(1-\ell)\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q d\ell\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. $|f'|^q$, $[\sigma,\rho]$ üzerinde $quasi$ −konveks olduğundan;

$$\leq\frac{\rho-\sigma}{16\Omega(1)}\left[\left(\int_0^1 \left(\mho(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 \left(\Omega(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{3\sigma+\rho}{4}\right)\right|^q,|f'(\sigma)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \left(\mho(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q,|f'(\rho)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \left(\Omega(\ell)\right)^p d\ell\right)^{\frac{1}{p}}\left(max\left\{\left|f'\left(\frac{\sigma+3\rho}{4}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

gerekli düzenlemeler yapıldıktan istenilen eşitsizliğe ulaşılır.

Sonuç 4.2.15. Eğer Teorem 4.2.9. da $\varphi(\ell) = \frac{\ell^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ alınırsa, Teorem 4.2.9' daki eşitsizlik Teorem 3.2.13.' teki eşitsizliğe dönüşür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Dragomir ve Pearce (2000) elde ettikleri $quasi$ $-$konveks fonksiyon ve Varošanec (2007) elde ettiği h $-$konveks fonksiyon sınıflarına dayalı tanımlar kullanılmıştır. Sarıkaya ve arkadaşları (2008) h $-$konveks fonksiyon için H-H eşitsizliği, Tunç (2013) h $-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral eşitsizlikleri, Sarıkaya ve Ertuğral (2017) genelleştirilmiş kesirli integral eşitsizlikleri kullanılmıştır. Ayrıca diğer araştırmacılar tarafından ortaya konulan çalışmaların genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla h $-$konveks ve $quasi$ $-$konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler ve sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların daha önce literatürde var olan sonuçların bir genelleştirmesi olduğu görülmüştür. Konuyla ilgilenen araştırmacılar bu tezde kullanılan yöntemlerden ve teoremlerden yararlanarak genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla farklı konveks fonksiyon sınıfları için yeni genellemeler yapabilecekleri gibi literatürde mevcut lemmaları genelleştirerek de yeni sonuçlar elde edebilirler.

KAYNAKLAR

Adams, R.A., Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. ***Pearson Canada Inc.,*** **934** pp, Toronto, Ontario.

Akkurt, A., 2014, ***Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Bazı İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S., 2009. Inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex**.** ***RGMIA Res. Rep. Coll., 12: Supplement, Article 14.***

Alomari, M., Darus, M., Kirmacı, U.S., 2010. Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means. ***Comput. Math. Appl.,*** **59**: 225-232.

Anton, H., Rorres, C. 2006. ***Elementary Linear Algebra***. Jhon Wiley and Sonsi Inc.

Ardınç, M. A., 2013, ***Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. ***Colombiana Mat.,*** **28**: 7-12.

Balgeçti, S., 2015, $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})-$***Konvekslik ve Kesirli İntegral Eşitsizlikleri***. (Yüksek Lisans Tezi). Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay.

Bayraktar, M., 2000. ***Fonksiyonel Analiz***, ISBN 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. ***Analiz***, ISBN 978-605-395-412-5.

Beckenbach, E.F., Bellman, R., 1961. ***Inequalities***. *Springer-Verlag*, 198 pp. Berlin.

Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen. ***Publ. Inst. Math.*** **(Beograd) 23**:13-20.

Bullen, P.S., 2003. ***Handbook of Means and Their Inequalities.*** Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 537 pp, The Netherlands.

Carter, M., Van Brunt, B., 2000. ***The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction.*** Springer, 228: New York.

Çelik, B., 2017, ***Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri için Eşitsizlikler*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Dragomir, S.S., Pečarić, J., Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. ***Soochow Journal of Mathematics,*** **21**(3): 335-341.

Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. ***Bull. Austral. Math. Soc.,*** **57**: 377-385.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalties for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula Appl. ***Math. Lett.*** **11**(5): 91-95.

Dragomir, S. S., Fitzpatrik, S., 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, ***Demonstratio Math.*** **32**(4): 687-696.

Dragomir, S.S., Pečarić, J., Wang, S., 2000. The unifiedtreatment of trapezoid, Simpson, and Ostrowski type inequality for monotonic mappings and applications. ***Mathematical and Computer Modelling,*** **31**: 61-70.

Ekinci, A., 2014, ***Klasik Eşitsizlik Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Ertuğral, F., 2015, ***Kesirli İntegrallerden Yararlanarak $s-Konveks$ Fonksiyonlar için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipindeki İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Eryaman, S., 2016, ***λ_{φ} −Preinvex Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Filiz, H., 2013, ***Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikleri Üzerine*** (Yüksek Lisans Tezi). Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Godunova, E.K., Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, ***Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov,*** MGPI, Moskva, pp. 138-142.

Göktan, S., 2016, ***Hermite−Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve h −Konvekslik Üzerine*** (Yüksek Lisans Tezi). Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon.

Gözpınar, A., 2018, ***Konveks Fonksiyon Sınıfları için Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler*** (Doktora Tezi). Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi, Ordu.

Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi-convex functions. ***Reprinted from Operations Research,*** **19**: 7.

Gürbüz, M., 2013, ***Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerinde İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Hardy, G., Littlewood, J.E., Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., ***Cambridge University Press,*** **324**: United Kingdom.

Hudzik, H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions. ***Aequationes Math.,*** **48**: 100-111.

Ion, D.A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of Universty of Craiova, ***Math. Comp. Sci. Ser.,*** **34**: 82-87.

Kaçar, E., 2016, ***Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Kara, H. H., ***Kesirli İntegraller için Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlikler*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Karaca, A., 2014, ***k −Kesirli İntegraller için Genelleştirilmiş İntegral Eşitsizlikler Üzerine*** *(Yüksek Lisans Tezi).* Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Karaoğlan, A., 2017, ***(k,h) −Konveks Fonksiyonlar ve Bazı İntegral Eşitsizlikleri Üzerine*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Karataş, S. S., 2016, ***Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Yardımıyla Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Yeni Eşitsizlikler*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Kavurmacı, H., 2012. ***Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Kılınç, S., 2016, ***Hipergeometrik Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Edilen Genelleştirilmiş Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Kirmaci, U.S, 2004. Inequalities for differentiable mappings and applicatios to special means of real numbers to midpoint formula***, Appl. Math. Comp.,*** **147**: 137-146.

Kirmaci, U.S., Bakula, M.K., Özdemir, M.E., Pečarić, J., 2007. Hadamard-tpye inequalities for s -convex functions, ***Appl. Math. and Comp.,*** **193**: 26-35.

Kırömeroğlu, M., 2017. ***Fonksiyoneller Yardımıyla p −Konveks Fonksiyonlar için Kesirli İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun.

Kikianty, E., 2010. ***Hermite-Hadamard Inequality in the Geometry of Banach Spaces***, (Ph.D. Thesis). Victoria University.

Korkut, N., 2017, ***Konveks Fonksiyonların Farklı Sınıfları için Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler*** (Yüksek Lisans Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Marangozoğlu, E., 2018, ***Genelleştirilmiş h,k −Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Grüss Tipli İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş.

Mihâly, B., 2004. ***Hermite-Hadamard-Type İnequalities for Generalized Convex Functions***,(Ph.D. Thesis). Üniversiti Debrecen, Egyetem, Kar.

Mitrinović, D.S., 1970. ***Analytic Inequalities***. Springer-Verlag, 400: Berlin.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. ***Kluwer Academic Publishers,*** **740** pp, Dordrecht/Boston/London.

Niculescu, C.P., Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. ***A Contemporary Approach,*** **255** pp, Springer Science+Business Media, Inc.

Orlicz, W., 1961. A note on modularspaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astro-nom. ***Phsy.,*** **9**: 157-162.

Özdemir, M. E., Yıldız, Ç., 2013 Annals of the University of Craiova, ***Mathematics and Computer Science.,*** **40**(2): 167-173

Özdemir, M.E., Dragomir, S.S., Yıldız, Ç., 2013. The Hadamard inequality for convex function via fractional integrals, ***Acta Mathematica Scientia***, **33**B(5): 1293–1299.

Pečarić, J.,Proschan, F., Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. ***Academic Press, Inc.,*** **469** pp, Boston.

Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., imić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, ***J. Math. Anal. and Appl.,*** **220**: 99-109.

Sarıkaya, M.Z., Ertuğrul, F., On the generalized Hermite-Hadamard Inequalities, ***https://www.researchgate.net/publication/321760443.*** Researchgate. ErişimTarihi:16.01.2020.

Sarıkaya, M.Z., Ertuğrul, F., Budak, H., New Generalization of Hermite-Hadamard Type Inequalities via Generalized Fractional Integrals, https://www.researchgate.net/publication/321760465. Researchgate. Erişim Tarihi:05.02.2018.

Sarıkaya, M.Z., Sağlam, A., Yıldırım, H., 2008. On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions. ***Journal of Mathematical Inequalities,*** **2**(3): 335-341.

Sarıkaya, M.Z, Set E., Yaldiz H., Başak, N., 2013 Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integral sandrelated fractional inequalities, ***Math. and Comput. Modell.,*** **5**: 2403-2407.

Set, E., 2010. ***Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikleri*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Set, E. Sarıkaya, M.Z. Özdemir, M.E. Yıldırım, H., 2014 The Hermite-Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results ***Jamsi,*** **10**: No:2 69-83.

Shi D.-P., Xi B.-Y. and Qi F., 2014. *Hermite-Hadamard type inequalities for Reimann-Liouville fractional integrals of (α,m)-convex functions*, ***Fractional Differential Calculus,*** **4**(1): 31-43.

Tunç, M., 2010. ***Bazı Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları*** (Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Tunç, M. 2013, On new inequalitiesfor h-convex functions via Riemann-Liouville fractional integration, ***Filomat*** **27**(4): *559.565*.

Turhan, S., 2016, ***GA −Konveks ve Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Yeni İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları.*** (Doktora Tezi). Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Varošanec, S., 2007. On h-convexity. ***J. Math. Anal. Appl.,*** **326**: 303-311.

Yalçın, A., 2016. ***Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler*** (Yüksek Lisans Tezi). İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağrı.

Yaldız, H., 2012, ***Kesirli İntegraller için Hermite−Hadamard Eşitsizliği*** (Yüksek Lisans Tezi) . Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Yaldız, H., 2016, ***Kesirli İntegraller ile İlgili Bazı Eşitsizlikler*** (Doktora Tezi). Düzce Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.

Yıldız, K., 2017. ***Geometrik-Aritmetik Konveks ve Geometrik-Geometrik Konveks Fonksiyon Sınıfları için İntegral Eşitsizlikler*** (Yüksek Lisans Tezi). Adıyaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

Yılmazoğlu, E. N., 2013, ***Kesirli İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon.

Yüksel, E., 2014, ***s −Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri*** (Yüksek Lisans Tezi). 7 Aralık Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kilis.

ÖZ GEÇMİŞ

1993 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimlerini Bursa'da tamamladı. Lisans öğrenimine 2011 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2015 yılında mezun oldu. Yüksek lisans öğrenimine 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladı ve 2018 yılında Fen Bilimleri Matematik Anabilim Dalı'na geçiş yaptı. Nisan 2018 tarihinden itibaren Bismil Fatih Anadolu Lisesi isimli eğitim kurumunda öğretmen olarak çalışmaktadır.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 24../01..../20.20.

Tez Başlığı / Konusu: GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA BAZI KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 66 sayfalık kısmına ilişkin, 24/01/2020 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin .intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 6 (altı) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

24.01.2020

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: RECEP TÜRKER

Öğrenci No:18910002006

Anabilim Dalı:Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Statüsü: Y. Lisans **X** Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü