T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Sabahattin YATAR
DANIŞMAN: Dr.Öğr.Üyesi Erkan ÇİMEN

VAN-2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Sabahattin YATAR

VAN-2020

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN danışmanlığında, Sabahattin YATAR tarafından sunulan "Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 06/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Musa ÇAKIR İmza: M Çakır

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Derya ARSLAN İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17/01/2020 tarih ve 2020/4-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza
Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

T.C.

Prof.Dr.Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

(İmza)

Sabahattin YATAR

# ÖZET

## GECİKMELİ VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YATAR, Sabahattin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN
Ocak 2020, 33 sayfa

Bu çalışmada, birinci mertebeden lineer gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem için başlangıç değer problemini ele almaktayız. Bu problemin nümerik çözümü için sonlu fark metodunu kullanarak yeni bir fark şeması kuruyoruz. Bu şemanın kurulması, üstel baz fonksiyon içeren ve kalan terimi integral biçiminde olan interpolasyon kuadratür formüllerine dayanmaktadır. Dahası, metodun yakınsaklığı incelenmiş ve ayrık maksimum normda birinci mertebeye sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bir örnek üzerinde nümerik sonuçların teoriye uygunluğu doğrulanmıştır. Son olarak, önerilen şema açık Euler şeması ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Gecikmeli Volterra integro diferansiyel denklem, Hata değerlendirmesi, Sonlu fark metodu.

**ABSTRACT**

**NUMERICAL SOLUTIONS OF DELAY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

YATAR, Sabahattin
M. Sc. Thesis, Mathematics
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Erkan ÇİMEN
January 2020, 33 pages

In this study, we consider an initial value problem for a linear first order Volterra integro differential equation with delay. We construct a new difference scheme for numerical solution of this problem by the finite difference method. The method is based on difference scheme on a uniform mesh which is achieved by using the method of integral identities which includes the exponential basis functions and applying interpolating quadrature formulas which contain the remainder term in integral form. Also, the method is proved to be first-order convergent in the discrete maximum norm. Moreover, a numerical experiment is performed to verify the theoretical results. Finally, the proposed scheme is compared with the implicit Euler scheme.


**Keywords:** Delay Volterra integro differential equation, Error estimate, Finite difference method.

# ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanın Sayın Dr.Öğr.Üyesi Erkan ÇİMEN'e teşekkürlerimi sunarım.

06/01/2020

Sabahattin YATAR

# İÇİNDEKİLER

# ÇİZELGELER LİSTESİ

# SİMGE VE KISALTMALAR

| **Simge** | **Açıklama** |
| --- | --- |
| $\boldsymbol{C[a,b]}$ | $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar kümesi. |
| $\boldsymbol{C}$ | Şebeke adımından bağımsız genel sabit. |
| $\boldsymbol{r}$ | Gecikme parametresi. |
| $\boldsymbol{u}$ | Problemin kesin çözümü. |
| $\boldsymbol{y}$ | Problemin yaklaşık çözümü. |
| $\boldsymbol{\omega}$ | Şebeke. |
| $\boldsymbol{N}$ | Şebeke elemanlarının sayısı. |
| $\boldsymbol{e_i^N}$ | $t_i$ düğüm noktasındaki mutlak hata. |
| $\{\boldsymbol{\psi_i(t)}\}_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}}$ | Sonlu üstel baz fonksiyonları. |

# 1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Delay (gecikmeli) diferansiyel denklemler tıp, biyoloji, fizik, kimya, mühendislik, ekonomi gibi bilimsel ve teknik alandaki uygulamalarda model denklemler olarak ortaya çıkmaktadır (Gopalsamy, 1992; Foley ve Mackey, 2009; Liz ve Röst, 2013; Guo ve Ma, 2016; Banks ve ark., 2017). Özellikle enzim kinetiği, enfeksiyon hastalıkları ve immünoloji alanlarındaki matematiksel modellerde karşımıza çıkmaktadır (Hairer ve ark., 2008).

Volterra tipi integral denklemlerde ise, özellikle popülasyon dinamiğinde, Volterra'nın ortaya koyduğu model sıklıkla karşımıza çıkmakta ve bu model problemin çözümü için gerek analitik gerekse yaklaşık çözümlere rastlanmaktadır (Hairer ve ark., 1983; Linz, 1985; Hackbusch, 1995; Lakshmikantham ve Rao, 1995; Kyte ve Purri, 2002; Makroglou, 2003; Burton, 2005; Rahman, 2007; Wazwaz, 2015; Jalalvand ve ark. 2013; Fazeli ve Hojjati, 2015; Okayama, 2018).

Volterra delay integral ve Volterra delay integro diferansiyel denklemler biyoloji, ekoloji, tıp ve fizik gibi alanlarda geniş bir şekilde yer almaktadır (Jerri, 1999; Bocharov ve Rihan, 2000). Özel olarak, sinir sinyallerinin yayılımı, popülasyon dinamiği, polimerik sıvılar bu denklemlerle modellenmektedir (Bocharov ve Rihan, 2000; Cushing, 1992; Jerri, 1999; Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Kuang, 1993; Markowich ve Renardy, 1983). Yaptığımız literatür taramasında, Volterra delay integral ve delay integro diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalara son 20 yılda daha fazla rastlanmaktadır. Bu çalışmaların çoğunun nümerik yöntemlere dayanması ayrıca dikkatimizi çekmektedir. Bu yöntemlerin birkaçı, Runge-Kutta metodu (Koto, 2002; Zhang ve Vandewalle, 2004; Hoppensteadt ve ark., 2007; Rihan ve ark., 2009), spline kolokasyon metodu (El-Hawary ve El-Shami, 2013), sinc-kolokasyon metodu (Zarebnia ve Shiri, 2017, Zhao ve ark., 2017), sonlu fark metodu (Yapman ve ark., 2009; Abdi ve ark.,2018; Kudu ve ark., 2018; Amiraliyev ve ark., 2019) olarak sıralanabilir. Bununla birlikte varlık teklik araştırmaları ve asimtotik yaklaşımlara da rastlanmaktadır (Kolmanovskii ve Myshkis, 1999; Caus, 2002; Brunner, 2004; Jankowski, 2008; Bellour ve Bousselsal, 2014).

Bu çalışmada aşağıdaki gecikmeli Volterra integro diferansiyel denklemin çözümünü ve bazı matematiksel özelliklerini inceleyeceğiz.

$$Lu = u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t-r) = f(t) + \int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds,\ t \in I \tag{1.1}$$

$$u(t) = \varphi(t), t \in I_0, \tag{1.2}$$

burada $I = (0,T] = \cup_{p=1}^{m} I_p, I_p = \{t: r_{p-1} < t \leq r_p\}$ ,$1 < p \leq m$ , $r_s = sr, 0 \leq s \leq m$ ve $I_0 = [-r, 0]$ (Sadelik için $T/r$ nin tamsayı olduğunu varsayalım yani $T = mr$ olsun). $a(t) \geq \alpha > 0, b(t),\ f(t),\ \varphi(t)$ ve $K(t,s)$ yeterince düzgün (istenilen türevlere sahip ve sürekli) fonksiyonlar, $r > 0$ sabit gecikme terimidir.

## 2. BAZI MODEL DENKLEMLER

Bu bölümde, çalışmamıza motivasyon sağlayan birkaç model incelenmektedir.

### 2.1. Av Avcı Popülasyonu Modeli

Popülasyon biyolojisinde sıkça karşımıza çıkan iki dinamik tür arasındaki av-avcı modeli.

$$\begin{cases} N_1'(t) = N_1'(t)(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} F_1(t-s)N_2(s)ds), t \in [0,T] \\ N_2'(t) = N_2'(t)(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} F_2(t-s)N_1(s)ds), t \in [0,T] \end{cases}$$

olarak da verilmektedir. Burada $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ reel sabitler $N_1(t) = \phi_1(t)$ ve $N_2(t) = \phi_2(t), t \in [t_0 - \tau, t_0]$ sürekli fonksiyonlardır. $N_1(t)$ ve $N_2(t)$ ise $t$ zamanında iki popülasyonu ifade etmektedir (Volterra, 1930; Jerri, 1999; Shakourifar ve Engriht, 2012).

### 2.2. Nükleer Reaktördeki Yakıt Dolaşımı Modeli

Bir nükleer reaktördeki yakıt dolaşımı teorisi Ergen(1954) tarafından

$$\dot{x}(t) = -\int\limits_{t-r}^{t} a(t-u)g\big(x(u)\big)du$$

denklemi ile modellenmiştir. Bu modelde $x$ nötron yoğunluğunu ve $a$ gevşeme fonksiyonunu temsil etmektedir.

# 3. TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER

Bu bölümde bundan sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar, gösterimler ve formüller verilmektedir.

## 3.1. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$\bar{I} = [0, T]$ aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçasına bir şebeke denir.

Eğer düğümler eşit aralıklı ise

$$\bar{\omega}_h = \{t_i | t_i = ih, i = 0,1, \dots N; h = T/N\}$$

ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki düzgün şebeke denir. $h$ sabitine şebeke adımı denir. Bu şebekede tanımlanmış $g_i = g(t_i)$ fonksiyonuna ise $t_i$ noktasındaki şebeke fonksiyonu denir (Amirali ve Amirali, 2018).

## 3.2. Dikdörtgen Metodu

$[0, T]$ aralılığında sürekli herhangi bir $f(t)$ fonksiyonunun integralinin yaklaşık değeri

$$\int_0^T f(t)dt \approx h \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-\frac{1}{2}})$$

ifadesiyle verilmektedir (Amirali ve Amirali, 2018).

## 3.3. Fark Türevi

$\bar{I}$ aralığında tanımlı düzgün şebekede herhangi bir $g(t)$ fonksiyonunun

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$$

ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir (Amirali ve Amirali, 2018).

### 3.4. Şebeke Normu

Şimdide fark problemi için kullanacağımız normları tanıtalım.

$\|g\|_{\infty,\bar{\omega}_h} = max_{0\le i\le N}|g_i|$ ifadesine düzgün şebekede maksimum normun fark benzeri denir.

$\|g\|_{1,\bar{\omega}_h} = h\sum_{i=1}^{N-1}|g_i|$ ifadesine düzgün şebekede $l_1$ normun fark benzeri denir (Amirali ve Amirali, 2018).

### 3.5. Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(t), t \in G \tag{3.1}$$

denkleminin

$$lu = \mu(t), t \in \Gamma \tag{3.2}$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şartı olabilir) sağlayan çözümün bulunması istensin, burada $f(t)$, $\mu(t)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), $l$ belirli bir lineer diferansiyel operatörüdür. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup l_h$ şebekesinin kurulduğunu varsayalım, burada $\omega_h$-iç şebeke $l_h$ -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), $h$ ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir (3.1)-(3.2) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, t \in \omega_h \tag{3.3}$$

$$l_h y = X_h, t \in l_h \tag{3.4}$$

fark problemi olsun. Burada $L_h, l_h - \bar{\omega}_h$ ‘da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, $\varphi_h, X_h$ belli şebeke fonksiyonlarıdır.

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

(3.3)-(3.4) fark problemi, belli sınıflardan olan her bir $\varphi_h, X_h$ başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğunu varsayalım. (3.3)-(3.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h, \tilde{X}_h$ olan çözümünü $\tilde{y}$ ile belirleyelim

Eğer öyle, $h$' a bağlı olmayan $C_1, C_2$ sabitleri varsa, yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \left\|\tilde{X}_h - X_h\right\|_3 \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanmış olsun, bu durumda (3.3)-(3.4) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir. Burada $\| \, \|_1, \| \, \|_2, \| \, \|_3$ herhangi şebeke normlarıdır.

(3.3)-(3.4) problemi lineer olduğundan, kararlılığı ifade eden (3.5) eşitsizliği

$$\|y\|_1 \leq C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|X_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir.

Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğuna, hem de bu bağlılığın $h$'a göre düzgün biçimli olduğunu ifade eder (Amirali ve Amirali, 2018).

**Tanım 3.6. Yakınsaklık**

$u$, (3.1)-(3.2) probleminin kesin çözümü ve $y$'de herhangi bir şebekedeki bu probleme uygun fark problemin çözümü olsun. $z = y - u$ farkı hata fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

Eğer $h \to 0$ olduğunda $\|z\|_0 = \|y-u\|_1 \to 0$ ise ( söz konusu şebekedeki herhangi bir norm), bu durumda $y$ fark problemin çözümü $u$ probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük $h$ sabitleri için

$$\|y-u\|_1 \leq Ch^k, k > 0$$

ise ( $C, h$'a bağlı olmayan sabittir) bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $h$'ın $k$'yıncı derecesiyle yakınsar veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir (Amirali ve Amirali, 2018).

**Tanım 3.7.**

$f(t)$, $\bar{I}$ 'de tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun.

a) $C^{(n)}(\bar{I})$ ifadesine $\bar{I}$ aralığında $t$'ye göre $n$. mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi denir.

b) $\|f\|_{C(\bar{I})}$ ifadesine $\bar{I}$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için maksimum norm denir (Amirali ve Amirali, 2018).

## 3.8 Bazı Formüller

Burada problemin nümerik çözümünde kullanacağımız bazı formüllere yer verilecektir. Ayrıca, formüllerde $p(x) \in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonu, $f(x) \in C^1[a,b]$ reel değerli bir fonksiyon olarak alınmaktadır.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(b) + (1-\sigma)f(a)\}$$

$$+f[a,b]\int_a^b \left(x - x^{(\sigma)}\right)p(x)dx + R(f), \tag{3.6}$$

burada $\sigma$-reel parametre ve

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, \qquad f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$R(f) = \int_a^b dxp(x) \int_a^b f^{'}(\xi)[T_0(x-\xi) - (x-a)(b-a)^{-1}]d\xi$$

$$T_0(t) = 1, t > 0\ ;\ T_0(t) = 0, t \leq 0$$

$R(f)$, kalan terimi ifade etmektedir (Amirali ve Amirali, 2018).

$$\int_a^b p(x)f^{'}(x)dx = f[a,b]\int_a^b p(x)dx + R^*(f), \tag{3.7}$$

burada kalan terim

$$R^*(f) = -\int_a^b dxp'(x)dx \int_a^b f'(\xi)[T_0(x-\xi) - (x-a)(b-a)^{-1}]d\xi,$$

biçimindedir (Amirali ve Amirali, 2018).

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left(\int_a^b p(x)dx\right) f\left(x^{(\sigma)}\right) + \dot{R}\ , \tag{3.8}$$

burada kalan terim

$$\dot{R} = \int_a^b dxp(x) \int_a^b f'(\xi)\left[T_0(x-\xi) - T_0\left(x^{(\sigma)} - \xi\right)\right]d\xi$$

olarak belirlenmektedir (Amirali ve Amirali 2018).

Gronwall eşitsizliği: $p(t) \geq 0$ sürekli ve reel değerli bir fonksiyon, $v$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$$v(t) \leq C + \int_0^t p(s)v(s)ds$$

ise , bu durumda

$$v(t) \le Ce^{\int_0^t p(s)ds}$$

eşitsizliği doğrudur (Amirali ve Amirali, 2018).

# 4. MATERYAL VE YÖNTEM

## 4.1. Analitik Yöntemler

Bu bölümde (1.1)-(1.2) probleminin kesin çözümü için literatürde adım metodu olarak bilinen Bellman'ın yöntemini kullanacağız (Bellman, 1963).

### 4.1.1. Adım metodu

İlk olarak, $t \in I_1$ için yani $0 < t \leq r$ aralığı için (1.1) denklemini yeniden yazarsak,

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)\varphi(t-r) = f(t) + \int_{t-r}^{0} K(t,s)\varphi(s)ds + \int_{0}^{t} K(t,s)u(s)ds,$$

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = F_1(t) + \int\limits_{0}^{t} K(t,s)u(s)ds\,, \\ u(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

$$F_1(t) = f(t) - b(t)\varphi(t-r) + \int\limits_{t-r}^{0} K(t,s)\varphi(s)ds$$

birinci mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklemini elde ederiz, bu denklemin çözümünü $u_1(t)$ olarak adlandıralım.

Şimdi $t \in I_2$ için yani $r < t \leq 2r$ için (1.1) denkleminden,

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u_1(t-r) = f(t) + \int\limits_{t-r}^{r} K(t,s)u_1(t)ds + \int\limits_{r}^{t} K(t,s)u(s)ds$$

yazarız. Buradan, yine

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = F_2(t) + \int\limits_{r}^{t} K(t,s)u(s)ds\,, \\ u(r) = u_1(r), \end{cases}$$

$$F_2(t) = f(t) - b(t)u_1(t-r) + \int\limits_{t-r}^{r} K(t,s)u_1(s)ds$$

birinci mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklem elde ederiz, bu denklemin çözümünü de $u_2(t)$ olarak adlandıralım.

Benzer şekilde $t \in I_m$ için yani $(m-1)r < t \leq mr$ için (1.1)'den

$$u'(t) + a(t)u(t) = F_{m-1}(t) + \int\limits_{t-(m-1)r}^{mr} K(t,s)u_{m-1}(s)ds + \int\limits_{mr}^{t} K(t,s)u(s)ds$$

yazarız. Buradan da

$$\begin{cases} u'(t) + a(t)u(t) = F_m(t) + \int\limits_{mr}^{t} K(t,s)u(s)ds\,, \\ u(mr) = u_{m-1}(r), \end{cases}$$

$$F_m(t) = f(t) - b(t)u_{m-1}(t-r) + \int\limits_{t-mr}^{mr} K(t,s)u_{m-1}(s)ds$$

birinci mertebeden Volterra integro-diferansiyel denklem elde ederiz, bu denklemin çözümünü de $u_m(t)$ olarak adlandıralım. Böylece, (1.1)-(1.2) probleminin çözümünü

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -r < t \leq 0 \\ u_1(t), & 0 < t \leq r \\ u_2(t), & r < t \leq 2r \\ \vdots & \\ u_m(t), & (m-1)r < t \leq mr \end{cases}$$

olarak ifade edebiliriz.

Şimdi de somut bir örneği bu metodu kullanarak çözelim.

**Örnek 4.1**

$$\begin{cases} u'(t) + 2u(t) - u(t-1) = e^{t-1} - 2t + \int_{t-1}^{t} (t-s)u(s)ds, 0 < t \le 2\,, \\ u(t) = e^t, -1 \le t \le 0. \end{cases}$$

Öncelikle $t \in I_1 = (0,1]$ alalım. Buradan

$$u'(t) + 2u(t) - \varphi(t-1) = e^{t-1} - 2t + \int_{t-1}^{0} (t-s)\varphi(s)ds + \int_{0}^{t} (t-s)u(s)ds,$$

$$u(0) = \varphi(0)$$

problemini yazabiliriz. $\varphi(t) = e^t$ başlangıç fonksiyonunu dikkate alırsak,

$$u'(t) + 2u(t) + t - 1 = \int_{0}^{t} (t-s)u(s)ds,$$

$$u(0) = 1$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümü

$$u_1(t) = e^{-t}$$

olarak kolayca bulunabilir.

İkinci olarak $t \in I_2 = (1,2]$ aralığındaki çözümü bulalım:

$$u'(t) + 2u(t) - u_1(t-1) = e^{t-1} - 2t + \int_{t-1}^{1} (t-s)u_1(s)ds + \int_{1}^{t} (t-s)u(s)ds$$

$$u(1) = u_1(1)$$

olur. $u_1(t) = e^{-t}$ olduğunu dikkate alırsak

$$u'(t) + 2u(t) - e^{1-t} = e^{t-1} - 2t + \int_{1}^{t} (t-s)u(s)ds$$

$$u(1) = e^{-1}$$

denklemini elde ederiz. Buradan $\delta^{\pm} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ olmak üzere

$$u_2(t) = \frac{4}{\sqrt{5}}\left[\delta^- e^{\delta-(t-1)} - \delta^+ e^{\delta+(t-1)}\right] + \frac{1}{2}e^{t-1} + \left(\frac{9}{2} + e^{-1} - t\right)e^{1-t}$$

olarak buluruz. Böylece verilen problemin çözümünü:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \in (0,1], \\ \frac{4}{\sqrt{5}}\left[\delta^- e^{\delta-(t-1)} - \delta^+ e^{\delta+(t-1)}\right] + \frac{1}{2}e^{t-1} + \left(\frac{9}{2} + e^{-1} - t\right)e^{1-t}, & t \in (1,2] \end{cases}$$

olarak buluruz.

## 4.2. Nümerik Yöntemler

Bu bölümde, (1.1)-(1.2) probleminin çözümü için bazı nümerik yöntemler ele alacağız. Öncelikle, nümerik yöntemde kullanacağımız problemin analitik çözümünün bazı özelliklerini araştıracağız.

### 4.2.1. Bazı asimtotik değerlendirmeler

**Lemma 4.1:** $a, b, f \in C(\bar{I}), \varphi \in C^1(I_0)$ ve $K \in C(I \times I)$ olsun. O zaman (1.1)-(1.2) probleminin analitik çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\|u\|_{\infty,p} \leq C_p, 1 \leq p \leq m, \tag{4.1}$$

$$\|u'\|_{\infty,p} \leq D_p, 1 \leq p \leq m, \tag{4.2}$$

burada

$$C_p = \|\varphi\|_{\infty,p}\delta^p + \alpha^{-1}\frac{1-\delta^p}{1-\delta}\left(\|f\|_{\infty,p} + \bar{K}\|\varphi\|_{1,0}\right)e^{-\alpha^{-1}\bar{K}T}, 1 \leq p \leq m,$$

$$D_1 = \left(\|\alpha\|_{\infty,1} + \bar{K}T\right)C_1 + \|b\|_{\infty,1}\|\varphi\|_{\infty,0} + \|f\|_{\infty,1} + \bar{K}\|\varphi\|_{1,0},$$

$$D_p = \left(\|\alpha\|_{\infty,p} + \bar{K}T\right)C_p + \|b\|_{\infty,p}C_{p-1} + \|f\|_{\infty,p} + \bar{K}\|\varphi\|_{1,0}, 2 \leq p \leq m,$$

ve

$$\delta = \left(1 + \alpha^{-1}\|b\|_{\infty,p}\right)e^{-\alpha^{-1}\bar{K}T}, \bar{K} = \max_{(t,s)\in \bar{I}\times\bar{I}}|K(t,s)|,$$

$$\|\varphi\|_{1,0} = \int_{-r}^{0}|\varphi(s)|ds.$$

biçimindedir (Cimen ve Yatar, 2020).

*İspat.* İlk olarak (1.1) denklemindeki integrali ele alalım:

$$\left|\int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds\right| \le \int_{t-r}^{t} K(t,s)|u(s)|ds$$

$$= \bar{K}\int_{t-r}^{t}|u(s)|ds = \bar{K}\begin{cases}\int_{t-r}^{0}|\varphi(s)|ds + \int_{0}^{t}|u(s)|ds, & 0 < t \le r,\\ \int_{t-r}^{t}|u(s)|ds, & t > r.\end{cases}$$

Buradan

$$\left|\int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds\right| \le \bar{K}\left(\|\varphi\|_{1,0} + \int_0^t|u(s)|\, ds\right) \tag{4.3}$$

yazabiliriz. Şimdi, $t \in I_p$ için (1.1) den

$$u(t) = u(r_{p-1})e^{-\int_{r_{p-1}}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{r_{p-1}}^{t} F(\xi)e^{-\int_{\xi}^{t} a(\tau)d\tau}d\,\xi$$

yazarız. Burada

$$F(t) = f(t) - b(t)u(t-r) + \int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds.$$

biçimindedir. Buradan

$$|u(t)| \le \left|u(r_{p-1})\right|e^{-\int_{r_{p-1}}^{t}\alpha(\tau)d\tau}$$

$$+ \int_{r_{p-1}}^{t}\left[|f(\xi)| + |b(\xi)||u(\xi - r)| + \int_{\xi-r}^{\xi}|K(\xi,s)||u(s)|ds\right]e^{-\int_{\xi}^{t}(\tau)d\tau}d\xi$$

$$\leq \left|u\left(r_{p-1}\right)\right|e^{-\alpha\left(t-r_{p-1}\right)}$$

$$+\int_{r_{p-1}}^{t}\left[|f(\xi)|+|b(\xi)||u(\xi-r)|+\int_{\xi-r}^{\xi}|K(\xi,s)||u(s)|ds\right]e^{-\alpha(t-\xi)}d\xi \qquad (4.4)$$

elde ederiz. Daha sonra (4.3) eşitsizliğini (4.4) te göz önüne alırsak

$$\|u\|_{\infty,p} \leq \|u\|_{\infty,p-1}+\alpha^{-1}\left[\|f\|_{\infty,p}+\|b\|_{\infty,p}\|u\|_{\infty,p-1}+\bar{K}\left(\|\varphi\|_{1,0}+\int_0^t|u(s)|ds\right)\right]$$

$$\leq \left(1+\alpha^{-1}\|b\|_{\infty,p}\right)\|u\|_{\infty,p-1}+\alpha^{-1}\left[\|f\|_{\infty,p}+\bar{K}(\|\varphi\|_{1,0}+\int_0^T|u(s)|ds\right]$$

elde ederiz. Sonra, Gronwall eşitsizliğini kullanarak

$$\|u\|_{\infty,p} \leq \left[\left(1+\alpha^{-1}\|b\|_{\infty,p}\right)\|u\|_{\infty,p-1}+\alpha^{-1}\left(\|f\|_{\infty,p}+\bar{K}\|\varphi\|_{1,0}\right)\right]e^{\alpha^{-1}\bar{K}T}.$$

eşitsizliğine ulaşırız. Buradan

$$v_p=\|u\|_{\infty,p}, q=\left(\alpha^{-1}\|b\|_{\infty,p}\right)e^{\alpha^{-1}\bar{K}T},$$

$$\lambda=\alpha^{-1}(\|f\|_{\infty,p}+\bar{K}\|\varphi\|_{1,0})\ e^{\alpha^{-1}\bar{K}T}$$

olarak alırsak, aşağıdaki birinci mertebeden fark eşitsizliği olarak yazabiliriz:

$$v_p \leq q v_{p-1}+\lambda.$$

Buradan da

$$v_p \leq v_0 q^p \sum_{s=1}^{p} q^{p-s}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece (4.1)'in doğruluğunu göstermiş oluruz.

(4.2)'nin ispatı için $p$'ye göre tümevarım yöntemini kullanacağız. (4.1) ve (4.3) ten

$$|u'(t)| \leq |a(t)||u(t)|+|b(t)||u(t-r)|+|f(t)|+\bar{K}(\|\varphi\|_{1,0}+\int_0^t|u(s)|ds) \qquad (4.5)$$

yazabiliriz. İlk olarak $p = 1$ $(t \in I_1)$ için (4.5)'ten

$$|u'(t)| \leq \|a\|_{\infty,1}\|u\|_{\infty,1} + \|b\|_{\infty,1}\|\varphi\|_{\infty,0+}\|f\|_{\infty,1} + \bar{K}(\|\varphi\|_{1,0} + \|u\|_{\infty,1}T) \equiv D_1$$

buluruz. Şimdi (4.2) eşitsizliği $p = k$ için doğru olsun. Yani

$$D_k = \left(\|a\|_{\infty,k} + \bar{K}T\right)C_k + \|b\|_{\infty,k}C_{k-1} + \|f\|_{\infty,k} + \bar{K}\|\varphi\|_{1,0}.$$

$t \in I_{k+1}$ için, (4.5)'ten

$$|u'(t)| \leq \|a\|_{\infty,k+1}\|u\|_{\infty,k+1} + \|b\|_{\infty,k+1}\|u\|_{\infty,k}$$

$$+\|f\|_{\infty,k+1} + \bar{K}\left(\|\varphi\|_{1,0} + \|u\|_{\infty,k+1}T\right)$$

elde ederiz. Bu ise (4.2) eşitsizliğinin $p = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir (Cimen ve Yatar, 2020).

### 4.2.2. Fark şeması

$\omega_{N_0}$, $\bar{I}$ aralığında düzgün bir şebeke olsun:

$$\omega_{N_0} = \{t_i = ih, i = 1,2, \dots n_0, h = T/N_0 = r/N\}.$$

Her $I_p = (1 \leq p \leq m)$ alt aralığında $N$ adet düğüm noktası içeren

$$\omega_{N_p} = \{t_i : (p-1)N : +1 \leq i \leq pN, \leq p \leq m\}$$

şebekesini tanımlayalım. Sonuç olarak

$$\omega_{N_0} = \cup_{p=1}^{m} \omega_{N_p}$$

olacaktır.

(1.1) probleminin fark yaklaşımı için aşağıdaki özdeşliği kullanacağız:

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t)\psi_i dt = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) + \int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds\psi_i(t)dt, 1 \leq i \leq N_0, \quad (4.6)$$

burada

$$\psi_i(t) = e^{-\int_t^{t_i} a(\tau)d\tau}, t_{i-1} \le t \le t_i.$$

baz fonksiyonu

$$-\psi'_i(t) + a(t)\psi_i(t) = 0, t_{i-1} < t \le t_i, \psi_i(t_i) = 1. \tag{4.7}$$

problemin çözümüdür. (4.6) bağıntısını düzenlersek

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t)\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)u(t)\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)u(t-r)\psi_i\,(t)dt$$

$$= h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[\int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds]\psi_i(t)\,dt. \tag{4.8}$$

buluruz. Öncelikle, (4.8) denkleminin sol tarafını dikkate alarak her $(t_{i-1}, t_i)$ aralığında (3.6) ve (3.7) formüllerini kullanırsak,

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t)\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)u(t)\psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)u(t-r)\psi_i\,(t)dt$$

$$= A_i u_{\bar{t},i} + B_i u_{\bar{t},i} + C_i u_i + D_i u_{i-N} + R_i^{(1)}$$

elde ederiz. Burada

$$A_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t)dt + h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-t_i)a(t)\psi_i\,(t)dt, \tag{4.9}$$

$$B_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-t_i)b(t)\psi_i\,(t)dt, \tag{4.10}$$

$$C_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)\psi_i(t)dt, D_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t-t_i)b(t)\psi_i\,(t)dt, \tag{4.11}$$

$$R_i^{(1)} = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt b(t)\psi_i(t)dt \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(s-r)[T_0(t-s) - h^{-1}(t-t_{i-1})]\,ds \tag{4.12}$$

biçimindedir. Şimdi de (4.8) denkleminin sağ tarafındaki integral terimi için (3.8) formülünü ve dikdörtgen metodunu kullanırsak,

$$h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}[\int_{t-r}^{t} K(t,s)u(s)ds\psi_i(t)dt$$

$$= h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i(t)dt\int_{t_{i-\frac{1}{2}}-1}^{t_{i-\frac{1}{2}}} K\left(t_{i-\frac{1}{2}},s\right)u(s)ds + R_i^{(2)}$$

$$= h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i(t)dt\left(h\sum_{j=i-N}^{i-1}K(t_{i-\frac{1}{2}},s_j)u_j\right)+R_i^{(2)}+R_i^{(3)}$$

elde ederiz. Burada

$$R_i^{(2)} = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i(t)dt\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{d}{dt}(\int_{\xi-r}^{\xi}K(\xi,s)u(s)ds)[T_0\,(t-\xi)-T_0(t_{i-\frac{1}{2}}-\xi)]d\xi, \tag{4.14}$$

$$R_i^{(3)} = \sum_{j=i-N}^{i-1}\int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}}\left(t_{j+\frac{1}{2}}-\xi-hT_0\big(t_j-\big)\right)\frac{d}{ds}(K(t_{i-\frac{1}{2}},s)u(s))ds \tag{4.15}$$

biçimindedir.

Böylece, $u(t_i)$ için

$$\ell u_i \equiv A_i u_{\bar{t},i} + B_i u_{\bar{t},i-N} + C_i u_i + D_i u_{i-N}$$

$$= F_i + E_i h\sum_{j=i-N}^{i-1}K_{i-\frac{1}{2},j}u_j + R_i, 1 \le i \le N_0, \tag{4.16}$$

kesin fark şemasını elde ederiz. Burada

$$E_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_i(t)dt, F_i = h^{-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}f(t)\psi_i\,(t)dt,$$

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \tag{4.17}$$

şeklindedir, $A_i, B_i\,, C_i, D_i$ ve $R_i^{(k)}$ $(k = 1,2,3)$ sırasıyla (4.9)-(4.10) ve (4.11)-(4.12) eşitliklerinde belirlenmiştir.

Sonuç olarak, (4.16) eşitliğinden (1.1)-(1.2) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki fark şemasını önerebiliriz (Cimen ve Yatar, 2020):

$\ell y_i \equiv A_i y_{\bar{t},i} + B_i y_{\bar{t},i-N} + C_i y_i + D_i y_{i-N} = F_i + E_i h \sum_{j=i-N}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} y_j, 1 \leq i \leq N_0,$(4.18)

$y_i = \varphi_i, -N \leq i \leq 0.$ (4.19)

Ayrıca (1.1)-(1.2) problemi için, diferansiyel denklem kısmına Euler yöntemini ve integral terimine dikdörtgen yöntemini kullanarak ikinci bir fark şemasını da kolayca oluşturabiliriz (Cimen ve Yatar, 2020):

$y_{\bar{t},i} + a_i y_i + b_i y_{i-N} = f_i + h \sum_{j=i-N}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} y_j, 1 \leq i \leq N_0,$ (4.20)

$y_i = \varphi_i, -N \leq i \leq 0.$ (4.21)

### 4.2.3. Hata analizi

Sunduğumuz yöntemin yakınsaklığını araştırmak için, ilk olarak $z_i = y_i - u_i$, $i \leq i \leq N_0$ hata fonksiyonunu tanımlıyoruz. Öyle ki, bu fonksiyon

$\ell z_i = R_i, 1 \leq i \leq N_0,$ (4.22)

$z_i = 0, N_0 \leq i \leq 0$ (4.23)

probleminin çözümüdür ve $R_i$ (4.17)'de ifadesi geçen kalan terimdir.

**Lemma 4.2.** $a, b, f \in C(\bar{I}), \varphi \in C(I_0)$ ve $K \in C^1(\bar{I} \times \bar{I})$ olsun. $R_i$ hata terimi için

$\|R\|_{\infty,p} \leq Ch, 1 \leq p \leq m$ (4.24)

değerlendirmesi doğrudur (Cimen ve Yatar, 2020).

*İspat.* Lemmanın ispatını her bir hata terimini ayrı ayrı inceleyerek yapacağız. İlk olarak $R_i^{(1)}$ için (4.12) denkleminden

$$\left|R_i^{(1)}\right| \leq Ch^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt |b(t)| \psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi - r)| \, d\xi.$$

yazarız. Lemma 4.1 ve $0 < \psi_i(t) \leq 1$ den

$$R_i^{(1)} \leq Ch$$

olduğunu görürüz. ${R_i}^{(2)}$ hatası için (4.14)'i kullanırsak

$$R_i^{(2)} \leq Ch^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt\psi_i(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, r) \right| |u(s)| + |K(\xi, \xi)||u(\xi)| \right.$$
$$\left. + |K(\xi, \xi - r)||u(\xi)| \right] d\xi$$

yazarız. Yine Lemma 4.2, $\left|\frac{\partial}{\partial x} K(t,s)\right| \leq C$ ve $0 < \psi_i(t) \leq 1$ den

$$R_i^{(2)} \leq Ch$$

olur. Son olarak, ${R_i}^{(3)}$ hatası için (4.15)'i kullanırsak

$$\left|R_i^{(3)}\right| = Ch \sum_{j=i-N}^{i-1} \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_{j+\frac{1}{2}}} \left[ \left| \frac{\partial}{\partial s} K(t_{i-\frac{1}{2}}, s) \right| |u(s)| + \left| K(t_{i-\frac{1}{2}}, s) \right| |u'(s)| \right] ds$$

yazarız ve Lemma 4.2 ve $\left|\frac{\partial}{\partial x} K(t,s)\right| \leq C$ den

$$\left|R_i^{(3)}\right| = Ch \sum_{j=i-N}^{i-s} \left( t_{j+\frac{1}{2}} - t_{j-\frac{1}{2}} \right) = Ch^2 N$$

buluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur (Cimen ve Yatar, 2020).

**Lemma 4.3** $z_i$, (4.22)-(4.23) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\|z\|_{\infty,p} \leq C \sum_{k=1}^{p} \|R\|_{\infty,k},\ 1 \leq p \leq m$$

eşitsizliği doğrudur (Cimen ve Yatar, 2020).

*İspat*. (4.22) denkleminden,

$$A_i z_{\bar{t},i} + B_i z_{\bar{t},i-N} + C_i z_i + D_i z_{i-N} = E_i h \sum_{j=i-N}^{i-1} K_{i-\frac{1}{2},j} z_j + R_i, 1 \leq i \leq N_0$$

yazabiliriz. İlk olarak eşitliğin sağındaki toplamı ele alırsak

$$\left|h\sum_{j=i-N}^{i-1}K_{i-\frac{1}{2},j}z_j\right| \le h\overline{K}\sum_{j=i-N}^{i-1}|z_j| \le \begin{cases} h\overline{K}\sum_{j=i-N}^{0}|\varphi_j| \ , & i=1 \\ h\overline{K}\sum_{j=i-N}^{0}|\varphi_j| + h\overline{K}\sum_{j=1}^{i-1}|z_j|, & 1<i\le N \\ h\overline{K}\sum_{j=i-N}^{i-1}|z_j|, & i>N \end{cases}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left|h\sum_{j=i-N}^{i-1}K_{i-\frac{1}{2},j}z_j\right| \le \overline{K}\|\varphi\|_{1,0} + h\overline{K}\sum_{j=1}^{i}|z_{j-1}|.$$

elde ederiz. (4.22)-(4.23) fark probleminin çözümünden Lemma 4.2'in ispatına benzer biçimde

$$\|z\|_{\infty,p} \le \alpha^{-1}\sum_{k=1}^{p}\|R\|_{\infty,k}Q_{p-k} \quad 1\le p\le m,$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada

$$Q_{p-k} = \begin{cases} 1, & k=p, \\ \prod_{s=k+1}^{p}(1+\alpha^{-1}(\|a\|_{\infty,I_s}+\|b\|_{\infty,I_s})), & 0\le k\le p-1 \end{cases}$$

biçimindedir (Cimen ve Yatar, 2020).

(4.2) ve (4.3) lemmalarını birlikte düşünürsek, önerdiğimiz nümerik yöntemin yakınsaklığını ifade eden teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.1.** $u$ (1.1)-(1.2) probleminin ve $y$, (4.6)-(4.7) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\|y-u\|_{\infty,\omega_{N_0}} \le Ch$$

değerlendirmesi doğrudur (Cimen ve Yatar, 2020).

# 5. BULGULAR

Bu bölümde, sunulan yeni şema ile klasik Euler şeması için bir örnek inceleyeceğiz. Her iki şemayı kullanarak elde ettiğimiz nümerik sonuçları tablolarda listeleyerek, kesin hataların maksimum değerlerini karşılaştırıyoruz.

Örnek 4.1'de verilen test problemini ele alalım:

$u'(t) + 2u(t) - u(t-1) = e^{t-1} - 2t + \int_{t-1}^{t} (t-s)u(s)ds, 0 < t \leq 2,$

$u(t) = e^{t}, -1 \leq t \leq 0.$

Bu problemin kesin çözümü

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \in (0,1], \\ \dfrac{4}{\sqrt{5}}\left[\delta^{-} e^{\delta-(t-1)} - \delta^{+} e^{\delta+(t-1)}\right] + \dfrac{1}{2} e^{t-1} + \left(\dfrac{9}{2} + e^{-1} - t\right) e^{1-t}, & t \in (1,2], \end{cases}$$

$$\delta^{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

biçimindedir.

Herhangi bir $N$ değeri için kesin hata $e_i^N$ ve bu noktadaki maksimum hata ise $e^N$

$$e_i^N = |y_i - u_i|, e^N = \max_{0 \leq i \leq N} e_i^N$$

olarak tanımlayalım. Burada, $t_i$ düğüm noktaları için $u_i$ kesin çözümü $y_i$ ise nümerik çözümü ifade etmektedir. $N$'in farklı değerleri için (4.18)-(4.19)'da sunulan metot (SM) ve (4.20)-(4.21)'de verilen Euler metodu (EM) kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Çizelge 1. (0,2] aralığında (SM) için test probleminin nümerik sonuçları.

| $t_i$ | $u_i$ | $y_i$(N=64) | $e_i^{64}$ | $y_i$(N=128) | $e_i^{128}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.125 | 0.8824969 | 0.8824977 | 8.158E-7 | 0.8824971 | 2.040E-7 |
| 0.250 | 0.7788008 | 0.7788030 | 2.225E-6 | 0.7788013 | 5.563E-7 |
| 0.375 | 0.6872893 | 0.6872935 | 4.251E-6 | 0.6872903 | 1.063E-6 |
| 0.500 | 0.6065307 | 0.6065376 | 6.921E-6 | 0.6065324 | 1.731E-6 |
| 0.625 | 0.5352614 | 0.5352717 | 1.027E-5 | 0.5352640 | 2.568E-6 |
| 0.750 | 0.4723666 | 0.4723809 | 1.434E-5 | 0.4723701 | 3.584E-6 |
| 0.875 | 0.4168620 | 0.4168812 | 1.918E-5 | 0.4168668 | 4.794E-6 |
| 1.000 | 0.3678794 | 0.3679043 | 2.485E-5 | 0.3678857 | 6.214E-6 |
| 1.125 | 0.3108644 | 0.3108857 | 2.128E-5 | 0.3108697 | 5.319E-6 |
| 1.250 | 0.2378586 | 0.2378772 | 1.859E-5 | 0.2378632 | 4.648E-6 |
| 1.375 | 0.1563964 | 0.1564131 | 1.672E-5 | 0.1564006 | 4.179E-6 |
| 1.500 | 0.1563964 | 0.0723380 | 1.559E-5 | 0.0723263 | 3.897E-6 |
| 1.625 | -0.0097872 | -0.0097720 | 1.514E-5 | -0.0097834 | 3.785E-6 |
| 1.750 | -0.0862851 | -0.0862697 | 1.531E-5 | -0.0862812 | 3.828E-6 |
| 1.875 | -0.1541774 | -0.1541614 | 1.604E-5 | -0.1541734 | 4.009E-6 |
| 2.000 | -0.2108996 | -0.2108823 | 1.726E-5 | -0.2108953 | 4.314E-6 |

Çizelge 2. (0,2] aralığında (EM) için test probleminin nümerik sonuçları.

| $t_i$ | $u_i$ | $y_i$(N=64) | $e_i^{64}$ | $y_i$(N=128) | $e_i^{64}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.125 | 0.8824969 | 0.8830591 | 5.622E-3 | 0.8827802 | 2.833E-4 |
| 0.250 | 0.7788008 | 0.7797059 | 9.051E-4 | 0.7792562 | 4.554E-4 |
| 0.375 | 0.6872893 | 0.6884010 | 1.112E-3 | 0.6878477 | 5.584E-4 |
| 0.500 | 0.6065307 | 0.6077771 | 1.246E-3 | 0.6071556 | 6.249E-4 |
| 0.625 | 0.5352614 | 0.5366208 | 1.359E-3 | 0.5359418 | 6.804E-4 |
| 0.750 | 0.4723666 | 0.4738566 | 1.490E -3 | 0.4731112 | 7.446E-4 |
| 0.875 | 0.4168620 | 0.4185319 | 1.670E-3 | 0.4176955 | 8.336E-4 |
| 1.000 | 0.3678794 | 0.3698046 | 1.925E-3 | 0.3688397 | 9.603E-4 |
| 1.125 | 0.3108644 | 0.3116622 | 7.978E-4 | 0.3112550 | 3.906E-4 |
| 1.250 | 0.2378586 | 0.2382602 | 4.016E-4 | 0.2380500 | 1.914E-4 |
| 1.375 | 0.1563964 | 0.1568536 | 4.572E-4 | 0.1566167 | 2.203E-4 |
| 1.500 | 0.1563964 | 0.0731035 | 7.811E-4 | 0.0727067 | 3.843E-4 |
| 1.625 | -0.0097872 | -0.0085294 | 1.258E-3 | -0.0091625 | 6.247E-4 |
| 1.750 | -0.0862851 | -0.0844663 | 1.819E-3 | -0.0853781 | 9.070E-4 |
| 1.875 | -0.1541774 | -0.1517501 | 2.427E-3 | -0.1529648 | 1.213E-3 |
| 2.000 | -0.1541774 | -0.2078312 | 3.068E-3 | -0.2093656 | 1.534E-3 |

Çizelge 3. Her iki yöntemdeki $e^N$ nin karşılaştırılması.

| $N$ | $e^N$(EM) | $e^N$(SM) | N | $e^N$(EM) | $e^N$(SM) |
|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 6.138E-3 | 9.938E-5 | 256 | 7.670E-4 | 1.553E-6 |
| 64 | 3.068E-3 | 2.485E-5 | 512 | 3.835E-4 | 3.884E-7 |
| 128 | 1.534E-3 | 6.214E-6 | 1024 | 1.917E-4 | 9.709E-8 |

# 6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada birinci mertebeden lineer gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemin kesin ve nümerik çözümleri ele alındı. Katsayıları integral biçiminde olan fark şeması ve Euler şeması ile integral için kuadratür formülleri kullanılarak nümerik çözümler geliştirildi. Metotların sonuçları bir örnek üzerinde test edildi. Buna göre, her bir metot için $N = 64$ ve $N = 128$ alınarak çeşitli düğüm noktalarındaki analitik çözüm, nümerik çözüm ve kesin hata değerleri ve $N$'in daha büyük değerleri için kesin hata değerleri Tablo 1-3'de gösterildi. Tablolardaki bu sonuçlar her iki yöntemin doğruluğunu ve tutarlılığını gösterir niteliktedir. Özellikle Tablo 3.'deki sonuçlarla problemin nümerik çözümünde kullanılan her iki metot karşılaştırıldı. Bu sonuçlar, sunulan yeni metodun klasik Euler metoduna göre çok daha iyi olduğunu göstermktedir.

Elde edilen teorik ve nümerik sonuçlar, lineer gecikmeli nötral (neutral) tip Volterra integro diferansiyel denklem içeren problemlerin çözümü için yol gösterici niteliktedir.

## KAYNAKLAR


Abdi, A., Berrut, J., Hosseini S. A., 2018. The linear barycentric rational method for a class of delay Volterra integro-differential equations, ***J. Sci. Comput.*** **75** (3): 1757-1775.

Amirali, G., Amirali, H., 2018. ***Nümerik Analiz***. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Amiraliyev G. M., Yapman, Ö., Kudu, M., 2019. A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial layer, ***Hacet. J. Math. Stat.*** **48**(5): 1417-1429.

Banks, H. T., Banks, J. E., Bommarco, R., Laubmeier, A. N., Myers, N. J., Rundlöf, M., Tillman, K., 2017. Modeling bumble bee population dynamics with delay differential equations, ***Ecol. Model.*** **351:** 14-23.

Bellour A., Bousselsal M., 2014. Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method, ***Math. Meth. Appl. Sci.*** **37:** 1491-1506.

Bellman, R. E., Cooke, K. L., 1963. ***Differential-Difference Equations***. New York: Academic Press.

Burton, T. A., 2005. ***Volterra Integral and Differential Equations***, ***2nd Edt***. Amsterdam: Elsevier.

Bocharov G. A., Rihan F. A., 2000. Numerical modelling in biosciences with delay differential equations, ***J. Comput. Appl. Math.*** **125**: 183-199

Brunner, H., 2004. ***Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations***, Cambridge: Cambridge University Press.

Caus V. A., 2002. Delay integral equations, ***Analele Univ. Oradea, Fasc. Mat.*** **9**:109-112.

Cimen, E., Yatar, S., 2020. Numerical solution of Volterra integro differential equation with delay, ***J. Math. Computer Sci.,*** Accepted.

Cushing J. M., 1992. ***Integro Differential Equations and Delay Models in Population Dynamics***, Springer-Verlag: New York.

El-Hawary, H. M., El-Shami, K. A., 2013. Numerical solution of Volterra delay-integro-differential equations via spline/spectral methods. ***Int. J. Differ. Equ. Appl.,*** **12**(3): 149-157.

Ergen, W. K., 1954. Kinetics of the circulating fuel nuclear reaction. ***J. Appl.Phys***. **25**:, 702-711.

Fazeli, S., Hojjati, G., 2015. Numerical solution of Volterra integro-differential equations by superimplicit multistep collocation methods. ***Numer. Algor***. **68**: 741-768.

Foley, C., Mackey, M.C., 2009. Dynamic hematological disease: a review, ***J. Math. Biol.,*** **58**: 285-322.

Gopalsamy, K., 1992. ***Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics***. Kluwer Academic, Boston

Guo, S., Ma, W., 2016. Global behavior of delay differential equations model of HIV infection with apoptosis. ***Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.***, **21**: 103-119.

Hackbusch, W., 1995. ***Integral Equations Theory and Numerical Treatment***. Berlin: Birkhauser.

Hairer, E., Lubich, C., Norsett, S. P., 1983. Order of convergence of one-step methods for Volterra integral equations of the second kind. ***SIAM J. Numer. Anal*. 20**(3): 569-579.

Hairer, E., Norsett, S. P., Wanner, G., 2008. ***Solving Ordinary Differential Equations I***. New York: Springer.

Hoppensteadt, F. C., Jackiewicz, Z., Zubik-Kowal, B., 2007. Numerical solution of Volterra integral and integro differential equations with rapidly vanishing convolution kernels. ***BIT Numer. Math*. 47**: 325-350.

Jalalvand, B., Jazbi, B., Mokhtarzadeh, M. R., 2013. Finite difference method for the smooth solution of linear Volterra integral equations. ***Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* 4**(2): 1-10.

Jankowski, T., 2008. Monotone method to Volterra and Fredholm integral equations with deviating arguments. ***Integral Transforms Spec. Funct.*** 19: 95-104.

Jerri, A. J., 1999. ***Introduction to Integral Equations with Applications*.** New York: Willey.

Kolmanovskii V., Myshkis A., 1999. ***Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations***. Netherlands: Kluwer Academic.

Koto T., 2002. Stability of Runge-Kutta methods for delay integro-differential equations***, J. Comput. Appl. Math.* 145**: 483-492.

Kuang, Y.,1993. ***Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics***. San Diego: Academic Press.

Kudu M., Amirali I., Amiraliyev G. M., 2018. A finite-difference method for a singularly perturbed delay integro-differential equation***, J. Comput. Appl. Math.* 308**: 379-390.

Kythe, P. K., Purri, P., 2002***. Computational Methods for Linear Integral Equations.*** Boston: Birkhauser.

Lakshmikantham, V., Rao, M. R. M., 1995. ***Theory of Integro-Differential Equations*.** Amsterdam: Gordon and Breach Science Pub.

Linz, P., 1985. ***Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*.** Philadelphia: SIAM.

Liz, E., Röst, G., 2013. Global dynamics in a commodity market model, ***J. Math. Anal. Appl.***, **398**: 707-714.

Makroglou, A., 2003. Integral equations and actuarial risk management: some models and numerics, ***Math. Model. Anal*. 8**: 143-154.

Markowich P., Renardy M. 1983., A nonlinear Volterra integro-differential equation describing the stretching of polymeric liquids, ***SIAM J. Math. Anal.* 14**: 66-97.

Okayama, T., 2018. Theoretical analysis of a Sinc-Nystrom method for Volterra integro-differential equations and its improvement. ***Appl. Math. Comput*. 324**: 1-15.

Rahman, M., 2007. ***Integral Equations and Their Applications*.** Boston : WIT Press.

Rihan F., Doha E., Hassan, M., Kamel, M. N., 2009. Numerical treatments for Volterra delay integro-differential equations, ***Comput. Meth. Appl. Math.* 9** (3): 292-318.

Shakourifar M., Enright W., 2012. Superconvergent interpolants for collocation methods applied to Volterra integro-differential equations with delay, ***BIT Numer. Math.* 52**: 725-740.

Volterra, V., 1930 ***Theory of Functionals and of Integral and Integro Differential Equations***. Edited by Fantappie, L. London and Glasgow: Blockie & Son Limited.

Wazwaz, A. M., 2015. ***A First Course in Integral Equations***, 2nd edition. Singapore: World Scientific.

Yapman O., Amiraliyev G. M., Amirali I., 2009. Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay, ***J. Comput. Appl. Math.*** **355**: 301-309.

Zarebnia, M., Shiri, L., 2017. The numerical solution of Volterra integro-differential equations with state-dependent delay. ***Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.*** **41**(2): 465-472.

Zhang C., Vandewalle S., 2004. Stability analysis of Volterra delay-integro-differential equations and their backward differentiation time discretization***, J. Comput. Appl. Math.*** **164-165**: 797-814.

Zhao J., Cao Y., Xu Y., 2017. Sinc numerical solution for pantograph Volterra delay-integro-differential equation, ***Int. J. Comput. Math.*** **94** (5): 853-865.

# ÖZ GEÇMİŞ

1996 yılında Van'ın Özalp ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Özalp'ta lise öğrenimini Van'da tamamladı. Yükseköğrenimine, 2011 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladı ve 2016 yılında mezun oldu. 2017 yılında ise Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladı ve 2018 yılında mezun oldu. Yine 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2019 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Van Gürpınar Şehit Müftü Muhammet Sıddık Efendi İmam Hatip Ortaokulu'na matematik öğretmeni olarak atandı. Halen bu okulda görevine devam etmektedir.

**T.C**
**VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU**

**Tarih:** ..16.../..01.../2020

Tez Başlığı / Konusu:
...Gecikmeli Volterra İntegro Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri...

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam ....33..... sayfalık kısmına ilişkin, ...16.../...01.../..2020.. tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından ..Turnitin....intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % ......10......... (...On.......) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: ...Sabahattin YAFTAR...
Öğrenci No: ...18910002003...
Anabilim Dalı: ...Matematik...
Programı: ...
Statüsü: Y. Lisans ☒ Doktora ☐

**DANIŞMAN ONAYI**
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)
Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

**ENSTİTÜ ONAYI**
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)
Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü