T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

λ −ÇARPIM YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: ONUR AKÇİÇEK
DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut KARAKUŞ

VAN-2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

λ −ÇARPIM YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Onur AKÇİÇEK

VAN-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Dr. Öğr. Üyesi Mahmut KARAKUŞ danışmanlığında, Onur AKÇİÇEK tarafından sunulan "λ –Çarpım Yakınsak Seriler Üzerine" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 27/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut KARAKUŞ İmza:

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ramazan KAMA İmza: R. Kama

Üye:.. İmza:

Üye:.. İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17/01/2020 tarih ve 2020/4-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

....

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Onur AKÇİÇEK

ÖZET

λ −ÇARPIM YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

AKÇİÇEK, Onur
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Mahmut KARAKUŞ
Ocak 2020, 47 sayfa

Bu tez çalışması beş bölüm ve kaynakçadan oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezde verilmiş olan çalışmaların bir girişi verildi.

İkinci bölümde, tezin oluşmasında önemli rol oynayan kaynaklara yönelik kısa bir tarihçeye yer verildi.

Üçüncü bölümde, tezin hazırlanmasında kullanılan materyal ve yönteme değinildi.

Dördüncü bölümde, evvela tez boyunca kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve kavramlara, 0-gliding hump özellikli dizi uzayları ve λ −çarpım yakınsak seri uzaylarının elementer özelliklerine, Orlicz-Pettis Teoreminin AK özellikliğine sahip λ dizi uzayı için λ −çarpım yakınsak operatör serilerinden elde edilen bir versiyonuna ve son olarak da fıçılı (barrelled) bir AK −uzay λ ile bu uzayın λ^{β} şeklindeki β −duali ve λ −çarpım yakınsaklık arasındaki ilişkiye yer verildi.

Tezin son bölümünde tartışma ve sonuç bölümü değerlendirildi.

Anahtar kelimeler: 0-gliding hump özelliği, AK özelliği, dizi uzayları, fıçılı (barrelled) uzay, Orlicz-Pettis Teoremi, β −dualite, λ −çarpım yakınsak seriler.

ABSTRACT

ON λ −MULTIPLIER CONVERGENT SERIES

AKÇİÇEK, Onur
MSc. Thesis, Mathematics Science
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mahmut KARAKUŞ
January 2020, 47 pages

The present thesis consists of five chapters and a reference list. In the first chapter, a brief introduction of corresponding knowledge of thesis is given.

In the second chapter, some important literature which used in thesis briefly are given.

In the third chapter, some materials and method which used in preparation of thesis are given.

In the fourth chapter, firstly, some basic definitions, theorems and concepts which are used in other chapters of thesis, and elementary properties of sequence spaces with 0-giding hump property and the spaces of λ −multiplier convergent series, and a version of Orlicz-Pettis Theorem which is obtained from λ −multiplier convergent operator series such that λ is a sequence space with AK property are given. Finally, the relationship of a barrelled AK −space λ, the β −dual of this space λ^{β} and λ −multiplier convergence are examined.

In the last chapter of thesis, discussion and conclusion part is reviewed.

Keywords: 0-gliding hump property, AK property, barrelled space, Orlicz-Pettis Theorem, sequence spaces, β −duality, λ −multiplier convergent series.

ÖN SÖZ

Bütün çalışmam süresince fedakârlık göstererek zamanını ayıran, rehberlik eden, yardımını ve anlayışını benden esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mahmut KARAKUŞ’a şükranlarımı sunarım. Ayrıca, eğitim-öğretim hayatımın her safhasında maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili aileme, özellikle ablam Fidan AKÇİÇEK’e teşekkür ederim.

2020
Onur AKÇİÇEK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\exists$	Bazı
$\forall$	Her
$\in$	Elemanı
$\notin$	Elemanı değil
$\subseteq$	Alt veya eşit küme
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
ω	Reel veya Kompleks terimli tüm dizilerin uzayı
c	Yakınsak tüm dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak tüm dizilerin uzayı
l^∞	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
φ	Sonlu adetteki terimi dışındaki terimleri 0 olan dizilerin uzayı
X^α	X uzayının α −duali
X^β	X uzayının β −duali
X^γ	X uzayının γ −duali
X^f	X uzayının f −duali
X'	X uzayının sürekli duali
$L(X,Y)$	X ten Y ye sürekli lineer operatörlerin uzayı
$\sigma(X,X')$	X in zayıf topolojisi
$\tau(X,X')$	X in Mackey topolojisi

Simgeler	**Açıklama**
$\mu(X, X^{\beta})$	(X, X^{β}) dual çifti üzerindeki Mackey topolojisi
$\beta(X, X')$	X in güçlü topolojisi

Kısaltmalar	**Açıklama**
LCS	Lokal konveks uzay
TVS	Topolojik vektör uzay
SWGH	İşaretli zayıf gliding hump
wuC	Zayıf şartsız Cauchy

1. GİRİŞ

$\lambda -$çarpım yakınsak seriler, fonksiyonel analizin son yıllarda biraz daha öne çıkan çalışma alanlarından biri olarak görülebilir.

Biz bu çalışmamızda temelde; (Wu ve ark., 2005), (Yuanhong ve Ronglu, 2007) ve (Florencio ve Paúl, 1988) künyeli çalışmaları baz alarak tezimizi tamamlayacağız.

$\lambda -$çarpım yakınsak seriler, daha çok bir serinin Cauchy serisi veya yakınsak bir seri olması gibi bazı özelliklerin karakterizasyonu için kullanılmasının yanı sıra bir uzayın $AK -$uzay olup-olmaması, tamlık ve fıçılılık (barrelled) gibi topolojik özelliklerin karakterize edilmesinde de önemi yadsınamaz bir rol oynar. $\lambda -$çarpım yakınsak seriler şu şekilde tanımlanır:

λ, φ yi kapsayan bir skaler dizi uzayı ve X bir Hausdorff topolojik vektör uzayı olmak üzere, her $t = \{t_j\} \in \lambda$ için $\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j$ serisi X uzayının topolojisiyle yakınsak ise, bu uzaydaki $\sum_j x_j$ serisine $\lambda -$çarpım yakınsak seri adı verilir. Bu tanım, vektör değerli dizi uzayları ve operatör değerli seriler için aşağıdaki şekilde verilebilir:

$\lambda(X)$, $\varphi(X)$ i kapsayan bir vektör değerli dizi uzayı, X ve Y birer lokal konveks topolojik vektör uzayı ve $L(X,Y)$, X ten Y ye tüm sınırlı ve lineer operatörlerin uzayı olmak üzere, her $x = \{x_j\} \in \lambda(X)$ için $\sum_{j=1}^{\infty} T_j x_j$ serisi Y uzayının topolojisiyle yakınsak ise, $\sum_j T_j$ operatör serisine $\lambda(X) -$çarpım yakınsak operatör serisi adı verilir. Burada $\varphi(X)$ sonlu adetteki terimi dışındaki tüm terimleri sıfır olan vektör değerli dizilerin uzayı ve her $j \in \mathbb{N}$ için $T_j \in L(X,Y)$ olarak kabul edilmiştir. Buna benzer olarak λ, φ yi kapsayan bir skaler dizi uzayı ve X bir Hausdorff topolojik vektör uzayı olmak üzere; her $t = \{t_j\} \in \lambda$ için $\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j$ serisi X uzayının topolojisiyle bir Cauchy serisi oluyorsa, bu takdirde $\sum_j x_j$ serisine $\lambda -$çarpım Cauchy serisi adı verilir. Benzer tanım, vektör değerli dizi uzayları ve operatör değerli seriler için de yapılabilir (Swartz, 2009).

Orlicz-Pettis Teoremi seriler için önemli bir yere sahiptir. Bu teorem tam olarak şunu söyler: bir $\sum_j x_j$ serisi uzayın zayıf topolojisiyle alt seri yakınsak ise, bu takdirde uzayın doğal topolojisiyle de (örneğin; uzay bir normlu uzay ise, norm topolojisiyle) alt seri yakınsaktır; yani, alt seriler için zayıf yakınsaklık ile yakınsaklık denktirler. Zaman içerisinde Orlicz-Pettis Teoreminin bazı genelleştirmelerine veya farklı uygulamalarına yer verilmiş olmasına rağmen, $\lambda-$çarpım yakınsak dizilerin bu genelleştirmeler üzerinde etkisi daha fazladır. Çünkü, öyle bir λ dizi uzayı bulunabilir ki; bu uzay için, bir $\sum_j x_j$ serisinin alt seri yakınsaklığı yerine $\lambda-$çarpım yakınsak seriler kullanılabilir. Mesela, bir serinin alt seri yakınsak olması için gerek ve yeter koşul o serinin m_0-çarpım yakınsak olmasıdır ki, bu da bizi çarpım yakınsak serilerin Orlicz-Pettis Teoremi ile ilişkili olduğu sonucuna ulaştırır. Burada m_0 uzayı, değer kümesi sonlu olan dizilerin uzayı olarak alınmıştır. Hatırlayalım ki, bir $\sum_j x_j$ serisi alt seri yakınsaktır ancak ve ancak doğal sayıların her artan (n_j) dizisi için, $\sum_j x_{n_j}$ serisi yakınsaktır.

Yine çalışmamızda önemli olduğunu düşündüğümüz ve bir operatör serisinin $\lambda-$çarpım yakınsaklığının, λ dizi uzayının AK özelliği ile ilişkili olduğuna yer veren ve yeni teoremlere olanak sağlayan araştırmalarıyla öne çıkan Yuanhong ve Ronglu'nun çalışmalarına yer vereceğimizi belirtmiştik. Yuanhong ve Ronglu (Yuanhong ve Ronglu, 2007) künyeli çalışmalarında, X ve Y Hausdorff lokal konveks uzaylar ve $\lambda \supset \varphi$ herhangi bir skaler değerli dizi uzayı olmak üzere; $L(X,Y)$ nin zayıf operatör topolojisiyle $\sum_j t_j$ serisinin $\lambda-$çarpım yakınsaklığının, $L_{P(X,Y)}$ topolojisiyle de $\sum_j t_j$ nin yakınsak olmasını sağlayabilmesinin gerek ve yeter koşulunun, $\left(\lambda, \boldsymbol{P}_\lambda(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ uzayının bir $AK-$uzay olmasına bağlı olduğunu göstermiştir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Son zamanlarda, Cádiz ekolü olarak adlandırabileceğimiz bir grup İspanyol matematikçinin, çarpım yakınsak seri uzayları üzerine yaptığı çalışmalar literatürde önemli bir yer tutmuştur. Bu ekolün öne çıkan isimleri olarak da; Antonio Aizpuru Tomás, Francisco Javier García-Pacheco ve Francisco Javier Pérez-Fernández sayılabilir. Çalışmamızda her ne kadar bu yazarların eserlerinden çokça faydalanmış olmasak da, isimlerine yer vermeyi uygun gördük. Yine konuya özel ilgi gösteren bir diğer matematikçi; Amerikalı Charles Swartz, çarpım yakınsak seri uzayları ve Orlicz-Pettis Teoreminin sonuçları ve versiyonları üzerine yaptığı çalışmalar ile ön plana çıkmıştır. Özellikle Swartz'ın 2009 yılında yayınlanan "Multiplier Convergent Series" isimli kitabı bu çalışmalara ve konunun temel bilimsel dinamiklerine yer vermesi açısından önemli bir kaynak olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca Swartz 2010'lu yıllarda, herhangi skaler değerli dizi uzayları için yapılan bu çalışmaları vektör değerli dizi uzaylarına genişletmesi ve operatör değerli seriler için benzer teoremlere yer vermesi yönüyle konunun önemli araştırmacılarından biri olarak kabul görülebilir.

2005 yılında Junde Wu, Linsong Li ve Chengri Cui "Space of $\lambda-$Multiplier Convergent Series" çalışmasıyla quasi 0-gliding hump özelliği ile $\lambda-$çarpım yakınsak seri uzaylarının bazı temel özelliklerini incelemiştir. Bu özelliklerden bazıları:

i) $T-$yakınsaklık

ii) $X(\lambda)$ üzerinde düzgün sınırlılık prensibi

iii) $X(\lambda)$ uzayının Banach-Steinhaus özelliği ve tamlığı

iv) $X(\lambda)$ uzayının düzgün yakınsaklık özelliği

şeklindedir (Wu ve ark., 2005).

Charles Swartz, "Multiplier Convergent Series" adlı kitabında, $\lambda-$çarpım yakınsak serilerin; bir Cauchy serisi veya yakınsak bir seri olması gibi bazı özelliklerin karakterizasyonu için kullanılmasının yanı sıra bir uzayın $AK-$uzayı olup-olmaması, tamlığı ve barilliği gibi topolojik özelliklerin karakterize edilmesinde de önemli bir yeri olduğunu göstermiştir.

Yuanhong ve Ronglu 2007'de "Orlicz-Pettis Theorem for $\lambda -$Multiplier Convergent Operator Series" isimli makalede bir operatör serisinin $\lambda -$çarpım yakınsaklığının, λ dizi uzayının AK özelliği ile ilişkili olduğunu ve bazı yeni önemli teoremlere olanak sağladığını göstermiştir.

Son olarak (Florencio ve Paúl, 1988), Mackey topolojiyle donatılmış bir fıçılı (barrelled) $AK -$uzay λ için, $\sum_j x_j$ serisinin $\lambda -$çarpım yakınsaklığının $\left(x_j\right)$ dizisinin zayıf topolojiye göre, λ^{β} uzayında yer almasına gerek ve yeter şart sağladığı gösterilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Konuyla ilintili kitap, e-kitap, makale ve tez gibi kaynaklara erişmek için; Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi kütüphanesinden, YÖK tez tarama sayfasından, internet ve elektronik veri tabanlarından yararlanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. Temel Tanım ve Teoremler

Çalışmamız boyunca dizi ve serilerin indisleri belirtilmemişse, sınırlar daima 1'den ∞'a kadar alınacaktır.

Tanım 4.1.1. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$

$x \to \|x\|$

fonksiyonu; $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$,

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in K$,

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Burada $K = \mathbb{R}$ alınırsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine reel normlu uzay denir (Kreyszig, 1978).

Burada, N2) şartı yerine,

N2)* $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$

şartı getirilirse bu takdirde, $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına bir yarı-normlu uzay denir.

Tanım 4.1.2. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayındaki bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ iken

$\|x_n - x\| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde yazılır. Bu yakınsaklık kuvvetli yakınsaklık olarak da tanımlanır ve $x_n \xrightarrow{s} x$ şeklinde de gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.3. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayındaki bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzay denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.5. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin kümesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.6. X bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olmak üzere; her $f \in X'$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ bulunabiliyorsa, (x_n) dizisi x noktasına zayıf yakınsaktır denir ve $(x_n) \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.7. (Prekompakt (Total Sınırlı Küme)) Bir X TVS nin E alt kümesine; eğer sıfırın X uzayındaki her U komşuluğu için sonlu bir F kümesi varsa öyle ki $E \subseteq F + U$ oluyorsa, bu takdirde prekompakt veya total sınırlı küme denir.

Bu tanım metrik uzaylar için aşağıdaki şekilde verilebilir.

Bir X metrik uzayının E alt kümesi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $E \subseteq \cup\{S(x,\varepsilon): x \in F\}$ olacak şekilde $F \subseteq X$ sonlu kümesi bulunabiliyorsa bu takdirde E ye total sınırlı veya prekompakt denir. Burada $S(x,\varepsilon)$ x −merkezli, ε −yarıçaplı açık yuvarı göstermektedir (Swartz, 1992).

Tanım 4.1.8. (Relatif Kompakt) (X,τ) bir topolojik uzay ve $E \subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{E}$ bir kompakt küme ise bu takdirde E ye relatif kompakt denir (Boos, 2000).

Tanım 4.1.9. X ve Y normlu uzaylar olsun ve $T: X \to Y$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer T sınırlı kümeleri relatif kompakt kümelere taşıyorsa bu takdirde, T ye kompakt dönüşüm denir. Eğer T sınırlı kümeleri prekompakt kümelere taşıyorsa, bu takdirde prekompakt dönüşüm adını alır.

Kompakt operatörlerin kümesi K(X,Y) ve prekompakt operatörlerin kümesi de PC(X,Y) şeklinde gösterilir (Swartz, 1992).

Tanım 4.1.10. (Relatif Zayıf Kompakt) X bir normlu uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer, A kümesinin X uzayının zayıf topolojisine göre kapanışı kompakt oluyorsa, bu takdirde A ya relatif zayıf kompakt küme denir (Swartz, 1992).

Tanım 4.1.11. (Zayıf Kompakt) X, Y normlu uzaylar ve $T \in (X, Y)$ lineer operatörü verilsin. Eğer T sınırlı kümeleri, relatif zayıf kompakt kümelere taşıyorsa; T ye zayıf kompakt operatör denir. X ten Y ye zayıf kompakt operatörlerin kümesi $W(X, Y)$ ile gösterilir (Swartz, 1992).

Tanım 4.1.12. Bir (x_j) dizisinin yardımıyla oluşturulan $\sum_j x_j$ serisini göz önüne alalım. Eğer, her (k_j) alt dizisi için $\sum_j x_{k_j}$ serisi yakınsak oluyorsa, $\sum_j x_j$ serisine alt seri yakınsak denir (Swartz, 2009).

Tanım 4.1.13. (Hausdorff Uzay) Bir X topolojik uzayının x, y gibi farklı her iki elemanının iki ayrık komşuluğu bulunabiliyorsa böyle bir uzay Hausdorff Uzay adını alır. Buna göre bir Hausdorff uzayında her $x, y \in X$, $x \neq y$ çifti için $U_x \cap U_y = \emptyset$ olan en az bir U_x, U_y açık komşuluklar çifti vardır (Şuhubi, 2001).

Tanım 4.1.14. λ bir lineer uzay ve τ_λ topolojisi bu uzay üzerindeki adi toplama ve skalerle çarpma işlemlerini sürekli kılan topoloji olsun. Bu takdirde, (λ, τ_λ) ikilisi, lineer topolojik uzay veya topolojik vektör uzay (TVS), τ_λ topolojisi de λ üzerindeki lineer topoloji olarak adlandırılır.

λ topolojik vektör uzayındaki sıfırın her komşuluğu, sıfırın konveks bir komşuluğunu ihtiva ediyorsa λ uzayına lokal konveks uzay (LCS) denir.

λ, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay ve $P = \{p_i : i \in I\}$, λ uzayı üzerinde yarı normlar ailesi olsun. $U_\varepsilon^p = \{x \in \lambda : p(x) \leq \varepsilon\}$ olmak üzere

$\mathcal{B} = \left\{\cap_{i=1}^{n} U_{\varepsilon_i}^{p_i} : n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i > 0, p_i \in P, i = 1,2,3, \dots, n\right\}$

cümlesi, λ üzerinde lokal konveks bir topoloji için sıfırın komşuluklar tabanını oluşturur. λ üzerinde $\mathcal{B}$ komşuluklar tabanı yardımıyla üretilen topolojiye, $P = \{p_i : i \in I\}$ yarı normlar ailesinin λ uzayı üzerinde ürettiği lokal konveks topoloji denir. Tersine, (λ, τ) lokal konveks uzay ve $\mathcal{B}$ ailesi de λ uzayının kapalı mutlak konveks alt cümlelerinden oluşan sıfırın bir komşuluklar tabanı olsun. Bu durumda, $U \in \mathcal{B}$ olmak üzere, U cümlesinin Minkowski fonksiyoneli adı verilen ve

$P_U(x) = \inf\{r > 0 : x \in rU\} \quad (x \in \lambda)$

ile tanımlı yarı normların $P = \{p_U : U \in \mathcal{B}\}$ ailesi lokal konveks τ topolojisini üretir. Mesela, normlu uzaylar birer lokal konveks uzay örneğidir (Boos, 2000).

Tanım 4.1.15. Bir topolojik vektör uzayındaki yutan, kapalı ve mutlak konveks kümelere fıçı (barrel) denir. Bir lokal konveks uzaydaki her fıçı (barrel), sıfırın komşuluğunda oluyorsa, bu takdirde bu uzaya fıçılı (barrelled) uzay denir (Wilansky, 1978).

Tanım 4.1.16. (λ, p) ve (μ, q) aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde yarı normlu uzaylar ve $T: \lambda \to \mu$ bu iki uzay arasındaki bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \lambda$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için,

$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$

eşitliğini sağlayan T dönüşümüne λ dan μ ye bir lineer dönüşüm denir. μ uzayı özel olarak $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi olarak alınırsa, T lineer dönüşümü lineer fonksiyonel olarak adlandırılır.

λ dan μ ye lineer dönüşümlerin cümlesi $\mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$, sürekli (sınırlı) lineer dönüşümlerin cümlesi $L(\lambda, \mu)$ ile gösterilir. $\mathrm{Hom}(\lambda, \mathbb{K})$ cümlesine λ uzayının cebirsel duali denir ve λ^* ile gösterilir. $L(\lambda, \mathbb{K})$ cümlesine λ uzayının sürekli duali (veya kısaca duali) denir ve daha önce de ifade ettiğimiz gibi λ' ile gösterilir (Boos, 2000).

Tanım 4.1.17. (λ, p) ve (μ, q) yarı normlu uzaylar ve T bu uzaylar arasında bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için,

$q(Tx) \leq Kp(x)$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir K pozitif sayısı varsa T operatörüne sınırlı lineer operatör denir. Sınırlı bir lineer operatörün normu,

$$\|T\| = \sup_{\theta \neq x \in \lambda} \frac{q(Tx)}{p(x)}$$

olarak tanımlanır.

Yarı normlu uzaylar arasında tanımlı lineer dönüşümlerin sınırlılığı ile sürekliliği kavramları denktir (Boos, 2000).

Teorem 4.1.18. (Hahn-Banach Teoremi) (λ, p) bir yarı normlu uzay, μ uzayı λ uzayının bir alt uzayı ve $f : \mu \to \mathbb{R}$,

$|f(x)| \leq Mp(x), \ \forall x \in \mu, \ M > 0$

şartını sağlayan bir lineer fonksiyonel olsun. Bu takdirde; f fonksiyonelinin,

$|\tilde{f}(x)| \leq Mp(x), \ \forall x \in \lambda$

olacak şekilde μ den λ ya bir $\tilde{f}$ genişlemesi vardır (Boos, 2000).

Teorem 4.1.19. (Düzgün Sınırlılık) X bir Banach uzay ve X', X uzayının sürekli duali olsun. $(f_n) \subset X'$ ve (f_n) dizisi noktasal sınırlı olmak üzere; yani $|f_n(x)| < M_x$ $(n \in \mathbb{N}, x \in X)$ oluyorsa bu takdirde (f_n) dizisi düzgün sınırlıdır. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\| < M$ olur (Wilansky, 1984).

Tanım 4.1.20. (Fréchet Uzay) Tam lineer metrik uzaya Fréchet Uzay adı verilir. Kısaca F ile gösterilir. Bir $F-$uzayının, alt uzay topolojisiyle elde edilmiş topolojiye sahip, kapalı her alt uzayı yine bir $F-$uzaydır. λ; τ ve τ^* topolojilerine sahip bir $F-$uzay olsun. Bu takdirde, $\tau \subset \tau^*$ ise $\tau = \tau^*$ olur (Boos, 2000).

Tanım 4.1.21. Her $f \in X'$ için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(x_j)| < \infty$$

oluyorsa, X teki bir $\sum_j x_j$ serisine zayıf şartsız Cauchy (wuC) serisi denir (Swartz, 2009).

4.2. Dizi Uzayları

Çalışmamız boyunca terimleri reel ya da kompleks sayılar olan tüm dizilerin uzayını ω ile gösterip, bu uzayın $\lambda \subset \omega$ olacak şekilde bir alt uzayına λ dizi uzayı diyeceğiz.

Tanım 4.2.1. ($K-$Uzay) $\lambda \subset \omega$ dizi uzayı her $x = (x_k) \in \lambda$ için,

$\pi_k(x) = x_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$

ile tanımlı π_k koordinat fonksiyonellerinin sürekli olduğu topolojiye sahip ise $K-$uzay adını alır (Boos, 2000).

Tanım 4.2.2. (Standart Dizi Uzayları)

$\omega \coloneqq \mathbb{K}^{\mathbb{N}^0} \coloneqq \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^0} \mid x : \ \mathbb{N}^0 \to \mathbb{K}, k \to x_k := x(k)\}$

ile tüm dizilerin kümesini belirtmek üzere, ω;

$((x_k),(y_k)) \to (x_k + y_k)$ ve $(\lambda,(x_k)) \to (\lambda x_k)$

şeklinde tanımlanan, sırasıyla koordinatsal toplam ve skalerle çarpma ile birlikte lineer bir uzaydır ($\mathbb{K}$ üzerinde). ω nın her lineer alt uzayı (toplama ve skalerle çarpma içeren) bir dizi uzayı olarak adlandırılır. $x = (x_k) \in \omega$ ise, x in k-ıncı terimi x_k için $[x]_k$ gösterimi de kullanılır.

Aşağıda verilen ω nın alt kümeleri de birer dizi uzayıdır:

$$m := l^\infty := \left\{x = (x_k) \in \omega \mid \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}^0} |x_k| < \infty\right\}$$

(tüm sınırlı dizilerin uzayı).

$$c := \left\{x = (x_k) \in \omega \mid (x_k) \text{ yakınsaktır, yani } \lim_{k\to\infty} x_k \text{ mevcuttur}\right\}$$

(tüm yakınsak dizilerin uzayı).

Not, $\lim : c \to \mathbb{K}$, $x = (x_k) \to \lim_k x_k$ lineer bir fonksiyoneldir.

$$c_0 := \left\{x = (x_k) \in c \mid \lim_k x_k = 0\right\}$$

(sıfıra yakınsak tüm dizilerin uzayı).

$$bs := \left\{x = (x_k) \in \omega \mid \|x\|_{bs} := \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| < \infty\right\}$$

(kısmi toplamlar dizisi sınırlı tüm dizilerin uzayı).

$$cs := \left\{x = (x_k) \in \omega \mid \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c\right\}$$

(kısmi toplamlar dizisi yakınsak tüm dizilerin uzayı).

$$l := l^1 := \left\{x = (x_k) \in \omega \mid \|x\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty\right\}$$

(mutlak toplanabilir tüm dizilerin uzayı).

$\|\ \|_{bs} : bs \to \mathbb{R},\ x \to \|x\|_{bs}$ ve $\|\ \|_1 : l \to \mathbb{R},\ x \to \|x\|_1$ dönüşümleri sırasıyla; bs −normu ve l^1 −normu olarak adlandırılır.

$$bv := \left\{x = (x_k) \in \omega \mid \|x\|_{bv} := |x_0| + \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\}$$

(tüm sınırlı, salınımlı dizilerin uzayı).

$bv_0 := bv \cap c_0$.

$\|\ \|_{bv} :\ bv \to \mathbb{R},\ x \to \|x\|_{bv}$ dönüşümü bv −normu olarak adlandırılır.

$\varphi := \{x = (x_k) \in \omega \mid \exists\, N \in \mathbb{N}^0 \quad \forall\, k \geq N :\; x_k = 0\}$

(sonlu adetteki terimi dışındaki tüm terimleri sıfır olan dizilerin uzayı)

$= \langle \{e^n \mid n \in \mathbb{N}^0\} \rangle$.

Burada (ω da) n-inci birim vektör;

$$e^n := (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}^0} \quad \text{ile} \quad \delta_{nk} := \begin{cases} 1 & k = n \; ise, \\ 0 & k \neq n \; ise, \end{cases} \qquad (k, n \in \mathbb{N}^0)$$

olarak tanımlanır. Kolay bir örnek ile kontrol edelim:

$\varphi \subsetneq l \subsetneq cs \subsetneq c_0 \subsetneq c = c_0 \oplus \langle e \rangle \subsetneq m \subsetneq \omega$

ve

$l \subsetneq bv_0 \subsetneq bv = bv_0 \oplus \langle e \rangle \subsetneq c$

burada $e := (1, 1, \dots)$ dir (Boos, 2000).

Tanım 4.2.3. $\lambda, \mu \subset \omega$ alalım. Çarpım uzayları olarak da bilinen λ^μ dual uzayı,

$M(\lambda, \mu) = \lambda^\mu = \{y \in \omega | xy \in \mu, \forall x \in \lambda\}$

şeklinde tanımlanır. Kolaylık olması bakımından

$\lambda^\lambda = M(\lambda)$

ve

$(\lambda^\mu)^\mu = \lambda^{\mu\mu}$

şeklinde kullanılır. $M(\lambda)$, λ uzayının çarpım cebiri olarak bilinir (Ruckle, 1981).

Tanım 4.2.4. Herhangi bir $\lambda \subset \omega$ dizi uzayının $\alpha-, \beta-, \gamma-$dualleri, sırasıyla

$$M(\lambda, l) = \left\{ y \in \omega :\; \sum_k |x_k y_k| < \infty, \forall x \in \lambda \right\},$$

$$M(\lambda, cs) = \left\{ y \in \omega :\; \sum_k x_k y_k < \infty, \forall x \in \lambda \right\}$$

$$M(\lambda, bs) = \left\{ y \in \omega :\; \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \right| < \infty, \forall x \in \lambda \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve λ^α, λ^β ve λ^γ ile gösterilir.

Bu uzayların her biri yine bir dizi uzayı olup bunlar arasında,

$\varphi \subset \lambda^\alpha \subset \lambda^\beta \subset \lambda^\gamma \subset \omega$

kapsaması geçerlidir. $\lambda \subset \mu$ ve $\zeta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere;

$\mu^\zeta \subset \lambda^\zeta$

kapsaması geçerlidir (Garling, 1967).

φ uzayını kapsayan bir K −uzay λ nın, f −duali;

$\lambda^f = \left\{\{f(e^k)\} | f \in \lambda'\right\}$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2.5. $\zeta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ alalım. $\lambda^{\zeta\zeta} = \lambda$ eşitliğini sağlayan λ dizi uzayına, ζ −uzay; $\zeta = \alpha$ özel hâlinde ise Köthe uzay (mükemmel dizi uzayı) denir.

λ dizi uzayı için,

$\{(y_k) \in \omega |\ \exists (x_k) \in \lambda, \forall k \in \mathbb{N} :\ |y_k| \leq |x_k|\} \subset \lambda$

kapsaması geçerli ise, λ uzayına solid (normal) uzay denir (Boos, 2000).

Not 4.2.6. $\varphi \subset \mu$, $\lambda^\alpha \subset \lambda^\beta$ ve $p_y(x) \leq q_y(x)$ olduğundan, $\tau_{\omega|\lambda} \subset \tau_{P_\mu} \subset \eta(\lambda, \mu)$ kapsaması geçerlidir. Bu nedenle, $\big(\lambda, \eta(\lambda, \mu)\big)$ bir K −uzaydır. Her $x \in \lambda$ için $x = \sum_k x_k e^k$ ($\eta(\lambda, \mu)$ topolojisine göre) eşitliği geçerli olduğundan φ uzayı λ uzayında yoğundur. Her $f \in \lambda'$ fonksiyoneli,

$$f(x) = \sum_k x_k f(e^k)$$

gösterimine sahiptir.

$T :\ \mu \longrightarrow \lambda'$

$$y = (y_k) \ \longrightarrow Ty = f_y, \qquad f_y(x) = \sum_k x_k y_k$$

ile tanımlı T dönüşümü için, $T(\mu) \subset \big(\eta(\lambda, \mu)\big)'$ kapsaması geçerlidir. T dönüşümünün izomorfizm olması için gerek ve yeter şart μ uzayının solid bulunmasıdır.

$\eta(\lambda, \mu)$ topolojisinin, (λ, μ) dual çiftinin bir topolojisi olması için, μ uzayının solid bulunması gerek ve yeterlidir (Boos, 2000).

Tanım 4.2.7. (FK uzayı) Tam lineer metrik uzaya F −uzay; topolojisi, H Hausdorff uzayının topolojisinden daha ince ve $\lambda \subset H$ olan λ lineer uzayına da FH −uzay denir. Sürekli koordinat fonksiyonellerine sahip olan tam lineer metrik uzay ise FK −uzay olarak adlandırılır. Topolojisi normdan elde edilebilen FK −uzaya BK −uzay denir. F, FH, FK, BK kısaltmaları Fréchet, Fréchet-Hausdorff, Fréchet-Koordinate, Banach Koordinate kelimelerinden elde edilmiştir.

Mesela ω uzayı,

$$d(x,y)=\sum_k 2^{-k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

metriği ile bir tam lineer metrik uzayı yapısına sahip olup üstelik bir koordinat uzay yapısı da sergiler. İşte bu yüzden FH uzayların $H=\omega$ kabul edilmiş şekli FK −uzay gözüyle görülür. Bu uzay, topolojisi normlanamadığı için bir BK −uzay değildir.

Daha önce standart dizi uzayları olarak ele aldığımız uzaylar üzerinde tanımlanan normlar ile birer BK −uzaydır (Wilansky, 1984).

Teorem 4.2.8. (λ,τ_λ) ve (μ,τ_μ) sırasıyla $F-$ ve FK −uzaylar, $T:\lambda\longrightarrow\mu$ lineer bir dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

(a) T süreklidir.

(b) $i_\mu:(\mu,\tau_\mu)\longrightarrow(\omega,\tau_\omega)$ içerme dönüşümü olmak üzere $i_\mu\circ T$ süreklidir.

(c) $T_j=\pi_j\circ i_\mu\circ T:(\lambda,\tau_\lambda)\longrightarrow(\mathbb{K},|\cdot|), x\longrightarrow T[(x)]_j$, $\forall j\in\mathbb{N}$ için süreklidir.

Burada, $T[(x)]_j$ ile $T(x)$ dönüşümünün j-inci koordinatı, π_j ile de j-inci koordinat fonksiyoneli kastedilmektedir (Boos, 2000).

Tanım 4.2.9. (Dizilerde n-li Kesim) $\lambda\subset\omega$ bir dizi uzayı olsun. Bu uzaydaki $x=(x_k)$ dizisinin n-li kesimi,

$$P^n=\sum_{k=1}^{n}e^k$$

kesim operatörü olmak üzere;

$$P^n.x=x^{[n]}=\sum_{k=1}^{n}x_ke^k$$

şeklinde tanımlanır. $\{P^n.x\}=\{x^{[n]}\}$ cümlesi de x dizisinin n-li kesimler cümlesi olarak adlandırır ve $P.x$ ile gösterilir.

Bu durumda açıkça görüleceği üzere, bir $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1},\dots)$ dizisinin böyle bir operatör altında yalnızca ilk n terimi muhafaza edebilecektir. Yani,

$x^{[n]}=(x_1,x_2,\dots,x_n,0,0,\dots)$

olur (Wilansky, 1984).

Tanım 4.2.10. λ; φ uzayını kapsayan τ_λ topolojisiyle bir K −uzay olsun. Bir $x\in\lambda$ için,

$x^{[n]}\longrightarrow x(\lambda,\tau_\lambda)$

oluyorsa, x dizisi AK özelliğine sahiptir denir. λ uzayının her elemanı AK özelliğine sahipse, uzaya AK $-$uzay denir.

λ uzayının AK özelliğine sahip dizilerinin cümlesi S_λ ile gösterilir ve

$S_\lambda = \{x \in \lambda : x, AK$ özelliğine sahiptir$\}$

$= \{x \in \lambda : \; x^{[n]} \longrightarrow x(\lambda, \tau_\lambda)\}$

şeklindedir (Boos, 2000).

Örnek 4.2.11. (1) (ω, τ_ω) uzayı bir AK $-$uzaydır. ω uzayı için,

$\omega = S_\omega = W_\omega = F_\omega = B_\omega$ ve $\omega^f = \varphi$

eşitlikleri geçerlidir.

(2) Benzer şekilde,

$S_{l^\infty} = S_c = S_{c_0} = c_0$

eşitlikleri geçerlidir. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı AK $-$uzay olup; c ve l^∞ uzaylarının AK özelliğine sahip dizilerinin uzayı ise c_0 uzayıdır.

$x \in l^\infty$ için,

$$\lim_n \left\| x^{[n]} - x \right\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{k \geq n+1} |x_k| \right)$$

$$= 0$$

olması için $x = (x_k) \in c_0$, $(k \in \mathbb{N})$ olması gerektiğini anlarız. Buradan da, $S_{l^\infty} = c_0$ olacağını gösterir.

Bununla birlikte,

$S_{l^\infty} = W_{l^\infty} = c_0$ ve $F_{l^\infty} = B_{l^\infty} = l^\infty$

eşitlikleri geçerli olup, $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı bir FAK $-$uzaydır. Buradan, $c_0 \subset \lambda \subset l^\infty$ olacak şekildeki her $(\lambda, \|\cdot\|_\infty)$ dizi uzayı için,

$S_\lambda = W_\lambda = c_0$ ve $F_\lambda = B_\lambda = \lambda$

olduğunu söyleyebiliriz (Boos, 2000).

Tanım 4.2.12. c_0, sıfıra yakınsak dizilerin uzayı ve $\sum_j x_j$ serisi de, X topolojik vektör uzayındaki bir formal seri olsun. Bu takdirde eğer, $\forall \; t = (t_j) \in c_0$ için $\sum_j t_j x_j$ serisi X uzayında yakınsak oluyorsa, $\sum_j x_j$ serisine c_0 $-$çarpım yakınsak denir (Swartz, 2009).

4.3. λ-Çarpım Yakınsaklık ve Bazı Klasik Teoremler

Son 20 yıldır çarpım yakınsak seriler üzerine çalışmalar dikkate alındığında, bu çalışmaların fonksiyonel analizde önemli bir yer tutan toplanabilme teorisi ile olan ilişkisi özellikle dikkat çekmektedir (Bessaga ve Pełczyński, 1958; Swartz, 1983; Li ve Bu, 1993; Li ve ark., 1998; Wu ve Li, 1999; Wu ve ark., 2002; Wu ve Lu, 2002a; 2002b). Bu ve Wu'nun (Bu ve Wu, 1997) çalışmasında, (X,T) bir Banach uzay ve $\lambda = l^\infty$ olmak üzere; $X(l^\infty)$ sınırlı çarpım yakınsak serilerin uzayına giriş yapılmış ve bu uzayın bazı özellikleri üzerinde durulmuştur. Yine bu çalışmada sınırlı lineer operatörlerin $\sum_j K_j$ serisinin bazı şartlar altında X uzayının duali olan X' uzayının, c_0 ın kopyasını içermemesi ile ilişkilendirilmiştir. Aizpuru ve Pérez-Fernández (Aizpuru ve Pérez-Fernández, 2000) çalışmasında, yine bir (X,T) Banach uzayı ve $c_0 \subseteq S \subseteq l^\infty$ olacak şekildeki bir S dizi uzayı için $X(S)$ ile gösterilen, $S-$sınırlı çarpım yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı olarak adlandırabileceğimiz ve

$$X(S) = \left\{ x = (x_j) \in \omega(X) : \text{her } a = (a_j) \in S \text{ için } \sum_j a_j x_j \text{ yakınsaktır} \right\}$$

şeklinde tanımlanabilen uzaylar üzerinde çalışmışlardır.

Bu bölümde, $\lambda-$çarpım yakınsak seri uzaylarının elementer özelliklerinin bir çalışması ve dizi uzaylarının quasi 0-gliding hump özellikleri verilecektir.

(X,T) lokal konveks bir Hausdorff uzay, X' (X,T) nin topolojik dual uzayı ve λ skaler değerli bir dizi uzayı olsun. Eğer bir $\sum_j x_j$ serisi X te $\lambda-$çarpım $T-$yakınsak ise, her $(t_j) \in \lambda$ için bir $x \in X$ vardır, bu durumda $\sum_{j=1}^\infty t_j x_j$ serisine x e $T-$yakınsaktır denir (Wu ve ark., 2005).

Bölüm boyunca,

$$X(\lambda) = \left\{ (x_j) : \text{her } (t_j) \in \lambda \text{ için, } \sum_j t_j x_j \text{ serisi } T-\text{yakınsaktır} \right\}$$

kümesi ile $\lambda-$çarpım $T-$yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı kastedilecektir.

Eğer $\lambda \supseteq \varphi$ ise, $\langle t,u \rangle = \sum_j u_j t_j$ bilineer çiftine göre (λ, λ^β) nın bir dual çift olduğu açıktır, burada $t = (t_j) \in \lambda$ ve $u = (u_j) \in \lambda^\beta$ dır. $\tau(\lambda, \lambda^\beta)$; (λ, λ^β) dual çiftine göre λ nın Mackey topolojisi olarak tanımlansın, yani λ^β nın; tüm $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)-$kompakt ve tüm mutlak konveks $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)-$kompakt alt kümeleri üzerindeki düzgün yakınsak topoloji $k(\lambda, \lambda^{\beta})$ olsun. $k(\lambda, \lambda^{\beta})$ nın $\tau(\lambda, \lambda^{\beta})$ dan daha güçlü olduğu açıktır (Wu ve ark., 2005).

Lemma 4.3.1. $\lambda \supseteq \varphi$ ve τ_1, λ^{β} üzerinde bir vektör topolojisi olsun. Bu durumda τ_1, koordinatsal yakınsaklık topolojisinden daha güçlüdür. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) $B \subseteq \lambda^{\beta}$ τ_1 $-$kompakttır.

(2) $B \subseteq \lambda^{\beta}$ τ_1 $-$dizisel kompakttır (Wu ve Lu, 2002).

Lemma 4.3.2. Eğer (X, T_1) dizisel tam lokal konveks bir uzay ve $(x_j) \subseteq X$ bir T_1 $-$yakınsak dizi ise, bu takdirde (x_j) nin mutlak konveks kapanışı T_1 $-$kompakt küme ve ayrıca T_1 $-$dizisel kompakt kümedir (Wu ve Wu, 1998).

Aşağıdaki Lemma; Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.2 den kolaylıkla elde edilebilir.

Lemma 4.3.3. Eğer, $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$ bir dizisel tam uzay ise $k(\lambda, \lambda^{\beta}) = \tau(\lambda, \lambda^{\beta})$ olur (Wu ve ark., 2005).

φ de sıfır dizisi olmayan $(t^{(n)})$ dizisi, bir blok dizi olsun. Eğer $k_0 = 0$ olacak şekilde tam sayıların bir (k_n) kesin artan dizisi varsa,

$$t^{(n)} = \left(0,0, \dots ,0, t^{(n)}_{k_{n-1}+1}, \dots , t^{(n)}_{k_n}, 0, \dots\right)$$

şeklinde alınır.

Eğer, $t = \sum_{n=1}^{\infty} t^{(n)}$ (noktasal toplam) olacak şekilde verilen herhangi bir $t = (t_i) \in \lambda$ ve blok dizi $(t^{(n)})$ için, pozitif tam sayıların kesin artan her (m_k) dizisinin (n_k) alt dizisi ve bir işaret dizisi (θ_k) için $t = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k t^{(n_k)} \in \lambda$ (noktasal toplam) oluyorsa; bu takdirde λ dizi uzayına işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahiptir denir. Burada (θ_k) dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ için $\theta_k = 1$ veya $\theta_k = -1$ olacak şekildeki bir dizidir (Boos ve Leiger, 1994).

$(t^{(n)})$ blok dizisi sınırlı bir blok dizi ise, bu takdirde λ dizi uzayına güçlü gliding hump özelliğine sahiptir denir. Bu takdirde pozitif tam sayıların kesin artan her (m_k) dizisinin bir (n_k) alt dizisi vardır ki, $t = \sum_{k=1}^{\infty} t^{(n_k)} \in \lambda$ (noktasal toplam) olur (Swartz, 1993).

$\lambda \supseteq \varphi$ ve $t = (t_i) \in \lambda$ olmak üzere, $t^{[n]} = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, 0, \dots)$ olsun. Eğer, her $t \in \lambda$ için; $\left(t^{[n]}\right)_n$, t ye τ_0 topolojisine göre yakınsıyorsa, bu takdirde (λ, τ_0) uzayına bir AK $-$uzay denildiğini hatırlayalım (Wu ve ark., 2005).

B, (λ, τ_0) ın sınırlı bir alt kümesi olsun, $\left\{t^{[n]} : t \in B, n \in \mathbb{N}\right\}$ aynı zamanda (λ, τ_0) ın sınırlı bir alt kümesi ise, o hâlde (λ, τ_0) kesimsel düzgün sınırlılık özelliğine sahiptir (Wu ve ark., 2005).

Açıktır ki, eğer (λ, τ_0) bir K $-$uzay ve kesimsel düzgün sınırlılık özelliğine sahip ise, bu takdirde (λ, τ_0) ın sınırlı her B alt kümesi ve $j_0 \in \mathbb{N}$ için, $\sup\left\{\left|t_{j_0}\right| : \left(t_j\right) \in B\right\} < \infty$ olur (Wu ve ark., 2005).

Şimdi, quasi 0-gliding hump özelliğinin tanımını vereceğiz:

Eğer (λ, τ_0) ın sınırlı her blok dizisi $\left(t^{(n)}\right)$ ve sıfıra yakınsayan her skaler (s_n) dizisi için, pozitif tam sayıların kesin artan her (m_k) dizisinin $\sum_{k=1}^{\infty} s_{n_k}\, t^{(n_k)} \in \lambda$ (noktasal toplam) olacak şekilde (n_k) alt dizisi bulunuyorsa, bu takdirde (λ, τ_0) uzayına quasi 0-gliding hump özelliğine sahiptir denir (Wu ve ark., 2005).

Aşağıda quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bazı dizi uzayı örneklerine yer vereceğiz.

Örnek 4.3.4. $c_0 \subseteq S \subseteq l^{\infty}$ ise, o hâlde $(S, \|\cdot\|_{\infty})$ uzayı quasi 0-gliding hump özelliğine sahiptir (Wu ve ark., 2005).

Örnek 4.3.5. Her $0 < p < \infty$ için, $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$ uzayı quasi 0-gliding hump özelliğine sahiptir.

Gerçekten $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$ uzayının sınırlı her $\left(t^{(n)}\right)$ blok dizisi ve sıfıra yakınsak her (s_n) skaler dizisi için öyle bir $M > 0$ sayısı vardır ki, (s_n) nin herhangi bir $\left(s_{n_k}\right)$ alt dizisi için $\left\|t^{(n)}\right\|_p \leq M, n \in \mathbb{N}$ ve $\sum_k \left|s_{n_k}\right|^p < \infty$ olur. Bu takdirde, $\sum_k s_{n_k} t^{(n_k)} \in l^p$ dir. Böylece, $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$ quasi 0-gliding hump özelliğine sahiptir (Wu ve ark., 2005).

Artık, lokal konveks bir (X, T) uzayı ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir λ dizi uzayı için, $X(\lambda)$ ile gösterdiğimiz λ $-$çarpım yakınsak serilerin uzayının temel özelliklerinden bahsedebiliriz.

(λ, τ_0) uzayının tüm sınırlı alt kümeleri $\mathcal{B}$ ve (X, T) uzayının tüm sürekli yarı normları $\mathcal{P}$ olsun, her $B \in \mathcal{B}$, $P \in \mathcal{P}$ ve $x \in X(\lambda)$ için

$$P_B(x) = \sup\left\{P\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j\right) : (t_j) \in B\right\} \qquad (4.3.1)$$

kümesini tanımlayalım (Wu ve ark., 2005).

Aşağıda, $X(\lambda)$ uzayı üzerinde verilebilecek düzgün sınırlılık prensibine ilişkin bir teoreme yer vereceğiz.

Teorem 4.3.6. (λ, τ_0) kesimsel düzgün sınırlılık ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir K −uzay ise, bu takdirde P_B; her $B \in \mathcal{B}$ ve $P \in \mathcal{P}$ için $X(\lambda)$ uzayında bir yarı normdur (Wu ve ark., 2005).

İspat. Sadece her $x \in X(\lambda)$ için $P_B(x) < \infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bir an için böyle olmadığını varsayalım. Yani en az bir $x \in X(\lambda)$ için $P_B(x) = \infty$ olsun. Böylece, her $M > 0$ için, $P(\sum_j t_j x_j) > M$ olacak şekilde $(t_j) \in B$ vardır. $M = 1 + 1$ olsun, $t^{(1)} \in B$ alınırsa, $P\left(\sum_j t_j^{(1)} x_j\right) > 1 + 1$ olur. $\sum_j t_j^{(1)} x_j$ serisinin yakınsaklığından $P\left(\sum_{j=j_1+1}^{\infty} t_j^{(1)} x_j\right) < 1$ olacak şekilde bir $j_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $P\left(\sum_{j=1}^{j_1} t_j^1 x_j\right) > 1$ sonucu elde edilir. $M = sup\{P\left(\sum_{j=1}^{j_1} t_j x_j\right) : (t_j) \in B\} + 2^2 + 1$ olsun. (λ, τ_0) kesimsel düzgün sınırlılık özelliğine sahip bir K −uzay olduğundan M sonlu olur. Ayrıca, $P\left(\sum_j t_j^{(2)} x_j\right) > M$ olacak şekilde $\left(t_j^{(2)}\right) \in B$ bulunur ve sonuç olarak $P\left(\sum_{j=j_1+1}^{\infty} t_j^{(2)} x_j\right) > 2^2 + 1$ olur. Benzer şekilde $\sum_j t_j^{(2)} x_j$ yakınsak olduğundan, $P\left(\sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_j^{(2)} x_j\right) > 2^2$ olacak şekilde bir $j_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Tümevarım ile,

$$P\left(\sum_{j}^{\infty} t_{0j}^{(n)}\, x_j\right) > n^2 \qquad (4.3.2)$$

olacak şekilde sınırlı bir blok $\left(t_0^{(n)}\right)$ dizisi alınabilir.

Burada,

$t_0^{(1)} = \left(t_{0j}^{(1)}\right) = \left(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_{j_1}^{(1)}, 0, \dots\right), t_0^{(2)} = \left(t_{0j}^{(2)}\right) = \left(0, \dots, 0, t_{j_1+1}^{(2)}, t_{j_1+2}^{(2)}, \dots,\right.$ $\left. t_{j_2}^{(2)}, 0, \dots\right), \dots$ olarak dikkate alınmıştır. Şimdi de $s^{(n)} = \left(t_0^{(n)}\right)/n$ olan bir dizi alalım.

(λ, τ_0) uzayı quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bulunduğundan, $(s^{(n)})$ dizisinin $\sum_k s^{(n_k)} \in \lambda$ (noktasal yakınsak) olacak şekilde bir $(s^{(n_k)})$ alt dizisi vardır.

Son olarak (x_j) dizisinin $\lambda -$çarpım yakınsak olduğunu da dikkate aldığımızda,

$$\lim_k P\left(\sum_{j=j_{k-1}}^{j_k} s_j^{(n_k)} x_j\right) = 0$$

sonucuna ulaşırız.

Bu ise kabulümüz ile çelişir, dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremin ispatı da yukarıdaki teoreme benzerlik oluşturduğundan ispatsız olarak verilmiştir:

Teorem 4.3.7. (λ, τ_0), kesimsel düzgün sınırlılık ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir $K -$uzay ise, bu takdirde her $(u_j) \in \lambda^\beta$ ve (λ, τ_0) ın sınırlı her B alt kümesi için, $\sup\{|\sum_j u_j t_j| : (t_j) \in B\} < \infty$ olur (Wu ve ark., 2005).

Teorem 4.3.6 dikkate alındığında, kesimsel düzgün sınırlılık özelliği ile quasi 0-gliding hump özelliğine sahip olan bir (λ, τ_0) $K -$uzayı için; $X(\lambda)$, yarı normların $\{P_B : B \in \mathcal{B}, P \in \mathcal{P}\}$ ailesi ile donatılmış bir lokal konveks Hausdorff uzaydır. Bu topoloji $T_\mathcal{B}$ ile gösterilir.

$L(\lambda, X)$ ile, (λ, τ_0) dan (X, T) ye tanımlı sınırlı lineer operatörler uzayını gösteririz. Şu hâlde, Teorem 4.3.6 ile her $x \in X(\lambda)$ için $x \in L(\lambda, X)$ olacağını anlarız. Yani, $X(\lambda) \subseteq L(\lambda, X)$ olur.

Şimdi de, $(X(\lambda), T_\mathcal{B})$ uzayı üzerinde düzgün sınırlılık prensibini ifade eden bir teoreme yer vereceğiz:

Teorem 4.3.8. (λ, τ_0), $\lambda \supseteq \varphi$ olacak şekilde kesimsel düzgün sınırlılık ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir $K -$uzay ise, bu takdirde $(X(\lambda), T_\mathcal{B})$ düzgün sınırlılık özelliğine sahiptir. Yani, $\{x^{(\alpha)} : \alpha \in \Lambda\} \subseteq X(\lambda)$ kümesi λ üzerinde noktasal sınırlı ise, bu küme (λ, τ_0) ın sınırlı her alt kümesi üzerinde düzgün sınırlıdır. Yani $\{x^{(\alpha)} : \alpha \in \Lambda\}$, $T_\mathcal{B} -$sınırlıdır (Wu ve ark., 2005).

İspat. Genelliği kaybetmeksizin, $\{x^{(\alpha)} : \alpha \in \Lambda\} \subseteq X(\lambda)$ ile verilen kümenin $X(\lambda)$ nın bir $(x^{(n)})$ şeklindeki dizisi olduğunu varsayabiliriz.

Bir an için $\{x^{(\alpha)} : \alpha \in \Lambda\} \subseteq X(\lambda)$ ile verilen kümenin λ üzerinde noktasal sınırlı; fakat (λ, τ_0) ın sınırlı hiçbir alt kümesinde düzgün sınırlı olmadığını varsayalım. Böylece öyle bir $P \in \mathcal{P}$ ve $B \in \mathcal{B}$ bulunur ki;

$$\sup\{P_B(x^{(n)}) : n \in \mathbb{N}\} = \infty \tag{4.3.3}$$

olur.

Buradan, her $M > 0$ için $P_B(x^{(n)}) > M$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $M = 1 + 1$ alalım. Şu hâlde $P_B(x^{(n_1)}) > 1 + 1$ olacak şekilde bir $x^{(n_1)}$ alabiliriz. P_B nin tanımından bir $t^{(1)} \in B$ ve $P\left(\sum_j t_j^{(1)} x_j^{(n_1)}\right) > 1 + 1$ vardır. $\sum_j t_j^{(1)} x_j^{(n_1)}$ serisi yakınsak olduğundan $P\left(\sum_{j=j_1+1}^{\infty} t_j^{(1)} x_j^{(n_1)}\right) < 1$ olacak şekilde bir $j_1 \in \mathbb{N}$ vardır ve böylece $P\left(\sum_{j=1}^{j_1} t_j^{(1)} x_j^{(n_1)}\right) > 1$ olur.

$$M = sup\left\{P\left(\sum_{j=1}^{j_1} t_j x_j^{(n)}\right) : (t_j) \in B, n \in \mathbb{N}\right\} + \sum_{n=1}^{n_1} P_B\left(x^{(n)}\right) + 2^2 + 1$$

olsun. $\lambda \supseteq \varphi$ ve $\left(x^{(n)}\right)$, λ üzerinde noktasal sınırlı olduğundan; her $j \in \mathbb{N}$ için $\left(x_j^{(n)}\right)_n$, (X, T) nin sınırlı bir alt kümesi olur. O hâlde, (λ, τ_0) ın kesimsel düzgün sınırlılık özelliğine sahip bir K −uzay olduğunu ve Teorem 4.3.6'yı da dikkate alarak M nin sonlu olduğunu anlarız. Ayrıca, $P_B\left(x^{(n_2)}\right) > M$ olacak şekilde bir $x^{(n_2)}$ bulunabilir. Böylece $P\left(\sum_j t_j^{(2)} x_j^{(n_2)}\right) > M$ olacak şekilde bir $t^{(2)} \in B$ bulunur. M nin tanımından; $n_2 > n_1$ ve $P\left(\sum_{j=j_1}^{\infty} t_j^{(2)} x_j^{(n_2)}\right) > 2^2 + 1$ olur. Böylece $\sum_j t_j^{(2)} x_j^{(n_2)}$ serisinin yakınsaklığından $P\left(\sum_{j=j_2+1}^{\infty} t_j^{(2)} x_j^{(n_2)}\right) < 1$ olacak şekilde bir $j_2 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki $j_2 > j_1$ olur, bu da $P\left(\sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_j^{(2)} x_j^{(n_2)}\right) > 2^2$ olmasını gerektirir. Tümevarım ile, (λ, τ_0) ın bir $\left(t_0^{(k)}\right)$ sınırlı blok dizisi ve $\left(x^{(n)}\right)$ nin bir $\left(x^{(n_k)}\right)$ alt dizisi için;

$$P\left(\sum_j t_{0_j}^{(k)} x_j^{(n_k)}\right) > k^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

olur.

Şimdi de $s^{(k)} = \left(t_0^{(k)}\right)/k$ alalım. Bu takdirde,

$$P\left(\sum_j s_j^{(k)} x_j^{(n_k)}\right) > k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.3.4}$$

olur.

Hahn-Banach teoreminden (X,T) nin sürekli lineer fonksiyonlarının bir (f_k) dizisi için, $\|f_k\|_P = \sup\{|f_k(x)| : x \in X, P(x) \le 1\} \le 1$ ve

$$f_k\left(\sum_j s_j^{(k)} x_j^{(n_k)}\right) = P\left(\sum_j s_j^{(k)} x_j^{(n_k)}\right) > k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.3.5}$$

olur.

Bu takdirde (f_k) nın eşsürekli bir dizi olduğu açıktır. Buradan, $\left[(f_i)/i\left(\sum_j s_j^{(k)} x_j^{(n_i)}\right)\right]_{ik}$ sonsuz matrisini göz önüne aldığımızda, her $k \in \mathbb{N}$ için $\{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ noktasal sınırlı ve (f_k) eşsürekli bir dizi olduğundan;

$$\lim_i \frac{f_i}{i}\left(\sum_j s_j^{(k)} x_j^{(n_i)}\right) = 0$$

olduğu görülür. Eğer (k_p) dizisi $\mathbb{N}$ de artan bir dizi ise, (λ, τ_0) ın 0-gliding hump özelliğinden $\sum_m s^{(k_{p_m})} \in \lambda$ olacak şekilde, (k_p) dizisinin bir (k_{p_m}) alt dizisi mevcuttur. Artık, $\{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ noktasal sınırlı ve (f_k) eşsürekli bir dizi olduğundan;

$$\lim_i \frac{f_i}{i}\left(\sum_m \sum_j s_j^{(k_{p_m})} x_j^{(n_i)}\right) = 0$$

elde edilir.

Son olarak Antosik-Mikusinski matris teoreminden (Swartz, 1996),

$$\lim_k \frac{f_k}{k}\left(\sum_j s_j^{(k)} x_j^{(n_k)}\right) = 0$$

olacağı anlaşılır ki, bu da kabulümüzle çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki örnek ile, Teorem 4.3.6 ve Teorem 4.3.8'deki gliding hump kabulünün zorunlu olduğunu göstermiş olacağız.

Örnek 4.3.9. $\lambda = (\varphi, \|\cdot\|_\infty)$ ve $\mathbb{C}$ kompleks cisim olsun. Bu takdirde, λ kesimsel düzgün sınırlılık özelliğine sahip bir K −uzay iken, quasi 0-gliding hump özelliğine sahip olamaz. $\lambda -$çarpım yakınsak serilerin uzayı olan $\mathbb{C}(\lambda)$ uzayı, kompleks terimli tüm dizilerin ω uzayı olarak düşünülebilir. $x = (x_j) = (j)_{j=1}^{\infty}$ olsun. Bu takdirde, $x \in \mathbb{C}(\lambda)$ ve $B = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ kümesi $(\varphi, \|\cdot\|_\infty)$ uzayının sınırlı alt kümesidir. Fakat $P_B(x) = \infty$ dur. Bu da Teorem 4.3.6 ve Teorem 4.3.8'de kullanılan gliding hump özelliğinin, bu teoremlerin hükmü için gerekli olduğunu gösterir (Wu ve ark., 2005).

Aşağıda $X(\lambda)$ uzayının tamlığı üzerine bazı sonuçlara yer vereceğiz.

Teorem 4.3.10. (λ, τ_0), $\lambda \supseteq \varphi$ olacak şekilde kesimsel düzgün sınırlılık ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir $K -$uzay ve (X, T) bir dizisel tam Hausdorff uzay ise, bu takdirde $(X(\lambda), T_B)$ uzayı da dizisel tamdır (Wu ve ark., 2005).

İspat. $(x^{(n)})$ bir $T_B -$Cauchy dizisi olsun. (X, T) nin dizisel tamlığından her $j \in \mathbb{N}$ için, $x_j^{(0)} = \lim_n x_j^{(n)}$ yi sağlayan bir $x^{(0)} = \left(x_j^{(0)}\right)$ dizisi mevcuttur. Bu durumda, yalnızca $x^{(0)} = \left(x_j^{(0)}\right) \in X(\lambda)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Her $\varepsilon > 0$ ve $t = (t_j) \in \lambda$ için, (λ, τ_0) ın kesimsel düzgün sınırlılık özelliğine sahip olduğunu da aklımızda tutarak, $B = \{t^{[l]} - t^{[k]} : k, l \in \mathbb{N}\} \in B$ olacağını anlarız. $(x^{(n)})$ bir $T_B -$Cauchy dizisi olduğundan, her $k, l \in \mathbb{N}$ ve $m, n \geq n_0$ için;

$$P\left(\sum_{j=k}^{l} t_j\left(x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Bu kez $x^{(n_0)} \in X(\lambda)$ olduğundan, her $p, q \in \mathbb{N}$ ve $p, q \geq p_0$ için;

$$P\left(\sum_{p}^{q} t_j x_j^{(n_0)}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $p_0 \in \mathbb{N}$ bulunur.

Diğer yandan, her $j \in \mathbb{N}$ için $x_j^{(0)} = \lim_n x_j^{(n)}$ olduğundan $m_0 > n_0$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki;

$$P\left(\sum_{p}^{q} t_j \left(x_j^{(m_0)} - x_j^{(0)}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur.

Böylece $p,q \geq p_0$ için;

$$P\left(\sum_{p}^{q} t_j x_j^{(0)}\right) \leq P\left(\sum_{p}^{q} t_j \left(x_j^{(m_0)} - x_j^{(n_0)}\right)\right) + P\left(\sum_{p}^{q} t_j \left(x_j^{(m_0)} - x_j^{(0)}\right)\right)$$
$$+P\left(\sum_{p}^{q} t_j x_j^{(n_0)}\right) \leq \varepsilon \qquad (4.3.6)$$

olur ki, bu da $x^{(0)} = \left(x_j^{(0)}\right) \in X(\lambda)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.11. (λ, τ_0), $\lambda \supseteq \varphi$ olacak şekilde kesimsel düzgün sınırlılık ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir $K-$uzay ve (X,T) bir dizisel tam Hausdorff uzay olsun. Eğer $\left(\lambda, k\left(\lambda, \lambda^{\beta}\right)\right)$ bir $AK-$uzay ise, bu durumda $\left(X(\lambda), \sigma(X(\lambda), \lambda)\right)$ dizisel tamdır. Yani $\left(x^{(n)}\right) \subseteq X(\lambda)$ ve her $t = (t_j) \in \lambda$ için, $\left(\sum_j t_j x_j^{(n)}\right)_n$ dizisi (X,T) de bir Cauchy dizisi ise, bu takdirde $x^{(0)} = \left(x_j^{(0)}\right) \in X(\lambda)$ olur ve $\left(x^{(n)}\right)$, $x^{(0)} = \left(x_j^{(0)}\right)$ dizisine (λ üzerinde) noktasal yakınsaktır, burada $x^{(0)} = \left(x_j^{(0)}\right)$ her $j \in \mathbb{N}$ için, $x_j^{(0)} = \lim_n x_j^{(n)}$ şeklinde dikkate alınmıştır (Wu ve ark., 2005).

İspat. (4.3.6)'dan sadece şunu ispatlamak yeterlidir: Her $(t_j) \in \lambda$, $P \in \mathcal{P}$ ve $\varepsilon > 0$ için, $k,l \geq k_0$ ve $m,n \geq n_0$ olacak şekilde öyle bir k_0 ve n_0 vardır ki;

$$P\left(\sum_{j=k}^{l} t_j \left(x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\right)\right) < \varepsilon$$

sağlanır.

Bir an için böyle olmadığını düşünelim. Bu takdirde, $\varepsilon_0 > 0$ ve $P \in \mathcal{P}$ için;

$$P\left(\sum_{j=k_q}^{l_q} t_j \left(x_j^{(m_q)} - x_j^{(n_q)}\right)\right) \geq \varepsilon_0$$

olacak şekilde, pozitif tam sayıların (k_q), (l_q), (m_q), (n_q) şeklinde kesin artan dizileri mevcuttur.

Hahn-Banach teoremi ile (X,T) nin;

$\left\|f_q\right\|_P = \sup\left\{\left|f_q(x)\right| : x \in X, P(x) \leq 1\right\} \leq 1,$

olacak şekilde bir (f_q) sürekli lineer fonksiyoneller dizisi ile

$$f_q\left(\sum_{j=k_q}^{l_q} t_j\left(x_j^{(m_q)} - x_j^{(n_q)}\right)\right) = P\left(\sum_{j=k_q}^{l_q} t_j\left(x_j^{(m_q)} - x_j^{(n_q)}\right)\right) \geq \varepsilon_0 \qquad (4.3.7)$$

ifadesi elde edilir.

Her $q \in \mathbb{N}$ için, $z^{(q)} = \left(z_j^{(q)}\right) = \left(x_j^{(m_q)} - x_j^{(n_q)}\right)$ olsun. Bu takdirde teoremde verilen hipotezle; her $(t_j) \in \lambda$ için, $\lim_q \sum_j t_j z_j^{(q)} = 0$ olur. Hatırlayalım ki, $q \in \mathbb{N}$ ve $(t_j) \in \lambda$ için $\sum_j t_j z_j^{(q)}$ serisi (X, T) uzayında yakınsak olduğundan, $\sum_j t_j f_q(z_j^{(q)})$ serisi de yakınsak olur. Böylece $\left(f_q\left(z_j^{(q)}\right)\right) \in \lambda^\beta$ olacağı anlaşılır. Ayrıca $\left\|f_q\right\|_P = \sup\left\{\left|f_q(x)\right| : x \in X, P(x) \leq 1\right\} \leq 1$ ve $\lim_q \sum_j t_j z_j^{(q)} = 0$ ifadelerinden,

$$\lim_q\left(\sum_j t_j f_q\left(z_j^{(q)}\right)\right) = 0$$

olduğunu görmek zor değildir.

Artık, $\left(f_q\left(z_j^{(q)}\right)\right)_q \subseteq \lambda^\beta$ bir $\sigma\left(\lambda^\beta, \lambda\right)$ −dizisel kompakt ve dolayısıyla Lemma 4.3.1 ile $\sigma\left(\lambda^\beta, \lambda\right)$ − kompakt bir kümedir. $\left(\lambda, k\left(\lambda, \lambda^\beta\right)\right)$ bir AK −uzay olduğundan,

$$\lim_q f_q\left(\sum_{j=k_q}^{l_q} t_j\left(x_j^{(m_q)} - x_j^{(n_q)}\right)\right) = \lim_q \sum_{j=k_q}^{l_q} t_j f_q\left(z_j^{(q)}\right) = 0$$

elde edilir ki, bu da (4.3.7) ile çelişir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Bilindiği üzere; λ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip iken, $\sigma\left(\lambda^\beta, \lambda\right)$ dizisel tam bir uzay ve $\tau\left(\lambda, \lambda^\beta\right)$ bir AK −uzaydır (Swartz, 1996). Böylece, Lemma 4.3.3 ve Teorem 4.3.11 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.3.12. (λ, τ_0), $\lambda \supseteq \varphi$ olacak şekilde; kesimsel düzgün sınırlılık, quasi 0-gliding hump ve işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliklerine sahip bir K −uzay ve (X, T) bir dizisel tam Hausdorff uzay olsun. Bu takdirde $\left(X(\lambda), \sigma(X(\lambda), \lambda)\right)$ dizisel tamdır (Wu ve ark., 2005).

λ^{β} uzayının her $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$ −dizisel kompakt alt kümesi F ve $B \in \mathcal{B}$ için, $(u_j) \in F$ ve $(t_j) \in B$ ye göre $\sum_j u_j t_j$ serisi düzgün yakınsak oluyorsa, bu takdirde (λ, τ_0) uzayına düzgün yakınsaklık özelliğine sahiptir denir.

(Li ve Cho, 1999) şu önemli sonucu ispatlamıştır:

Lemma 4.3.13. Eğer (λ, τ_0) dizi uzayı kesimsel düzgün sınırlılık ve güçlü gliding hump özelliğine sahip ise, bu takdirde (λ, τ_0) düzgün yakınsaklık özelliğine sahiptir (Li ve Cho, 1999).

Teorem 4.3.14. (λ, τ_0), $\lambda \supseteq \varphi$ olacak şekilde kesimsel düzgün sınırlılık ve quasi 0-gliding hump özelliğine sahip bir K −uzay olsun. (λ, τ_0) düzgün yakınsaklık özelliğine sahip ise, bu takdirde her $x = (x_j) \in X(\lambda)$ ve $B \in \mathcal{B}$ için, $\sum_j t_j x_j$ serisi $(t_j) \in B$ ye göre düzgün yakınsaktır (Wu ve ark., 2005).

İspat. Bir an için öyle olmadığını düşünelim. Bu takdirde, bir $\varepsilon_0 > 0$, $P \in \mathcal{P}$, $(t^{(k)}) \subseteq B$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için;

$$P\left(\sum_{j=j_k}^{l_k} t_j^{(k)} x_j\right) \geq \varepsilon_0$$

eşitsizliğini sağlayan, kesin artan (j_k) ve (l_k) alt dizileri mevcuttur.

Yine, Hanh-Banach teoremi ile;

$$f_k\left(\sum_{j=j_k}^{l_k} t_j^{(k)} x_j\right) \geq \varepsilon_0, \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.3.8}$$

eşitsizliğini sağlayan (X, T) nin eşsürekli sınırlı lineer fonksiyonel dizisi (f_k) elde edilebilir.

(f_k) nın $\sigma(X', X)$ kapanışı A_1 olsun. Bu takdirde, iyi bilinen Alaoğlu-Bourbaki teoreminden A_1; X' in $\sigma(X', X)$ −kompakt bir alt kümesi olur (Wilansky, 1978). $x \in X(\lambda)$ olduğundan her $(t_j) \in \lambda$ için, $\sum_j t_j x_j$ serisi yakınsaktır. Böylece her $f \in X'$ için,

$$f\left(\sum_j t_j x_j\right) = \sum_j t_j f(x_j)$$

eşitliği elde edilir.

$L(f) = \left(f(x_j)\right)_j$ için $L : X' \to \lambda^\beta$ lineer operatörünü düşünelim. $L(f)(t) = \sum_j t_j f(x_j)$ den, $L : X' \to \lambda^\beta$ lineer operatörü $\sigma(X', X) - \sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ anlamında süreklidir. Böylece, A_1 in $L(A_1)$ şeklindeki görüntüsü, $\left(\lambda^\beta, \sigma(\lambda^\beta, \lambda)\right)$ nın kompakt bir alt kümesidir. Ayrıca, Lemma 4.3.1'den $L(A_1)$; $\left(\lambda^\beta, \sigma(\lambda^\beta, \lambda)\right)$ nın dizisel kompakt bir alt kümesidir. (λ, τ_0) ın düzgün yakınsaklık özelliğinden, $k \in \mathbb{N}$ için $\sum_j t_j f_k(x_j)$ serisi $(t_j) \in B$ ye göre düzgün yakınsar. Bu da (4.3.8) ile çelişir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

4.4. λ-Çarpım Yakınsak Operatör Serileri ve Orlicz-Pettis Teoremi

Bu bölümde Orlicz-Pettis Teoreminin, bir λ dizi uzayının AK özelliğine bağlı olacak şekilde operatör serilerinin λ −çarpım yakınsaklığı ile elde edilen bir versiyonunu vereceğiz. Orlicz-Pettis Teoreminin en yaygın kullanım alanı olarak da, çarpım yakınsak seriler ön plana çıkar.

$x \in X$ ve $y' \in Y'$ olmak üzere, $x \otimes y'$ ile $L(X, Y)$ üzerinde $\langle x \otimes y', T\rangle = \langle y', Tx\rangle$ şeklinde tanımlanan bir lineer fonksiyoneli ve $X \otimes Y'$ ile de $\{x \otimes y' : x \in X, y' \in Y'\}$ kümesi tarafından gerilen bir alt uzayı gösteririz. $L(X, Y)$ üzerindeki zayıf operatör topolojisi, $L(X, Y)$ ve $X \otimes Y'$ arasındaki duallikten elde edilen zayıf topolojidir. $L(X, Y)$ üzerinde güçlü operatör topolojisi $L_s(X, Y)$, X üzerindeki noktasal yakınsaklık ile üretilen topolojidir. $L_b(X, Y)$ ise $L(X, Y)$ üzerinde, X in sınırlı alt kümelerinde düzgün yakınsaklık ile üretilen topolojidir. p, Y üzerinde sürekli bir yarı norm ve A, X in sınırlı bir alt kümesi olmak üzere; $L_b(X, Y)$ ise $p_A(T) = sup\{p(Tx) : x \in A\}$ yarı normlar ailesi tarafından üretilen topolojidir.

(X, X') bir dual çifti olsun, sırasıyla X in zayıf topolojisi, Mackey topolojisi ve güçlü topolojisi: $\sigma(X, X')$, $\tau(X, X')$ ve $\beta(X, X')$ şeklindedir. $\mathcal{K}(X, X')$, $c(X, X')$ ve $v(X, X')$ sırasıyla: $\sigma(X', X)$ −kompakt kümeler, $\sigma(X', X)$ −sayılabilir kompakt kümeler ve $\sigma(X', X)$ −dizisel kompakt kümelerdeki düzgün yakınsak X topolojilerini belirtir. Şartsız $\sigma(X', X)$ −dizisel kompakt (eğer A daki her dizi bir $\sigma(X', X)$ −Cauchy alt diziye sahip ise, bir $A \subseteq X'$ kümesi şartsız $\sigma(X', X)$ −dizisel kompakttır (Stuart ve Swartz, 2005)) kümeler üzerinde X in düzgün yakınsak topolojileri $\gamma(X,X')$ ile gösterilecektir. $c(X,X')$ topolojisinin; $\mathcal{K}(X,X')$ ile $v(X,X')$ topolojilerinden daha güçlü ve $\tau(X,X')$ Mackey topolojisinden kesin daha güçlü olduğu açıktır (Wilansky, 1978). $\mathcal{K}(X,X')$ ve $\gamma(X,X')$ topolojileri karşılaştırılabilir değildir.

X ve Y iki lokal konveks Hausdorff uzay olmak üzere; eğer bir (P) özelliği tüm sürekli lineer dönüşümler altında korunabiliyorsa, bu özelliğe sürekli lineer değişmezdir denir. Buna örnek olarak kompakt, sayılabilir kompakt, dizisel kompakt, konveks kompakt, sınırlı ve sonlu kümeler ve ayrıca yakınsak diziler sürekli lineer değişmezler olarak karşımıza çıkarlar.

$\boldsymbol{P} = \{D \subseteq X : D$ sonlu bir küme ya da $\sigma(X,X') -$ sınırlı ve (P) özelliğine sahiptir$\}$.

$L_P(X,Y)$ ile $\boldsymbol{P}$ deki tüm kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisini gösteririz. $L_P(X,Y)$ nin, $L(X,Y)$ üzerinde bir operatör topolojisi olduğu açıktır.

O hâlde,

$\boldsymbol{P}_\lambda = \{D \subseteq \lambda^\beta :$ D sonlu bir küme ya da $\sigma(\lambda^\beta,\lambda) -$ sınırlı ve (P) özelliğine sahiptir$\}$

olsun. $\boldsymbol{P}_\lambda(\lambda,\lambda^\beta)$ ile $\boldsymbol{P}_\lambda$ daki tüm kümeler üzerinde, düzgün yakınsaklık topolojisini gösteririz. Yine açık olarak $\boldsymbol{P}_\lambda(\lambda,\lambda^\beta)$ nın bir (λ,λ^β) kutup topolojisi olduğu açıktır.

Ana sonuçlar aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.4.1. $\lambda \supseteq \varphi$, X ve Y iki Hausdorff lokal konveks uzay ve sürekli lineer değişmez bir (P) özelliği verilsin. Bu takdirde her $\lambda -$çarpım zayıf operatör topolojisi $L(X,Y)$ nin ve yakınsak operatör serisi $\sum_j T_j$ nin $\lambda -$çarpım $L_P(X,Y)$ $-$yakınsak olması için gerek ve yeter koşul; $\left(\lambda,\boldsymbol{P}_\lambda(\lambda,\lambda^\beta)\right)$ uzayının bir $AK -$uzay olmasıdır (Yuanhong ve Ronglu, 2007).

İspat. Yeterlilik: Kabul edelim ki $\sum_j T_j$ serisi, $L(X,Y)$ nin zayıf operatör topolojisi ile bir $\lambda -$çarpım yakınsak seri olsun. Eğer $\sum_j T_j$, $\lambda -$çarpım $L_P(X,Y)$ $-$yakınsak değilse; $\sum_j t_j^{(0)} T_j$ serisi T_0'a zayıf operatör topolojisiyle yakınsak olacak şekilde $\left(t_j^{(0)}\right) \in \lambda$, $T_0 \in L(X,Y)$ ve $D \in \boldsymbol{P}$ vardır; fakat D üzerinde $\sum_j t_j^{(0)} T_j$ serisi, T_0 a düzgün yakınsak değildir. Yani,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left\{p\left(\sum_{j=n}^{\infty}t_j^{(0)}jx\right)\right\}\geq\varepsilon_0 \tag{4.4.1}$$

olacak şekilde $\varepsilon_0 > 0$ ve Y de sürekli bir p yarı normu vardır.

Wilansky (1978)'e göre, Hahn-Banach teoreminden Y' nin eşsürekli bir B alt kümesi vardır öyle ki;

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D,y'\in B}\left\{\left|\sum_{j=n}^{\infty}t_j^{(0)}T_jx,y'\right|\right\}\geq\varepsilon_0 \tag{4.4.2}$$

olur.

$\sum_j T_j$ serisinin zayıf operatör topolojsi ile $\lambda -$çarpım yakınsak olduğunu aklımızda tutarak, her $(t_j)\in\lambda$, $x\in X$ ve $y'\in Y'$ için,

$$\left(\sum_j t_jT_jx,y'\right)=(Tx,y') \tag{4.4.3}$$

olacak şekilde $T\in L(X,Y)$ mevcuttur.

(4.4.3)'ten, her $x\in X$ ve $y'\in Y'$ için ve $\left((T_jx,y')\right)_{j=1}^{\infty}\in\lambda^{\beta}$ olmak üzere;

$$\sum_j t_j(T_jx,y')=(Tx,y') \tag{4.4.4}$$

şeklindeki eşitlik yazılabilir.

$T\in L(X,Y)$, $D\in\boldsymbol{P}$ ve B; Y' nin eşsürekli bir alt kümesi olmak üzere (4.4.4) eşitliğinden $\left\{\left((T_jx,y')\right)_{j=1}^{\infty}: x\in D, y'\in B\right\}\in\boldsymbol{P}_\lambda$ olur. Böylece, $\left(\lambda,\boldsymbol{P}_\lambda(\lambda,\lambda^\beta)\right)$ uzayı bir $AK -$uzay olduğundan her $n\geq n_o$ için,

$$\sup_{x\in D,y'\in B}\left\{\left|\sum_{j=n}^{\infty}t_j^{(0)}(T_jx,y')\right|\right\}<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ vardır.

Bu ise (4.4.2) ile çelişir.

Gereklilik: Eğer $\left(\lambda,\boldsymbol{P}_\lambda(\lambda,\lambda^\beta)\right)$ bir $AK -$uzay değilse;

$$\lim_{n} \sup \left\{ \left| \sum_{j=n}^{\infty} t_j^{(1)} u_j \right| : (u_j) \in D \right\} > 0 \tag{4.4.5}$$

olacak şekilde, $\left(t_j^{(1)}\right) \in \lambda$ ve $D \in \boldsymbol{P}_\lambda$ bulunur.

$X = \left(\lambda^\beta, \sigma(\lambda^\beta, \lambda)\right)$ ve Y kompleks $\mathbb{C}$ cismi olsun. Bu takdirde, her $u = (u_j) \in \lambda^\beta$ için $j \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $T_j u = u_j$ ile verilen $T_j : \lambda^\beta \to \mathbb{C}$ dönüşümlerini tanımlayalım. Açıktır ki, her $j \in \mathbb{N}$ için $T_j \in L(\lambda^\beta, \mathbb{C})$ dir. Her $t = (t_j) \in \lambda$ ve $u = (u_j) \in \lambda^\beta$ için, $\lim_n \sum_{j=n}^{\infty} t_j T_j u = \lim_n \sum_{j=n}^{\infty} t_j u_j = 0$ olduğundan $\sum_j T_j$ serisi, zayıf operatör topolojisi ile bir λ −çarpım yakınsak seri olur.

Diğer taraftan (4.4.5) dikkate alındığında, $\sum_j T_j$ serisi $L_P(\lambda^\beta, \mathbb{C})$ topolojisi ile bir λ −çarpım yakınsak değildir. Bu ise kabulümüzle çelişir, dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.4.2. $\lambda \supseteq \varphi$ olsun. Bu takdirde, X teki her λ −çarpım $\sigma(X, X')$ −yakınsak $\sum_j x_j$ serisinin λ −çarpım $\tau(X, X')$ −yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, $\left(\lambda, \tau(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ nın bir AK −uzay olmasıdır (Wu ve Lu, 2002; Stuart ve Swartz, 2005).

Lemma 4.4.3. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde $\left(\lambda, \tau(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ bir AK −uzaydır (Wu ve Lu, 2002; Stuart ve Swartz, 2005).

Aşağıda Orlicz-Pettis Teoreminin bir versiyonunu; yukarıda vermiş olduğumuz Teorem 4.4.1 ve Lemma 4.4.3 yardımıyla kolayca elde ederiz.

Teorem 4.4.4. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde, $\sum_j T_j$ operatör serisinin zayıf operatör topolojisi ile λ −çarpım yakınsak olması için gerek ve yeter şart $L_s(X, Y)$ operatör topolojisi ile λ −çarpım yakınsak olmasıdır (Yuanhong ve Ronglu, 2007).

İspat. Yalnızca, gereklilik kısmını ispat etmek yeterli olacaktır. Lemma 4.4.3 ve λ nın işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğinden, $\left(\lambda, \tau(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ bir AK −uzaydır. τ_0, Y nin orijinal topolojisi ve $\sum_j T_j$ serisi, zayıf operatör topoloji ile λ −çarpım yakınsak bir seri olsun. Bu takdirde her $x \in X$ için, $\sum_j T_j x$ serisi Y deki $\sigma(Y, Y')$ zayıf topolojisiyle λ −çarpım yakınsak bir seri olur.

Lemma 4.4.2'den, $\sum_j T_j x$ serisi Y deki $\tau(Y, Y')$ Mackey topolojisine göre λ −çarpım τ_0 yakınsaktır. Böylece $\sum_j T_j$ serisi, Y deki τ_0 orijinal topolojisine göre, λ −çarpım yakınsak bir seri olur. Yani, $\sum_j T_j$ serisi $L_s(X, Y)$ topolojisiyle bir λ −çarpım yakınsak seri olur ve bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.4.5. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde $\left(\lambda, \mathcal{K}(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ bir AK −uzaydır (Wu ve Lu, 2002; Stuart ve Swartz, 2005).

Lemma 4.4.6. $\mathcal{K}(\lambda, \lambda^\beta) = c(\lambda, \lambda^\beta) = v(\lambda, \lambda^\beta)$ eşitlikleri geçerlidir (Wu ve Lu, 2002).

Teorem 4.4.1, Lemma 4.4.5 ve Lemma 4.4.6 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.4.7. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde, $\sum_j T_j$ operatör serisinin zayıf operatör topoloji ile λ −çarpım yakınsak olması için gerek ve yeter şart $L_C(X, Y)$ topolojisiyle λ −çarpım yakınsak seri olmasıdır. Burada,

$C = \{D \subseteq X : D, \sigma(X, X') - \text{sayılabilir kompakt kümedir}\}$

olduğu dikkate alınmıştır (Yuanhong ve Ronglu, 2007).

Lemma 4.4.8. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde $\left(\lambda, \gamma(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ bir AK −uzaydır (Stuart ve Swartz, 2005).

Böylece, Teorem 4.4.1 ve Lemma 4.4.8 birlikte düşünülünce aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.4.9. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde, $\sum_j T_j$ operatör serisinin zayıf operatör topoloji ile λ −çarpım yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $L_\gamma(X, Y)$ topolojisiyle λ −çarpım yakınsak seri olmasıdır. Burada,

$\gamma = \{D \subseteq X : D \text{ şartsız } \sigma(X, X') - \text{dizisel kompakt küme}\}$

olduğu dikkate alınmıştır.

$\mathfrak{B} = \left\{B \subseteq X : \{x_k\} \subseteq B \text{ ise, bu takdirde her } T \in L(X, Y) \text{ için, } \lim_k Tx_k \text{ vardır}\right\}$

ve $L_B(X, Y)$, $L(X, Y)$ üzerindeki $\mathfrak{B}$ elemanları üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisinin ürettiği bir topoloji olsun (Yuanhong ve Ronglu, 2007).

Lemma 4.4.10. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Eğer $\sum_j T_j$ operatör serisi, $L_s(X,Y)$ topolojisiyle $\lambda-$çarpım yakınsak seri ise bu takdirde, $\sum_j T_j$ serisi $L_B(X,Y)$ topolojisiyle $\lambda-$çarpım yakınsak olur (Stuart ve Swartz, 2005).

Teorem 4.4.1 ve Lemma 4.4.10 birlikte düşünülürse aşağıdaki teorem elde edilebilir:

Teorem 4.4.11. $\lambda \supseteq \varphi$ işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip bir uzay olsun. Bu takdirde $\left(\lambda, B_\lambda(\lambda,\lambda^\beta)\right)$ bir $AK-$uzaydır. Burada,

$B_\lambda = \{B \subseteq \lambda^\beta : \{x_k\} \subseteq B \text{ ise, bu takdirde her } T \in L(\lambda^\beta,\lambda) \text{ için } \lim_k Tx_k \text{ vardır}\}$

olarak düşünülmüştür (Yuanhong ve Ronglu, 2007).

Aşağıda Teorem 4.4.1'in bazı uygulamalarını içeren örneklere yer vereceğiz.

Örnek 4.4.12. $\lambda \supseteq \varphi$ olsun. $[m,n] = \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq n\}$ formundaki bir küme, $\mathbb{N}$ de bir aralıktır. Eğer I bir aralık ise, o hâlde I nın karakteristik fonksiyonu χ_I olacak ve eğer $t = \{t_k\} \in \lambda$ ise o hâlde, χ_I ve t nin koordinatsal çarpımı $\chi_I t$ olarak tanımlanır. Her j için max $I_j <$ min I_{j+1} ise, $\mathbb{N}$ de $\{I_j\}$ aralığının bir dizisi artandır.

$t \in \lambda$ ve $\{I_k\}$ aralıkların artan bir dizisi ise $\{I_k\}$ nın bir $\{I_{n_k}\}$ alt dizisi ve bir $s_k = \pm 1$ işaret dizisi vardır öyle ki; $\sum_{k=1}^{\infty} s_k \chi_{I_{n_k}} t \in \lambda$ koordinatsal toplam oluyorsa, Swartz (1996)'ya göre λ uzayı işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahiptir. (Boos ve ark., 2004)'e göre yukarıdaki işaretler her k için, $s_k = 1$ ile seçilebiliyorsa λ uzayı zayıf gliding hump özelliğine sahiptir. (Boos ve ark., 2004)'e göre örneğin $\ell^p (0 < p \leq \infty)$, m_0, c_0 gibi herhangi bir monoton dizi uzayı zayıf gliding hump özelliğine sahiptir, sınırlı serilerin uzayı b_s, işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahiptir; fakat zayıf gliding hump özelliğine sahip değildir. (Boos ve ark., 2004)'e göre zayıf gliding hump özelliğine veya Swartz (1996)'ya göre işaretli zayıf gliding hump (SWGH) özelliğine sahip uzayın geniş bir sınıfı vardır.

4.5. λ-Çarpım Yakınsak Seriler ve β-Dualite

Bu bölümde, $\lambda\left(\mu(\lambda,\lambda^\beta)\right)$ nın fıçılı (barrelled) bir $AK-$uzay olması durumunda; $\sum_n x_n$ nin $\lambda-$çarpım yakınsak olması için gerek ve yeter şartın zayıf $\lambda-$çarpım Cauchy olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, λ_1- ve λ_2-çarpım yakınsaklıkların

λ_1 ve λ_2 farklı dizi uzayları ve tüm E için denk olup olmadıkları ve λ_1 ile λ_2 arasındaki yoğunluk tipi ilişkisi açısından bir karakterizasyon elde edilecek olup, ayrıca bu ilişki Schaefer tarafından kullanılan (λ, λ^β) dual çifti üzerinde bir topoloji ile tanımlanır. Yani, λ altında en güçlü topoloji bir AK −uzaydır.

Bessaga ve Pełczyński (1958), bir E Banach uzayındaki $\sum_n x_n$ serisinin zayıf şartsız Cauchy olduğunu ispatlamıştır. Yani, her $f \in E'$ için $\sum_n |f(x_n)| < +\infty$ olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in c_0$ için $\sum_n \alpha_n x_n$ serisinin yakınsak olmasıdır. Singer (1970), bir Banach uzaydaki $\sum_n x_n$ serisinin zayıf p −şartsız Cauchy olmasını, her $\alpha \in l^p (1 < p < \infty)$ için $\sum_n \alpha_n x_n$ serisinin yakınsak olmasıyla mümkün olacağını göstermiştir. Buradan elde dilen sonuç ile Singer bu türden serileri her $f \in E'$ için, $\sum_n |f(x_n)|^q < +\infty$ (q, p nin eşleniğidir) şeklinde karakterize etmiştir. Bennett (1973), bu sonuçları keyfi alınan dizisel tam lokal konveks uzaylara genişletmiştir. Son zamanlarda, (Gupta ve Kantham, 1984) ve Maddox (1984), benzer problemleri bazı özel dizi uzayları için çalışmışlardır.

$\sum_n x_n$ serisi λ −çarpım yakınsak olacak şekilde tüm $(x_n)_n$ dizilerinin uzayı $E(\lambda)$ ile gösterilecektir yani,

$$E(\lambda) := \left\{ (x_n)_n \in E^N : \sum_n \alpha_n x_n \ E \text{ de yakınsaktır, her } \alpha \in \lambda \text{ için} \right\}$$

olur.

Herhangi bir λ dizi uzayı için λ −çarpım yakınsak serileri λ uzayının $\beta -$ duali ile karakterize edebiliriz, aşağıda buna dair bazı teoremlere ve sonuçlara yer vereceğiz (Florencio ve Paúl, 1988).

Teorem 4.5.1. Eğer λ; $\mu(\lambda, \lambda^\beta)$ Mackey topolojisi ile donatılmış fıçılı (barrelled) bir AK −uzaysa, bu takdirde $\sum_n x_n$ serisinin λ −çarpım yakınsak olması için gerek ve yeter koşul; her $f \in E'$ için, $\left(f(x_n)\right)_n \in \lambda^\beta$ olmasıdır (Florencio ve Paúl, 1988).

İspat. Gereklilik: $\sum_n x_n$ serisi λ −çarpım yakınsak, $\alpha \in \lambda$ ve $f \in E'$ ise,

$$f\left(\sum_n \alpha_n x_n\right) = \sum_n \alpha_n f(x_n)$$

olduğunu dikkate aldığımızda gereklilik açıklık kazanır (Singer, 1970).

Yeterlilik: Her $f \in E'$ için $\left(f(x_n)\right)_n \in \lambda^\beta$ olsun. $T: \varphi \to E$, $T(\alpha) \coloneqq \sum_n \alpha_n x_n$ şeklindeki dönüşümü tanımlayalım. Bu takdirde:

$\langle T(\alpha), f\rangle_{(E,E')} = \langle \alpha, \left(f(x_n)\right)_n\rangle_{(\varphi,\lambda^\beta)}$

olur.

Şimdi, $T^*(f) = \left(f(x_n)\right)_n \in \lambda^\beta$ olacak şekilde $T^*: E' \to \omega$ bulunur. Dolayısıyla T dönüşümünün $\mu(\varphi, \lambda^\beta) - \tau_E$ −sürekli olduğunu anlarız (Jarchow, 1981). Diğer taraftan $\mu(\lambda, \lambda^\beta)$, φ üzerindeki $\mu(\varphi, \lambda^\beta)$ ya indirgenir; gerçekten her mutlak konveks $\sigma(\lambda^\beta, \varphi)$ −kompakt A kümesi, λ uzayında yer alan her α elemanı φ uzayındaki bir sınırlı kümenin $\sigma(\lambda, \lambda^\beta)$ kapanışında yer alacağından, $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ −sınırlı olur. Yani, $\{P_n(\alpha) : n = 1,2, \dots\}$ dizisi elde edilir. Şimdi, $\lambda\left(\mu(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ uzayı fıçılı (barrelled) bir uzay olduğundan A, $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ −relatif kompakttır. Son olarak $\alpha \in \lambda$ ise, bu takdirde $\{P_n(\alpha) : n = 1,2, \dots\}$ bir $\mu(\varphi, \lambda^\beta)$ −Cauchy dizisidir; çünkü $\lambda\left(\mu(\lambda, \lambda^\beta)\right)$ bir AK −uzaydır ve bu nedenle T nin sürekliliğinden, $\{TP_n(\alpha) : j = 1,2, \dots\} = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : n = 1,2, \dots\}$ eşitliği bir τ_E −Cauchy dizisi olur.

Uyarı 4.5.2. (1) Her $f \in E'$ için $\left(f(x_n)\right)_n \in \lambda^\beta$ koşulunun, başka bir deyişle $\sum_n x_n$ nin zayıf λ −çarpım Cauchy olduğu anlamına geldiğine dikkat edelim.

(2) Eğer λ normal bir uzay ise, Valdivia (1982)'ye göre, Teorem 4.5.1 şöyle ifade edilebilir: $\lambda(\beta(\lambda, \lambda^x))$ bir AK −uzay ise, $E(\lambda) = \left\{(x_n)_n : \left(f(x_n)\right)_n \in \lambda^x, \text{her } f \in E' \text{ için}\right\}$ olur. $\lambda = c_0$ alınırsa, bu durumda Teorem 4.5.1; (Bessaga ve Pełczyński, 1958) ve Bennett (1973)'e göre, bilinen zayıf şartsız yakınsak serileri içerir. $\lambda = l^p$ $(1 \le p < \infty)$ alınarak, Singer (1970) ve Bennett (1973) (her ikisi için de $p > 1$) ve Maddox (1984) ($p = 1$ için) tarafından verilen zayıf p −şartsız yakınsak serilerin karakterizasyonu elde edilir.

Sonuç 4.5.3. $\lambda(\tau)$ bir FK −, AK −uzay olsun (lokal konveks olması gerekli değildir). Buradan,

$E(\lambda) = \left\{(x_n)_n : \left(f(x_n)\right)_n \in \lambda^\beta, \text{her } f \in E' \text{ için}\right\}$

olur (Florencio ve Paúl, 1988).

İspat. İlk olarak λ nın, Teorem 4.5.1'deki hipotezleri yerine getirdiğini doğrulamalıyız. Başlamak için $\left(\lambda(\tau)\right)' = \lambda^{\beta}$ olduğuna dikkat edilmelidir (kapsama, sırasıyla AK özelliği ve Banach-Steinhaus teoreminden gelir). Sonrasında, A bir $\sigma\left(\lambda^{\beta}, \lambda\right)$ $-$sınırlı küme ise, o hâlde A eşsürekli olur. Böylece $\beta\left(\lambda, \lambda^{\beta}\right)$, τ dan daha zayıf olduğu sonucuna ulaşılır. Bu nedenle $\lambda\left(\beta\left(\lambda, \lambda^{\beta}\right)\right)$ bir AK $-$uzaydır ve böylece $\left(\lambda\left(\beta\left(\lambda, \lambda^{\beta}\right)\right)\right)' = \lambda^{\beta}$ olur. Bu takdirde, $\beta\left(\lambda, \lambda^{\beta}\right) = \mu\left(\lambda, \lambda^{\beta}\right)$ dır.

Uyarı 4.5.4. Bu sonuç, Maddox (1984) tarafından verilen $\lambda = w_0(p)$ ve $\lambda = l(p_n)$ durumlarının yanı sıra lokal konveks durum için (Gupta ve Kantham, 1984) tarafından verilen bir sonucu genelleştirmektedir. Bu uzaylar aşağıda tanımlanmıştır. $(p_n)_n$ bir dizi olsun, $0 < p \leq 1$ aralığındaki p bir sayı ve her n için $0 < p_n \leq 1$ olacak şekilde;

$$l(p_n) := \left\{(\alpha_n)_n : \sum_n |\alpha_n|^{p_n} < \infty\right\},$$

$$l^{\infty}(p_n) := \left\{(\alpha_n)_n : \sup_n |\alpha_n|^{p_n} < \infty\right\},$$

$$w_0(p) := \left\{(\alpha_n)_n : \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^{p} = 0\right\}$$

uzayları tanımlanıyor. Bunlar FK $-$, AK $-$, ve normal uzaylardır, ayrıca $\left(l(p_n)\right)^{x} = l^{\infty}(p_n)$ ve $\left(w_0(p)\right)^{x} = \left\{(\alpha_n)_n : \sum_{r=0}^{\infty} 2^{r/p} \max\{|\alpha_n| : 2^r \leq k < 2^{r+1}\} < \infty\right\}$ olur.

$\lambda(\tau)$ bir K $-$uzay ise, buradan λ^{f} aşağıdaki gibi tanımlanıyor (Singer, 1970):

$$\lambda^{f} := \left\{\left(f(e_n)\right)_n : f \in \lambda'\right\}.$$

Aşağıdaki vereceğimiz sonuç Wilansky (1984) ile verilen sonuca yakınlığı açısından ilgi çekicidir.

Sonuç 4.5.5. λ_1 ve λ_2 birer FK $-$uzay, λ_2 ek olarak lokal konveks, λ_1 ise ek olarak bir AK $-$uzay olsun. O hâlde, $\lambda_1 \subset \lambda_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_2^{f} \subset \lambda_1^{\beta}$ olmasıdır (Florencio ve Paúl, 1988).

İspat. $\lambda_1 \subset \lambda_2$ ancak ve ancak $(e_n)_n \in \lambda_2(\lambda_1)$ dir: not edelim ki $\lambda_1 \subset \lambda_2$ ise, bu kapsama süreklidir. Önceki sonuçtan $(e_n)_n \in \lambda_2(\lambda_1)$ olması için gerek ve yeter şart, $\lambda_2^{f} \subset \lambda_1^{\beta}$ olmasıdır.

Uyarı 4.5.6. $\left(\bigcap_{0<p<1} l^p\right)^\beta = l^\infty$ olduğundan, yukarıdaki sonuç hâlihazırda Bennett (1974) ile verilen: "Lokal konveks bir FK −uzayının $\bigcap_{0<p<1} l^p$ yi içermesi için gerek ve yeter şart l^1 uzayını içermesidir." teoremini verir (Florencio ve Paúl, 1988).

Sonuç 4.5.7. $\lambda_2\left(\mu\left(\lambda_2, \lambda_2^\beta\right)\right)$ dizisel tam ve $\lambda_1\left(\mu\left(\lambda_1, \lambda_1^\beta\right)\right)$ bir fıçılı (barreled) uzay olacak şekilde $\lambda_i\left(\mu\left(\lambda_i, \lambda_i^\beta\right)\right)$ $(i = 1,2)$ AK −uzayları verilsin. Bu takdirde, $\lambda_1 \subset \lambda_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_2^\beta \subset \lambda_1^\beta$ olmasıdır (Florencio ve Paúl, 1988).

İspat. Teorem 4.5.1'de $E = \lambda_2$ alalım. λ_2 bir AK −uzaydır, böylece $\lambda_1 \subset \lambda_2$ olması, $(e_n)_n \in \lambda_2(\lambda_1)$ olması anlamına gelir ki $\lambda_1 \subset \lambda_2$ olması için gerek ve yeter şartın her $f \in (\lambda_2)'$ için, $\left(f(e_n)\right)_n \in \lambda_1^\beta$ sonucuna ulaşırız. Fakat $(\lambda_2)' = \lambda_2^\beta$ yani, her $f \in (\lambda_2)'$ için $f(e_n) = \alpha_n$ olacak şekilde $\alpha \in \lambda_2^\beta$ dizisinin mevcut olacağını ve tersine her $\alpha \in \lambda_2^\beta$ olması $f \in (\lambda_2)'$ olmasını gerektireceğini anlarız. Böylece, f için verilen koşulun $\lambda_2^\beta \subset \lambda_1^\beta$ ya denk olduğunu görürüz.

Uyarı 4.5.8. Eğer λ_2 mükemmel (perfect) bir uzay ise, bu takdirde yukarıdaki sonucun koşullarını sağlar (Köthe, 1969).

Sonuç 4.5.9. λ mükemmel bir uzay olsun, o hâlde $\lambda\left(v(\lambda, \lambda^x)\right)$ semi reflektiftir (yarı yansımalı) (Köthe, 1969). Böylece,

$$E(\lambda^x) = \left\{(x_n)_n : \left(f(x_n)\right)_n \in \lambda \text{ her } f \in E' \text{için}\right\}$$

olur.

Uyarı 4.5.10. Pietsch, mükemmel bir λ uzayı için E −değerli dizilerin uzayını:

$$\lambda(E) = \left\{(x_n)_n : \sum_n \alpha_n x_n \text{ şartsız yakınsak, her } \alpha \in \lambda^x \text{ için}\right\}$$

şeklinde tanımlamıştır (Köthe, 1969).

Şartsız yakınsaklık ve sınırlı çarpım yakınsaklığın E de eşdeğer olduğunu ve λ^x in normal bir uzay olduğunu aklımızda tutarak, her $\alpha \in \lambda^x$ için $\sum_n \alpha_n x_n$ serisinin şartsız yakınsaklığının ancak ve ancak yakınsaklığı gerektirdiğini anlarız. Yani, $E(\lambda^x) = \lambda(E)$ dir.

Benzer olarak:

$$\lambda[E] := \left\{(x_n)_n : \left(f(x_n)\right)_n \in \lambda \text{ her } f \in E' \text{için}\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa, Sonuç 4.5.9'dan mükemmel, yarı reflektif bir λ (Köthe normal topolojisiyle birlikte) uzayı için $\lambda(E) = \lambda[E]$ eşitliği elde edilir (Jarchow, 1981).

λ_1 ve λ_2 uzaylarının her ikisi de Teorem 4.5.1'in şartlarını sağlayan uzaylar olmak üzere, her E için $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$ eşitliğinin sağlanmasının ancak ve ancak $\lambda_1^\beta = \lambda_2^\beta$ olmasıyla mümkün olacağını anlarız. Özellikle $\lambda_1 = l^1$ ve $\lambda_2 = l(p_n)$ alınırsa, Maddox (1984)'e göre, her E için $E(l^1) = E\big(l(p_n)\big)$ eşitliğinin sağlanması ancak ve ancak $\inf_n p_n > 0$ olmasıyla mümkündür $\Big($hatırlayalım ki; $\big(l(p_n)\big)^x = \big(l(p_n)\big)^\beta = l^\infty(p_n)\Big)$. Diğer taraftan, E uzayındaki bir serinin sınırlı çarpım yakınsak olmasının ancak ve ancak onun alt seri toplanabilmesiyle ilişkilendirildiğini biliyoruz. Yani, her E için $E(l^\infty) = E(m_0)$ eşitliği sağlanır. Burada dikkat etmeliyiz ki, l^∞ ve m_0 Teorem 4.5.1'in şartlarını sağlamaz. Bu bölümde, iki farklı dizi uzayı λ_1 ve λ_2 nin genel durumları incelenecektir. Bunun için Schaefer (1970) ile verilen $\tau\, S(\lambda)$ topolojisi kullanılacaktır. Bu topolojinin AK özelliğine sahip, (λ, λ^β) dual çifti ile uyumlu λ üzerindeki en güçlü topoloji olduğunu hatırlayalım. $\tau\, S(\lambda)$ topolojisi yarı normların ailesi tarafından,

$$\alpha \to p_c(\alpha) := \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k\right| : n \in \mathbb{N}, c \in C\right\}$$

şeklinde verilir.

Burada, C kümesi λ^β nın $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ −sınırlı mutlak konveks alt kümelerinin $S(\lambda)$ ailesinden seçilecek şekilde her $\alpha \in \lambda$ için, $\sum_n \alpha_n c_n$ serisi $c \in C$ ye göre düzgün yakınsar. Garling (1967)'ye göre, λ^β nın tüm mutlak konveks $\sigma\gamma(\lambda^\beta, \lambda)$ −relatif kompakt alt kümelerinin ailesinin $S(\lambda)$ olduğunu not edelim.

Teorem 4.5.11. λ_1 ve λ_2 dizi uzayları olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir:

(1) Her E için, $E(\lambda_1) \subset E(\lambda_2)$ dir.

(2) $\lambda_2 \subset \bar{\lambda}_1$. Burada $\bar{\lambda}_1$, λ_1 uzayının $\lambda_1^{\beta\beta}\big(\tau\, S(\lambda_1)\big)$ uzayındaki kapanışı olarak alınmıştır (Florencio ve Paúl, 1988).

İspat. (1)⇒(2) Öncelikle, $\tau\, S(\lambda)$ topolojisinin C ler $S(\lambda_1)$ den seçilmek üzere kutup yarı normların ailesi,

$$\alpha \to q_c(\alpha) := \sup\left\{\left|\sum_n \alpha_n c_n\right| : c \in C\right\}$$

ile tanımlanabileceğini görelim. Gerçekten, eğer $\alpha \in \lambda_1$ ve $C \in S(\lambda_1)$ ise, bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için, öyle bir N indisi vardır ki;

$$\sup\{\|(I - P_{n-1})(\alpha c)\|_{cs} : n \geq N, c \in C\} = \sup\left\{\left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k c_k\right| : m \geq n \geq N, c \in C\right\} < \varepsilon$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi, eğer $b \in B$ de ise (bv de birim yuvar) buradan,

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k c_k b_k\right| = \left|\langle (I - P_{n-1})(\alpha c), b\rangle_{(cs,bv)}\right| \leq \|(I - P_{n-1})(\alpha c)\|_{cs}$$

elde edilir.

Böylece, $B(C) \coloneqq \{(b_c c_n)_n : b \in B, c \in C\}$ Schaefer anlamında düzgün yakınsak bir kümedir, dolayısıyla $acx(B(C)) \in S(\lambda_1)$ olur (Schaefer, 1970). Bu takdirde,

$$p_c(\alpha) = \sup\{\|(\alpha_n c_n)_n\|_{cs} : c \in C\} = \sup\left\{\left|\sum_n \alpha_n c_n b_n\right| : c \in C, b \in B\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\sum_n \alpha_n d_n\right| : d \in B(C)\right\} = q_{B(C)}(\alpha) \leq q_{acxB(C)}(\alpha)$$

sağlanır.

Ardından $C \in S(\lambda_1)$ ise, Schaefer (1970)'e göre C, $\sigma\left(\lambda_1^{\beta}, \lambda_1\right)$ −relatif kompakttır ve ziyadesiyle $\sigma\left(\lambda_1^{\beta}, \varphi\right)$ −relatif kompakttır. Böylece, Teorem 4.5.1'de yaptığımız gibi C nin, $\sigma\left(\lambda_1^{\beta}, \lambda_1^{\beta\beta}\right)$ −sınırlı olduğunu ve $\tau\, S(\lambda_1)$ topolojisinin de $\lambda_1^{\beta\beta}$ da tanımlamış bir kutup topoloji olduğunu görürüz. Yarı norm p_C ve Schaefer (1970)'i göz önüne alarak, $\lambda_1^{\beta\beta}\left(\tau\, S(\lambda_1)\right)$ nın tam bir uzay olduğunu ve dolayısıyla $\bar{\lambda}_1\left(\tau\, S(\lambda_1)\right)$ nın da tam olduğunu tespit etmek için $\sigma\gamma\left(\lambda_1^{\beta\beta}, \lambda_1^{\beta}\right)$ ve $\tau\, S(\lambda_1)$ topolojilerine (Köthe, 1969, 18.4.4, s.210) uygulanabilir.

Şimdi, $E = \bar{\lambda}_1\left(\tau\, S(\lambda_1)\right)$ alalım. O hâlde $\lambda_1\left(\tau\, S(\lambda_1)\right)$ bir AK −uzay olduğundan, $(e_n)_n \in \bar{\lambda}_1(\lambda_1)$ dır. Dolayısıyla, (1) ile $(e_n)_n \in \bar{\lambda}_1(\lambda_2)$, yani her $\alpha \in \lambda_2$ için $\sum_n \alpha_n e_n$

serisi $\bar{\lambda}_1$ da yakınsaktır. Bununla birlikte, $\bar{\lambda}_1$ bir K −uzay olduğundan, $\sum_n \alpha_n e_n = \alpha$ ve böylece her $\alpha \in \lambda_2$ için $\alpha \in \bar{\lambda}_1$ olacağını anlarız.

(2)⇒(1) E bir lokal konveks uzay ve $(x_n)_n \in E(\lambda_1)$ olsun. E de sıfırın mutlak konveks komşuluğu U alınırsa, açık olarak $\sum \xi_n f(x_n)$ serisi her $\xi \in \lambda_1$ için $f \in U^o$ olmak üzere düzgün yakınsaktır. Böylece $A := \left\{\left(f(x_n)\right)_n : f \in U^0\right\}$ kümesi $S(\lambda_1)$ uzayına aittir. Şimdi, $\alpha \in \lambda_2$ ise, (2) ile öyle bir $\xi \in \lambda_1$ bulabiliriz ki, $p_A(\alpha - \xi) < 1/4$;

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n}^{m} (\alpha_k - \xi_k)\, f(x_k)\right| : m, n \in \mathbb{N}, m \geq n;\ f \in U^0\right\} < 1/2$$

olur ve eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan, $\sum \xi_n\, x_n$ serisi E de yakınsaktır, bu nedenle;

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n}^{m} \xi_k\, f(x_k)\right| : m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N;\ f \in U^0\right\} < 1/2$$

eşitsizliğini sağlayan bir N indisi bulunabilir.

Son olarak,

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k\, f(x_k)\right| : m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq N;\ f \in U^0\right\} < 1$$

eşitsizliğini sağlayan bir N indisi mevcuttur. Bu ise, $m \geq n \geq N$ olunca $\sum_{k=n}^{m} \alpha_k x_k \in U$ olacağını yani, $(x_n)_n \in E(\lambda_2)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.5.12. λ_1 ve λ_2 iki dizi uzayı olsun. Bu takdirde, her E için $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$ eşitliği ancak ve ancak $\lambda_i^{\beta\beta}\left(\tau\, S(\lambda_i)\right)\, \lambda_j \subset \bar{\lambda}_i$ kapsamasıyla mümkündür. Burada kapanış $i, j = 1{,}2;\ i \neq j$ için alınmıştır (Florencio ve Paúl, 1988).

Uyarı 4.5.13. λ normal bir uzay ise, bu takdirde $\tau\, S(\lambda_i)$, bir $\mu(\lambda, \lambda^x)$ şeklindeki Mackey topoloji olur (Valdivia, 1982).

Sonuç 4.5.14. λ_1 ve λ_2 $\lambda_1 \subset \lambda_2$ şeklindeki iki dizi uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım:

(1) $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$ her E için sağlanır.

(2) $\lambda_2 \subset \bar{\lambda}_1$ ($\lambda_1^{\beta\beta}\left(\tau\, S(\lambda_1)\right)$ uzayında).

(3) $\lambda_1^{\beta} = \lambda_2^{\beta}$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \left(\beta\left(\lambda_2, \lambda_2^{\beta}\right)\right)$ da yoğundur.

(4) $\lambda_2 \subset \bar{\lambda}_1$ ($\lambda_1^{xx}\left(\mu(\lambda_1, \lambda_1^{x}\right)\right)$ uzayında).

Bu takdirde (3)⇒(1)⇔(2) dir. Üstelik, λ_1 normal ise (1)⇔(4) tür (Florencio ve Paúl, 1988).

Örnek 4.5.15. Lorentz (1984), Banach limitlerini kullanarak hemen hemen yakınsak dizilerin uzayını tanımlamıştır. Bir $(\alpha_n)_n$ dizisi için;

$$s = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k \quad n \in \mathbb{N} \text{ de düzgün}$$

eşitliği mevcut ise, s ye hemen hemen yakınsaktır denir.

ac ve ac_0 uzayları sırasıyla l^∞ uzayının kapalı alt uzayları olacak şekilde; hemen hemen yakınsak ve hemen hemen sıfıra yakınsak dizilerin uzayıdır. Eğer [e], $e \coloneqq (1, 1, \dots)$ dizisinin gerdiği küme ise, bu takdirde $ac = [e] \oplus ac_0$ olur. Kısmi toplamları sınırlı olan tüm dizilerin uzayı bs, (Bennett ve Kalton 1974)'e göre ac_0 uzayında yoğundur, bu nedenle $[e] \oplus c_0 \oplus bs$, sup −normu ile ac uzayında yoğundur. Şimdi $([e] \oplus c_0 \oplus bs)^\beta = l^1 = ac^\beta$ olduğundan, yukarıda verdiğimiz sonucu da göz önünde bulundurarak her E uzayı için,

$E(ac) = E([e] \oplus c_0 \oplus bs)$

eşitliğinin verilebileceğini görürüz.

Açıkçası, ikinci uzay $E([e]) \cap E(c_0) \cap E(bs)$ şeklinde de ifade edilebilir. Yine, $(x_n)_n \in E(bs)$ olması için gerek ve yeter şartın $x_n \in c_0$ olması ve $\sum_n |f(x_n) - f(x_{n+1})|$ serisinin de E' nin eşsürekli her alt kümesinde düzgün yakınsamasıdır. Son olarak Teorem 4.5.1 dikkate alınınca: "$(x_n)_n \in E(ac)$ olması için gerek ve yeter şart (i) $\sum_n x_n$, E de yakınsaktır, (ii) $\sum_n x_n$ zayıf şartsız Cauchy'dir ve (iii) $\sum_n |f(x_n - x_{n+1})|$, E' nin eşsürekli her alt kümesinde düzgün yakınsaktır." önermesini elde edebiliriz (Maddox, 1984).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$\lambda -$Çarpım Yakınsak Seriler, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi anabilim dalına ait ve yakın zamanda hakkında çalışmalar yapılmaya başlanan bir konudur.
Ülkemizde son yıllarda literatürde yerini alan "$\lambda -$Çarpım Yakınsak Seriler" hâlâ çok yeni ve gelişmeye devam etmektedir. Konuyla alakalı kaynak ve materyallerin sınırlı olması bu konuyu oldukça zor ama bir o kadar da heyecanlı hâle getirmektedir. Konuyla alakalı kaynak ve çalışmaların yeterince olmadığı göz önünde bulundurulduğunda, yapacağımız çalışmanın dünya ve ülkemiz için faydalı olacağı açıktır.

Ülkemizde konuyla ilgili çalışmaların az olması da bizleri bu alanda araştırma ve çalışmaya iten bir diğer nedendir. Bu tez bittiğinde daha sonraki matematikçiler için Türkçe bir çalışma olması yönüyle önem arz edecektir.

Çalışmamızın ekonomik açıdan ne gibi bir faydası olabileceğini söylemek için henüz çok erken olmakla birlikte, matematiksel bir çalışmanın uygulanabilmesi ve toplum yararına kullanılabilmesi maalesef çok uzun yıllar alabilmektedir. Bu çalışmayla beraber yeni araştırma alanları ortaya çıkabilecek ve konuya olan ilginin artacağı beklenmektedir. Kitap, dergi ve makalelerde yayınlanacak olan çalışmalara bir yardımcı kaynak olarak bu çalışmanın fayda göstereceğini ümit etmekteyiz.

KAYNAKLAR

Aizpuru, A., Pérez-Fernández, J., 2000. Spaces of S-bounded multiplier convergent series. ***Acta Math. Hungar.***, **87**(1): 135-146.

Bennett, G., 1973. Some inclusion theorems for sequence spaces. ***Pacific J. Math.***, **46** (1): 17-30.

Bennett, G., Kalton, N. J., 1974. Consistency theorems for almost convergence. ***Trans. Amer. Math. Soc.***, **198**: 23-43.

Bessaga, C., Pelczynski, A., 1958. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. ***Studia Math.***, **17**: 151-164.

Boos, J., 2000. ***Classical and Modern Methods in Summability***. Oxford University Press, Oxford. 586.

Boos, J., Leĭger, T., 1994. The signed weak gliding hump property. ***Acta Comm. Univ. Tartuensis***, **970**: 13-22.

Bu, Q., Wu, C., 1997. Unconditionally convergent series of operators on Banach spaces. ***J. Math. Anal. Appl***., **207**: 291-299.

Florencio, M., Paúl, P. J., 1988. A note on λ-multiplier convergent series. ***Časopis Pěst. mat.***, **113** (4): 421-428.

Garling, D. J. H., 1967. The β- and γ-duality of sequence spaces. ***Proc. Cambridge Philos. Soc.***, **63** (4): 963-981.

Gupta, M., Kamthan, P. K., 1984. Dominating sequences and functional equations. ***Period. Math. Hungar.***, **15** (3): 219-231.

Jarchow, H., 1981. ***Locally Convex Spaces***. B. G. Teubner, Stuttgart. 550.

Köthe, G., 1969. ***Topological Vector Spaces I***. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York. 456.

Köthe, G., 1979. ***Topological Vector Spaces II***. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York. 331.

Kreyszig, E., 1978. ***Introductory Functional Analysis with Applications***. Wiley Classics Lib., New York · Santa Barbara · London · Sydney · Toronto. 704.

Li, R., Bu, Q., 1993. Locally convex spaces containing no Copy of c_0. ***J. Math. Anal. Appl.***, **172** (1): 205-211.

Li, R., Cho, M., 1999. On the gliding hump property. ***Taiwanese J. Math.***, **3** (1): 115-122.

Li, R., Cui, C., Cho, M., 1998. An invariant with respect to all admissible polar topologies. ***Chinese Ann. Math. Ser. A.,*** **19** (3): 289-294.

Lorentz, G. G., 1948. A contribution to the theory of divergent series. ***Acta Math.***, **80**: 167-190.

Maddox, I. J., 1984. Series in locally convex spaces and inclusions between FK-spaces. ***Proc. Cambridge Philos. Soc.***, **95** (3): 467-472.

Ruckle, W. H., 1981. ***Sequence spaces***. Pitman, Boston · London · Melbourne. 198.

Schaefer, H. H., 1970. Sequence spaces with a given Köthe β-dual. ***Math. Ann.***, **189** (4): 235-241.

Singer, I., 1970. Some remarks on domination of sequences. ***Math. Ann.***, **184** (2): 113-132.

Stuart, C., Swartz, C., 2005. Generalizations of the Orlicz-Pettis Theorem. ***Proyecciones***, **24** (1): 37-48.

Swartz, C., 1983. The Schur lemma for bounded multiplier convergent series. ***Math. Ann.***, **263**: 283-288.

Swartz, C., 1992. ***An Introduction to Functional Analysis***. Marcel Dekker, Inc., New York · Basel · Hong Kong. 600.

Swartz, C., 1993. The gliding hump property in vector sequence spaces. ***Monatsh. Math.***, **116**: 147-158.

Swartz, C., 1996. ***Infinite Matrices and the Gliding Hump***. World Scientific Publ., Singapore. 224.

Swartz, C., 2009. ***Multiplier Convergent Series***. World Scientific Publ., Singapore. 253.

Swartz, C., Stuart, C., 1998. Orlicz-Pettis Theorems for Multiplier Convergent Series. ***Z. Anal. Anwend.***, **17** (4): 805-811.

Şuhubi, E., 2001. ***Fonksiyonel Analiz***. İTÜ Vakfı Yayınları No:38, İstanbul. 638.

Valdivia, M., 1982. ***Topics in Locally Convex Spaces***. North-Holland Mathematics Studies 67. Academic Press-Elsevier, Amsterdam · New York · Oxford. 524.

Wen, S., Cui, C., Li, R., 2000. s-multiplier convergence and theorems of the Orlicz-Pettis-type. ***Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)***, **43**: 275-282.

Wen, S., Jin, C., Cui, C., Li, R., 2000. s-multiplier convergence and its invariance for admissible polar topology. ***Systems Sci. Math. Sci.***, **20**: 474-479.

Wilansky, A., 1978. ***Modern Methods in Topological Vector Spaces***. McGraw-Hill, New York. 298.

Wilansky, A., 1984. ***Summability through Functional Analysis***. North-Holland Mathematics Studies 85. Elsevier Science Publishing, Amsterdam · New York · Oxford. 330.

Wu, J., Li, L., Cui, C., 2005. Spaces of λ-multiplier convergent series. ***Rocky Mountain J. Math.***, **35** (3): 1043-1057.

Wu, J., Li, R., 1999. An Orlicz-Pettis theorem with applications to A-spaces. ***Studia Sci. Math. Hungar.***, **35**: 353-358.

Wu, J., Lu, S., 2002. A full invariant theorem and some applications. ***J. Math. Anal. Appl.***, **270**: 397-404.

Wu, J., Lu, S., 2002. A general Orlicz-Pettis Theorem. ***Taiwanese J. Math.***, **6** (3): 443-440.

Wu, J., Lu, S., 2002. An automatic adjoint theorem and its applications. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **130** (6): 1735-1741.

Wu, J., Qu, W., Cui, C., 2002. On the invariant of λ-multiplier convergent series. ***Adv. Math. (China)***, **30**: 279-283.

Wu J., Wu, Y., 1998. The null sequences in mapping system. ***J. Math.***, **18**: 264-266.

Yuanhong, T., Ronglu, L., 2007. Orlicz-Pettis Theorem for λ-multiplier convergent operator series. ***Bull. Austral. Math. Soc.***, **75**: 247-252.

ÖZ GEÇMİŞ

1992 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimlerini Diyarbakır'da tamamladı. Lisans öğrenimine 2010 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2015 yılında mezun oldu. Yüksek lisans öğrenimine 2017 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladı.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 17/01/2020

Tez Başlığı / Konusu: λ −ÇARPIM YAKINSAK SERİLER ÜZERİNE

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 47 sayfalık kısmına ilişkin, 29/11/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 4 (dört) tür.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

17.01.2020

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Onur AKÇİÇEK

Öğrenci No: 169102150

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Statüsü: Y. Lisans **X** Doktora ☐

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Dr. Öğr. Üyesi Mahmut KARAKUŞ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)

Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü