T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI DENKLEM MODELLERİNDE ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZLERİ

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Osman TUNÇ
DANIŞMAN: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

VAN-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Erdal KORKMAZ danışmanlığında, Osman TUNÇ tarafından sunulan **"Bazı Denklem Modellerinde Çözümlerin Niteliksel Analizleri"** isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 05/05/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Musa ÇAKIR İmza: MÇakır

Üye : Doç. Dr. Erdal KORKMAZ İmza:

Üye : Doç. Dr. Kenan YILDIRIM İmza:

Üye : Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN İmza:

Üye : Doç. Dr. Zeynep KAYAR İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15/05/2020 tarih ve 2020/27-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Suat ŞENSOY

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Osman TUNÇ

ÖZET

BAZI DENKLEM MODELLERİNDE ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZLERİ

TUNÇ, Osman
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Mayıs 2020, 115 sayfa

Bu tez, on bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde tez konusuyla ilgili literatürde yapılan bazı çalışmalar verilmektedir. Tezin ikinci bölümünde tezde kullanılacak materyal ve yöntem belirtildi. Tezin üçüncü bölümünde, tez konusu ile ilgili bazı temel bilgiler verildi. Dördüncü bölümde lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı, düzgün kararlılığı ve integrallenebilirliği incelendi. Beşinci bölümde Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla sabit gecikmeli Volterra intero-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık, düzgün kararlılık, asimptotik kararlık ve integrallenebilirliği incelendi ve bir örnek verildi. Altıncı bölümde sabit gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denkleminin Lyapunov-Razumikhin metodu yardımıyla çözümlerinin sınırlığı, kare integrallenebilirliği incelendi ve konu ile ilgili bir örnek verildi. Yedinci bölümde gecikmeli skaler Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık, düzgün kararlılık, integrallenebilirlik ve kare integrallenebilirliği Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla incelenip bir örnek verildi. Sekizinci bölümde sabit gecikmeli lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık, düzgün kararlılık, asimptotik kararlık, sınırlılık ve integrallenbilirliği inceledi. Dokuzuncu bölümde lineer olmayan değişken gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denkleminin kararlık, düzgün kararlılık, sınırlılık ve integrallenebilirliği incelendi. Son bölümde ise bu tezde yaptığımız çalışmalara ilişkin tartışma ve sonuç kısmı bulunmaktadır.

Anahtar kelimeler: Gecikme, İntegrallenebilirlik, Kararlılık, Lyapunov'un ikinci metodu, Lyapunov- Razumikhin metodu, Sınırlılık, Volterra-integro diferansiyel denklem.

ABSTRACT

ON THE QUALITATIVE ANALYSIS OF SOLUTIONS OF SOME EQUATION MODELS

TUNÇ, Osman
Ph.D. Thesis, Mathematic Department
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ
May 2020, 115 pages

This thesis consists of ten chapters. In the first chapter of this thesis, some works related to subject of thesis are briefly summarized. In the second chapter of this thesis, the materials and methods used in the thesis were notified. In the third chapter of the thesis, some basic information and concepts related to the subject of the thesis were given. In Chapter 4, the asymptotic stability, uniform stability and integrability of the solutions of a certain system of non-linear VIDD were studied by the LRM and two examples were given. In Chapter 5, by means of the Lyapunov's second method, stability, uniform stability, asymptotic stability and integrability of the solutions of a non-linear system of VIDD with constant delay were discussed and two examples were given. Chapter 6, the boundedness and square integrability of the solutions of a certain scalar VIDD with constant delay by means of the LRM and an example was given. In Chapter 7, a scalar VIDD with infinite delay was considered. Stability and uniform stability of zero solution, integrability and absolute integrability of non-zero solutions of VIDD were investigated by the second method of Lyapunov and an example was given. In Chapter 8, we investigated asymptotic stability and uniform stability of zero solution, integrability and boundedness at infinity of non-zero solutions of a certain non-linear system of VIDD with constant delay. In Chapter 9 it was investigated the same concepts as in previous chapter to a nonlinear systems of VIDD with time variable delay by using the LRM and two specific examples were given. In Chapter 10, a detailed conclusion of thesis was given.

Keywords: Boundedness, Delay, Integrability, the Lyapunov's second method, Stability, the Lyapunov- Razumikhin method, Volterra integro-differential equation.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a teşekkür ederim. Ayrıca, bu süreçte hep yanımda olan değerli aileme teşekkürlerimi sunarım.

2020
Osman TUNÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Re$	Reel sayılar
$L[0,\infty)$	Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
V	Lyapunov fonksiyonu
W	Wedge

Kısaltmalar	**Açıklama**
CIP	Sürekli, artan pozitif tanımlı fonksiyon
VİDD	Volterra integro-diferansiyel denklem
LRM	Lyapunov-Razumikhin method

1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞİ

Volterra integral ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri nüfus dinamikleri, salgın hastalıkların yayılması, yarı iletken devreler, akışkanlar mekaniği, fizik, kontrol teorisi vb. pek çok sayıda bilimsel alanda araştırmacıların karşısına çıkmaktadır. Bunun nedeni çok sayıda doğal olayı ve bilimsel araştırmalardaki problemler matematiksel olarak modellendiğinde ilgili modele karşılık Volterra integral, Volterra integro vb. diferansiyel denklemlerin karşılık gelmesidir. Bu nedenle bu tür denklem modelleri geçmişten günümüze araştırmacıların ilgi odağı olmuştur ve olmaktadır. Volterra integral ve Volterra integro-diferansiyel denklemler, başlangıç değer problemlerinden oluşturulmaktadır. İtalyan matematikçi ve fizikçi Vito Volterra (1860-1940), 1884 yılından itibaren integral denklemler üzerine yaptığı çalışmalardan sonra, bu türden denklemler kendisinin soy ismi ile anılmaya başlanmıştır. İlgili literatür incelendiğinde özellikle 1970'li yıllardan sonra integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili hem lineer hem de lineer olmayan formdaki birinci mertebeden gecikmeli veya gecikmesiz Volterra integral, Volterra integro vb. denklemler ve denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği, kararlılık, düzgün kararlılık, asimptotik kararlılık, üstel kararlılık, kararsızlık, sınırlılık, integrallenebilirlik, periyodik çözümlerinin varlığı vb. niteliksel davranışlarının çok sayıda araştırmacı tarafından incelendiği görülebilir (Bkz. Grossman ve Miller (1970); Miller (1971); Seifert (1973), Corduneanu (1977); Grimmer ve Zeman (1982); Burton ve Mahfoud (1983); Burton ve Mahfoud (1985); Peschel ve Mende (1986); Staffans (1988); Gripenberg ve ark. (1990); Burton (1993); Lakshmikantham ve Rama Mohan Rao (1995); Xu (1998); Furumochi ve Matsuoka (1999); Islam ve Raffoul (2003); Hino ve Murakami (2005); Zhang (2000), (2005); Diamandescu (2006); Becker (2007); Raffoul (2007); Burton ve Haddock (2009); Wang (2009); Burton (2010); Chang ve Wang (2011); Wazwaz (2011); Adıvar ve Raffoul (2012), Dung (2013); Ngoc (2013); Wang (2013); Dung (2015); Mesmouli ve ark. (2015); Graef ve ark. (2016); Raffoul ve Sanbo (2016); Raffoul ve Rai (2016)). Bu bilgiler dikkate alındığında söz konusu olan denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarının incelenmesi kayda değerdir.

Öte yandan belirtilen denklem türlerinin çok özel durumlarda tam çözümleri bulunabilmektedir. Yukarıda belirtilen çalışmalarda ele alınan Volterra integral ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri çözmeksizin belirli yöntemler ile çözümlerin niteliksel davranışlarıyla ilgili yeter şartlar yada gerek veya yeter şartlar verilmiştir. Bu çalışmalarda ele alınan denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları integral testi, sabit nokta teorisi, Lyapunov'un ikinci yöntemi, derece teorisi, pertürbasyon yöntemleri, parametrelerin değişimi yöntemi vb. yöntemlerden faydalanarak incelenmektedir. Bu yöntemlerin temel karakteristiği ele alınan integral veya integro diferansiyel denklemleri çözmeksizin belirtilen niteliksel davranışları hakkında bilgi elde edilebilmesidir. Bu tez konusu ile ilgili olan bazı çalışmalar aşağıdaki biçimde özetlenebilir:

Seifert (1973), Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak

$$\dot{x}(t) = G(t, x(t)) + \int_0^t K(t, s, x(s))ds$$

ile verilen vektör Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık ve asimptotik kararlılık durumlarını inceledi:

Burton (1982), aşağıda verilen skalar lineer olmayan

$$x'(t) = A(t) f(x(t)) + \int_0^t B(t, s) g(x(s))ds$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini ve bu denklemin özel durumlarını ele aldı. Söz konusu denklemlerin sıfır çözümünün kararlılığını, tüm çözümlerin sınırlılığını, sınırlı çözümlerin yakınsaklığını ve çözümlerin türevlerinin kare integrallenebilirliğini garanti eden ve yeter şartlar içeren sonuçları Lyapunov metodu yardımıyla inceledi. Konuyla alakalı doğrulayıcı örnekler verdi.

Burton ve Mahfoud (1983), aşağıdaki lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sistemlerini göz önüne aldı:

$$x' = Ax(t) + \int_0^t C(t, s)x(s)ds$$

ve

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \int_0^t C(t - s)x(s)ds.$$

Burton ve Mahfoud (1983), birinci denklemin çözümlerinin karalılığı için gerek ve yeter şartlar verdi. Ayrıca, birinci denklemin çözümlerinin kararlılık özellikleri arasında bazı eş değer ifadeler elde etti. Yine, ikinci denklemin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılığı için gerek ve yeter şartlar oluşturdu. İlave olarak, ikinci denklemin çözümlerinin integrallenebilirliğini, sıfır çözümünün asimptotik kararlığını, düzgün kararlığını, çözümlerin yakınsaklığını ve konuyla alakalı birçok benzer sonuçlar elde etti. Elde ettikleri sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için konuyla alakalı özel durumlar için örnekler verdi.

Rama Mohana Rao ve Srinnivas (1983), aşağıdaki lineer skalar

$$x'(t) = f(t) + \int_0^t a(t,s)x(s)ds$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin çeşitli niteliksel davranışlarını inceledi.

Rama Mohana Rao ve Srinivas (1984), aşağıdaki lineer olmayan

$$x'(t) = H(x(t)) + \int_0^t g(t,s,x(s))ds$$

vektör Volterra integro-diferansiyel denklemini ve bu denklemin özel bir durumunu ele alarak, ilgili bazı tanım ve sıfır çözümünün $L^p, (p \geq 2)$ kararlılığını Lyapunov-Razumikhin metodu yardımıyla inceledi. Konuyla ilgili bir örnek verdi.

Rama Mohana Rao ve Srinivas (1985), aşağıdaki lineer vektör Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin $t \to \infty$ için asimptotik davranışlarını uygun dönüşümler yardımıyla inceledi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + F(t).$$

Wang (1985), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığını inceledi:

$$y' = A(t)y + \int_0^t C(t,s)y(s)ds + f(t),$$

$$x' = A(t)x + \int_{-\infty}^t C(t,s)x(s)ds + f(t)$$

ve

$$x' = A(t)x + \int_t^\infty C(t,s)x(s)ds + f(t).$$

Rama Mohana Rao ve Raghavendra (1987), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin asimptotik kararlılığını inceledi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + f(t,x(t)).$$

Mahfoud (1987), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin düzgün sınırlılığını ve düzgün kararlılığını Lyapunov metodu ve parametrenin değişim yöntemi yardımıyla inceledi ve sonuçları doğrulayıcı örnek verdi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + f(t)$$

ve

$$y' = A(t)y + \int_0^t C(t,s)y(s)ds.$$

Murty ve ark. (1988), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık ve asimptotik kararlılığını inceledi:

$$X'(t) = X(t)B(t) + \int_0^t X(s)K(t,s)ds + F(t).$$

Zhang (1990), aşağıdaki aşağıdaki Volterra integro-denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla inceledi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds.$$

An ve Jin (1996), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık, kararsızlık, asimptotik kararlılık ve düzgün kararlılığını Lyapunov fonksiyoneli ve uygun dönüşümler yardımıyla inceledi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^\infty C(t,s)x(s)ds.$$

Yang ve Zhang (1996), uygun Lyapunov fonksiyonelleri inşa ederek aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin kararlılığını inceledi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + p(t)$$

ve

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds.$$

Xu (1998), aşağıda verilen Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin düzgün asimptotik kararlılığını Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla inceledi:

$$x' = a(t)x + \int_{-\infty}^t D(t,s)x(s)ds.$$

Furumochi ve Matsuoka (1999), aşağıdaki Volterra integro-denklem sisteminin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık ve düzgün sınırlılığını uygun Lyapunov fonksiyon ve fonksiyonelleri kullanarak, Lyapunov-Razumikhin metodu yardımıyla inceledi ve konu ile ilgili örnekler verdi:

$$x'(t) = a(x(t)) + \int_0^t C(t,s)f(x(s))ds.$$

Talpalaru (2000),

$$y' = f(t,y) + \int_0^t g(t,s,y(s))ds$$

ile verilen Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını

$$x' = f(t,x)$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını yardımıyla araştırdı.

Wang (2000), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılık ve asimptotik kararlılık inceledi:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds.$$

Raffoul (2007), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin düzgün üstel asimptotik kararlılığını inceledi:

$$x'(t) = \sigma(t)x(t) + \int_0^t B(t,s) f(s,x(s))ds + g(t,x(t)).$$

Becker (2009), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını ve integrallenebilirliğini bir Lyapunov fonksiyonu yardımı ile inceledi ve konuyla alakalı örnekler verdi:

$$x' = -a(t)x + \int_0^t b(t,s)x(s)ds.$$

Raffoul (2009), aşağıdaki Volterra integro vb. denklemlerinin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılığını inceledi ve konu ile ilgili örnekler verdi:

$$x'(t) = \sigma(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds + g(t)$$

$$x'(t) = \sigma(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)x^{\frac{2}{3}}(s)ds$$

ve

$$x'(t) = \sigma(t)x^3(t) + \int_0^t B(t,s)x^{\frac{1}{3}}(s)ds.$$

Chang ve Wang (2011), aşağıda verilen lineer olmayan integro-diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin kararlılık ve düzgün kararlılık durumlarını inceledi ve konuyla ilgili örnekler verdi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + f(t,x(t)),\ f(t,0) = 0.$$

Adivar ve Raffoul (2012), aşağıdaki sabit gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin üstel kararlılığını ve kararsızlığını Lyapunov yöntemi yardımıyla ele aldı:

$$x'(t) = p(t)x(t) - \int_{t-\tau}^{t} q(t,s)x(s)ds.$$

Raffoul (2013), aşağıdaki gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin üstel kararlılığını ve kararsızlığını Lyapunov fonksiyonelleri yardımıyla yeter şartlar verdi:

$$x'(t) = -\int_{t-r}^{t} a(t,s)g(x(s))ds.$$

Tunç (2016), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin global kararlılık, global asimptotik kararlılık, integrallenebilirlik ve kare integrallenebilirliğini inceledi konuyla alakalı bir örnek verdi:

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + \int_{0}^{t} b(t,s)g(x(s))ds.$$

Raffoul ve Rai (2016), aşağıda bulunan Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılığını, üstel kararlılığını ve kare integrallenebilirliğini Lyapunov metodu yardımıyla ele aldı:

$$x'(t) = Px(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(x(s))ds, \; -\infty < s \le t.$$

Graef ve ark. (2016), aşağıdaki çoklu gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin sınırlılık, kararlılık, global asimptotik kararlığını, integrallenebilirliğini ve kare integrallenebilirliğini Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla inceledi:

$$x'(t) = -a(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i}^{t} b_i(t,s) f_i(x(s))ds.$$

El- Hajji (2019), aşağıdaki Volterra integro-diferansiyel denkleminin çözümlerinin kararlılığını, asimptotik kararlılığını ve sınırlılığını Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla inceledi:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t) + \int_{0}^{t} C(t,s) f(x(s))ds + g(x(t)).$$

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Matematik literatürü incelendiğinde, diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler, integral denklemler, integro-diferansiyel denklemler, vb. denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği, bu denklemlerin çözümlerinin karalılık, sınırlılık, kararsızlık, integrallenebilirlik vb. davranışlarıyla ile ilgili birçok bilimsel çalışmanın mevcut olduğu ve halen bu kavramlar hakkında yoğun biçimde çalışmaların yapıldığı görülmektedir.

Bu tezde, tezin kaynaklar kısmında yer alan ve yukarıda belirtilen denklem türlerinin genelde çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili olan mevcut makaleler, bu makalelerdeki ilgili denklemler, kitaplar, bu kitaplardaki ilgili denklemler, vb. ile birlikte, bu kaynakların içeriğinde yer alan ve tez konusu ile ilgili olan temel bilgiler, temel teoremler, lemmalar, eşitsizlikler, vb. bu tezin materyali olarak ele alınmaktadır.

Ayrıca, bu tezde yöntem olarak ise, bazı eşitsizlik teknikleri, integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin belirtilen niteliksel davranışlarını incelemede yaygın olarak kullanılmakta olan Lyapunov'un doğrudan (ikinci) metodu ve Lyapunov-Razumikhin metodu (yöntemi) kullanılmaktadır.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez konusu ile ilgili, daha sonraki bölümlerde kullanılabilecek ve temel bilgi niteliğinde olan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Şimdi

$$x(t) = f(t) + \int_0^t B(t,s)x(s)ds \tag{3.1}$$

integral denklemini göz önüne alalım.

Burada, $x \in \Re^n$, $f:[0,\alpha) \to \Re^n$ sürekli bir fonksiyon ve $B(t,s)$, $n \times n$-boyutlu bir matris fonksiyonu olup, bu matris fonksiyonu $0 \le s \le t < \alpha$, $\alpha \le \infty$ için süreklidir. Burada, $B(t,s)$ fonksiyonuna çekirdek adı verilir. Eğer $B(t,s) = D(t-s)$ ise, denkleme konvolüsyon (convolution) tipinde bir integral denklemi adı verilir (Burton, 2005).

Şimdi ise, birinci mertebeden lineer

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds + F(t) \tag{3.2}$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini (VİDD) göz önüne alalım.

Burada, $F:[0,\alpha) \to \Re^n$ sürekli bir fonksiyon, $A(t)$ ve $C(t,s)$, $n \times n$-boyutlu birer matris fonksiyonu olup, bu fonksiyonlar sırasıyla $[0,\alpha)$ ve $0 \le s \le t < \alpha$ aralıklarında süreklidir (Burton, 2005).

Şimdi, (3.2) VİDD'ni (3.1) tipinde bir integral denklemine dönüştürerek, her iki denkleme de varlık ve teklik teoremlerinin aynı anda uygulanabileceği ifade edilecektir.

(3.2) VİDD'mi için sürekli bir ϕ başlangıç fonksiyonu $\phi:[0,t_0] \to \Re^n$ ile verilsin. (3.2) VİDD'mi için çözüm kavramı aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

(3.2) VİDD'nin çözümü $[t_0,T)$ aralığında sürekli ve türevlenebilir bir $x(t)$ fonksiyonudur öyle ki $0 \le t \le t_0$ için $x(t) = \phi(t)$ ve

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^{t_0} C(t,s)\phi(s)ds + F(t) + \int_{t_0}^t C(t,s)x(s)ds$$

dır.

$y(t) = x(t+t_0)$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm yardımıyla, türev alınıp, ilgili bağıntılar (3.2) VİDD'de yerine bırakıldığında

$$y'(t) = x'(t+t_0) = A(t+t_0)y(t)$$

$$+\int_0^{t_0} C(t_0+t,s)\phi(s)ds + F(t+t_0)$$

$$+\int_{t_0}^{t+t_0} C(t_0+t,s)x(s)ds$$

$$= A(t+t_0)y(t) + \int_0^t C(t_0+t,s+t_0)y(s)ds$$

$$+\int_0^{t_0} C(t_0+t,s)\phi(s)ds + F(t+t_0)$$

elde edilir. Bu denklem ise,

$$y'(t) = \bar{A}(t)y(t) + \int_0^t \bar{C}(t,s)y(s)ds + \bar{F}(t),$$

biçiminde bir integro-diferansiyel denklem olarak ifade edilebilir. Son olarak elde edilen VİDD'nin (3.2) VİDD'mi ile aynı tipten olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, $y(t) = x(t+t_0)$ ve $x(t) = \phi(t)$ olması nedeniyle

$$y(0) = x(t_0) = \phi(t_0)$$

olduğu açıktır. Yukarıda geçen son integro-diferansiyel denkleminin 0 'dan t 'ye integrali alındığında,

$$y(t) = \phi(t_0) + \int_0^t \bar{A}(s)y(s)ds + \int_0^t \bar{F}(s)ds + \int_0^t\int_0^u \bar{C}(u,s)y(s)dsdu \tag{3.3}$$

elde edilir.

(3.3) VİDD'nde iki katlı integraldeki integrallerin sırası değiştirilir ise, kolaylıkla (3.1) denklemi biçiminde bir integral denklem elde edilir. Böylece, göz önüne alınan integro-diferansiyel denklemi için sürekli bir başlangıç fonksiyonu verilmek kaydıyla, varlık ve teklik teoremi, aynı anda hem integral hem de integro-diferansiyel denklemleri için uygulanabilir (Burton, 2005).

Teorem 3.1 $0 < \alpha \leq \infty$ olmak üzere, $f:[0,\alpha) \to \Re^n$ sürekli bir fonksiyon ve $B(t,s)$ ise $0 \leq s \leq t < \alpha$ aralığında sürekli fonksiyonların $n \times n$-boyutlu bir matrisi olsun. Bu takdirde, $0 < T < \alpha$ ise, o zaman $[0,T]$ aralığında (3.1) integral denkleminin bir tek $x(t)$ çözümü vardır (Burton, 2005).

Şimdi ise (3.2) VİDD ve bu denkleme $F(t) \equiv 0$ için karşılık gelen

$$x' = A(t)x + \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{3.4}$$

VİDD'ni göz önüne alalım. (3.2) VİDD'mi için $x(0) \equiv x_0$ başlangıç şartı verilsin. (3.2) VİDD'nin 0'dan t'ye integrali alındığında

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s)ds + \int_0^t A(s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^u C(u,s)x(s)dsdu$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde son terimdeki çift katlı integralde, integrallerin sırasını değiştirilir ve

$$f(t) = x_0 + \int_0^t F(s)ds$$

alınır ise, bu takdirde (3.2) VİDD biçiminde bir integral denklem elde edilir. Eğer $F(t) \equiv 0$ alınır ise bu takdirde $f(t) = x_0$ olur.

Teorem 3.2 $t \in [0,\alpha)$ olmak üzere, yukarıdaki kabuller altında, (3.2) ve (3.4) VİDD'lerini göz önüne alalım.

(a) Her bir x_0 için $0 \le t < \alpha$ aralığında (3.2) VİDD'nin bir $x(t)$ çözümü vardır ve bu çözüm $x(0) = x_0$ şartını sağlar.

(b) $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ ifadeleri (3.2) VİDD'nin iki çözümü ise, $x_1(t) - x_2(t)$ ifadeside (3.4) VİDD'nin bir çözümüdür.

(c) $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ (3.4) VİDD'nin iki çözümü ve c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere, bu çözümlerin $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ lineer kombinasyonu da (3.4) VİDD'nin bir çözümüdür.

(d) $[0,\alpha)$' da (3.4) VİDD'nin n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bu çözümlerden herhangi biri $[0,\alpha)$ aralığı üzerinde diğerlerinin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir (Burton, 2005).

Uyarı 3.1 Yeniden, (3.4) VİDD'mini göz önüne alalım. Bu denklem için $\phi : [0,t_0] \to \Re^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu ise, bu takdirde $x(t,\phi)$ ifadesi bu denklemin $[t_0,\infty)$ aralığında bir çözümünü temsil eder. Çoğu kez bu çözüm $x(t,t_0,\phi)$ veya $x(t)$ ile gösterilmektedir. Açıkça, $x(t) \equiv 0$ (3.4) VİDD'nin bir çözümüdür (Burton, 2005).

Şimdi ise (3.4) VİDD'nin sıfır çözümüne ait kararlılık ve çözümlerin sınırlı olmasına ait tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall t_0 \geq 0$ için $\exists\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır öyle ki, $[0, t_0]$aralığında $|\phi(t)| < \delta$ iken $\forall t \geq t_0$ için $|x(t,\phi)| < \varepsilon$ ise, bu takdirde (3.4) VİDD'nin sıfır çözümüne Lyapunov kararlıdır denir. Eğer δ, t_0'dan bağımsız, yani yalnızca ε'na bağlı ise, bu takdirde (3.4) VİDD'nin sıfır çözümüne düzgün kararlıdır denir (Burton, 2005).

Tanım 3.2 (3.4) VİDD'nin sıfır çözümü kararlı ve $\forall t_0 \geq 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki $[0, t_0]$ aralığında$|\phi(t)| < \delta$ olduğunda $t \to \infty$ için $|x(t,\phi)| \to 0$ ise, bu takdirde (3.4) VİDD'nin sıfır çözümüne asimptotik kararlı denir (Burton, 2005).

Tanım 3.3 Şayet (3.4) VİDD'nin sıfır çözümü düzgün kararlı ve bir $\eta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists T > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki $t_0 \geq 0$ olmak üzere, $[0, t_0]$ aralığında $|\phi(t)| < \eta$ iken $\forall t \geq t_0 + T$ için $|x(t,\phi)| < \varepsilon$ ise, bu takdirde (3.4) VİDD'nin sıfır çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Burton, 2005).

Tanım 3.4 $x(t, t_0, \phi)$, (3.4) VİDD'nin herhangi bir çözümü olsun. Eğer bu çözüm $\forall t \geq t_0$ için

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq C(\|\phi\|, t_0)$$

eşitsizliğini sağlar ise, bu takdirde $x(t, t_0, \phi)$ çözümüne sınırlıdır denir. Burada $C : \Re^+ \times \Re^+ \to \Re^+, \Re^+ = [0, \infty)$, fonksiyonu, t_0 ve ϕ'e bağlı bir sabit fonksiyondur. ϕ ise sürekli sınırlı bir başlangıç fonksiyonudur. Eğer C, t_0'dan bağımsız ise (3.4) VİDD'nin çözümleri düzgün sınırlıdır (Raffoul, 2004).

Şimdi ise

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x),\ x(t_0) = x_0 \tag{3.5}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Burada $x \in \Re^n$ ve $t \in \Re^+$ $D, \Re^n$'de açık bağlantılı bir cümle, $0 \in D$ olmak üzere, $F(t, x)$ fonksiyonunun $\Re^+ \times D$ bölgesinde (t, x)'e göre sürekli olduğu ve $F(t, 0) = 0$ varsayılmaktadır.

Tanım 3.5 $D, \Re^n$' nin açık bir alt kümesi ve (a, b), $\Re$'de bir aralık olmak üzere, $F : (a, b) \times D \to \Re^n$ bir fonksiyonu verilsin. Eğer $(t_{0,} x_0)$ noktasının bir N komşuluğu var ve her $(t, x_1), (t, x_2) \in N$ için

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir K pozitif sabiti varsa, F fonksiyonuna (t_0, x_0) noktasında x'e göre Lipschitz şartını sağlıyor denir (Burton, 1985).

Uyarı 3.2 Yukarıdaki (3.5) başlangıç değer probleminde F fonksiyonunun sürekli olması, verilen denklemin en az bir çözüme sahip olması için yeter şarttır. Lipschitz şartının sağlanması ise, çözümlerin tekliği için yine yeter şarttır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.6 Ω, $\Re^n$'de açık bir cümle ve $0 \in \Omega$ olmak üzere $V : \Omega \subseteq \Re^n \to \Re$ fonksiyonu verilsin. Eğer $V(0) = 0$ ve $\forall x \in \Omega$ $(x \neq 0)$ için,

i) $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna Ω cümlesi üzerinde pozitif tanımlıdır denir,

ii) $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonuna Ω cümlesi üzerinde pozitif yarı tanımlıdır denir,

iii) $V(x) < 0$ ise V fonksiyonuna Ω cümlesi üzerinde negatif tanımlıdır denir,

iv) $V(x) \leq 0$ ise V fonksiyonuna Ω cümlesi üzerinde negatif yarı tanımlıdır denir (Hsu, 2013).

Tanım 3.7 D, $\Re^n$'de açık bağlantılı bir cümle, $0 \in D$ ve $F(t,0) = 0$ olmak üzere $V : [t_0, \infty) \times D \to [0, \infty)$ fonksiyonu birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Eğer her $(t, x) \in [t_0, \infty) \times D$ için

$$\frac{d}{dt} V(t,x) = \dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x_1}(t,x) F_1(t,x) + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}(t,x) F_n(t,x) \leq 0$$

ise, V' ye (3.5) başlangıç değer problemi için bir Lyapunov fonksiyonu denir (Burton, 2005).

Teorem 3.3 $V(t,x)$, $0 \leq t < \infty$ ve $\|x\| < H$ bölgesinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir Lyapunov fonksiyonu olsun:

(i) $V(t,0) \equiv 0$,

(ii) $a(\|x\|) \leq V(t,x)$, burada $a(r) \in CIP$'dir. (CIP; sürekli, artan ve pozitif tanımlı fonksiyonların sınıfıdır)

(iii) $\dot{V}(t,x) \leq 0$.

Bu takdirde (3.5) başlangıç değer probleminin $x(t) = 0$ çözümü kararlıdır (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.4 Teorem 3.3'deki (ii) şartı $a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|)$ ile değiştirilirse, (3.5)'deki denklemin $x(t) = 0$ çözümü düzgün kararlıdır. Burada $a(r) \in CIP$ ve $b(r) \in CIP$' dir, (Yoshizawa, 1966).

Teorem 3.5 Teorem 3.4'deki şartlar altında eğer $\dot{V}(t,x) \leq -c(\|x\|)$ ve $F(t,x)$ sınırlı ise, bu takdirde (3.5) başlangıç değer probleminin $x(t) = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır. Burada, $c(r)$, $[0, H]$ üzerinde sürekli ve pozitif tanımlıdır (Yoshizawa, 1966).

Şimdi, $P(0,0) = 0$ ve $Q(0,0) = 0$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

iki boyutlu otonom sistemini göz önüne alalım. Burada, P ve Q fonksiyonları bağlı oldukları değişkenlere göre sürekli oldukları varsayılmaktadır. Ayrıca, $(x,y)=(0,0)$ noktasının bu sisteminin izole edilmiş bir kritik noktası olduğu varsayılmaktadır. Yani, $(0,0)$ noktasının bir komşuluğunda verilen sistemin $(0,0)$ noktasından başka bir kritik noktasının olmadığı varsayılmaktadır (Ross, 1974), (Boyce ve Diprima, 1997).

Yukarıda verilen sistem iki boyutlu olduğundan, genelliği bozmaksızın, amaca yönelik olarak yukarıdaki sistem için Lyapunov fonksiyonu olarak $V(x,y)=x^2+y^2$ alınabilir. $c \geq 0$ bir sabit olmak üzere, $xy-$ düzleminde $V(x,y)=x^2+y^2=c$ biçiminde eğri ailesini göz önüne alalım. $c=0$ için verilen eğri ailesi $x=0$ ve $y=0$ noktasına indirgenir. Eğer $0<c_1<c_2$ alınır ise, bu takdirde $V(x,y)=x^2+y^2=c_1$ eğrisi orijini içinde bulundurur ve $V(x,y)=x^2+y^2=c_2$ eğrisinin içinde kalır (bkz. Şekil 1.).

Şimdi özel olarak, yukarıda verilen iki boyutlu diferansiyel denklem sistemi için Lyapunov kararlılık ve asimptotik kararlılık teoremlerinin bir açıklaması ifade edilecektir. Bunun için $V(x,y)=x^2+y^2=c$ kapalı eğrisi içerisinde başlayan bir yörüngenin bu eğrinin dışına çıkamayacağı gösterilecektir. Böyle bir durumda çözümün kararlı olduğu, şayet ilgili yörünge orijine yaklaşır ise, çözüm asimptotik kararlı olur.

Yukarıda verilen $V(x,y)=x^2+y^2=c$ Lyapunov fonksiyonunun pozitif tanımlı olduğu ve bu fonksiyon için alt ve üst sınırların kolaylıkla bulunabileceği açıktır.

Bilindiği üzere

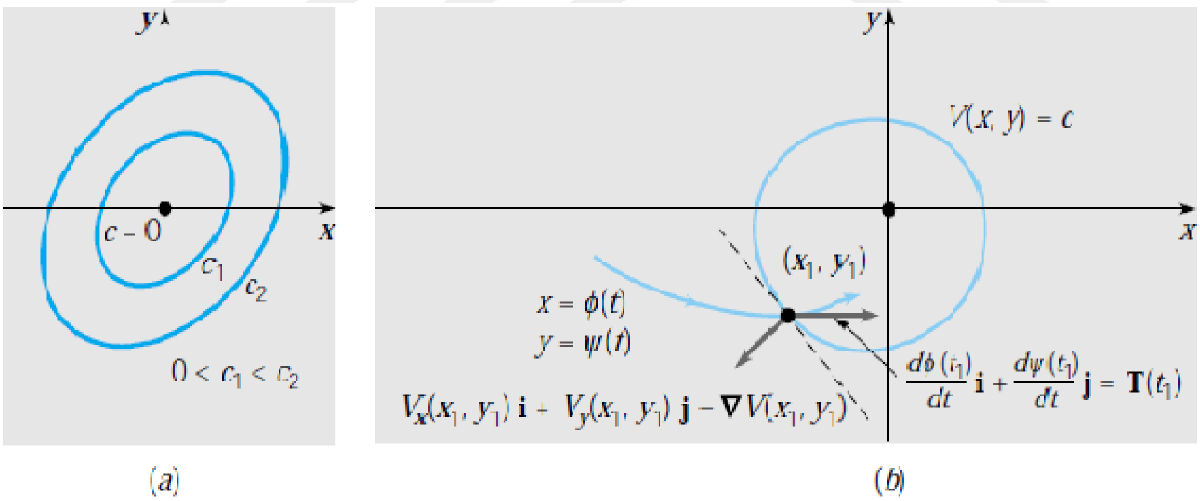
$$\nabla V(x,y) = V_x(x,y)i + V_y(x,y)j$$

vektörü V fonksiyonunun gradient vektörü olup, bu vektör $V(x,y)=x^2+y^2=c$ eğrisine normal vektördür. Söz konusu olan vektörün yönü ise dışa doğrudur.

$x=\phi(t),\ y=\psi(t)$ ifadesi yukarıda verile iki boyutlu sisteminin bir çözümü olsun. $T(t)=\phi'(t)i+\psi'(t)j$ ise $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$ çözümüne karşılık gelen yörüngeye her bir noktasında teğet olan bir vektörüdür. Burada, i ve j iki boyutlu uzayda birim koordinat vektörleridir. $x_1=\phi(t_1),\ y_1=\psi(t_1)$ noktası ise, söz konusu yörünge ile $V(x,y)=x^2+y^2=c$ kapalı eğrisinin kesişim noktası olsun. Bu durumda $\phi'(t_1)=P(x_1,y_1),\ \psi'(t_1)=Q(x_1,y_1)$ olur. Buna bağlı olarak,

$$\dot{V}(x_1,y_1)=V_x(x_1,y_1)\phi'(t_1)+V_y(x_1,y_1)\psi'(t_1)$$
$$=[V_x(x_1,y_1)i+V_y(x_1,y_1)j].[\phi'(t_1)i+\psi'(t_1)j]$$
$$=\nabla V(x_1,y_1).T(t_1)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı iki vektörün iç çarpımıdır. Yani, $\dot{V}(x_1,y_1)$ türevi $\nabla V(x_1,y_1)$ gradient vektörü ve $T(t_1)$ teğet vektörünün iç çarpımıdır. Öte yandan, a,b vektörler olmak üzere $\langle a,b\rangle=|a||b|\cos\theta$ olduğu bilinmektedir. Vektörlerin boyu pozitif olduğundan, $\dot{V}(x_1,y_1)\le 0$ olması için teğet vektör ile normal vektör arasındaki açının 90^0 ile 270^0 arasında olması gerekir. Bu durumda ise, yörüngenin hareket yönünün çemberin içine doğru veya yörüngenin çember eğrisine teğet olmasını gerekir. Ayrıca, $\dot{V}(x_1,y_1)\le 0$ eşitsizliği $x^2+y^2=c$ çemberi içindeki yörüngelerin çemberin dışına çıkamayacağını gösterir. Sonuç olarak, $\dot{V}(x_1,y_1)<0$ ise, orijine yeterince yakın başlayan yörüngeler orijine yaklaşır. Bu durum orijinin asimptotik kararlı olmasını gerektirir. Verilen bu yorum, bir anlamda Lyapunov'un kararlılık ve asimptotik kararlılık teoremlerin geometrik olarak yorumlanmasıdır (Boyce ve Diprima, 1997).



Şekil 3.1 Lyapunov kararlılık teoreminin geometrik yorumu.

Şimdi, aşağıda verilen otonom ve gecikmeli

$$\dot{x}=F(x_t),\ \ x_t=x(t+\theta),\ \ -r\le\theta\le 0,\ \ t\ge 0 \qquad (3.6)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım.

Burada, $F(0)=0$ olmak üzere, $F: C_H \to \Re^n$ sürekli bir dönüşüm ve bu dönüşümün kapalı ve sınırlı cümleleri $\Re^n$ 'de sınırlı cümlelere götürdüğü varsayılmaktadır. $r>0$ olmak üzere $C=C([-r,0],\Re^n)$ gösterimi ise $\phi:[-r,0]\to\Re^n$ şeklinde tanımlanan sürekli fonksiyonların uzayını temsil etmektedir. C_H ise C uzayında açık H yuvarını temsil etmektedir, öyle ki $C_H := \{\phi \in C([-r,0],\Re^n) : \|\phi\| < \mathrm{H}\}$ olarak tanımlanır. Eğer $\phi \in C_H$ ve $t \ge 0$ ise, bu takdirde $\forall t > t_0$ için (3.6) gecikmeli diferansiyel denklem sisteminin $[t_0, t_0+\alpha)$ açık aralığında en az bir sürekli $x(t,t_0,\phi)$ çözümü vardır. Eğer bir $B \subset C_H$ kapalı cümlesi var ve çözüm B'de kalır ise, bu takdirde $\alpha=\infty$ olur. $|.|$ sembolü $\Re^n$'de ki uygun bir normu $|x| = \max_{1\le i\le n}|x_i|$ ile tanımlar. $C(t)=\{\phi:[t-\alpha,t]\to\Re^n | \phi \text{ süreklidir}\}$ ve ϕ_t özel olarak $C(t)$ 'de ϕ'yi göstersin ve $\|\phi(t)\| = \max_{1\le i\le n}|\phi(t)|$ olsun (Burton, 2005).

Lemma 3.1 $F(0)=0$, $V(0)=0$ olmak üzere V, $C_H = C$ cümlesi üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. İlave olarak, $u(0)=0$ olmak üzere, $u(s)$, $0 \le s < \infty$ için negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve $s\to\infty$ için $u(s)\to\infty$ olsun. Eğer, $\phi\in C$ olmak üzere $u(|\phi(0)|) \le V(\phi)$, $V(\phi)\ge 0$ ve $\dot{V}(\phi)\le 0$ ise, o zaman (3.6) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır. Eğer $Z=\{\phi\in C_H : \dot{V}(\phi)=0\}$, yani Z cümlesinde en geniş invaryant cümlesi $Q=\{0\}$ ise, bu takdirde (3.6) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Hale, 1977).

Şimdi, aşağıda verilen otonom olmayan gecikmeli

$$x' = G(t,x_t),\ x_t = x(t+\theta),\ -r\le\theta\le 0,\ t\ge 0 \tag{3.7}$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım.

Burada, $G(t,0)=0$ olmak üzere $G: C_H \to \Re^n$ sürekli bir dönüşüm ve G'nin kapalı ve sınırlı cümleleri $\Re^n$'de sınırlı cümlelere götürdüğü varsayılmaktadır. $r>0$ olmak üzere $(C,\|.\|)$ $\phi:[-r,0]\to\Re^n$ şeklinde tanımlanan sürekli bir fonksiyonların supremum normu ile tanımlı bir Banach uzayı olsun. C_H, C'de açık H yuvarı öyle ki $C_H := \{\phi\in C([-r,0],\Re^n) : \|\phi\| < \mathrm{H}\}$ ile tanımlanır. S, $\|\phi\|\ge H$ olacak şekilde $\phi\in C$'lerden oluşan cümle olsun. H yeterince büyük olmak üzere $|\phi(0)|\ge H$ şeklindeki $\phi\in C$ tüm fonksiyonların cümlesi S^* ile gösterilsin (Burton, 2005).

Tanım 3.8 $W(0)=0$ $s>0$ için $W(s)>0$ olmak üzere $W:\Re^n \to \Re^+$ şeklinde tanımlı artan bir fonksiyona wedge denir. i pozitif bir tam sayı olmak üzere aşağıda verilen teoremlerde wedgeler W veya W_i ile gösterilmektedir (Burton, 2005).

Tanım 3.9 $0 \in D$ olmak üzere D, $\Re^n$ 'de açık bir cümle olsun. $V(t,0)=0$ ve W_1 wedge olmak üzere $V(t,x) \geq W_1(|x|)$ ise bu takdirde $V:[0,\infty)\times D \to [0,\infty)$ fonksiyonuna pozitif tanımlı denir. Eğer bir W_2 wedgesi var ise öyle ki $V'(t,x) \leq \dot{W}_2(|x|)$ ise bu takdirde $V:[0,\infty)\times D \to [0,\infty)$ fonksiyonuna azalandır denir (Burton, 2005).

Teorem 3.6 $D \leq \infty$, $x:[\alpha,t] \to \Re^n$ sürekli ve sınırlı bir fonksiyonu olmak üzere $V(t,x_t)$ türevlenebilir bir fonksiyoneli olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$(A1)$ $V(t,0)=0$, $W_1(|x(t)|) \leq V(t,x_t)$, (burada, $W_1(r)$ wedge'dir),

$(A2)$ $\dot{V}(t,x_t) \leq 0$. (Burada verilen fonksiyonun türevi (3.7) diferansiyel denklem sistemi boyunca alınmaktadır.)

Bu takdirde, (3.7) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır (Burton, 2005).

Teorem 3.7 Bir önceki teoremde verilen $V(t,x_t)$ Lyapunov fonksiyonelinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

$(B1)$ $W_1(|\phi(0)|) \leq V(t,\phi) \leq W_2(\|\phi\|)$, (burada, $W_1(r)$ ve $W_2(r)$ wedge'dir),

$(B2)$ $\dot{V}(t,\phi) \leq 0$.

Bu takdirde, (3.7) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Burton, 2005).

Teorem 3.8 Her $t \in \Re^+$ ve $\phi \in S^{\bullet}$ için $V(t,x_t)$ Lyapunov fonksiyonelinin aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım:

$(C1)$ $a(|\phi(0)|) \leq V(t,\phi) \leq b_1(|\phi(0)|) + b_2(\|\phi\|)$

olup, burada, $a(r), b_1(r), b_2(r) \in CI$ 'ler $r > H$ için pozitif birer fonksiyon, (CI sürekli artan fonksiyonlar ailesi), $r \to \infty$ için $a(r), b_1(r), b_2(r) \to \infty$'dır.

$(C2)$ $\dot{V}(t,\phi) \leq 0$.

Bu takdirde, (3.7) denkleminin çözümleri düzgün sınırlıdır (Yoshizawa, 1966).

4. LİNEER OLMAYAN BİR VİDD SİSTEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZİ

Seifert (1973), yaptığı çalışmanın uygulamasını göstermek için aşağıdaki lineer olmayan

$$x'(t) = -Ax(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds \tag{4.1}$$

VİDD sistemini ele aldı. Bu denklem sisteminin sıfır çözümünün kararlılığını göstermek için aşağıdaki şartları oluşturdu.

A. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

$(A1)$ A reel elemanlı, öz değerleri negatif reel kısımlı $n \times n$ boyutlu bir matris, $0 \le s \le t < \infty$ ve $x \in \Re^n$ olmak üzere, K çekirdeği ise (s,t,x) birleşenlerine göre sürekli $n-$ boyutlu bir vektör olsun. Ayrıca, μ ve ρ pozitif sabitler olmak üzere K çekirdeği

$$\left| \int_0^t K(t,s,x(s))ds \right| \le \mu \sup_{0 \le s \le t} |x(s)|$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $x(s)$ fonksiyonu $0 \le s \le t$ aralığında sürekli ve $|x(s)| \le \rho$ şartını sağlamaktadır.

$(A2)$ B, pozitif tanımlı, simetrik ve reel elemanlı bir matris, $B = (b_{ij}), |B| = (\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}^2))^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere,

$$BA + A^T B = -I$$

sağlansın. Burada I, $n \times n$ boyutlu birim matris, B matrisinin öz değerleri ise

$$\Lambda^2 \langle x,x \rangle \ge \langle Bx,x \rangle \ge \lambda^2 \langle x,x \rangle$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, $x \in \Re^n$ ve Λ, λ sayıları ise B matrisinin sırasıyla en büyük ve en küçük öz değerlerine karşılık gelmektedir.

Seifert (1973), yukarıda verilen şartlara bağlı olarak aşağıdaki kararlılık teoremini ispatladı.

Teorem 4.1 $(A1)$ ve $(A2)$ şartlarına ilave olarak $\frac{2|B|\mu\Lambda}{\lambda}<1$ eşitsizliği sağlanır ise, bu takdirde yukarıda verilen (4.1) VİDD sisteminin sıfır çözümü kararlıdır.

Seifert (1973), Teorem 4.1'in ispatında,

$$V(t,x)=V(x)=\langle xB,x\rangle$$

ile verilen kuadratik Lyapunov fonksiyonundan yararlanmıştır. Burada, Seifert'in yaptığı çalışmanın ayrıntıları verilmeyecektir.

Şimdi ise

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x_t), t\in J, J=[-\tau,\infty), t\geq t_0\geq 0 \tag{4.2}$$

gecikmeli diferansiyel denklem sistemini $x(t_0+s)=\phi(s), s\in[-\tau,0],$ başlangıç fonksiyonu ile birlikte göz önüne alalım. Burada, $x\in\Re^n$, $f(t,0)=0,$ $f(t,\phi)\in J\times C([-\tau,0],\Re^n),$ $x(t_0^+)=\phi(0)$ olup ve τ pozitif sabiti bir gecikme sabitidir. Her $\phi\in C([-\tau,0],\Re^n)$ için $|.|$ veya $\|.\|$ Euclid normlarını sırasıyla,

$$\|x_t\|=\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t_0}|x(t+s)|$$

veya

$$\|\phi\|_{t_0}=\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t_0}\|\phi(t)\|$$

şeklinde gösterilecektir.

$f(t,0)=0$ olduğu için $\phi\equiv 0$ başlangıç fonksiyonu olmak üzere, (4.2) gecikmeli diferansiyel denklem sistemi $x(t)\equiv 0$ çözümüne sahiptir.

(4.2) gecikmeli diferansiyel denklem sisteminin $(t_0,\phi_0)\in\Re^+\times C([-\tau,0],\Re^n)$ olmak üzere, bir $x(t)=x(t,t_0,\phi)\in C^1([t_0,\infty),\Re^n)$ çözümüne sahip olması için, f fonksiyonunun sürekli ve x_t'ye göre Lipshitz şartını sağladığı kabul edilmektedir.

Lemma 4.1 (Hale (1977), Zhou ve Egorov (2016)) $V(t,x)$ sürekli bir Lyapunov fonksiyonu, $u,v,\omega\to\Re^+\to\Re^+$ sürekli artan pozitif tanımlı fonksiyonlar, $s>0$ için $q(s)>s$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlandığını varsayalım:

$$\forall s\in[-\tau,0], V(t+s,x(t+s))<qV(t,x(t))$$

olduğunda $\forall x\in\Re^n, \forall t\in J$ için

$$u(|x|) \le V(t,x) \le v(|x|),$$

$$\frac{d}{dt}V(t,x) \le -\omega(|x|)$$

dır. Bu takdirde (4.2) denkleminin sıfır çözümü global düzgün asimptotik kararlıdır.

Bu bölümde, Seifert (1973) çalışmasından esinlenerek ilk olarak aşağıda verilen lineer olmayan VİDD sistemi göz önüne alınmaktadır:

$$x'(t) = -F(t,x(t))x(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds,\ t > t_0 \ge 0. \tag{4.3}$$

Burada, $t \in \Re^+, \Re^+ = [0,\infty), x \in \Re^n, F \in C(\Re \times \Re^n, \Re^n)$ ve $0 \le s \le t$ olmak üzere $K(t,s,x) \in C(\Re^+ \times \Re^+ \times \Re^n, \Re^n)$ ve $K(t,s,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 'dır.

Bu kısımda, (4.3) VİDD sistemi için Lyapunov yöntemi yardımıyla çözümlerin asimptotik kararlılığı ve düzgün kararlılığı incelenecektir.

4.1. (4.3) VİDD Sistemi için Bazı Kararlılık Sonuçları

A. Varsayımlar

(4.3) VİDD sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

$(A1)$ $F(t,x)$ fonksiyonu $n \times n-$ boyutlu simetrik, pozitif tanımlı ve bağlı bulunduğu değişkenlere göre sürekli bir matris öyle ki

$$F(t,0) = 0, \sup_{(t,x)\in\Re^+\times\Re^n} \|F(t,x)\| < \infty$$

ve $F(t,x)$'in λ_i öz değerleri ise $\forall t \in \Re^+, \Re^+ = [0,\infty)$ ve $\forall x \in \Re^n$ için

$$f_{1i} \ge \lambda_i(F(t,x)) \ge f_{0i},\ f_{0i} > 0,\ f_{1i} > 0,\ f_{0i},\ f_{1i} \in \Re, (i = 1,2,...,n)$$

eşitsizliğini sağlar.

$(A2)$ f_0, ρ ve β pozitif sabitleri var öyle ki

$$\|K(t,s,x(s))\| \le \|D(t,s)\|\ \|f(x(s))\|,$$

$$\|f(x(s))\| \le \beta\|x(s)\|,$$

$$\int_0^t \|D(t,s)\| ds \le \alpha_1(t),\ \int_t^\infty \|D(u,t)\| du \le \alpha_2(t)$$

ve

$$\alpha(t) = f_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\|\ ds - \frac{1}{2}\beta^2 \int_t^\infty \|D(u,t)\| du \ge \rho$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Burada,

$$f_0 = \min\{f_{01}, f_{02}, ..., f_{0n})$$

olarak alınmaktadır. Ayrıca, her $t \in \Re^+$ ve $\forall x \in \Re$ için sırasıyla $f, \alpha_1(t)$ ve $\alpha_2(t)$ sınırlı ve negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 4.2 Eğer $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (4.3) VİDD sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat

$$W(t, x(t)) = \frac{1}{2}\langle x(t), x(t)\rangle + \sigma\int_0^t\int_t^\infty \|D(u,s)\| \, \|f(x(s))\|^2 \, duds$$

ile tanımlanan $W = W(t, x(t))$ Lyapunov fonksiyonelini ele alalım. Burada σ daha sonra ispat içinde amaca yönelik olarak seçilecek pozitif bir sabittir.

Kolaylıkla,

$$W(t,0) = 0$$

ve

$$W(t, x(t)) \geq \frac{1}{2}\|x(t)\|^2 \tag{4.4}$$

olduğu görülebilir. Bu nedenle, W Lyapunov fonksiyonelinin pozitif tanımlı olduğu açıktır. W Lyapunov fonksiyonelinin t bağımsız değişkenine göre türevi hesaplandığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t, x(t)) &= \frac{1}{2}\langle x'(t), x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t), x'(t)\rangle \\
&\quad + \sigma\int_t^\infty \|D(u,t)\| \, \|f(x(t))\|^2 \, du - \sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \, \|f(x(s))\|^2 \, ds \\
&= -\frac{1}{2}\langle F(t, x(t))x(t), x(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle x(t), F(t, x(t))x(t)\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle x(t), \int_0^t K(t,s,x(s))ds \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \int_0^t K(t,s,x(s))ds, x(t) \right\rangle \\
&\quad + \sigma\int_t^\infty \|D(u,t)\| \, \|f(x(t))\|^2 \, du - \sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \, \|f(x(s))\|^2 \, ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi ise,

$$f_{1i} \geq \lambda_i(F(t,x)) \geq f_{0i}, \; f_{0i} > 0, \; i = 1, 2, ..., n,$$

olması nedeniyle

$$f_0 = \min\{f_{01}, f_{02}, ..., f_{0n})$$

alınabilir. Bu durumda $(A1)$ ve $(A2)$ şartları kullanıldığında

$$\frac{d}{dt}W(t,x(t)) \le -f_0\|x\|^2 + \|x(t)\|\int_0^t \|K(t,s,x(s))\|ds$$

$$+\sigma\int_t^\infty \|D(u,t)\| \; \|f(x(t))\|^2 du - \sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$\le -f_0\|x\|^2 + \|x(t)\|\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|ds$$

$$+\sigma\int_t^\infty \|D(u,t)\| \; \|f(x(t))\|^2 du - \sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$\le -f_0\|x\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; [\|f(x(s))\|^2 + \|x(t)\|^2]ds$$

$$+\sigma\int_t^\infty \|D(u,t)\| \; \|f(x(t))\|^2 du - \sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$= -f_0\|x\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|x(t)\|^2 ds + \sigma\int_t^\infty \|D(u,t)\| \; \|f(x(t))\|^2 du$$

$$-\sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$= -f_0\|x\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|x(t)\|^2 ds + \sigma\beta^2\int_t^\infty \|D(u,t)\| \; \|x(t)\|^2 du$$

$$-\sigma\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 ds$$

elde edilir. $\sigma = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $(A2)$ şartı kullanıldığında,

$$\frac{d}{dt}W(t,x(t)) \le -f_0\|x(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; \|x(t)\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2\int_t^\infty \|D(u,t)\| \; \|x(t)\|^2 du$$

$$= -[\,f_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\| \; ds - \frac{1}{2}\beta^2\int_t^\infty \|D(u,t)\|du]\|x(t)\|^2$$

$$\leq -\rho\|x(t)\|^2 \leq 0$$

elde edilir. Bu sonuç (4.3) VİDD'nin sıfır çözümünün kararlı olduğunu gösterir.

Şimdi ise

$$I_S \equiv \{(t,x) : \frac{d}{dt}W_1(t,x(t)) = 0\}$$

ile tanımlı cümleyi göz önüne alalım. LaSalle's değişmezlik prensibi (invariance principle) (bkz. (Reissig ve ark, 1974)) ilkesini uygularsak $(t,x) \in I_s$ olması için $\|x\|^2 = 0$ olması gerektiğini gözlemleriz.

Dolayısıyla, $\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) = (0,0,...,0)$ olmalıdır. Bu eşitlik ve (4.3) VİDD sistemi birlikte ele alındığında, $K(t,s,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olması nedeniyle $x = 0$ elde edilir. Bu takdirde, I_s içerisindeki en büyük değişmeyen küme (invariant set), $(t,0) \in I_s$ 'dir. Böylece, (4.3)'ün sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğu sonucuna varabiliriz. Bu sonuç Teorem 4.2'nin ispatını tamamlar.

Şimdi ise, (4.3) VİDD sisteminin çözümlerinin düzgün kararlılığı ile ilgili bir sonuç verilecektir.

B. Varsayımlar

Aşağıdaki şartlar sağlansın:

$(A3)$ $\beta > 0, \Delta > 0$ ve $\gamma > 0$ reel sabitler olmak üzere

$$\|K(t,s,x(s))\| \leq \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|,$$

$$\|f(x(s))\| \leq \beta \; \|x(s)\|,$$

$$\int_0^t \|D(t,s)\| ds \leq \alpha_1(t),$$

$$\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|D(u,s)\| du ds = \Delta < \infty$$

olsun. Burada, her $t \in \Re$ için $\alpha_1(t)$ sürekli, negatif olmayan, sınırlı bir fonksiyon ve

$$\omega(t) = f_0 - \beta^2 \int_0^t \|D(t,s)\| \; ds \geq \gamma$$

dır.

Teorem 4.3 Eğer $(A1)$ ve $(A3)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (4.3) VİDD sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

İspat $x \in \Re^n$ ve $|x|$ herhangi bir norm olsun. C ise

$$\|\phi\|_{t_0} := \sup_{-\tau \le s \le t_0} |\phi(t)|$$

olmak üzere

$$\phi : [-\tau, t_0] \to \Re^n$$

şeklinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir Banach uzayını temsil etsin.

$x(t) = x(t, t_0, \phi)$, (4.3) VİDD sisteminin $[-\tau, \infty)$ aralığı üzerinde bir çözümü olsun öyle ki $[-\tau, t_0]$ aralığı üzerinde $x(t) = \phi(t)$, $t_0 \ge 0$ dır. Burada, $\phi \in C[-\tau, t_0]$ olup, ϕ bir başlangıç fonksiyonudur. Bu teoremin ispatında bir önceki teoremin ispatında kullanılan Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır. $W(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli azalan olduğu için (4.4)'den

$$\frac{1}{2}\|x(t)\|^2 \le W(t, x(t)) \le W(t_0, \phi(t_0))$$

yazılabilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
W(t_0, \phi(t_0)) &= \frac{1}{2}\|\phi(t_0)\|^2 + \sigma \int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|D(u,s)\| \, \|f(\phi(s))\|^2 \, duds \\
&\le \frac{1}{2}\|\phi(t_0)\|^2 + \sigma\beta^2 \int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|D(u,s)\| \|\phi(s)\|^2 \, duds \\
&\le \frac{1}{2}[1 + 2\sigma\beta^2] \|\phi\|_{t_0}^2 \int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|D(u,s)\| duds \\
&= \frac{1}{2}[1 + 2\sigma\beta^2\Delta] \|\phi\|_{t_0}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|x(t)\|^2 \le [1 + 2\sigma\beta^2\Delta] \|\phi\|_{t_0}^2$$

elde edilir.

Buna bağlı olarak, her $\varepsilon > 0$, için, en az bir $\delta = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2\sigma\beta^2\Delta}} \right) \dfrac{\varepsilon}{2}$ pozitif bir sabit sayısı vardır öyle ki (4.3) VİDD'nin herhangi bir çözümü için, her $t \in [-\tau, t_0]$ için $\|\phi(t)\| < \delta$ olduğunda

$$\forall t \ge t_0, \ \|x(t, t_0, \phi)\| \le (\sqrt{1 + 2\sigma\beta^2\Delta})\delta < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda δ sabiti t_0 'dan bağımsız olduğu için (4.3) VİDD'nin $x(t) \equiv 0$ çözümünün düzgün kararlı olduğu sonucuna varılır. Böylece istenilen sonucu elde etmiş oluruz. Buna bağlı olarak Teoremin ispatı tamamlanmış oluruz.

4.2 (4.5) Sabit Gecikmeli VİDD Sistemi için Kararlılık Sonuçları

Şimdi ise, bu kısımda sabit gecikmeli

$$x'(t) = -F(t, x(t))x(t) + \int_{t-\tau}^{t} K(t, s, x(s))ds, \quad t - \tau \geq 0 \tag{4.5}$$

VİDD sistemi ele alınacaktır.

Burada, $t \in \Re^+, \Re^+ = [0,\infty), x \in \Re^n, F \in C(\Re \times \Re^n, \Re^n)$ ve $0 \leq s \leq t$ olmak üzere $K(t,s,x) \in C(\Re \times \Re \times \Re^n, \Re^n)$ ve $K(t,s,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 'dır.

Ayrıca, (4.5) VİDD sistemi için $t_0 \geq 0,\ t \in [-\tau,\infty),\ \tau$ pozitif bir sabit (sabit gecikme),

$$\theta \in [-\tau, 0],\ x(t_0^+) = \phi(0), \phi \in C([-\tau,0], \Re^n)$$

olmak üzere $x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$ başlangıç fonksiyonu alınmaktadır.

(4.5) VİDD sistemi ile (4.3) VİDD sistemi çok benzer olmasına rağmen (4.5) VİDD sistemi açıkça sabit bir gecikme içermektedir. Ayrıca, (4.3) VİDD sisteminde çözümlerin kararlılığı Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla uygun bir Lyapunov fonksiyoneli kullanılarak sonuçlar ispat edilmektedir. Bu kısımda ise Lyapunov-Razumikhin metodu yardımla uygun bir Lyapunov fonksiyonu seçilerek çözümlerin global düzgün asimptotik kararlılığı, kare integrallenebilirliği ve $t \to \infty$ için çözümlerin sınırlılığı incelenecektir. Literatürde edinilen bilgilere göre sabit gecikmeli bir integro-diferansiyel denklem için Lyapunov-Razumikhin metodu ilk kez burada uygulanmaktadır.

Burada, (4.5) VİDD sistemi için $t_0 \geq 0, t \in [-\tau,\infty), \tau$ pozitif bir sabit (sabit gecikme),

$$\theta \in [-\tau, 0],\ x(t_0^+) = \phi(0), \phi \in C([-\tau,0], \Re^n)$$

olmak üzere $x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$ başlangıç fonksiyonu alınmaktadır.

Burada, $t \in \Re^+, \Re^+ = [0,\infty), x \in \Re^n, F \in C(\Re \times \Re^n, \Re^n)$ ve $0 \leq s \leq t$ olmak üzere $K(t,s,x) \in C(\Re^+ \times \Re^+ \times \Re^n, \Re^n)$ ve $K(t,s,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 'dır.

C. Varsayımlar

Aşağıdaki şartlar sağlansın:

$(A4)$ β, σ ve λ pozitif sabitleri var öyle ki

$$\|K(t,s,x(s))\| \le \|D(t,s)\| \ \|f(x(s))\|,$$

$$\|f(x(s))\| \le \beta \|x(s)\|,$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \|D(t,s)\| \, ds < +\infty, \ \int_{0}^{t} \|D(t,s)\| \, ds < +\infty$$

ve

$$\vartheta(t) = f_0 - \frac{1}{2}\beta^2 \int_{t-\tau}^{t} \|D(t,s)\| \, ds - \frac{1}{2}\int_{0}^{t} \|D(t,s)\| \, ds \ge \lambda$$

dır.

Teorem 4.4 Eğer $(A1)$ ve $(A4)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (4.5) VİDD'nin sıfır çözümü global olarak düzgün asimptotik kararlı, ilave olarak bu diferansiyel denklem sisteminin tüm çözümleri kare integrallenebilirdir, yani, $\|x(t)\|^2 \in L^2[0,\infty)$ ve $t \to \infty$ için çözümler sınırlıdır. Burada $L^2[0,\infty)$ gösterimi $[0,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında kare integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır.

İspat Bu teoremin ispatında Lyapunov-Razumikhin metodunda yararlanılacaktır.

Şimdi ise, $W_1 = W_1(t,x(t))$ olmak üzere

$$W_1(t,x(t)) = \frac{1}{2}\langle x(t), x(t)\rangle = \frac{1}{2}\|x(t)\|^2$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda,

$$W_1(t,0) = 0$$

ve

$$\frac{1}{4}\|x(t)\|^2 \le W_1(t,x(t)) \le \frac{3}{2}\|x(t)\|$$

yazılabilir. Bu yüzden, W_1 Lyapunov fonksiyonunun pozitif tanımlı olduğu açıktır.

Şimdi $(t_0,\phi_0) \in \Re^+ \times C([-\tau,0],\Re)$ bir başlangıç fonksiyonunu ve $t > t_0$ noktasını göz önüne alalım öyle ki $\forall s \in [-\tau,0]$, için $W_1(t+s, x(t+s)) < W_1(t,x(t))$, yani $s \in [-\tau,0]$, için $\|x(t+s)\|^2 < \|x(t)\|^2$ olsun. $x(t) = x(t,t_0,\phi)$, (4.5) VİDD sisteminin için bir çözümü olsun öyle ki $\theta \in [-\tau,0]$, için $x(t_0^+ + \theta) = \phi_0(\theta)$ olsun.

Bu adımda ise, (4.5) VİDD'nin çözümleri boyunca, W_1 Lyapunov fonksiyonunun türevi alındığında

$$\frac{d}{dt}W_1(t,x(t)) = \frac{1}{2}\langle x'(t), x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t), x'(t)\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\langle F(t,x(t))x(t),x(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle x(t),F(t,x(t))x(t)\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle x(t),\int_{t-\tau}^{t} K(t,s,x(s))ds\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle x(t),\int_{t-\tau}^{t} K(t,s,x(s))ds\right\rangle$$

elde edilir. $(A1)$, $(A4)$ şartları ve elemanter eşitsizlikler yardımıyla

$$\frac{d}{dt}W_1(t,x(t)) \le -f_0\|x(t)\|^2 + \|x(t)\|\int_{t-\tau}^{t}\|K(t,s,x(s))\|ds$$

$$\le -f_0\|x(t)\|^2 + \|x(t)\|\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ \|f(x(s))\|ds$$

$$\le -f_0\|x(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ [\|f(x(s))\|^2 + \|x(t)\|^2]ds$$

$$= -f_0\|x(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ \|f(x(s))\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ \|x(t)\|^2 ds$$

$$\le -f_0\|x(t)\|^2 + \frac{1}{2}\beta^2\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ \|x(s)\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\|D(t,s)\|\ \|x(t)\|^2 ds \tag{4.6}$$

elde edilir.

Şimdi ise,

$$\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ \|x(s)\|^2 ds$$

integralini göz önüne alalım.

Bu integrale $s-t=\xi$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda, $ds=d\xi$ olur. Bu yüzden $s=t-\tau$ için $\xi=-\tau$ elde edilir. Benzer biçimde $s=t$ için ise $\xi=0$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki integralden

$$\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\ \|x(s)\|^2 ds = \int_{-\tau}^{0}\|D(t,t+\xi)\|\ \|x(t+\xi)\|^2 ds$$

$$\le \int_{-\tau}^{0}\|D(t,t+\xi)\|\ \|x(t)\|^2 d\xi$$

$$=\|x(t)\|^2\int_{-\tau}^{0}\|D(t,t+\xi)\|\,d\xi$$

$$=\|x(t)\|^2\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\,ds \tag{4.7}$$

elde edilir.

Şimdi ise (4.7) eşitsizliğini (4.6) eşitsizliğinde yerine yazdığımızda

$$\frac{d}{dt}W_1(t,x(t))\le -f_0\|x(t)\|^2+\frac{1}{2}\beta^2\|x(t)\|^2\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\,ds+\frac{1}{2}\|x(t)\|^2\int_{0}^{t}\|D(t,s)\|\,ds$$

$$=-\,[\,f_0-\frac{1}{2}\beta^2\int_{t-\tau}^{t}\|D(t,s)\|\,ds-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\|D(t,s)\|\,ds]\|x(t)\|^2$$

$$\le-\sigma\|x(t)\|^2\le 0$$

elde edilir. Bu durumda (4.5) VİDD sisteminin sıfır çözümü global düzgün asimptotik kararlı olduğu görülür.

Şimdi son eşitsizliğin 0 ’dan t ’ ye integralini alırsak

$$W_1(t,x(t))-W_1(0,x(0))\le-\sigma\int_0^t\|x(s)\|^2ds$$

elde ederiz. Yukarıdaki incelemeden $W_1(t,x(t))$ ’nin pozitif tanımlı ve azalan bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Böylece

$$W_1(0,x(0))=\|x(0)\|^2=L_0,\,L_0>0,\;L_0\in\Re$$

olarak kabul edilebilir. Bu durumda

$$\sigma\int_0^t\|x(s)\|^2ds\le W_1(0,x(0))-W_1(t,x(t))\le W_1(0,x(0))=L_0$$

olduğu açıktır. Yukarıdaki eşitsizliklerin bir sonucu olarak,

$$\int_0^\infty\|x(s)\|^2ds\le\sigma^{-1}L_0$$

yazılabilir. Böylece, $\|x(t)\|^2\in L^2[0,\infty)$ olur. Yani, (4.5) VİDD sisteminin çözümleri kare integrallenebilirdir.

Son olarak, çözümlerin $t\to\infty$ için sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\frac{d}{dt}W_1(t,x(t))\le-\sigma\|x(t)\|^2\le 0$$

olduğundan

$$\frac{d}{dt}W_1(t,x(t))\le 0$$

olduğu açıktır. Son eşitsizliğin 0 ’dan t ’ ye integrali alırsak

$$W_1(t,x(t))\le W_1(0,x(0))=L_0$$

elde ederiz.

$$\frac{1}{4}\|x(t)\|^2\le W_1(t,x(t))$$

olması nedeniyle

$$\frac{1}{4}\|x(t)\|^2\le W_1(t,x(t))\le W_1(0,x(0))=L_0$$

elde ederiz. Buna bağlı olarak,

$$\|x(t)\|\le 2\sqrt{L_0},\ \forall t\ge t_0$$

sonucuna varılır. Bu durumda $t\to\infty$ için (4.5) VİDD sisteminin tüm çözümleri sınırlı olduğu görülür. Bu sonuçlar Teorem 4.4’ün ispatını tamamlar.

Örnek 4.1 Aşağıdaki lineer olmayan VİDD sistemini göz önüne alalım:

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} & 1\\ 1 & 9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}\exp(-2t+s)\dfrac{\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_1^2(s)}\\ 2\exp(-2t+s)\dfrac{\sin\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_2^2(s)}\end{pmatrix}ds. \qquad (4.8)$$

Burada $t\ge 0$ ve $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=x(t)=x\in\Re^2$ ’dir.

(4.8) VİDD sistemini (4.3) VİDD sistemi ile karşılaştıralım:

$$F(t,x_1,x_2)=\begin{pmatrix}9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} & 1\\ 1 & 9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix}$$

ve

$$K(t,s,x(s)) = \begin{pmatrix} \exp(-2t+s)\dfrac{\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_1^2(s)} \\ 2\exp(-2t+s)\dfrac{\sin\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_2^2(s)} \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bazı basit elemanter işlemler yardımıyla, aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

$$\|F(t,x_1,x_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} 9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} & 1 \\ 1 & 9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\sup_{(t,x)\in\Re^+\times\Re^2} \|F(t,x)\| \le 22 < \infty,$$

$$\lambda_1(F(t,x_1,x_2)) = 8+\frac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2},$$

$$\lambda_2(F(t,x_1,x_2)) = 10+\frac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2},$$

$$f_{0i} = 8 \le 8+\frac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} \le \lambda_i(F(t,x_1,x_2)),$$

$$\lambda_i(F(t,x_1,x_2)) = 10+\frac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} \le 11 = f_{1i},$$

$$f_0 = 8,$$

$$8 \le f_{0i} \le \lambda_i(F(t,x)) \le f_{1i} \le 11, (i=1,2).$$

$$\begin{aligned}
\|K(t,s,x(s))\| &= \left\| \begin{pmatrix} \exp(-2t+s)\dfrac{\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_1^2(s)} \\ 2\exp(-2t+s)\dfrac{\sin\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_2^2(s)} \end{pmatrix} \right\| \\
&\le \exp(-2t+s)\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)} + 2\exp(-2t+s)\left|\sin\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}\right| \\
&\le \exp(-2t+s)\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)} + 2\exp(-2t+s)\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)} \\
&\le 3\exp(-2t+s)\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)} \\
&= \|D(t,s)\| \; \|f(x(s))\|.
\end{aligned}$$

Burada

$$\|D(t,s)\| = 3\exp(-2t+s), \; 0 \le s \le t,$$

$$\|D(u,t)\| = 3\exp(-2u+t),\ 0 \le t \le u,$$

$$\| f(x_1(s), x_2(s))\| = \sqrt{x_1^2(s) + x_2^2(s)} = \|x(s)\|,\ \beta = 1$$

dır. Buradan integral alındığında,

$$\int_0^t \|D(t,s)\| ds = 3\int_0^t \exp(-2t+s) ds = 3\ [\exp(-t) - \exp(-2t)] = \alpha_1(t),$$

$$\int_t^\infty \|D(u,t)\| du = 3\int_t^\infty \exp(-2u+t) du = \frac{3}{2}\exp(-t) = \alpha_2(t)$$

elde edilir. Elde edilen bu bağıntılar yardımıyla

$$\alpha(t) = f_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\|\ ds - \frac{1}{2}\beta^2 \int_t^\infty \|D(u,t)\| du$$

$$= 8 - \frac{3}{2}\exp(-t) + \frac{3}{2}\exp(-2t) - \frac{3}{2}\exp(-t)$$

$$\ge 8 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 5 = \rho > 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece Teorem 4.2’nin şartlarının sağlandığı görülür. Buna bağlı olarak (4.8) VİDD sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Şimdi ise aynı sistemin sıfır çözümünün düzgün kararlı olduğunu gösterelim:

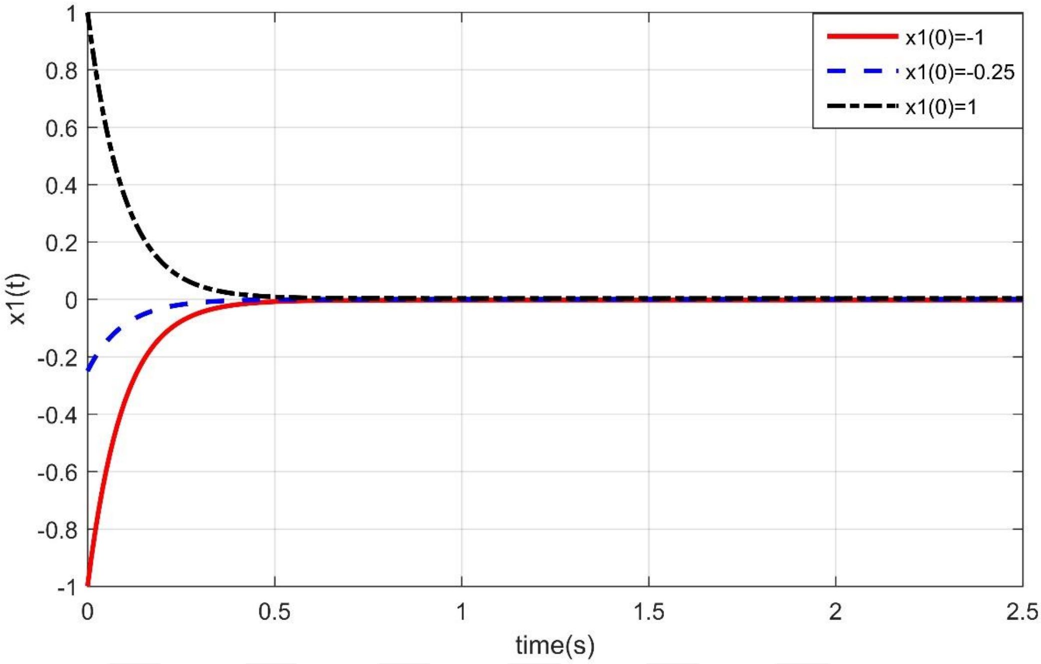
$$\|D(u,s)\| = 3\exp(-2u+s),\ 0 \le s \le u,$$

$$\int_0^{t_0}\int_{t_0}^\infty \|D(u,s)\| du ds = 3\int_0^{t_0}\int_{t_0}^\infty \exp(-2u+s) du ds = \frac{3}{2}[\exp(3t_0) - \exp(2t_0)] = \Delta < \infty,\ t_0 \ge 0,$$

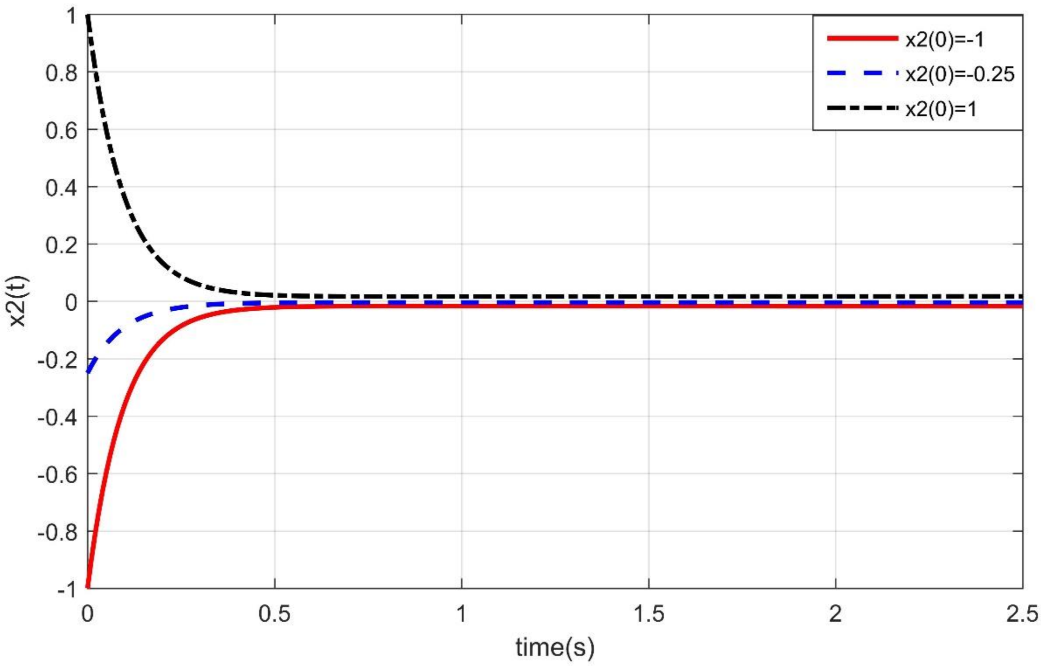
$$\omega(t) = f_0 - \beta^2 \int_0^t \|D(t,s)\|\ ds$$

$$= 8 - 3\ \exp(-t) + 3\exp(-2t) \ge 8 - 3\ \exp(-t) \ge 5 = \sigma$$

yazılabilir. Bu nedenle Teorem 4.3’ün şartı sağlanır. Böylece (4.8) VİDD sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.



Şekil 4.1 (4.8) VİDD sisteminin $x_1(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.



Şekil 4.2 (4.8) VİDD sisteminin $x_2(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.

Örnek 4.2 Aşağıdaki lineer olmayan gecikmeli VİDD sistemini göz önüne alalım:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} & 1 \\ 1 & 9+\dfrac{1}{1+\exp(t)+x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$+\int_{t-1}^{t}\begin{pmatrix} \exp(-2t+s)\dfrac{\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_1^2(s)} \\ 2\exp(-2t+s)\dfrac{\sin\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_2^2(s)} \end{pmatrix}ds. \tag{4.9}$$

Burada $t-1\geq 0$, $\tau=1$ sabit gecikme ve $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x(t) = x \in \Re^2$ 'dır.

(4.9) VİDD sistemi ile (4.5) VİDD sistemini karşılaştırdığımızda $F(t,x)$ matrisi örnek 4.1'de verilmektedir. İlave olarak,

$$\int_{t-\tau}^{t} K(t,s,x(s))ds = \int_{t-1}^{t}\begin{pmatrix} \exp(-2t+s)\dfrac{\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_1^2(s)} \\ 2\exp(-2t+s)\dfrac{\sin\sqrt{x_1^2(s)+x_2^2(s)}}{1+x_2^2(s)} \end{pmatrix}ds$$

yazılabilir. Örnek 4.1'e benzer olarak

$$\|D(t,s)\| = 3\exp(-2t+s),\ 0\leq s\leq t,$$

$$\int_0^t \|D(t,s)\|\, ds = 3\int_0^t \exp(-2t+s)ds = 3\ [\exp(-t)-\exp(-2t)] < +\infty,$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \|D(t,s)\|\ ds = 3\int_{t-1}^{t} \exp(-2t+s)\ ds = 3[\exp(-t)-\exp(-t-1)] < +\infty,$$

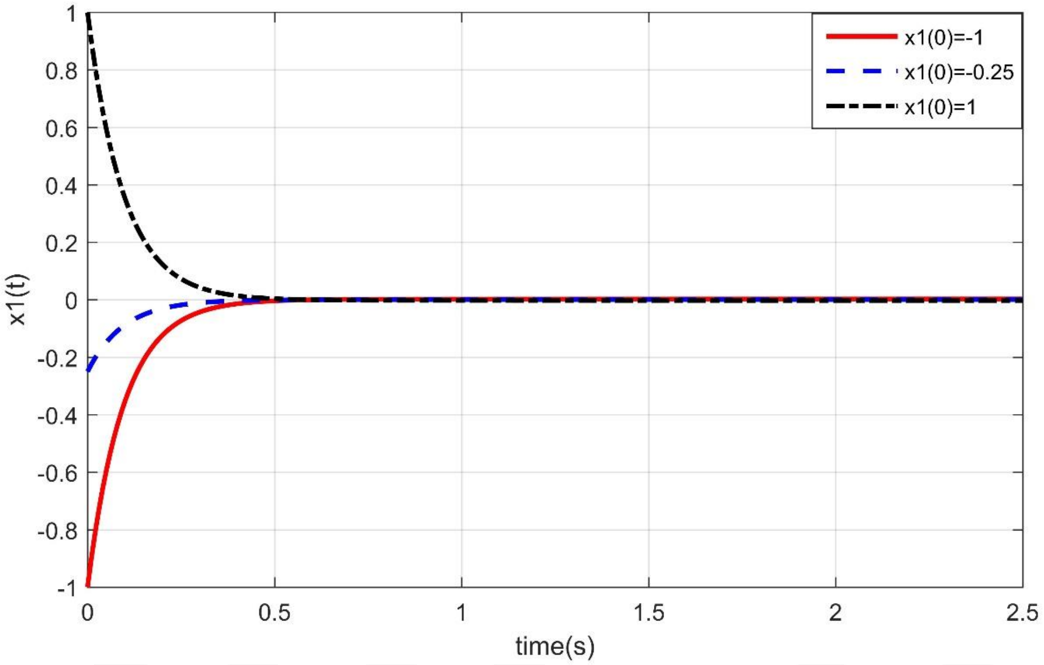
$$\vartheta(t) = f_0 - \frac{1}{2}\beta^2\int_{t-1}^{t}\|D(t,s)\|\ ds - \frac{1}{2}\int_0^t \|D(t,s)\|\ ds$$

$$= 8 - \frac{3}{2}[\exp(-t)-\exp(-t-1)] - \frac{3}{2}\ [\exp(-t)-\exp(-2t)]$$

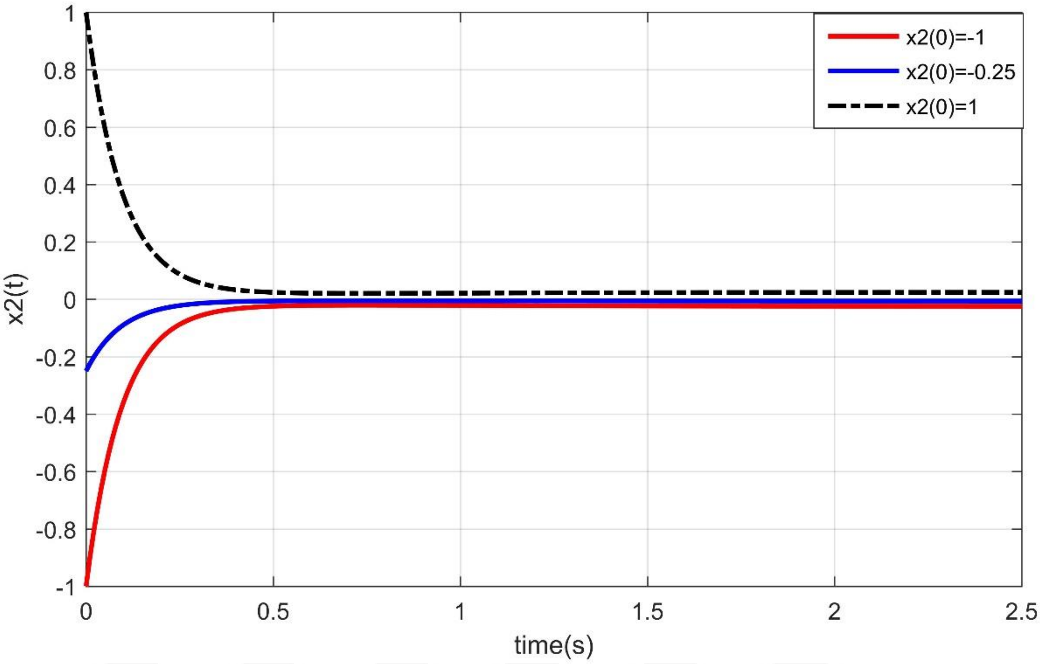
$$= 8 - \frac{3}{2}\exp(-t) + \frac{3}{2}\exp(-t-1) - \frac{3}{2}\ \exp(-t) + \frac{3}{2}\exp(-2t)$$

$$= 8 - \frac{3}{2}\exp(-t) - \frac{3}{2}\ \exp(-t) \geq 5 = \lambda$$

elde edilir. Böylece, Teorem 4.4'ün şartı sağlandığı görülür. Bu ise (4.9) VİDD sisteminin sıfır çözümünün global olarak düzgün asimptotik kararlı olduğu gösterir. İlave olarak (4.9) VİDD sisteminin tüm çözümleri $t \to \infty$ için sınırlıdır ve kare integrallenebilirdir.



Şekil 4.3 (4.9) VİDD sisteminin $x_1(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.



Şekil 4.4 (4.9) VİDD sisteminin $x_2(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.

Sonuç

Seifert (1973) çalışmasının sonuçları ile bu bölümde elde edilen sonuçları karşılaştırılacaktır:

1^0) (4.3) VİDD sistemi ve $t-\tau=0$ için (4.5) VİDD sistemi (4.1) VİDD sisteminin daha genel halleridir. Gerçekten, (4.3) VİDD sisteminde $F(t,x)=A$ ve (4.5) VİDD sisteminde ise $F(t,x)=A, t-\tau=0$ alındığında bu durum kolaylıkla görülebilir. Literatürde yapılan incelemeler sonucunda bu bölümde ele alınan (4.3) VİDD ve (4.5) VİDD sistemleri ve bu sistemlere ait problemlerinin yeni incelendiği görülmektedir.

2^0) Seifert (1973), (4.1) VİDD sisteminin sadece sıfır çözümünün kararlığını inceledi. Bu bölümde kararlılığa ilaveten (4.3) ve (4.5) sistemlerinin çözümlerinin asimptotik kararlılığı, global düzgün asimptotik kararlılığı, integrallenebilirliği ve $t\to\infty$ için ise çözümlerin sınırlılığı incelenmektedir.

3^0) Seifert (1973), Teorem 4.1'in ispatında aşağıdaki kuadratik fonksiyonu kullandı:

$$V(x)=\langle xB,x\rangle.$$

Ancak, bu bölümde Teorem 4.2, 4.3 ve 4.4'ün ispatlarında sırasıyla aşağıdaki Lyapunov-fonksiyon ve fonksiyoneller kullanılmaktadır:

$$W = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \sigma\int_0^t\int_t^\infty \|D(u,s)\| \; \|f(x(s))\|^2 \, duds$$

ve

$$W_1(t,x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 .$$

Aslında Teorem 4.1 deki kararlılık sonucuyla Teorem 4.2 deki asimptotik kararlılık sonuçları bağlantılıdır. Şöyle ki asimptotik kararlılık, kararlılığı sağlar fakat tersinin doğru olması gerektirmez. Bu yüzden Teorem 4.2'nin sonucu, Teorem 4.1'in sonucunu gerektirir. Fakat tersi doğru değildir. Seifert (1973), Teorem 4.1'in ispatında V Lyapunov fonksiyonu kullanılmasına rağmen Teorem 4.2'nin ispatında W Lyapunov fonksiyoneli kullanılmıştır.

4^0) Teorem 4.4'ün ispatında Lyapunov-Razumikhin metodu kullanılmaktadır. Literatürde yapılan incelemelerde, bu tür çalışmalarda Lyapunov'un ikinci metodu kullanılmasına rağmen burada, uygulaması çok daha kolay olan Lyapunov-Razumikhin metodu kullanılmıştır. Ayrıca, bu yöntemin kullanılması daha az kısıtlayıcı şartların oluşturulmasına yardımcı olmuştur.

5^0) Seifert (1973), çalışmasındaki (4.1) VİDD sisteminin K çekirdeği

$$\left|\int_0^t K(t,s,x(s))ds\right| \le \mu \sup_{0\le s\le t}|x(s)|$$

eşitsizliğini sağlamak zorundadır. Burada, $x(s),\ 0 \le s \le t$ aralığında sürekli ve $|x(s)| \le \rho, \rho > 0$'dır. Yani, $x(s),\ 0 \le s \le t$ aralığında sürekli ve sınırlı olmak zorundadır. Ayrıca, $\frac{2|B|\mu\Lambda}{\lambda} < 1$'dir. Bu şartlarlar, Teorem 4.2, Teorem 4.3 ve Teorem 4.4 şartlarından daha kısıtlayıcıdır. Bu nedenle, yukarıda verilen teoremler Seifret'in sonuçlarından daha az kısıtlayıcı şartlara sahiptir.

6^0) Seifert (1973), çalışmasında sonuçlarını açıklayıcı örnek bulunmamaktadır. Ancak bu bölümdeki sonuçları açıklayıcı iki örnek grafikleriyle beraber verildi.

5. SABİT GECİKMELİ BİR VİDD SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

Wang (1998), aşağıdaki lineer

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{5.1}$$

VİDD sistemini ele aldı. Burada $t \in \Re^+$, yani $0 \le t < \infty, x \in \Re^n, n \ge 1,$ ve $0 \le s \le t < \infty$ için $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ ve $C(t,s) = (C_{ij}(t,s))_{n\times n}$, sırasıyla $n\times n-$ boyutlu sürekli matrislerdir.

Wang (1998), (5.1) VİDD'in sıfır çözümünün kararlılık ve asimptotik kararlılığı ile ilgili iki sonuç ispatladı ve bu sonuçlar yeter şartlar içermektedir. Araştırmacı sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için bir örnek verdi. İlgili sonuçlara bakıldığında sonuçların çok sade bir biçimde olduğu ve uygulanabilirliklerinin mümkün olduğu gözlemlenebilir.

Bu bölümde yukarıdaki çalışmadan esinlenerek, aşağıdaki sabit gecikmeli lineer olmayan

$$x'(t) = A(t)x + \int_0^t C(t,s,x(s))G(s,x(s))ds + H(t,x,x(t-\tau)) \tag{5.2}$$

VİDD sistemi ele alınacaktır. Burada $t \in \Re^+$, $\Re^+ = [0,\infty)$, $x \in \Re^n$, $n \ge 1, 0 \le s \le t < \infty$ ve $x \in \Re^n$ için $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ ve $C(t,s,x) = (C_{ij}(t,s,x))_{n\times n}$, $n\times n-$ boyutlu sürekli matrisler, $C(t,s,0) = 0$ ve $G(s,0) = 0$ olmak üzere $G : \Re\times\Re^+ \to \Re^+$ ve $H : \Re\times\Re^+\times\Re^+ \to \Re^+$ sürekli fonksiyonlardır.

$x(t) = x(t,t_0,\phi)$, $[t_0-\tau,\beta)$, $\beta > 0$, aralığı üzerinde (5.2) VİDD siteminin bir çözümü olsun öyle ki $[t_0-\tau,t_0]$, aralığı üzerinde $x(t) = \phi(t)$ 'dir. Burada $\phi : [t_0-\tau,t_0] \to \Re^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonudur.

Bu bölümde, $H(.) \equiv 0$ için (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün asimptotik ve düzgün kararlılığını ve $H(.) \ne 0$ için ise, bu denklem siteminin çözümlerinin integrallenebilirliliği ve sınırlılığı incelenmektedir. Uygun bir Lyapunov fonksiyoneli tanımlanarak, (5.2) VİDD sisteminin çözümlerinin söz konusu olan niteliksel davranışları araştırılacaktır.

(5.1) VİDD ve (5.2) VİDD karşılaştırıldığında, (5.1) VİDD lineer bir denklemdir. Ancak, (5.2) VİDD sabit gecikmeli lineer olmayan denklem sistemidir. Dolayısıyla, bu çalışmanın katkısı lineer (5.1) VİDD'den lineer olmayan gecikmeli (5.2) VİDD'ye yapılan bir genelleme ve yeniliktir.

Bu bölümde sırasıyla, $H(.)\equiv 0$ iken (5.2) VİDD'nin sıfır çözümünün kararlılığını, asimptotik kararlılığı ve düzgün kararlılığını ve $H(.)\neq 0$ iken lineer olmayan (5.2) VİDD sisteminin çözümlerinin sınırlılığını ve integrallenebilirliğini garanti eden yeter şartlar oluşturulacaktır. (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümün düzgün kararlılığı, çözümlerin integrallenebilirliği ve sınırlılığı, bu çalışmanın konuya ve literatüre ikinci katkısıdır. Bu sonuçlar Wang'ın sonuçlarına ilave sonuçlardır.

Ayrıca, eğer $C(t,s,x(s))=C(t,s)$, $G(s,x(s))=x(s)$, $H(t,x(t),x(t-\tau))=0$ olarak seçilirse (5.2) VİDD, (5.1) VİDD'e indirgenir.

Ayrıca, aşağıda verilecek hipotezlerimizin doğruluğunu ve uygulanabilirliğini netleştirmek için iki somut örnek verilecektir. Ele alınan denklemdeki fonksiyonların özel seçimi için, MATLAB-Simulink kullanılarak, çözümlerinin yörüngelerinin davranışları açıkça gösterilecektir.

Bu çalışma boyunca, $x(t)$ yerine söz edilmeksizin x kullanılmaktadır.

$x\in\Re^n$ ve A, $n\times n-$ tipinde bir matris olmak üzere x ve A'nın normları sırasıyla $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)$ ve $\|A\|=\max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ ile tanımlanmaktadır.

5.1. (5.2) VİDD Sisteminin Çözümlerin Kararlılık ve İntegrallenebilirliği

$H(t,x,x(t-\tau))\equiv 0$ olsun.

A. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$$a(t)=\max_{1\le j\le n}\{a_{ii}(t)+\sum_{i=1,\, j\neq i}^{n}|a_{ij}(t)|\}$$

olsun.

$(A1)$ α pozitif bir sabit olmak üzere

$$\|G(t,x)\|\le\alpha\|x\|$$

dir.

$(A2)$ α ve δ_1 pozitif sabitleri vardır öyle ki

$$\|C(u,t,x(t))\| \le \|K(u,t)\|, \int_t^{\infty} \|K(u,t)\| du < \infty$$

ve

$$a(t) + \alpha \int_t^{\infty} \|K(u,t)\| du \le -\delta_1$$

dır.

Teorem 5.1 Eğer $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Ayrıca, (5.2) VİDD sisteminin tüm çözümleri integrallenebilirdir yani, $x(t) \in L^1[0,\infty)$ olur. Burada $L^1[0,\infty)$ ifadesi $[0,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların bir uzayıdır.

İspat Bir $W_1 = W_1(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelini

$$W_1 = \|x\| + \int_0^t \int_t^{\infty} \|C(u,s,x(s))\| du \ \|G(s,x(s))\| ds \tag{5.3}$$

ile tanımlayalım. Burada, $W_1(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelinin pozitif tanımlı olduğu aşikardır. Gerçekten,

$$W_1(t,0) = 0, W_1(t,x(.)) \ge \|x\|$$

yazılabilir. (5.3) ile verilen $W_1(t,x(.)),$ Lyapunov fonksiyonelinin (5.2) VİDD siteminin çözümleri boyunca zaman türevini alındığında

$$\frac{d}{dt} W_1^+(t,x(.)) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \operatorname{sgn} x_i(t+0) + \|G(t,x(t))\| \int_t^{\infty} \|C(u,t,x(t))\| du$$

$$- \int_{-\infty}^{t} \|C(t,s,x(s))\| \ \|G(s,x(s))\| ds \tag{5.4}$$

elde edilir. Buradan,

$$\operatorname{sgn} x_i(t+0) x_i'(t) \le a_{ii}(t)|x_i| + \sum_{i=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}(t)| \ |x_j|$$

$$+ \int_0^t \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}(t,s,x(s))| \ |G_j(s,x(s))| ds$$

olduğu açıktır.

Bu eşitsizlik yardımıyla

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} x_i(t+0) x_i'(t) \le \sum_{i=1}^{n} [a_{ii}(t)|x_i| + \sum_{i=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}(t)| \ |x_j| + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}(t,s,x(s))| \ |G_j(s,x(s))| ds]$$

$$\leq a(t)\|x(t)\| + \int_0^t \|C(t,s,x(s))\|\|G(s,x(s))\|ds \tag{5.5}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (5.4) ve (5.5) eşitsizliklerinden, kolaylıkla

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W_1^+(t,x(.)) \leq a(t)\|x(t)\| &+ \int_0^t \|C(t,s,x(s))\|\|G(s,x(s))\|ds \\
&+\|G(t,x(t))\|\int_t^\infty \|C(u,t,x(t))\|\,du \\
&-\int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \ \|G(s,x(s))\|ds \\
&= a(t)\|x(t)\| + \|G(t,x(t))\|\int_t^\infty \|C(u,t,x(t))\|\,du \\
&\leq [a(t) + \alpha\int_t^\infty \|C(u,t,x(t))\|\,du]\|x(t)\| \\
&\leq [a(t) + \alpha\int_t^\infty \|K(u,t)\|\,du]\|x(t)\| \\
&\leq -\delta_1\|x(t)\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$W_1(t,x(.)) \geq \|x\|$ eşitsizliğini göz önüne alındığında son eşitsizlikten

$$\frac{d}{dt}W_1^+(t,x(.)) \leq -\delta_1 W_1(t,x(.))$$

yazılabilir.

Bu eşitsizliğin t_0 ’dan t ’ye integrali alınırsa,

$$W_1(t,x(.)) \leq W_1(t_0,\phi(t_0))\exp(-\delta_1(t-t_0)),\ t \geq t_0$$

bulunur. W_1 Lyapunov fonksiyoneli pozitif tanımlı olduğundan, son eşitsizlik W_1 Lyapunov fonksiyonelin azalan olduğunu yani

$$W_1(t,x(.)) \leq W_1(t_0,\phi(t_0)),\ t \geq t_0$$

olduğunu gösterir.

Böylece

$$\|x(t,t_0,\phi)\| \leq W_1(t,x(.)) \leq W_1(t_0,\phi(.))\exp(-\delta_1(t-t_0)),\ t \geq t_0$$

olur. Buna bağlı olarak

$$\|x(t,t_0,\phi)\| \le W_1(t_0,\phi(.))\exp(-\delta_1(t-t_0)),\ t \ge t_0$$

yazılabilir.

$t \to \infty$ iken son eşitsizliğin limiti alınırsa

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t,t_0,\phi)\| \le \lim_{t\to\infty} W_1(t_0,\phi(t_0))\exp(-\delta_1(t-t_0)),\ t \ge t_0$$

eşitsizliğinden

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t,t_0,\phi)\| = 0$$

sonucuna ulaşılabilir.

Yukarıdaki elde edilen sonuçlar (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığının ispatını tamamlar.

$$\frac{d}{dt}W_1^+(t,x(.)) \le -\delta_1\|x(t)\|$$

olması nedeniyle t_0 'dan t 'ye integrali alınırsa, bu eşitsizliğin

$$W_1(t,x(.)) - W_1(t_0,\phi(t_0)) \le -\delta_1\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|ds$$

elde edilir. Buradan, $W_1(t,x(.)) \le W_1(t_0,\phi(t_0)),\ t \ge t_0,$ olduğundan

$$\delta_1\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|ds \le W_1(t_0,\phi(t_0)) - W_1(t,x(.)) \le W_1(t_0,\phi(t_0))$$

elde edilir. $W_1(t,x(.))$ pozitif tanımlı olduğundan

$$W_1(t_0,\phi(t_0)) = M_0, M_0 > 0, M_0 \in \Re$$

alınabilir. Buna bağlı olarak

$$\delta_1\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|ds \le W_1(t_0,\phi(t_0)) = M$$

olup

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(s)\|ds < \delta_1^{-1}M_0$$

sonucuna varılır. Bu ise (5.2) VİDD sisteminin çözümlerinin integrallenebilir olduğunu gösterir. Böylece Teorem 5.1'in ispatı tamamlanır.

Uyarı 5.1 $(A1)$ ve $(A2)$ şartları (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün kararlılığını garanti eder.

B. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

$(A3)$ $\alpha, k_1, k_2, \delta_2$ pozitif sabitler ve $a(t)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığını kabul edelim;

$$\|C(u,t,x(t))\| \le \|K(u,t)\|, \int_t^\infty \|K(u,t)\| du < \infty,$$

$$k_3 > 1, \; k_3 |a(t)| \ge \|A(t)\|$$

ve

$$a(t) + k_1\alpha \int_t^\infty \|K(u,t)\| du \le -\delta_2$$

dir.

Teorem 5.2 Eğer $(A1)-(A3)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. İlave olarak (5.2) VİDD sisteminin tüm çözümleri ve bu çözümlerin türevleri integrallenebilirdir yani, $x(t) \in L^1[0,\infty)$ ve $x'(t) \in L^1[0,\infty)$ olur. Burada $L^1[0,\infty)$ uzayı $[0,\infty)$ aralığında tüm Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların bir uzayıdır.

İspat (5.2) VİDD sisteminden kolaylıkla

$$|x_i'(t)| \le \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)| \; |x_j| + \sum_{j=1}^n \int_0^t |C_{ij}(t,s,x(s))| \; |G_j(s,x(s))| ds$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^n |x_i'(t)| \le \|A(t)\| \; \|x(t)\| + \int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \|G(s,x(s))\| ds$$

$$\le \|A(t)\| \; \|x(t)\| + \alpha \int_0^t \|K(t,s)\| \|x(s)\| ds$$

elde edilir. Bu sonuçlar ışığında

$$\|x'(t)\| = \left| \sum_{i=1}^n x_i'(t) \right| \le \sum_{i=1}^n |x_i'(t)|$$

$$\le \|A(t)\| \; \|x(t)\| + \int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \|G(s,x(s))\| ds$$

olduğu görülür. Son eşitsizliklerden,

$$-\|A(t)\| \; \|x(t)\| \le \int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \|G(s,x(s)\| ds - \|x'(t)\|$$

olduğu açıktır. Şimdi ise

$$k_3 > 1, k_3 |a(t)| \geq \|A(t)\|$$

eşitsizliği göz önüne alındığında

$$k_3 > 1, k_3 a(t) \leq -\|A(t)\|$$

olduğu görülür. Buna bağlı olarak

$$k_3 a(t)\|x(t)\| \leq \int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \|G(s,x(s)\|)ds - \|x'(t)\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ise k pozitif sabiti ile çarpıldığında

$$kk_3 a(t)\|x(t)\| \leq k\int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \|G(s,x(s)\|)ds - k\|x'(t)\|, \; k > 0$$

yazılır. Böylece

$$kk_3 a(t)\|x(t)\| \leq k\alpha\int_0^t \|K(t,s)\| \|x(s)\|ds - k\|x'(t)\|$$

elde edilir. Burada

$$k = \frac{k_1 - 1}{4k_3} > 0$$

verilmektedir.

Şimdi ise bir $W_2 = W_2(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelini

$$W_2 = (1 + kk_3)\|x\| + k_1 \int_0^t \int_t^\infty \|C(u,s,x(s))\|du \; \|G(s,x(s))\| ds \tag{5.6}$$

ile tanımlayalım.

$C(u,s,0) = 0$ ve $G(s,0) = 0$ hipotezlerinden kolaylıkla

$$W_2(t,0) = 0, \; W_2(t,x(.)) \geq (1 + kk_3)\|x\|, \; k > 0, \; k_3 > 0, \; k, \; k_3 \in \Re$$

yazılır. Şimdi ise (5.6) ile verilen $W_2(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelinin (5.2) VİDD sisteminin çözümleri boyunca türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt} W_2^+(t,x(.)) = (1 + kk_3)\sum_{i=1}^n x_i'(t) \operatorname{sgn} x_i(t+0)$$
$$+ k_1 \|G(t,x(t))\| \int_t^\infty \|C(u,t,x(t))\| du$$
$$- k_1 \int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \; \|G(s,x(s))\| ds$$

elde edilir. Böylece bu eşitsizlikle, Teorem 5.2'nin şartı ve

$$kk_3 a(t)\|x(t)\| \le k\int_0^t \|C(t,s,x(s))\|\|G(s,x(s)\|)ds - k\|x'(t)\|$$

ve

$$1 + 2kk_3 - k_1 < 0 \text{ ve } k = \frac{k_1 - 1}{4k_3} > 0$$

eşitsizlikleri yardımıyla

$$\frac{d}{dt}W_2^+(t,x(.)) \le (1+kk_3)[a(t)\|x(t)\| + \int_0^t \|C(t,s,x(s))\|\|G(s,x(s))\|ds]$$

$$+k_1\|G(t,x(t))\|\int_t^\infty \|C(u,t,x(t))\|du$$

$$-k_1\int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \ \|G(s,x(s))\|ds$$

$$\le a(t)\|x(t)\| + k_1\|G(t,x(t))\|\int_t^\infty \|C(u,t,x(t))\|du$$

$$+(1+2kk_3 - k_1)\int_0^t \|C(t,s,x(s))\| \ \|G(s,x(s))\|ds - k\|x'(t)\|$$

$$\le [a(t) + k_1\alpha\int_t^\infty \|K(u,t)\|du]\|x(t)\| - k\|x'(t)\|$$

$$\le -\delta_2\|x(t)\| - k\|x'(t)\|$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, yani

$$\frac{d}{dt}W_2^+(t,x(.)) \le -\delta_2\|x(t)\| - k\|x'(t)\|$$

eşitsizliği (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olmasını gerektirir.

Ayrıca, bu sonuç, $W_2(t,x(.))$ 'nin azalan bir fonksiyonel olduğunu gösterir.

Şimdi ise bir önceki eşitsizliğin . t_0 'dan t 'ye integrali alınırsa,

$$W_2(t,x(.)) - W_2(t_0,\phi(t_0)) \le -\delta_2\int_{t_0}^t \|x(s)\|ds - k\int_{t_0}^t \|x'(s)\|ds$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ise

$$\delta_2\int_{t_0}^t \|x(s)\|ds + k\int_{t_0}^t \|x'(s)\|ds \le W_2(t_0,\phi(t_0)) - W_2(t,x(.)) \le W_2(t_0,\phi(t_0))$$

olarak düzenlenebilir. Şimdi ise

$$W_2(t_0,\phi(t_0)) = K_0, K_0 > 0, K_0 \in \Re$$

olsun. Bu takdirde,

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x(s)\|ds<\delta_2^{-1}K_0$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\|x'(s)\|ds<k^{-1}K_0$$

yazılabilir. Böylece (5.2) VİDD sisteminin tüm çözümleri ve bu çözümlerin türevleri integrallenebilirdir yani, $x(t)\in L^1[0,\infty)$ ve $x'(t)\in L^1[0,\infty)$ olur. Bu ise Teorem 5.2'nin ispatı tamamlanır.

Uyarı 5.2 $(A1)$ ve $(A3)$ şartları altında, (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü kararlıdır.

C. Varsayımlar

$(A4)$ L_0,α ve δ_1 pozitif sabitleri vardır öyle ki aşağıdaki

$$\|C(u,t,x(t))\|\le\|K(u,t)\|,\ \int_t^{\infty}\|K(u,t)\|du<\infty,\ \int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|K(u,s)\|duds\le L_0$$

ve

$$a(t)+\alpha\int_t^{\infty}\|K(u,t)\|du\le-\delta_1$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 5.3 Eğer $(A1)$ ve $(A4)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

İspat Teorem 5.1'in ispatı ışığında, (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün kararlı olduğunu kolaylıkla gösterilebilir. Şimdi ise (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün düzgün kararlılığını gösterelim.

$x\in\Re^n$ ve $|x|$ ise herhangi bir norm ve C ise $\|\phi\|_{t_0}=\sup_{t_0-\tau\le t\le t_0}|\phi(t)|$ olmak üzere ile $\phi:[t_0-\tau,t_0]\to\Re^n$ tanımlı sürekli fonksiyonlarının bir Banach uzayı olsun.

$x(t)=x(t,t_0,\phi)$ ifadesi $[t_0-\tau,\beta),\beta>0,$ aralığında (5.2) VİDD sisteminin bir çözümü olsun öyle ki $t\in[t_0-\tau,t_0],\,t_0\ge0,$ olmak üzere $x(t)=\phi(t)$ dir. Burada ϕ bir başlangıç fonksiyonu ve $\phi\in C[t_0-\tau,t_0].$ Buna bağlı olarak, $W_1(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli azalan olduğundan, (5.3) Lyapunov fonksiyoneli ve (A_4) hipotezinden

$$\|x(t,t_0,\phi)\| \le W_1(t,x(.)) \le W_1(t_0,\phi(t_0))$$

$$\le \|\phi(t_0)\| + \int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|C(u,s,\phi(t_0))\| du \|G(s,\phi(t_0))\| ds$$

$$\le \|\phi(t_0)\| + \alpha\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|K(u,s)\| du \|\phi(s)\| ds$$

$$\le (1+\alpha L_0)\|\phi(t_0)\|$$

elde edilir.

(5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü kararlı olduğundan, kararlılık tanımı kullanıldığında $\forall\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \left(\dfrac{1}{1+\alpha L_0}\right)\dfrac{\varepsilon}{2}$ sabiti seçilebilir öyle ki $t \in [t_0-\tau, t_0]$

$t \in [t_0-\tau, t_0]$ için $\|\phi(t)\| < \delta$ iken $\forall t \ge t_0$ için

$$\|x(t,t_0,\phi)\| \le (1+\alpha L_0)\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Buradaki δ sabitinin t_0 'dan bağımsız olduğundan yani sadece δ sabiti ε 'na bağlı olduğundan (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlı olduğu sonucuna varabiliriz. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

D. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

$(A5)$ L_1, α, k_1 ve δ_2 pozitif sabitleri olmak üzere

$$\|C(u,t,x(t))\| \le \|K(u,t)\|,$$

$$\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} \|K(u,s)\| du \|\phi(s)\| ds \le L_1$$

ve

$$a(t) + k_1\alpha\int_t^{\infty} \|K(u,t)\| du \le -\delta_2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 5.4 Eğer $(A1)$ ve $(A5)$ şartları sağlanırsa, bu takdirde (5.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

İspat Teorem 5.4’ün ispatı, Teorem 5.3’ün ispatına benzer olduğu için ispatın detaylarını burada verilmeyecektir.

Örnek 5.1 (5.2) VİDD sisteminin özel bir hali olarak, aşağıdaki lineer olmayan

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5\exp(2t) & \exp(3t) \\ 1+\exp(2t) & -2\exp(t)-\exp(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t \begin{pmatrix} \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) & 0 \\ \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\sin s & 2\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} (1+s^2+x_1^2(s))^{-1}x_1(s) \\ (1+s^2+x_2^2(s))^{-1}x_2(s) \end{pmatrix} ds \tag{5.7}$$

VİDD’yi göz önüne alalım. Burada, $t \geq 0$ ve $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = x(t) = x \in \Re^2$ ’dır.

$x(t) = x(t, t_0, \phi)$ ifadesi $[t_0 - \tau, \infty)$ aralığında (5.7) VİDD sisteminin bir çözümü olsun öyle ki $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ için $x(t) = \phi(t)$ olsun. Burada $\phi : [t_0 - \tau, t_0] \to \Re^2$ sürekli bir başlangıç fonksiyonudur. $\phi \in C[0, t_0]$ olmak üzere $|\phi|_{t_0} := \sup\{|\phi(t)| : 0 \leq t \leq t_0\}$ normu olarak tanımlanmaktadır.

Bu denklemi (5.7) VİDD ve (5.2) VİDD sistemleri ile karşılaştıralım. Bu takdirde,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-5\exp(2t) & \exp(3t) \\ 1+\exp(2t) & -2\exp(t)-\exp(3t) \end{pmatrix},$$

$$C(t, s, x(s)) = \begin{pmatrix} \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) & 0 \\ \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\sin s & 2\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) \end{pmatrix}$$

ve

$$G(s, x(s)) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1(s)}{1+s^2+x_1^2(s)} \\ \dfrac{x_2(s)}{1+s^2+x_2^2(s)} \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$a(t) = \max_{1 \leq j \leq n}\{a_{ii}(t) + \sum_{i=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}(t)|\}$$

$$= \max\{1-5\exp(2t)+1+\exp(2t), -2\exp(t)-\exp(3t)+\exp(3t)\}$$

$$= \max\{2-4\exp(2t), -2\exp(t)\}$$
$$= -2\exp(t)$$

ve

$$\|C(t,s,x(s))\| = \left\| \begin{pmatrix} \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) & 0 \\ \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\sin s & 2\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) \end{pmatrix} \right\|$$
$$= \max\{\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) + \exp(-2t-x_1^2(s)-x_2^2(s))|\sin s|,$$
$$2\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\}$$
$$= 2\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\} \le 2\exp(-2t+s)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Buna bağlı olarak

$$\|C(t,s,x(s))\| \le 2\exp(-2t+s) = \|K(t,s)\|$$

olduğu açıktır. Burada,

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} \exp(-2t+s) & 0 \\ \exp(-2t+s)\sin s & 2\exp(-2t+s) \end{pmatrix},$$

$$\|K(t,s)\| = 2\exp(-2t+s),\ 0 \le s \le t,$$

$$\|K(u,t)\| = 2\exp(-2u+t),\ 0 \le t \le u,$$

$$\int_t^\infty \|K(u,t)\|du = 2\int_t^\infty \exp(-2u+t)du = \exp(-t) \le 1,$$

yani,

$$\int_t^\infty \|K(u,t)\|du \le 1 < \infty,$$

$$\|G(s,x(s))\| = \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{x_1(s)}{1+s^2+x_1^2(s)} \\ \dfrac{x_2(s)}{1+s^2+x_2^2(s)} \end{pmatrix} \right\| \le \|x(s)\|,\ \alpha = 1,$$

$$a(t) + \alpha\int_t^\infty \|K(u,t)\|du = -2\exp(t) + \exp(-t)$$

dir. F fonksiyonu

$$F(t) = -2\exp(t) + \exp(-t),\ t \ge 0$$

olarak tanımlansın. F fonksiyonunun türevi alınır ise

$$F'(t) = -2\exp(t) - \exp(-t) < 0$$

olur. İlave olarak,

$$F(t) = -2\exp(t) + \exp(-t) \le -1,\ t \ge 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca, yukarıdaki bağıntıları göz önüne aldığımızda

$$a(t) + \alpha \int_t^\infty \|K(u,t)\| du = -2\exp(t) + \exp(-t) \le -1 = -\delta_1$$

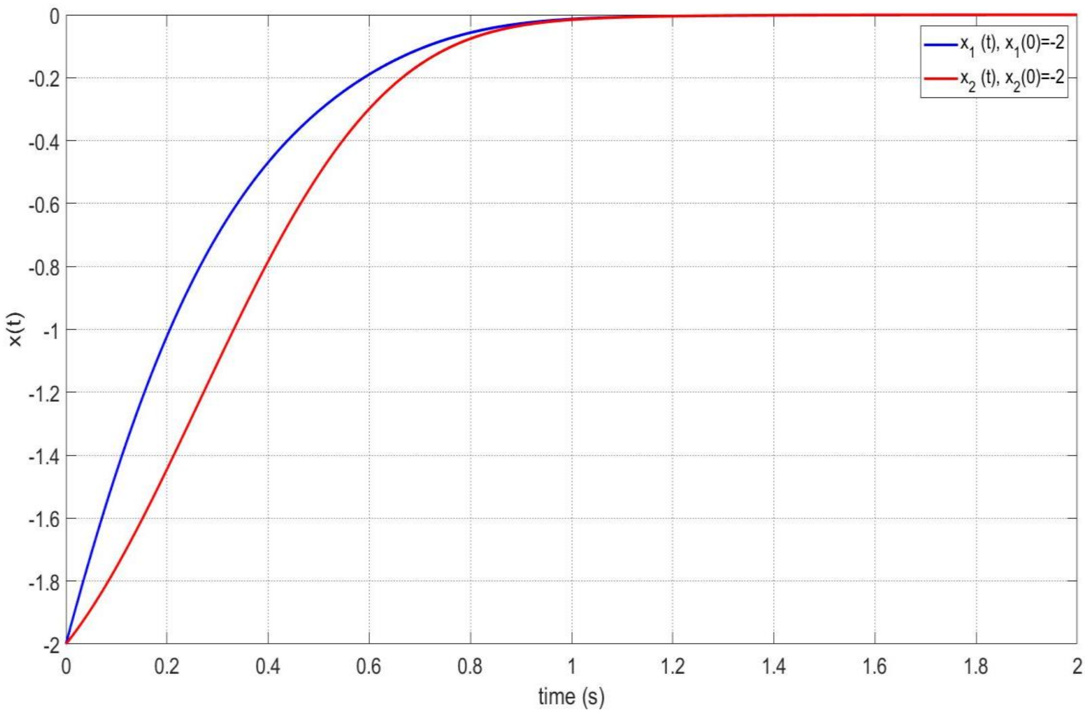
elde edilir. Bu durumda, Teorem 5.1' in tüm hipotezleri sağlandığı görülür, yani $(A1)$ ve $(A2)$ sağlanır. Böylece (5.7) VİDD sisteminin sıfır çözümünün asimptotik olarak kararlı olduğu sonucuna varabiliriz. İlave olarak, (5.7) VİDD sisteminin tüm çözümleri integrallenebilir, yani, $x(t) \in L^1[0,\infty)$.

Ayrıca

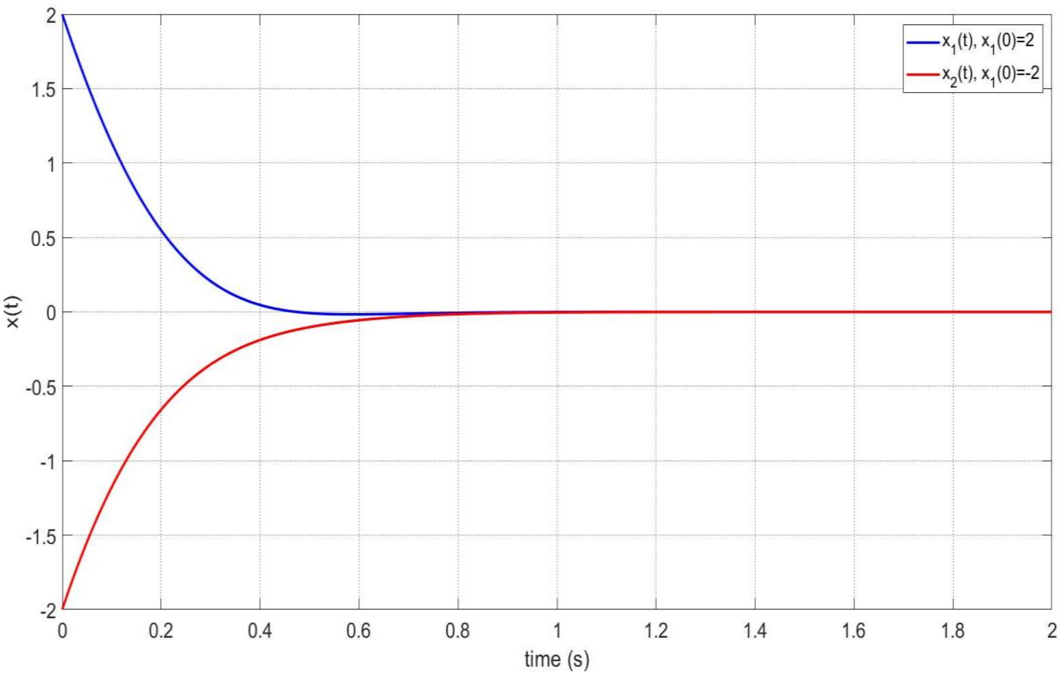
$$\int_0^{t_0}\int_{t_0}^\infty \|K(u,s)\| duds = 2\int_0^0\int_0^\infty \exp(-2u+s) duds = 0 < 1 = L_0$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 5.3'ün $(A1)$ ve $(A4)$ hipotezlerini sağladığı görülür. Böylece, (5.7) VİDD sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlı olur.

Sonuç olarak, verilen (5.7) VİDD için Teorem 5.2 ve Teorem 5.4'ün tüm hipotezlerinin sağlandığı gösterilebilir. Burada ilgili işlemlerin detayları verilmeyecektir.



Şekil 5.1 (5.7) VİDD sisteminin çözümlerinin yörüngelerinin davranışlar $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = -2$.



Şekil 5.2 (5.7) VİDD sisteminin çözümlerinin yörüngelerinin davranışları, $x_1(0)=2$, $x_2(0)=-2$.

5.2. Çözümlerin Sınırlılığı

$H(t,x,x(t-\tau))\neq 0$ olsun.

D. Varsayımlar

$(A6)$ $\|H(t,x(t),x(t-\tau))\|\leq |p(t)|\|x\|$

eşitsizliği sağlanır. Burada, p sürekli bir fonksiyon ve bu fonksiyon $|p(t)|\in L^1[0,\infty)$ için yani,

$$\int_0^\infty |p(s)|ds<\infty$$

şartı sağlanır. Burada $L^1[0,\infty)$ sembolü $[0,\infty)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır.

Teorem 5.5 $(A1)$, $(A2)$ ve $(A6)$ hipotezleri sağlanır ise, bu takdirde (5.2) VİDD sisteminin tüm çözümleri $t\to\infty$ için sınırlıdır.

İspat Bu teoremin ispatında (5.3) ile verilen $W_1=W_1(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır. W_1 Lyapunov fonksiyonelinin, (5.2) VİDD sisteminin çözümleri boyunca türevi alındığında, $H(t,x,x(t-\tau))\neq 0$, olması nedeni ile $(A1)$, $(A2)$ ve $(A6)$ hipotezleri dikkate alındığında

$$\frac{d}{dt}W_1^+(t,x(.))\leq |p(t)|\|x\|\leq |p(t)|W_1(t,x(.))$$

elde edilir. Son eşitsizliğin t_0 ’dan t ’ye integrali alındığında,

$$W_1(t,x(t))\leq W_1(t_0,\phi(t_0))\exp[\int_{t_0}^{t}|p(s)|ds]\leq W_1(t_0,\phi(t_0))\exp[\int_{t_0}^{\infty}|p(s)|ds]$$

bulunur. Şimdi ise

$$W_1(t_0,\phi(t_0))=M_0, M_0>0, M_0\in\Re,$$

ve

$$\|x\|\leq W_1(t,x(.)),$$

mevcut olan eşitsizliklerinden,

$$\|x(t)\|\leq W_1(t,x(t)))\leq M_0\exp(\int_0^{\infty}p(s)ds)=M_1,$$

yazılabilir. Burada $M_1=M_0\int_{t_0}^{\infty}p(s)ds, M_1>0, M_1\in\Re$ ’dir.

Böylece,

$$\|x(t)\|\leq M_1$$

elde edilir. Bunun sonucu olarakta (5.2) VİDD sisteminin tüm çözümlerinin $t\to\infty$ için sınırlı olduğu sonucuna varılır.

Teorem 5.6 $(A1)$, $(A3)$ ve $(A6)$ hipotezleri sağlanır ise, bu takdirde $t\to\infty$ için (5.2) VİDD sisteminin tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat Bu teoremin ispatı Teorem 5.3'ün ispatına benzer olduğu için burada verilmeyecektir.

Örnek 5.2 Örnek 5.1’deki (5.7) VİDD sistemini $H(t,x(t),x(t-\tau))\neq 0$ ve

$$H(t,x(t),x(t-\tau))=\begin{pmatrix}(1+t^2+x_1^2(t-1)+x_2^2(t-1))^{-1}\sin\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}\\ 2(1+t^2+x_1^2(t)+x_2^2(t))^{-1}(x_1(t-1)+x_2(t-1))\end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-5\exp(2t) & \exp(3t)\\ 1+\exp(2t) & -2\exp(t)-\exp(3t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix}\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s)) & 0\\ \exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\sin s & 2\exp(-2t+s-x_1^2(s)-x_2^2(s))\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}(1+s^2+x_1^2(s))^{-1}x_1(s)\\(1+s^2+x_2^2(s))^{-1}x_2(s)\end{pmatrix}ds$$

$$+\begin{pmatrix}(1+t^2+x_1^2(t-1)+x_2^2(t-1))^{-1}\sin\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}\\(1+t^2+x_1^2(t)+x_2^2(t))^{-1}\sqrt{2|x_1(t)x_2(t)|}\end{pmatrix} \tag{5.8}$$

göz önüne alalım. Burada $t\geq 0$ ve $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\Re^2$ 'dir.

Bu durumda,

$$\|H(t,x(t),x(t-\tau))\|\leq\frac{2\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}}{1+t^2+x_1^2(t-1)+x_2^2(t-1)}$$

$$\leq\frac{2\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}}{1+t^2}$$

$$\leq\frac{2}{1+t^2}\|x\|=|p(t)|\|x\|$$

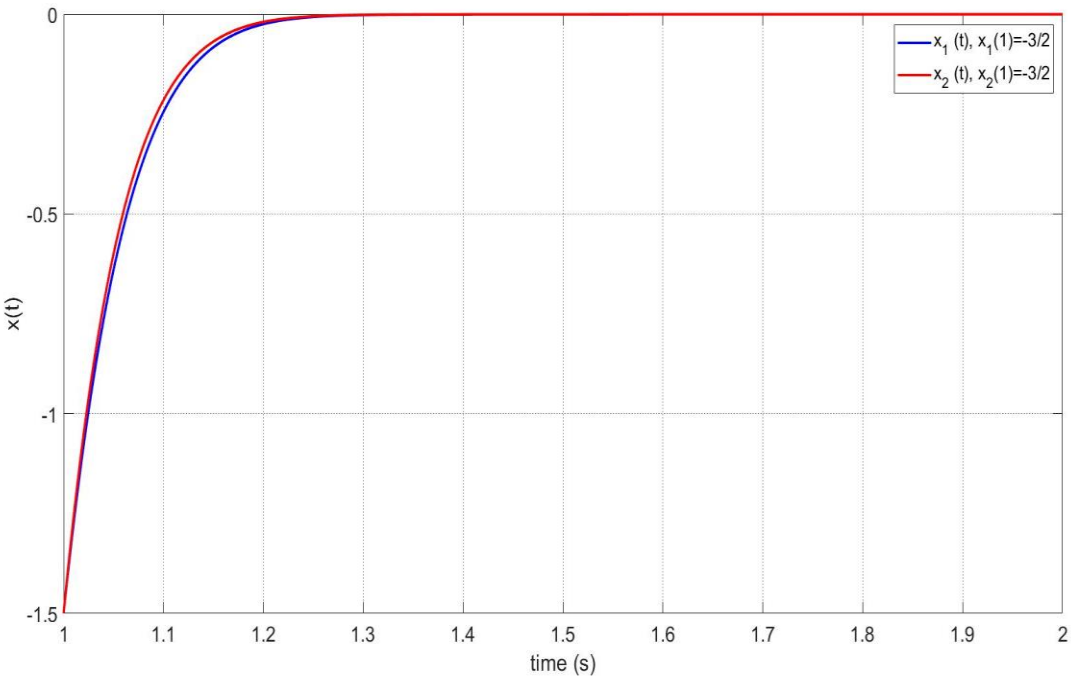
elde edilir. $[0,\infty)$, aralığında $|p(t)|$ fonksiyonunun integrali alındığında

$$\int_0^\infty|p(s)|ds=\int_0^\infty\frac{2}{1+s^2}dt=\pi$$

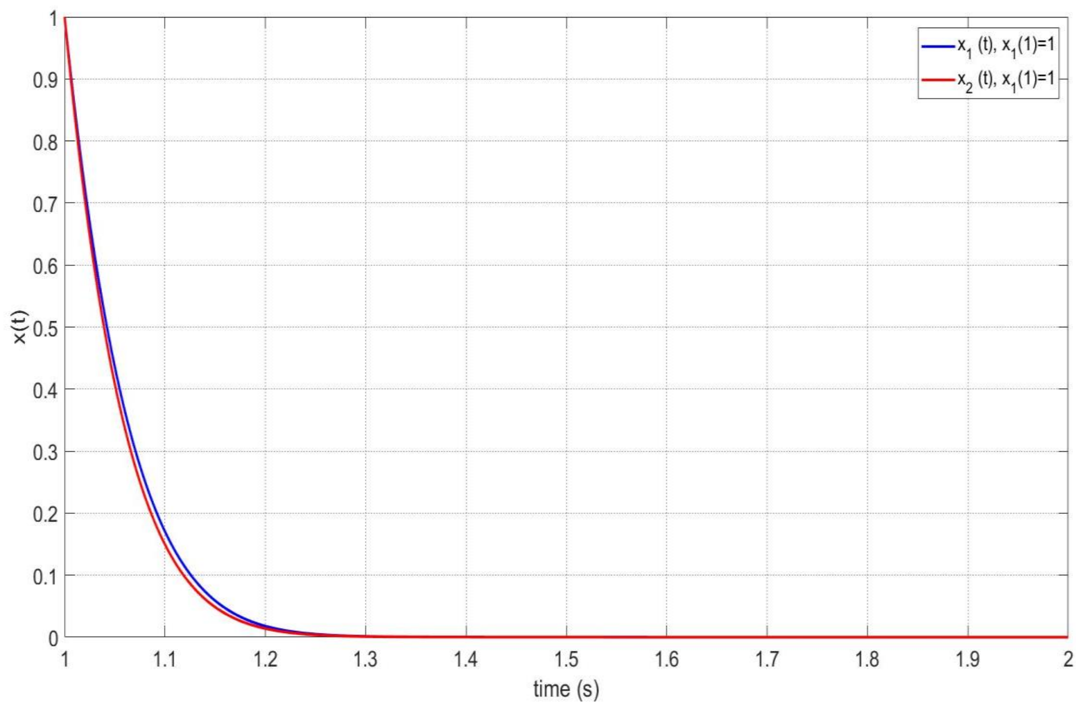
elde edilir. Böylece, $|p(t)|\in L^1(0,\infty)$ olduğu açıktır.

Buna bağlı olarak $(A1)$, $(A2)$ ve $(A6)$ hipotezlerinin ve Teorem 5.5'in sağlandığı görülür. Bu nedenle, verilen (5.8) VİDD sisteminin tüm çözümlerinin $t\to\infty$ için sınırlı olduğu sonucuna varılır.

Benzer biçimde, Teorem 5.6'nın tüm hipotezlerinin verilen VİDD sistemi için sağlandığını gösterebilir. Burada, ilgili işlemlerin detayları verilmeyecektir.



Şekil 5.3 (5.8) VİDD sisteminin çözümlerinin yörüngelerinin davranışları, $x_1(1) = -\frac{3}{2}$, $x_2(1) = -\frac{3}{2}$.



Şekil 5.4 (5.8) VİDD sisteminin çözümlerinin yörüngelerinin davranışları, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Sonuç

Wang (1998) lineer gecikmesiz (5.1) VİDD'ni ele aldı. Bu denklemin çözümleri için kararlılık ve asimptotik kararlılığı ile ilgili iki teorem ispatladı. Biz ise bu bölümde sabit gecikmeli lineer olmayan (5.2) VİDD'mini ele aldık ve Wang (1998)'in sonuçlarına ilave olarak (5.2) VİDD'ni sıfır çözümünün kararlılığı, asimptotik karalılığı, düzgün karalılığı ve $t \to \infty$ için tüm çözümlerinin sınırlılığı ile ilgili altı teorem ispatladı. Bu teoremleri ispatlamak için yeni bir Lyapunov fonksiyoneli tanımlandı. Ayrıca bu tür teoremlerin ispatlamasında literatürde genel olarak kullanılan Gronwall eşitsizliği burada kullanılmadı. Elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için iki örnek verildi ve bu örneklerin grafikleri çizildi.

6. SABİT GECİKMELİ SKALER BİR VİDD İÇİN ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZLERİ

Xu (1998), sonsuz gecikmeli,

$$x' = a(t)x + \int_{-\infty}^{t} D(t,s)x(s)ds \tag{6.1}$$

skaler lineer VİDD' nin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlılığını Lyapunov'un ikinci metodu yardımıyla inceledi. Konuyla ilgili yeter şartlar içeren bir teorem ispatladı.

Bu bölümde Xu (1998) ve ilgili literatürdeki çalışmalar dikkate alınarak aşağıda verilen lineer olmayan sabit gecikmeli birinci mertebeden VİDD' mi ele alınmaktadır:

$$x'(t) = -\,a(t)g_1(t,x(t)) + \int_{t-\tau}^{t} D(t,s)g_2(s,x(s))ds + f(t,x(t)), \tag{6.2}$$

$$x(t_0+\theta) = \phi_0(\theta), \theta \in [-\tau,0], x(t_0^+) = \phi_0(0), \phi_0 \in C([-\tau,0],\Re).$$

Burada, $x \in \Re$, $\Re = (-\infty,\infty)$, $\tau > 0$, $\tau \in \Re$, $a(t): \Re^+ \to (0,\infty)$, $g_1 : \Re^+ \times \Re \to \Re$, $g_1(t,0) = 0$, $\Re^+ = [0,\infty)$, g_2, f $\Re^+ \times \Re \to \Re$, $g_2(s,0) = 0$, ve $D \in C(\Re^+ \times \Re^+, \Re)$, $s \le t$, sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, g_1 fonksiyonu türevlenebilirdir. Bu kabuller altında (6.2) VİDD'mi $f(t,x(t)) = 0$ olmak kaydıyla $x(t) \equiv 0$ çözümüne sahip olur.

Şimdi x değişkenine göre sürekli türevlenebilir bir g_0 fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$g_0(t,x) = \begin{cases} \dfrac{g_1(t,x)}{x}, & x \ne 0 \\ \dfrac{\partial g_1(t,0)}{\partial x}, & x = 0. \end{cases}$$

Böylece, VİDD (6.2) aşağıdaki

$$x'(t) = -\,a(t)g_0(t,x)x + \int_{t-\tau}^{t} D(t,s)g_2(s,x(s))ds + f(t,x), t > t_0$$

şeklinde düzenlenebilir.

Burada, gösterimde kolaylık olması açısından x, $x(t)$ 'yi temsil eder.

(6.1) VİDD' nin lineer olduğu görülmektedir. Ancak bizim denklemimiz olan (6.2) VİDD lineer değildir. Bu, lineer durumdan lineer olmayan duruma doğru bir gelişmedir. Yukarıdaki integralin alt sınırındaki $-\infty$ yerine amaca yönelik olarak $t-\tau$ alınmaktadır. Bu durumda sonsuz gecikme yerine sınırlı ve sabit gecikme alınmaktadır. Verilen integrallerin alt sınırları dikkate alınmadığında (6.2) VİDD'nin (6.1) VİDD'yi kapsadığı görülebilir. Gerçekten, bu durum da $g_1(t,x) = -x$, $g_2(s,x(s)) = x(s)$ ve $f(t,x(t)) = 0$, olduğunda (6.2) VİDD, Xu (1998) tarafından incelenen (6.1) VİDD'ye indirgenir. Söz konusu bu çalışma ile ilgili literatüre bir katkı sağlanmaktadır.

Xu (1998), sonsuz gecikmeli skaler lineer (6.1) VİDD'nin sıfır çözümünün sadece düzgün asimptotik kararlılığını çalışmıştır. Bununla birlikte, burada yapılacak olan çalışma ile çözümlerin düzgün asimptotik kararlılığına ek olarak, uygun bir Lyapunov fonksiyonu yardımı ile çözümün sınırlılığını ve kare integrallenebilirliği incelenecektir. Burada elde edilecek sonuçlar bu konu ile ilgili literatüre bir katkı olarak düşünülebilir. Sonuç olarak buradaki sonuçların elde etmek için genelde kullanılan Gronwall eşitsizliği kullanılmamaktadır. Bu eşitsizliğin kullanılmamasının avantajı ise ek olarak gelebilecek kısıtlayıcı bazı şartlar olmaksızın ilgili sonuçların elde edilmesidir. Belirtilmelidir ki Xu (1998)'den farklı olarak çok basit bir Lyapunov fonksiyonu alınarak Razumikhin metodu yardımıyla buradaki sonuçlar ispatlanacaktır. Razumikhin metodu literatürde bu tür problemlerin incelenmesinde nadiren kullanılmaktadır. Burada uygun Lyapunov fonksiyoneli yerine basit bir Lyapunov fonksiyonu kullanımı ve Razumikhin metodundan etkin bir şekilde faydalanılması bir bakıma çalışmanın Xu (1998)'den farkını gösterir.

Herhangi bir $t_0 \geq 0$ ve $\phi \in [t_0 - \tau, t_0]$, için, ϕ başlangıç fonksiyonu, $x(t) = x(t, t_0, \phi)$, $(-\infty, \infty)$ da lineer olmayan (6.2) VİDD'nin bir çözümü olsun öyle ki $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında $x(t) = \phi(t)$ ' dir.

Burada, $[t_0 - \tau, t_0]$ ve $[t_0, \infty)$ aralığında tüm reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesi sırasıyla $C[t_0 - \tau, t_0]$ ve $C[t_0, \infty)$ ile gösterilmektedir.

Varsayalım ki $\phi \in C[t_0 - \tau, t_0]$, için, $|\phi|_{t_0} := \sup\{|\phi(t)| : t_0 - \tau \leq t \leq t_0\}$ olsun.

6.1 Çözümlerin Niteliksel Analizi

(6.2) denkleminde $f(t,x) = 0$ alalım. Lineer olmayan (6.2) VİDD'nin çözümlerinin niteliksel davranışları için bazı varsayımlar aşağıda verilmektedir.

A. Varsayımlar

$(A1)$ α_0 pozitif bir sabit olmak üzere $\forall t \in \Re^+$ ve $\forall x \in \Re$ için,

$$g_2(t,0) = 0, |g_2(t,x)| \leq \alpha_0 |x|$$

dır.

$(A2)\quad \int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds < \infty$

ve k_1 pozitif sabit olmak üzere $\forall t \in \Re^+, \forall x \in \Re$ için

$$2a(t)g_0(t,x) - (1+\alpha_0^2)\int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds \geq k_1$$

dır.

İlk olarak $f(t,x)=0$ kabulü için yukardaki şartlar altında lineer olmayan (6.2) VİDD' nin sıfır çözümü için düzgün asimptotik kararlılık ve tüm çözümleri için ise sınırlılık ve kare integrallenebilirliği için yeter şartlar içeren aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 6.1 Eğer $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (6.2) VİDD' nin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır ve $t \to \infty$ için tüm çözümleri sınırlı ve kare integrallenebilirdir.

İspat Bir $V = V(t,x)$ Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V(t,x) = x^2$$

tanımlayalım. Burada, $V(t,x)$ pozitif tanımlı ve sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur.

Açıkça,

$$V(t,0) = 0$$

ve

$$V = V(t,x) \geq k_0 x^2,\ 0 < k_0 \leq 1,\ k_0 \in \Re$$

yazılabilir. (6.2) VİDD' nin çözümleri boyunca V Lyapunov fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$\dot{V} = 2xx' = 2x[-a(t)g_0(t,x)x + \int_{t-\tau}^{t} D(t,s)g_2(s,x(s))ds]$$

$$= -2a(t)g_0(t,x)x^2(t) + 2x(t)\int_{t-\tau}^{t} D(t,s)g_2(s,x(s))ds$$

elde edilebilir. Buradan, $2|mn| \leq m^2 + n^2$ eşitsizliği yardımıyla

$$\dot{V} \leq -[2a(t)g_0(t,x)]x^2(t) + 2|x|\int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)||g_2(s,x(s))|ds$$

$$\leq -[2a(t)g_0(t,x)]x^2 + \int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|[x^2(t) + g_2^2(s,x(s))]ds$$

elde edilir. $(A1)$ şartı, yani

$$|g_2(t,x)| \leq \alpha_0 |x|$$

eşitsizliği kullanıldığında

$$\dot{V} \le -\,[2a(t)g_0(t,x) - \int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds]x^2(t) + \alpha_0^2 \int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,x^2(s)ds]$$

elde edilir. Şimdi ise gelecek olan adım için Razumikhin metodunu (Hristova ve Tunç, 2019) yani

$$V(t+s, x(t+s)) < V(t, x(t)), \forall s \in [-\tau, 0)$$

ifadesini ve buna bağlı olarak da

$$[x(t+s)]^2 < [x(t)]^2, \;\; \forall s \in [-\tau, 0)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Yukarıdaki son integrale $s - t = \xi$ dönüşümü uygulayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -\,[2a(t)g_0(t,x) - \int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds]x^2(t) + \alpha_0^2 \int_{-\tau}^{0} |D(t,t+\xi)|\,x^2(t+\xi)d\xi \\ &\le -\,[2a(t)g_0(t,x) - \int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds]x^2(t) + \alpha_0^2 \int_{-\tau}^{0} |D(t,t+\xi)|\,x^2(t)d\xi\end{aligned}$$

yazılabilir. Tekrar benzer biçimde son integrale $t + \xi = s$ dönüşümü uygulandığında

$$\dot{V} \le -\,[2a(t)g_0(t,x) - (1+\alpha_0^2)\int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds]x^2(t)$$

elde edilir. $(A2)$ şartı yardımı ile, yani

$$\int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds < \infty$$

ve

$$2a(t)g_0(t,x) - (1+\alpha_0^2)\int_{t-\tau}^{t} |D(t,s)|\,ds \ge k_1$$

eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$\dot{V} \le -k_1 x^2$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik lineer olmayan (6.2) VİDD'nin sıfır çözümünün kararlı olduğunu gösterir.

Şimdi,

$$I_S \equiv \{x : \dot{V}(t,x) = 0\}$$

ile tanımlı cümleyi göz önüne alalım. Eğer LaSalle'in değişmezlik ilkesini uygulanır ise (bkz. Reissing), $x \in I_S$ olması $x = 0$ eşitliğini gerektirir. Bu noktadan hareket ile $x = 0$ ve lineer olmayan (6.2) VİDD birlikte göz önüne alındığında $f(t,x) = 0$ olması nedeni ile $x = 0$ ifadesi

(6.2) VİDD'de yerine bırakıldığında bu denklemden yeniden $x = 0$ olması gerektiği sonucunua varılır. Bu sonuç ise I_S 'de kapsanan içerdiği en geniş değişmezlik (invariant) cümlesinin 0 yani $0 \in I_S$ olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla, lineer olmayan (6.2) VİDD'nin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğu sonucuna varılır. Bu sonuç ise Teorem 6.1'in ispatını tamamlar.

Şimdi ise çözümlerin kare integrallenebilir olduğunu gösterelim. $\dot{V} \leq 0$ olduğu açıktır. Bu eşitsizliğin t_0 ' dan t 'ye integrali alınırsa $\forall t \geq t_0$ için

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0))$$

eşitsizliği elde edilir.

$$V(t, 0) = 0$$

ve $x(t_0) \neq 0$ iken

$$V(t_0, x(t_0)) = x^2(t_0) = K_0 > 0, K_0 \in \Re$$

olduğu açıktır. Yukarıdaki eşitsizlikler göz önünde bulundurulduğunda

$$k_0 x^2 \leq V(t, x(t)) = K_0$$

elde edilir. Buna bağlı olarak

$$|x(t)| \leq \sqrt{k_0^{-1} K_0}, \forall t \geq t_0$$

sonucuna varılır. Bu durumda, lineer olmayan (6.2) VİDD'nin $t \to \infty$ için tüm çözümlerinin sınırlı olduğu sonucuna varılır.

Öte yandan, $\dot{V} \leq -k_1 x^2$ eşitsizliğinin t_0 'dan t 'ye integrali alındığında

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) - k_1 \int_{t_0}^{t} x^2(s) ds$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$k_1 \int_{t_0}^{t} x^2(s) ds \leq V(t, x(t)) + k_1 \int_{t_0}^{t} x^2(s) ds \leq V(t_0, x(t_0)) = K_0$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$\int_{t_0}^{\infty} x^2(s) ds \leq k_1^{-1} K_0 < \infty$$

$x \in L^2[0, \infty)$ olduğu kolaylıkla gözlemlenir. Bu sonuç ile Teorem 6.1'in ispatını tamamlanır.

Şimdi ise $f(t, x) \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Bir sonraki teoremde $f(t, x) \neq 0$ olduğunda, lineer olmayan (6.2) VİDD'nin $t \to \infty$ için tüm çözümlerin sınırlı olduğunu göstereceğiz.

B. Varsayımlar

$(A3)$ Bir h sürekli fonksiyonu vardır öyle ki

$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{2}|h(t)||x|$$

ve $t \geq t_0$ için $|h(t)|$ integrallenebilir yani

$$\int_{t_0}^{\infty} |h(s)| ds < \infty$$

dır.

Teorem 6.2 Eğer $(A1)$ ve $(A3)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde $t \to \infty$ için lineer olmayan (6.2) VİDD'nin tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat Teorem 6.2'nin $(A1)-(A3)$ varsayımları sağlanır ise, bu takdirde verilen Lyapunov fonksiyonunun türevi $f(t,x) \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &\leq 2f(t,x)x \\ &\leq |h(t)|\, x^2 \\ &\leq |h(t)|\, V(t,x),\ V(t,x) \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitsizliğe bağlı olarak

$$\frac{dV(t,x)}{V(t,x)} \leq 2|h(t)|\, dt$$

olur. Son eşitsizliğin t_0'dan t'ye integrallenir ise

$$V(t,x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) \exp[\int_{t_0}^{t} |h(s)| ds]$$

elde edilir. Bu durumda,

$$V(t,x(t)) \leq x^2(t_0) \exp(\int_{t_0}^{\infty} |h(s)| ds)$$

elde edilir.

$$\int_{t_0}^{\infty} |h(s)|\, ds < \infty$$

olması nedeniyle

$$\int_{t_0}^{\infty} |h(s)|\, ds = h_0 < \infty$$

alınabilir. Böylece,

$$x^2(t_0)\exp(\int_{t_0}^{\infty}|h(s)|ds) = h_0K_0$$

olur. Bu sonuçlara bağlı olarak ise

$$x^2(t) \le V(t, x(t)) \le K$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, $t \to \infty$ için

$$|x(t)| \le \sqrt{K}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 6.2' nin ispatı tamamlanır.

Örnek 6.1 Aşağıdaki birinci mertebeden lineer olmayan VİDD'yi göz önüne alalım.

$$x' = -101x - \sin x + \frac{1}{100}\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))\frac{\sin x(s)}{20+s^2+x^2(s)}ds,\ t \ge 1. \tag{6.3}$$

Burada (6.3) VİDD ile (6.2) VİDD karşılaştırıldığında aşağıdaki ifadeler ve sonuçlar elde edilir:

$$a(t) = 1, g_1(t,x) = 100x + \sin x, \tau = 1,$$

$$g_0(t,x) = 101 + \frac{\sin x}{x} \ge 100,\ x \ne 0,$$

$$D(t,s) = \frac{1}{100}\exp(-(t-s)),\ t \ge s,$$

$$\int_{t-\tau}^{t}|D(t,s)|ds = \frac{1}{100}\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))ds = \frac{1}{100}(1-\frac{1}{e}) < 1 < \infty,$$

$$g_2(t,0) = 0, |g_2(t,x)| = \frac{|\sin x|}{20+s^2+x^2} \le \frac{|x|}{20+s^2+x^2} \le \frac{1}{20}|x|,\ \alpha_0 = \frac{1}{20}$$

ve

$$\begin{aligned}
&2a(t)g_0(t,x) - (1+\alpha_0^2)\int_{t-\tau}^{t}|D(t,s)|ds \\
&\ge 50 - (1+\frac{1}{400})\frac{1}{100}\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))dsds \\
&\ge 50 - (1+\frac{1}{400})\frac{1}{100}(1-\frac{1}{e}) \\
&= 50 - \frac{401}{40000}(1-\frac{1}{e}) \\
&\cong 49.9 = \rho > 0.
\end{aligned}$$

Şimdi,

$$v(t,x)=\frac{1}{2}x^2$$

Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım. Bu Lyapunov fonksiyonunun lineer olmayan (6.3) VİDD' nin çözümleri boyunca türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}v(t,x)=-101x^2-x\sin x+\frac{1}{100}x(t)\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))\frac{\sin x(s)}{20+s^2+x^2(s)}ds$$

elde edilir. Yukarıda verilen bağıntılar ve işlemler yardımıyla

$$\frac{d}{dt}v(t,x)\le-100x^2+\frac{1}{100}|x(t)|\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))\frac{|\sin x(s)|}{20+s^2+x^2(s)}ds$$

$$\le-100x^2+\frac{1}{2000}|x(t)|\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))|\sin x(s)|ds$$

$$\le-100x^2+\frac{1}{2000}|x(t)|\int_{t-1}^{t}\exp(-(t-s))|x(s)|ds$$

$$\le-100x^2+\frac{1}{1000}\int_{t-1}^{t}2|x(t)||x(s)|ds$$

$$\le-100x^2+\frac{1}{1000}\int_{t-1}^{t}[x^2(t)+x^2(s)]ds$$

$$\le-[100-\frac{1}{1000}]x^2(t)+\frac{1}{1000}\int_{t-1}^{t}x^2(s)ds$$

$$\le-(99{,}999)x^2(t)+\frac{1}{1000}\int_{t-1}^{t}x^2(s)ds$$

eşitsizliği elde edilir. Razumikhin metodu göz önüne alındığında, ilgili yöntemden dolayı

$$v(t+s,x(t+s))<v(t,x(t)),\forall s\in[-\tau,0)$$

olması nedeniyle

$$\frac{1}{2}[x(t+s)]^2<\frac{1}{2}[x(t)]^2,\ \ \forall s\in[-\tau,0)$$

olduğu görülür.

$$\int_{t-1}^{t}x^2(s)ds$$

integraline $s-t=\xi$ dönüşümü uygulandığında

$$\frac{d}{dt}v(t,x)\le-\ (99{,}999)x^2(t)+\frac{1}{1000}\int_{-1}^{0}x^2(t+\xi)d\xi$$

$$\leq -\ (99{,}999)x^2(t) + \frac{1}{1000}\int_{-1}^{0} x^2(t)d\xi$$

$$= -\ [(99{,}999) - \frac{1}{1000}]x^2(t)$$

$$= -\ (98{,}999)x^2(t) \leq 0 \tag{6.4}$$

sonucuna varılır. Elde edilen eşitsizlik ve Lyapunov fonksiyonunun pozitif tanımlı olması nedeniyle, lineer olmayan (6.3) VİDD'nin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğu sonucuna varılır. Aynı zamanda, düzgün asimptotik kararlıdır.

Gerçekten son eşitsizlikten,

$$\frac{d}{dt}v(t,x(t)) \leq -(98.999)x^2(t) = -(49,4995)v(t,x(t))$$

yazılabilir. Buradan t_0 'dan t 'ye bu eşitsizliğin integrali alınırsa,

$$v(t,x(.)) \leq v(t_0,\phi(t_0))\exp[-(49,4995)(t-t_0)],\ t \geq t_0$$

elde edilir.

$0 < k < \frac{1}{2}$ olsun ve

$$v(t_0,\phi(t_0)) = k_0, k_0 > 0, k_0 \in \Re$$

alalım. Bu durumda, verilen Lyapunov fonksiyonu ve son işlemle göz önüne alındığında

$$k\left|x(t,t_0,\phi)\right|^2 \leq v(t,x(.)) \leq v(t_0,\phi(t_0))\exp[-(49,4995)(t-t_0)],\ t \geq t_0$$

elde edilir. Kolaylıkla

$$\left|x(t,t_0,\phi)\right| \leq \sqrt{k_0 k^{-1}\exp[-(49,4995)(t-t_0)]},\ t \geq t_0$$

olduğu görülür. Son eşitsizliğin $t \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty}\left|x(t,t_0,\phi)\right| \leq \lim_{t\to\infty}\sqrt{k_0 k^{-1}\exp(-\rho(t-t_0))} = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{t\to\infty}\left|x(t,t_0,\phi)\right| = 0$$

olur. Böylece (6.2) VİDD'nin sıfır çözümünün asimptotik kararlılı olduğunu sonucuna varılır. Ayrıca, lineer olmayan (6.3) VİDD'nin sıfır çözümünün de aynı şekilde asimptotik kararlı olduğu gösterilebilir.

Ayrıca, bu sonuçlara ek olarak, $v(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyonu azalan olduğu bilinmektedir. (6.4) ifadesinin t_0 ' dan t ' ye integrali alınır ise

$$v(t,x(.)) - v(t_0,\phi(t_0)) \le -\rho \int_{t_0}^{t} x^2(s)ds$$

olur. Bu eşitsizlik yeniden düzenlenir ve verilen $v(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyonunun azalan olduğu dikkate alınır ise

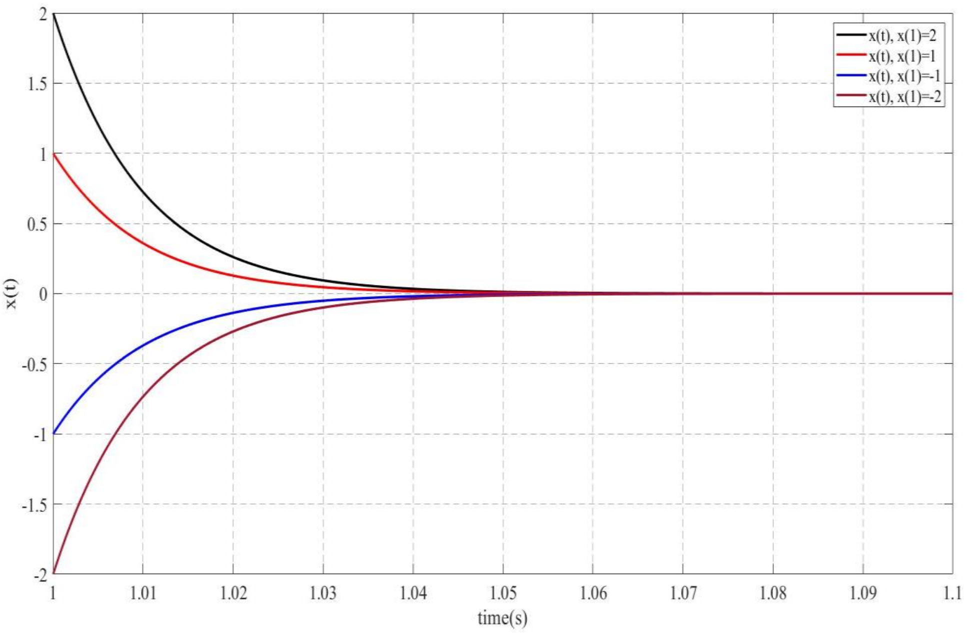
$$\int_{t_0}^{t} x^2(s)ds \le \rho^{-1}v(t_0,\phi(t_0)) - \rho^{-1}v(t,x(.))$$

$$\le \rho^{-1}v(t_0,\phi(t_0)) = k_0\rho^{-1}$$

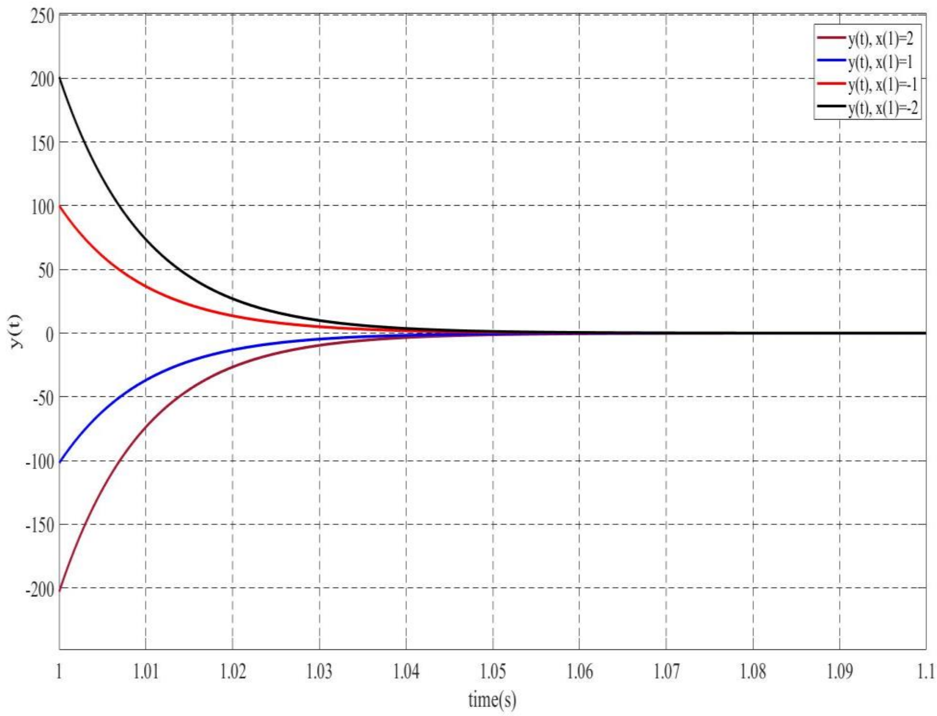
yazılabilir. Bu durumda,

$$\int_{t_0}^{\infty} x^2(s)ds \le \rho^{-1}k_0 < \infty$$

sonucuna kolaylıkla varılabilir. Bu nedenle lineer olmayan (6.3) VİDD'nin tüm çözümleri kare integrallenebilirdir.



Şekil 6.1 (6.3) VİDD'nin $\tau = 1$ için $x(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.



Şekil 6.2 (6.3) VİDD'nin $\tau = 1$ için $x(t)$ çözümünün $x'(t) = y(t)$ türevinin yörüngelerinin davranışları.

Uyarı İlgili literatürde, gerek adi diferansiyel denklemler, gerekse fonksiyonel diferansiyel denklemler, integral ve integro diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarına ait sonuçlar yani çözümlerin kararlılık, kararsızlık, yakınsaklık, çözümlerin global varlık, sınırlılık, vb. gibi niteliksel davranışları ile ilgili sonuçlara bakıldığında, bu davranışları incelemek için ilgili denklemleri çözmeksizin Lyapunov'un ikinci yönteminin etkin bir biçimde kullanıldığı ancak Razumikhin metodunun pek kullanılmadığı kolaylıkla görülebilir. Lyapunov yönteminin kullanılması sırasında uygun bir Lyapunov fonksiyon veya fonksiyonelinin tanımlanması veya inşa edilmesi gerekmektedir. Bu fonksiyon veya fonksiyonelinin pozitif tanımlı olması, karalılık sonuçları için ise türevinin negatif veya negatif yarı tanımlı olması, karasızlık için ise türevin pozitif veya pozitif yarı tanımlı olması gerekir. Şayet inceleme altındaki denklemin türüne göre uygun bir fonksiyon veya fonksiyonel kullanılır ise denklemi çözmeksizin söz konusu olan denklemin çözümlerinin niteliksel davranışları hakkında bilgi sahibi olunabilir. Literatürdeki sonuçların genelinde ispatlarda Gronwall eşitsizliğinin kullanıldığı fakat Razumikhin metodunun kullanılmadığı görülebilir. Buradaki çalışmada verilen denklem gecikmeli olmasına rağmen Lyapunov fonksiyoneli yerine Lyapunov fonksiyonu kullanıldı. Ayrıca, tüm sonuçların ispatında Gronwall eşitsizliği kullanılmadan ispatlar yapıldı. İlave olarak Razumikhin metodunun kullanılması sonuçların elde edilmesinde olumlu bir etki sağlamış oldu. Bir bakıma burada elde edilen sonuçlar literatürde geçen ilgili sonuçların daha az kısıtlayıcı şartlar altında elde edilmesine imkan vermektedir. Bu durum ise gerek Lyapunov fonksiyonunun burada çok sade seçilmesi ve gerekse Razumikhin metodunun kullanılmasının olumlu katkısından kaynaklanmaktadır. Bu ise yapılan çalışmanın önemini sergilemektedir.

Sonuç

1^0) Xu (1998)'in çalışmasındaki (6.1) VİDD'mi lineer olup ve bir forma sahiptir. Ancak, bu çalışmadaki (6.2) VİDD'mi lineer olmayıp üç tane lineer olmayan terim içermektedir. Bu çalışma ile lineer olan bir VİDD'den lineer olmayan bir VİDD'ye geçiş söz konusudur.

2^0) Bu çalışmada, (6.1) VİDD'mindeki integralin alt sınırı olan $-\infty$ yerine $t-\tau$ alınmaktadır. Eğer $-\infty$ alt sınırı dikkate alınmaz ise (6.2) VİDD'minin (6.1) VİDD'mini içerdiği açıktır. Aslında, (6.2) VİDD'de $g_1(t,x)=-x,$ $g_2(s,x(s))=x(s)$ ve $f(t,x)=0,$ alınır ise (6.2) VİDD'mi (6.1) VİDD'mine indirgenir.

3^0) Xu (1998), çalışmasında (6.1) VİDD'minin çözümlerinin düzgün asimptotik kararlılığını inceledi. Bu çalışmada ise çözümlerin düzgün asimptotik kararlılığının yanı sıra, çözümlerin $t\to\infty$ için sınırlılığı ve integrallenebilirliği incelendi. Bu çalışmada kullanılan Lyapunov fonksiyonu, Xu'nun çalışmasında kullanılan fonksiyonelden tamamen farklıdır.

4^0) Burada teoremlerin ispatında Lyapunov-Razumikhin metodu kullanıldı. Literatürde yapılan araştırmalara göre pozitif tam sayı mertebeli integro-diferansiyel denklemler ve gecikmeli integro-diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin niteliksel davranışlarının incelenmesinde Lyapunov-Razumikhin metodunun kullanılmadığı görülmektedir. Bu çalışmada Lyapunov-Razumikhin metodu kullanılarak ispatların yapılması, bir bakıma çalışmanın yeniliğini ve literatüre olan katkısını göstermektedir.

5^0) Literatürde yapılan çalışmalara bakıldığında, çözümlerin sınırlılığını ispatlamada genel anlamda Gronwall eşitsizliğinin kullanıldığı görülmektedir. Bu çalışmada, çözümlerin sınırlılığını göstermek için yapılan ispatlarda Gronwall eşitsizliği kullanılmadı. Bu durum ise çözümlerin sınırlılığını göstermede oluşturulacak şartların daha az kısıtlayıcı olması öncülük yapmaktadır.

6^0) Xu (1998) çalışmasında verdiği örnekte çözümlerin yörüngesel hareketlerini göstermemektedir. Ancak bu çalışmada verilen örneğe ilave olarak çözümlerin yörüngelerinin davranışları grafik ile gösterildi.

7. GECİKMELİ SKALER BİR VİDD İÇİN ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZLERİ

Raffoul ve Rai (2016), aşağıdaki

$$x'(t) = Px(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(x(s))ds \tag{7.1}$$

sonsuz gecikmeli lineer olmayan VİDD'yi ele aldılar. Burada $t, x \in \Re, \Re = (-\infty, \infty)$ ve $-\infty \leq s \leq t < \infty$ olmak üzere $C : \Re^2 \to \Re$ ve $g : \Re \to \Re$ sürekli fonksiyonlardır. P ise pozitif yada negatif bir reel sabittir. Raffoul ve Rai (2016), uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli kullanarak (7.1) denkleminin çözümlerinin kararlılığı, düzgün kararlılığı ve integrallenebilirliği için bazı yeter şartlar oluşturdu. Bu bölümde Raffoul ve Rai (2016)'nın sonuçları dikkate alınarak aşağıdaki verilen sonsuz gecikmeli lineer olmayan VİDD'yi ele alınacaktır:

$$x'(t) = -\alpha(t)x + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(s, x(s))ds. \tag{7.2}$$

Burada $\forall x \in \Re, \Re = (-\infty, \infty)$ ve $\forall t \in \Re$ için $\alpha(.)$ sürekli bir fonksiyondur. $C(.)$ ve g(.) fonksiyonları ise $-\infty < s \leq t < \infty$ olmak üzere, bağlı bulundukları değişkenlere göre sürekli fonksiyonlardır ve $g(s,0) = 0$ 'dır. Bu kabuller altında verilen (7.2) VİDD'nin $x(t) \equiv 0$ sıfır çözümüne sahip olduğu açıktır. Ayrıca, (7.2) VİDD'deki fonksiyonların bu denklemin çözümlerinin varlığını ve tekliğini sağlamak için yeterince düzgün fonksiyonlar olduğu kabul edilmektedir. (7.1) ve (7.2) denklemlerini karşılaştırdığımızda (7.2) denkleminin (7.1) denklemini kapsadığı görülür.

Gerçekten, $\alpha(t) = P, P \in \Re$ ve $g(t, x)$ sadece x'e bağımlı olsun. O zaman (7.2) denklemi (7.1) denklemine indirgenir. Bu çalışmanın amacı Raffoul ve Rai'nin sonuçlarını genelleştirmek ve daha az kısıtlayıcı şartlar altında elde etmektir.

$\varphi \in (\Re, \Re)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonun normu

$$\|\varphi\| = \sup_{s \in \Re} |\varphi(s)|$$

ile gösterilsin.

$E_{t_0} = (-\infty, t_0]$ başlangıç aralığı ve $\psi : E_{t_0} \to \Re$ ise sürekli ve sınırlı bir başlangıç fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır.

$\psi \in C((-\infty, t_0], \Re),\ t_0 \geq 0,$ olmak üzere ψ sürekli bir başlangıç fonksiyonu ve $x(t, t_0, \psi)$ (7.2) VİDD'nin bir çözümü olsun.

$$A(t,s) = \int_{-\infty}^{t-s} C(u+s, s)du,\ (t-s \geq 0)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, (7.2) VİDD aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$x'(t) = -\alpha(t)x - A(t,t)g(t, x(t)) + \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(s, x(s))ds.$$

7.1 (7.2) VİDD'nin Çözümlerinin Karalılığı

A. Varsayımlar

Bu kısım boyunca aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$(A1)$ λ_1, λ_2 pozitif reel sayılar, $\lambda_2 < \lambda_1$ olmak üzere $\forall t, x \in \Re$ için

$$\lambda_2 x^2 \leq xg(t,x),\ (x \neq 0),$$

$$|g(t,x)| \leq \lambda_1 |x|, (x \neq 0)$$

ve

$$\forall t \in [0, \infty) \text{ için } A(t,t) > 0 \text{ 'dır.}$$

$(A2)$ γ, p pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\alpha(t) + 2A(t,t)\lambda_2 - A^2(t,t)\lambda_1^2 - \gamma\lambda_1^2\int_t^{\infty}|A(u,t)|du \geq \rho,$$

$$(\alpha(t)+1)\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds - \gamma \leq 0,$$

$$1 - \lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds > 0$$

ve

$$\int_0^{\infty} |A(u,t)| du < \infty$$

dır.

Teorem 7.1 Eğer $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (7.2) VİDD'nin sıfır çözümü kararlı ve düzgün kararlıdır.

İspat $V(t) = V(t, \mathrm{x})$ olmak üzere

$$V(t) = (x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s) ds)^2 + \gamma \int_{-\infty}^{t} \int_{t}^{\infty} |A(u,z)| g^2(z, x(z)) du dz \tag{7.3}$$

Lyapunov fonksiyoneli tanımlansın. $V(t)$'nin pozitif tanımlı olduğu açıktır. Şimdi, (7.2) VİDD'nin çözümleri boyunca (7.3) fonksiyonelinin türevi hesaplanır ise

$$V'(t) = 2(x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s)) ds)(-\alpha(t) x - A(t,t) g(t, x(t))$$

$$+\gamma \int_{t}^{\infty} |A(u,t)|\, g^2(t, x(t)) du - \gamma \int_{-\infty}^{t} |A(t,z)|\, g^2(z, x(z)) dz$$

$$= -2\alpha(t) x^2 - 2A(t,t) x g(t, x(t)) + 2\alpha(t) x \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s)) ds$$

$$+2A(t,t) x g(t, x(t)) \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s)) ds + \gamma \int_{t}^{\infty} |A(u,t)|\, g^2(t, x(t)) du$$

$$-\gamma \int_{-\infty}^{t} |A(t,z)|\, g^2(z, x(z)) dz \tag{7.4}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikteki üçüncü terim için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$2\alpha(t) x \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s)) ds \le \alpha(t) x^2 + \alpha(t) \left[\int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s)) ds \right]^2$$

$$= \alpha(t) x^2 + \alpha(t) \left[\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|^{\frac{1}{2}} |A(t,s)|^{\frac{1}{2}} g(s, x(s))\, \mathrm{ds} \right]^2$$

$$\le \alpha(t) x^2 + \alpha(t) \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|\, ds \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|\, g^2(s, x(s)) ds \tag{7.5}$$

olduğu görülür. Benzer biçimde dördüncü terim için de aynı işlemler uygulandığında,

$$2A(t,t)g(t,x(t))\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(s,x(s))ds \le A^2(t,t)g^2(t,x(t)) + \left[\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(s,x(s))ds\right]^2$$

$$\le \lambda_1^2 A^2(t,t)\,x^2 + \int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds \int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|\,g^2(s,x(s))ds \tag{7.6}$$

elde edilir. (7.5) ve (7.6) eşitsizlikleri (7.4)’de yerine yazılır $(A2)$ şartı kullanılır ise

$$V'(t) \le -\left[\alpha(t) + 2A(t,t)\lambda_1^2 - A^2(t,t)\lambda_2 - \gamma\lambda_1^2\int_{t}^{\infty}|A(u,t)|du\right]x^2$$

$$+\left[(\alpha(t)+1)\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds - \gamma\right]\left[\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|\,g^2(s,x(s))ds\right]$$

$$\le -\rho|x|^2 \tag{7.7}$$

elde edilir. Bu sonuç ise (7.2) VİDD’nin sıfır çözümünün kararlı olduğunu gösterir.

Şimdi ise (7.2) VİDD’nin sıfır çözümünün düzgün kararlı olduğunu gösterelim. Verilen denklemin sıfır çözümü kararlı olduğundan kararlılık tanımı kullanıldığında $\forall\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki $\left[\psi \in E_{t_0} \to R : \|\psi\| \le \delta\right]$ olduğunda $|x(t,t_0,\psi| < \varepsilon$ olur. (7.7) de $V'(t) \le 0$ olduğundan dolayı, $t \ge t_0$ için V fonksiyoneli azalandır. Eğer bu eşitsizliğin t_0 ’dan t ’ye integralini alınır ve (7.3) ile verilen V Lyapunov Krasovskii fonksiyoneli göz önüne alınır ise,

$$V(t,x(t) \le V(\mathrm{t}_0,\psi(t_0))$$

$$= \left[\psi(t_0) - \int_{-\infty}^{t_0} A(t,s)g(s,\psi(s)\right]^2 + \gamma\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty} A(u,z)g^2(z,\psi(z))dudz$$

$$\le \left[|\psi(t_0)| + \lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|\psi(\mathrm{s})ds\right]^2 + \gamma\lambda_1^2\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}|A(u,z)|\psi^2(z)dudz$$

$$\le \delta^2\left(\left[1+\lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds\right]^2 + \gamma\lambda_1^2\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}|A(u,z)|dudz\right)$$

elde edilir.

$$L^2 = \left(1+\lambda_1^2\int_{-\infty}^{t_0}|A(t_0,s)|ds\right)^2 + \lambda_1^2\gamma\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}|A(u,z)|dudz$$

olsun. Buna bağlı olarak,

$$V(t,x) \le \delta^2 L^2 \tag{7.8}$$

elde edilir. (7.3)'ten

$$V(t) \ge \left(x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s,x(s))\,\mathrm{ds} \right)^2$$

$$\ge \left(|x| - \left| \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s,x(s))\,\mathrm{ds} \right| \right)^2$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerden,

$$|x(t)| \le \delta L + \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| |g(s,x(s)| ds$$

elde edilir.

$|x(t)| < \varepsilon$ olduğundan $(A1)$ şartını kullanarak her $t \ge t_0$ için,

$$|x(t)| \le \delta L + \varepsilon \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| ds$$

elde edilir. Bundan dolayı eğer

$$\delta < \frac{\varepsilon}{L} \left(1 - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| ds \right)$$

olarak seçilir ise

$$|x(t)| < \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır. $(A2)$ kabulü dikkate alınır ise $1 - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| ds > 0$ elde edilir. Böylece δ sayısına ait eşitsizliğin geçerli olduğu görülür. Bu sonuçlar ise verilen denkleminin sıfır çözümünün düzgün kararlı olduğunu gösterir.

Aşağıda verilecek olan teoremde (7.2) VİDD'nin her x çözümünün karesinin mutlak değerinin kare integrallenebilir olduğunu, yani

$$|x(t)|^2 \in L_{[t_0,\infty]},\ t_0 \in E_k$$

sağlandığı gösterilecektir.

Teorem 7.2 Eğer Teorem 7.1'in $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlanır ise, o zaman (7.2) denkleminin tüm çözümlerinin mutlak değeri kare integrallenebilirdir, yani $|x(t)|^2 \in L[t_0,\infty], t_0 \in E_k$ dır.

İspat $(A1)$ ve $(A2)$ şartlarına bağlı olarak (7.2) VİDD'nin sıfır çözümünün kararlı olduğu bilinmektedir. Ayrıca, bir önceki teoremde verilen ε sayısı için

$$|x(t,t_0,\psi| < 1$$

seçilebilir. Bilindiği üzere, V fonksiyonelini azalandır. (7.7) eşitsizliğinin t_0'dan t'ye integralini alındığında, (7.3) kullanıldığında

$$\rho\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2 ds \le \rho\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2 ds + V(t,x) \le K,\ K = V(t_0, x(t_0)) > 0$$

elde edilir. Buna bağlı olarak $t \to \infty$ için $\int_{t_0}^{\infty}|x(s)|^2 ds \le \rho^{-1}K < \infty$ eşitsizliğine ulaşılır. Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise $\alpha(t) = 0$ olarak kabul edelim.

B. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$(A3)$

$$2A(t,t)\lambda_2 + A^2(t,t)\lambda_1^2 - \gamma\lambda_1^2 \int_t^{\infty} |A(u,t)| du \ge \rho,$$

$$\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| ds - \gamma \le 0,$$

$$1 - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| ds > 0$$

ve

$$\int_0^{\infty} |A(u,t)| du < \infty.$$

Teorem 7.3 $(A1)$ ve $(A3)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (7.2) VİDD'nin sıfır çözümü kararlı ve çözümlerinin kare integrallenebilirdir. Yani,

$$|x(t)|^2 \in L(t_0,\infty), t_0 \in E_k$$

dır.

İspat $(A1)$ ve $(A3)$ şartlarını kullanılarak kolayca bu teoremin ispatı tamamlanabilir. Bu nedenle bu teoremin ispatı burada verilmeyecektir.

Şimdi bir sonraki teoremde kullanılmak üzere, kolaylık olması açısından

$$J = \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| ds \tag{7.9}$$

alalım.

Teorem 7.4 $(A1)$ ve $(A2)$ şartlarına ilave olarak bir pozitif R sabitinin var olduğunu

$$\int_{-\infty}^{t} \int_{t}^{\infty} |A(u,z)| dudz \le R \tag{7.10}$$

şartının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde (7.2) VİDD'nin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

İspat Bu teoremi ispatlamak için Teorem 7.1'de tanımlanan V Lyapunov fonksiyonelini kullanacağız. Teorem 7.3'ün şartlarını göz önüne alındığında, Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve (7.9) eşitliği kullanıldığında,

$$V(t) = x^2(t) + (\int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s,x(s)) ds)^2 - 2x(t) \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s,x(s)) ds$$

$$+ \gamma \int_{-\infty}^{t} \int_{t}^{\infty} |A(u,z)| g^2(z,x(z)) dudz$$

$$\le 2x^2(t) + 2\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| g^2(s,x(s)) ds + \gamma \int_{-\infty}^{t} \int_{t}^{\infty} |A(u,z)| g^2(z,x(z)) dudz$$

$$\le 2x^2(t) + 2\lambda_1^2 J \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)| x^2(s) ds + \gamma \lambda_1^2 \int_{-\infty}^{t} \int_{t}^{\infty} |A(u,z)| x^2(z) dudz \tag{7.11}$$

elde edilir. $\frac{dV}{dt} \leq 0$ olduğu bilinmektedir. $V(t)$ azalan bir fonksiyonel olduğu için son eşitsizliğin t_0 'dan t 'ye integrali alındığında

$$V(t) \leq V(t_0),\ \forall t \geq t_0$$

eşitsizliği elde edilir. $E_{t_0} = (-\infty, t_0]$ aralığında $x(t) = \varphi(t)$ olduğu için

$$(x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(s, x(s)) ds)^2 \leq V(t) \leq V(t_0)$$

$$= \phi^2(t) + (\int_{-\infty}^{t_0} A(t,s) g(s, \phi(s)) ds)^2$$

$$- 2\phi(t) \int_{-\infty}^{t_0} A(t,s) g(s, \phi(s)) ds$$

$$+ \gamma \int_{-\infty}^{t_0} \int_{t_0}^{\infty} |A(u,z)| g^2(z, \phi(z)) du dz.$$

yazılabilir. Bu durumda $(A1)$ şartı ve $\|\phi(t)\| < \delta$ eşitsizliğinden

$$(x - \int_{-\infty}^{t_0} A(t,s) g(s, x(s)) ds)^2 \leq \delta^2 + (\int_{-\infty}^{t_0} |A(t,s)| ds)^2 \lambda_1^2 \delta^2 + \delta^2 + (\int_{-\infty}^{t_0} |A(t,s)| ds)^2 \lambda_1^2 \delta^2$$

$$+ \gamma \lambda_1^2 + \delta^2 \int_{-\infty}^{t_0} \int_{t_0}^{\infty} |A(u,z)| du dz$$

$$= 2\delta^2 + 2\lambda_1^2 \delta^2 (\int_{-\infty}^{t_0} |A(t,s)| ds)^2 + \gamma \delta^2 \lambda_1^2 \int_{-\infty}^{t_0} \int_{t_0}^{\infty} |A(u,z)| du dz$$

$$= \delta^2 (2 + 2\lambda_1^2 J^2 + \gamma \lambda_1^2 R)$$

elde edilir.

$\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in E_k$ sabitleri verilsin, $\delta > 0,\ 0 < \delta < \varepsilon$ olsun öyle ki

$$\sqrt{(2 + 2\lambda_1^2 J^2 + \gamma \lambda_1^2 R)}\delta < \varepsilon(1 - \lambda_1 J)$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca

$$\left| x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(s,x(s))ds \right| \geq |x| - \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)||g(s,x(s))|ds$$

$$\geq |x| - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)||x(s)|ds$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak,

$\forall t \geq t_0$ için $|x(t)| < \varepsilon$ olduğu iddia edilmektedir. Ayrıca $\forall u \in (-\infty, t_0)$ için $|x(u)| < \delta$ olduğu bilinmektedir.

Eğer bu iddia doğru değil ise, bu durumda bir $t = t*$ sayısı vardır öyle ki $|x(t^*)| = \varepsilon$ ve $t_0 \leq s < t^*$ için $|x(s)| < \varepsilon$ olur. Bu bilgiler ışığında

$$\varepsilon(1-\lambda_1 J) = \varepsilon(1-\lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds)$$

$$\leq |x(t^*)| - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t^*} |A(t^*,s)||x(s)|ds$$

$$\leq |x(t^*)| - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t^*} |A(t^*,s)||g(s,x(s))|ds$$

$$\leq \left| x(t^*) - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t^*} A(t^*,s)g(s,x(s))ds \right|$$

$$\leq \sqrt{(2 + 2\lambda_1^2 J^2 + \gamma\lambda_1^2 R)}\delta$$

yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani, yukarıdaki iddia doğru değildir. Bu sonuç Teorem 7.4'ün ispatını tamamlar.

Örnek 7.1 Aşağıdaki lineer olmayan VİDD'yi göz önüne alalım

$$\frac{dx}{dt} = -(4 + \frac{1}{1+t^2})x - \int_{-\infty}^{t} \frac{-1}{16(t-s+1)^2} x(s)(\frac{\sin^2 x(s) + \sin^2 s + 1}{6})ds. \qquad (7.12)$$

(7.12) ile (7.2) VİDD ile karşılaştırıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$a(t) = 4 + \frac{1}{1+t^2},$$

$$g(t,x) = \frac{x(\sin^2 x + \sin^2 t + 1)}{6},$$

$$g(t,0) = 0,\ xg(t,x) > \frac{x^2}{6},\ x \neq 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{6},$$

$$|g(t,x)| \leq \frac{1}{2}|x|,$$

$$C(t,s) = \frac{-1}{16(t-s+1)^4},$$

$$C(u+s,s) = \frac{-1}{16(u+1)^4}$$

ve

$$A(t,s) = \frac{1}{4(t-s+1)^3}$$

son eşitliğe bağlı olarak da

$$A(t,t) = \frac{1}{4}$$

olarak elde edilir. İlave olarak,

$$\int_t^\infty |A(u,t)| du = \frac{3}{4},\ \int_{-\infty}^t |A(t,s)| ds = \frac{3}{4}$$

ve

$$\int_{-\infty}^t \int_t^\infty |A(u,z)| dudz = \int_{-\infty}^t \int_t^\infty \frac{1}{4(u-z+1)^3} dudz$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{3}{4(t-z+1)^2}\, dz$$

$$= \frac{3}{2}$$

elde edilir. Ayrıca, kolaylıkla

$$\mu(t) = a(t) + 2A(t,t)\lambda_2 - A^2(t,t)\lambda_1^2 - \gamma\lambda_1^2 \int_t^{\infty} |A(u,t)|\, du$$

$$= 4 + \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{64} - \gamma\frac{3}{16}$$

$$\geq 4 + \frac{1}{12} - \frac{1}{64} - \gamma\frac{3}{16}$$

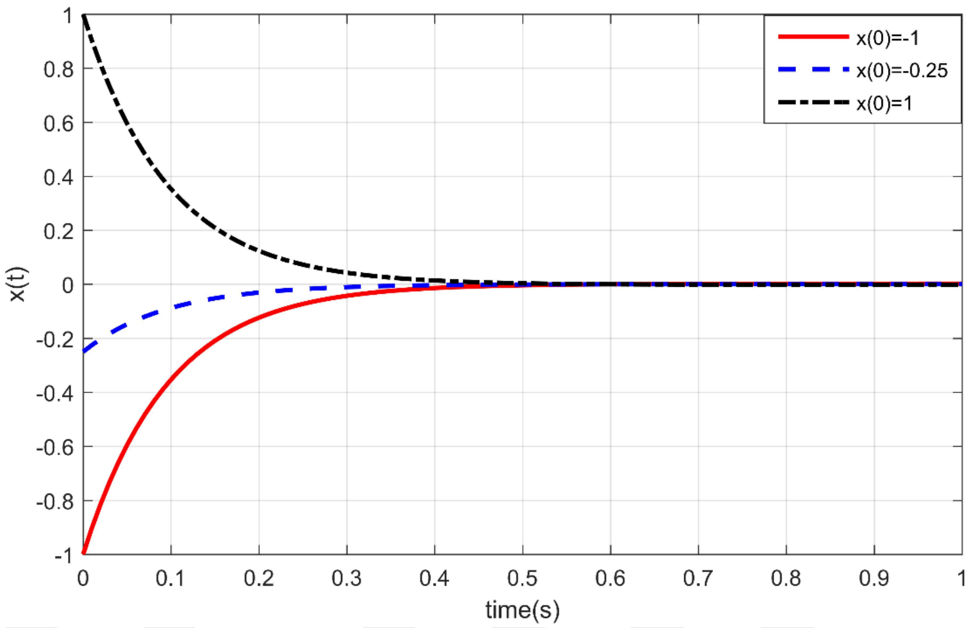
$$\cong 4,067 - \gamma\frac{3}{16}$$

olduğu görülür.

$\gamma = 3$ olsun. Bu durumda

$$\mu(t) \geq 3.5 = \rho$$

elde ederiz. Böylece Teorem 7.1, Teorem 7.2, Teorem 7.3 ve Teorem 7.4'ün tüm şartları sağlanmış olur. Buna bağlı olarak göz önüne alınan gecikmeli diferansiyel denklemin sıfır çözümü kararlı, düzgün kararlı, tüm çözümlerin karalerinin mutlak değeri integrallenebilir ve çözümler sınırlıdır.



Şekil 7.1 (7.12) VİDD sisteminin $x(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.

Sonuç

Raffoul ve Rai (2016) lineer olmayan sonsuz gecikmeli (7.1) VİDD'mini ele aldı. Bu denklemin çözümlerinin kararlılığı, düzgün kararlılığı ve integrallenebilirliği ile ilgili üç teorem ispatladı. Bu bölümde sonsuz gecikmeli lineer olmayan (7.2) VİDD'mi ele alındı ve bu denklemin çözümlerinin kararlılık, düzgün kararlılık ve integrallenebilirliği ile ilgili dört teorem ispatlandı. Raffoul ve Rai (2016)'nın sonuçları, yeni bir Lyapunov- Krasovskii fonksiyoneli tanımlanarak daha az kısıtlayıcı şartlar altında elde edildi. Elden edilen sonuçların uygulanabilirliğini göstermek için bir örnek ve grafiği verildi.

8. SABİT GECİKMELİ LİNEER OLMAYAN BİR VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN BAZI NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI İÇİN YETER ŞARTLAR

Modern bilim ve teknolojinin gelişmesiyle birlikte, fonksiyonel diferansiyel denklemler kontrol teorisi, mühendislik, fizik, tıp, matematiksel biyoloji, ekonomi ve benzeri alanlarda uygulamalarda kullanılabilen çok önemli matematiksel modeller haline geldi. Bu tezin literatür kısmındaki kaynaklara bakıldığında bu hususlar kolaylıkla gözlemlenebilir.

Wang ve ark. (1992), aşağıdaki sabit katsayılı lineer Volterra integro-diferansiyel denklem sistemini göz önüne aldı.

$$x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \int_0^t [C_{11}(t,s)x_1(s) + \ldots + C_{1n}(t,s)x_n(s)]ds + f_1(t),$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + \int_0^t [C_{n1}(t,s)x_1(s) + \ldots + C_{nn}(t,s)x_n(s)]ds + f_n(t). \tag{8.1}$$

Burada, $t \in \Re^+ = [0,\infty),\ x_i \in \Re,\ a_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots,n,$ reel sabitler, $0 \le t < \infty$ için $f_i(t)$ sürekli fonksiyonlar ve $0 \le s \le t < \infty$ için $C_{ij}(t,s)$ 'ler ise sürekli birer fonksiyondur.

Wang ve ark. (1992), sırasıyla $f_i(t) \equiv 0$ ve $f_i(t) \neq 0$ için (7.1) VİDD sisteminin çözümlerinin düzgün sınırlılığı ve kararlılığı hakkında bazı sonuçlar elde etti. Bu çalışma ile Wang ve ark. (1992), Burton (1985)'de geçen bazı VİDD sistemlerinin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili bazı teoremleri daha kısıtlayıcı şartlar altında ispatladılar.

Wang ve ark. (1992) çalışmasından hareketle aşağıdaki lineer olmayan sabit gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem sistemini ele alınmaktadır:

$$x_1'(t) = a_{11}(t)h_1(x_1) + \ldots + a_{1n}(t)h_n(x_n) + \int_{t-\tau}^t [C_{11}(t,s)x_1(s) + \ldots + C_{1n}(t,s)x_n(s)]ds$$

$$+g_1(t,x_1,\ldots,x_n),$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t)=a_{n1}(t)h_1(x_1)+...+a_{nn}(t)h_n(x_n)+\int_{t-\tau}^{t}[C_{n1}(t,s)x_1(s)+...+C_{nn}(t,s)x_n(s)]ds$$

$$+g_n(t,x_1,...,x_n), \tag{8.2}$$

Burada $t\in\Re^+$, $\Re^+=[0,\infty)$, $x_1,x_2,...,x_n\in\Re$, $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ ve $C_{ij}(t,s)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, sırasıyla $0\le t<\infty$ ve $0\le s\le t<\infty$ için sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, $h_i(0)=0$, $x_i\neq 0$ için $h_i(x_i)\neq 0$ olmak üzere, her $t\in\Re^+$ ve $x_1,x_2,...,x_n\in\Re$, için h_i 'ler sürekli türevlenebilir fonksiyonlar ve g_i 'ler ise bağlı bulundukları değişkenlere göre sürekli fonksiyonlardır. h_i ve g_i fonksiyonları $x_1,x_2,...,x_n$ birleşenlerine göre Lipschitz şartını sağladığı kabul edilmektedir. Böylece (8.2) VİDD sisteminin çözümlerin varlığı ve tekliği garanti edilir.

f_i, $i=1,2,...,n,$ olmak üzere

$$f_i(x_i)=\begin{cases}\dfrac{h_i(x_i)}{x_i}, & x_i\neq 0\\ h_i'(0), & x_i=0\end{cases}$$

ile fonksiyonların bir sınıfını tanımlayalım. Bu durumda, bu tanım göz önüne alındığında, lineer olmayan (8.2) VİDD sistemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$x_1'=a_{11}(t)f_1(x_1)x_1+...+a_{1n}(t)f_n(x_n)x_n+\int_{t-\tau}^{t}[C_{11}(t,s)x_1(s)+...+C_{1n}(t,s)x_n(s)]ds$$

$$+g_1(t,x_1,...,x_n),$$

$$\vdots$$

$$x_n'=a_{n1}(t)f_1(x_1)x_1+...+a_{nn}(t)f_n(x_n)x_n+\int_{t-\tau}^{t}[C_{n1}(t,s)x_1(s)+...+C_{nn}(t,s)x_n(s)]ds$$

$$+g_1(t,x_1,...,x_n), \tag{8.3}$$

$$B=diag[b_1,b_2,...,b_n],b_i>0,$$

$$B_1=\min\{b_i\},B_2=\max\{b_i\},\ i=1,2,...,n$$

ve

$$\|Bx\|=b_1|x_1|+b_2|x_2|+...+b_n|x_n|$$

olarak tanımlansın. Bu tanımlamalar bağlı olarak

$$B_1\|x\| \le \|Bx\| \le B_2\|x\|$$

eşitsizliği yazılabilir.

$x(t) = x(t, t_0, \phi)$ ifadesi $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığı üzerinde $x(t) = \phi(t)$, $\phi : [t_0 - \tau, t_0] \to \Re^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu (8.2) VİDD sisteminin bir çözümü olsun.

Bu bölümde iki uygun Lyapunov fonksiyoneli tanımlanarak (8.2) VİDD sisteminin sıfır çözümünün kararlılık, asimptotik kararlılık, düzgün kararlılık özellikleri ve sıfırdan farklı çözümlerin ise integrallenebilirlik ve sınırlılığı incelenecektir.

(8.2) VİDD sistemi ile Wang ve ark. (1992) tarafından incelenen (8.1) sistemi karşılaştırıldığında (8.1) VİDD sisteminin lineer olduğu, buna karşılık olarak (8.2) VİDD sisteminin lineer olmadığı ve hem de sabit gecikmeli olduğu görülür. Böylece, Wang ve ark. (1992) tarafından incelenen denklem sistemi yerine lineer olmayan ve gecikmeli bir VİDD sistemi alınarak araştırılmaktadır. Bu durum ise buradaki çalışmanın ilgili literatüre katkısını açıkça göstermektedir. İlaveten, Wang ve ark. (1992) (8.1) VİDD sisteminin sıfır çözümünün kararlılık, düzgün kararlılık ve asimptotik kararlılığını inceledi. Bu kavramlara ilaveten burada çözümlerin integrallenebilirliği ve $t \to \infty$ için ise sınırlılığı incelenmektedir.

Eğer (8.2) VİDD sisteminde $h_i(x_i) = x_i$, $g_i(t, x_1, ..., x_n) = f_i(t)$ ve $t - \tau$ yerine 0 alınır ise, bu takdirde (8.2) VİDD sistemi (8.1) VİDD sistemine indirgenir. Bu ise (8.2) VİDD sisteminin (8.1) VİDD sistemini kapsadığını gösterir. Bu bilgiler ise buradaki sonuçların Wang ve ark. (1992) çalışmasına katkısını gösterir.

Bu bölümdeki sonuçları elde etmek için Wang ve ark. (1992) kullandığı Lyapunov fonksiyonelinden farklı bir Lyapunov fonksiyoneli kullanılarak ilgili sonuçlar elde edilmektedir. Yeni bir Lyapunov fonksiyonelinin tanımlanması, söz konusu çalışmaya ve ilgili literatüre bir katkı olarak göz önüne alınmaktadır. Kısalık olması açısından burada $x(t)$ yerine ihtiyaç duyulduğunda x alınmaktadır.

8.1. (8.2) VİDD sisteminin çözümlerin kararlılığı ve integrallenebilirliği

A. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

$(A1)$ $b_i a_{ii}(t) f_i(x_i) + \sum_{j=1,(j\neq i)}^{n} b_j a_{ji}(t) f_i(x_i) \leq -\delta_0,\ i = 1,2,...,n.$

Burada, $b_1, b_2, ..., b_n$ ve δ_0 pozitif reel sabitlerdir.

$(A2)$ $\delta_0, \bar{K}, B_2$ pozitif sabitler ve $\bar{K} - B_2 \geq 0$ olmak üzere

$$-\delta_0 + \bar{K}\int_t^\infty \|C(u,t)\| \exp(\mu(u-t))du \leq -\mu B_2,$$

eşitsizliği sağlanır.

$(A3)$ L pozitif bir sabit olmak üzere

$$\int_0^t \int_t^\infty \|C(u,s)\| \exp(\mu(u-t))duds \leq L < \infty$$

Çözümlerin asimptotik kararlılığı için

$$g_i(t, x_1, ..., x_n) \equiv 0,\ i = 1,2,...,n$$

alalım.

Teorem 8.1 Eğer $(A1)-(A3)$ hipotezleri sağlanırsa, bu takdirde (8.2) VİDD sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat $V_1 = V_1(t, x(.))$ olmak üzere

$$V_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i |x_i| + \bar{K}\int_0^t \int_t^\infty \|C(u,s)\| \exp(\mu(u-t))du \|x(s)\| ds \tag{8.4}$$

Lyapunov fonksiyonelini tanımlayalım. Burada $\mu > 0, \mu \in \Re, u \leq t$ 'dir.

Açıkça, $V_1(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelini pozitif tanımlı ve

$$V_1(t,0) = 0, V_1(t, x(.)) \geq \sum_{i=1}^{n} b_i |x_i| \tag{8.5}$$

sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

(8.4) ile verilen $V_1(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelinin (8.2) VİDD sisteminin çözümleri boyunca türevi alınıp ve $(A1)$ ve $(A2)$ şartları kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_1^+(t, x(.)) &= \sum_{i=1}^{n} b_i x_i'(t) \operatorname{sgn} x_i(t+0) \\ &+\bar{K}\int_t^\infty \|C(u,t)\| \exp(\mu(u-t))du \|x(t)\| - \bar{K}\int_0^t \|C(t,s)\|\ \|x(s)\| ds \\ &-\mu\bar{K}\int_0^t \int_t^\infty \|C(u,s)\| \exp(\mu(u-t))du \|x(s)\| ds\end{aligned}$$

$$=b_1 \operatorname{sgn} x_1(t+0)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t) f_j(x_j) x_j + \int_{t-\tau}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{1j}(t,s) x_j(s)\right)\right] ds$$

$$+\ldots+b_n \operatorname{sgn} x_n(t+0)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t) f_j(x_j) x_j + \int_{t-\tau}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{nj}(t,s) x_j(s)\right)\right] ds$$

$$+\bar{K}\int_t^{\infty} \|C(u,t)\| \exp(\mu(u-t)) du \|x(t)\| - \bar{K}\int_0^t \|C(t,s)\| \ \|x(s)\| ds$$

$$-\mu\bar{K}\int_0^t \int_t^{\infty} \|C(u,s)\| \exp(-\mu(u-t)) du \|x(s)\| ds$$

$$\leq b_1 a_{11}(t) f_1(x_1)|x_1| + b_1 a_{12}(t) f_2(x_2)|x_2| + \ldots + b_1 a_{1n}(t) f_n(x_n)|x_n|$$

$$+\ldots+b_n a_{n1}(t) f_1(x_1)|x_1| + b_n a_{n2}(t) f_2(x_2)|x_2| + \ldots + b_n a_{nn}(t) f_n(x_n)|x_n|$$

$$+b_1 \int_{t-\tau}^{t} \max_{1\leq j\leq n} |C_{1j}(t,s)| \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j(s)|\right) ds$$

$$+\ldots+b_n \int_{t-\tau}^{t} \max_{1\leq j\leq n} |C_{nj}(t,s)| \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j(s)|\right) ds$$

$$+\bar{K}\int_t^{\infty} \|C(u,t)\| \exp(\mu(u-t)) du \|x(t)\| - \bar{K}\int_0^t \|C(t,s)\| \ \|x(s)\| ds$$

$$-\mu\bar{K}\int_0^t \int_t^{\infty} \|C(u,s)\| \exp(\mu(u-t)) du \|x(s)\| ds$$

$$\leq [b_1 a_{11}(t) + b_2 a_{21}(t) + \ldots + b_n a_{n1}(t)] f_1(x_1)|x_1|$$

$$+[b_1 a_{12}(t) + b_2 a_{22}(t) + \ldots + b_n a_{n2}(t)] f_2(x_2)|x_2|$$

$$+\ldots+[b_1 a_{1n}(t) + b_2 a_{2n}(t) + \ldots + b_n a_{nn}(t)] f_n(x_n)|x_n|$$

$$+\max_{1\leq j\leq n}\{b_j\} \int_{t-\tau}^{t} \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |C_{ij}(t,s)|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j(s)|\right) ds$$

$$+\bar{K}\int_t^{\infty} \|C(u,t)\| \exp(\mu(u-t)) du \|x(t)\| - \bar{K}\int_0^t \|C(t,s)\| \ \|x(s)\| ds$$

$$-\mu\bar{K}\int_0^t \int_t^{\infty} \|C(u,s)\| \exp(\mu(u-t)) \ \|du x(s)\| ds$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[b_i a_{ii}(t) f_i(x_i) + \sum_{j=1,(j\neq i)}^{n} b_j a_{ji}(t) f_i(x_i)\right]|x_i| + B_2 \int_{t-\tau}^{t} \|C(t,s)\| \ \|x(s)\| ds$$

$$+\bar{K}\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|\exp(\mu(u-t))du\,\|x(t)\|-\bar{K}\int_0^t\|C(t,s)\|\ \|x(s)\|ds$$

$$-\mu\bar{K}\int_0^t\int_t^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t))du\,\|x(s)\|ds$$

$$\leq -[\delta_0-\bar{K}\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|\exp(\mu(u-t))du]\|x(t)\|$$

$$-(\bar{K}-B_2)\int_{t-\tau}^{t}\|C(t,s)\|\ \|x(s)\|ds$$

$$-\mu\bar{K}\int_0^t\int_t^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t))du\,\|x(s)\|ds$$

elde edilir. Burada

$$-\delta_0+\bar{K}\int_t^{\infty}\|C(u,t)\|\exp(\mu(u-t))du\leq -\mu B_2 \quad \text{ve} \quad \bar{K}-B_2\geq 0$$

olması nedeniyle

$$\frac{d}{dt}V_1^+(t,x(.))\leq -\mu B_2\|x(t)\|-\mu\bar{K}\int_0^t\int_t^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(-\mu(u-t))du\,\|x(s)\|ds$$

$$\leq -\mu\|Bx(t)\|-\mu\bar{K}\int_0^t\int_t^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t))\ \|dux(s)\|ds$$

$$=-\mu V_1(t,x(.)) \tag{8.6}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{d}{dt}V_1^+(t,x(.))\leq -\mu V_1(t,x(.)) \tag{8.7}$$

olduğu, yani

$$\frac{d}{dt}V_1^+(t,x(.))\leq 0$$

sonucuna varılır.

Yukarıda yapılan incelemeler dikkate alındığında verilen diferansiyel denklem sisteminin sıfır çözümünün kararlı olduğu sonucuna kolaylıkla varılabilir.

Burada ki kararlılık sonucuna aşağıdaki şekilde de varılabilir. Şimdi, bunun için son eşitsizliğin t_0 'dan t 'ye integrali alınırsa,

$$V_1(t,x(.))\leq V_1(t_0,\phi(t_0))$$

bulunur.

$x(t)=x(t,t_0,\phi)$ VİDD (8.2)'nin bir çözümü olsun öyle ki $[t_0-\tau,t_0]$ aralığında $x(t)=\phi(t)$ ' dir. Burada $t_0\geq 0$ için ϕ sürekli bir başlangıç fonksiyonu, yani $\phi\in C[t_0-\tau,t_0]$ dır. $|\phi|_{t_0}:=\sup\{|\phi(t)|:t_0-\tau\leq t\leq t_0\}$ ve $|\phi|_{t_0}<\delta$ olsun. Böylece $V_1(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli azalan olduğundan, (8.4), (8.7) ve $(A3)$ şartından

$$
\begin{aligned}
B_1\|x(t,t_0,\phi)\| &\leq V_1(t,x(.))\leq V_1(t_0,\phi(.))\\
&=\|B\phi(t_0)\|+\bar{K}\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t_0))du\|\phi(s)\|ds\\
&\leq B_2\delta+\bar{K}\delta\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t_0))duds\\
&\leq (B_2+\bar{K}L)\delta
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine ulaşılır. Eğer

$$\delta<\frac{\varepsilon}{(B_2+\bar{K}L)B_1^{-1}}$$

seçilir ise bu takdirde

$$\|x(t,t_0,\phi)\|<\varepsilon$$

olur. Son eşitsizlik ve (8.5) ile verilen eşitsizlik (8.2) VİDD'nin sıfır çözümünün düzgün kararlı olmasını sağlar.

Şimdi (8.7) den

$$\frac{d}{dt}V_1^{+}(t,x(.))\leq -\mu V_1(t,x(.))$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizliğin t_0 'dan t 'ye integrali alınırsa

$$V_1(t,x(.))\leq V_1(t_0,\phi(.))\exp(-\mu(t-t_0)),\ t\geq t_0$$

elde edilir. Böylece

$$B_1\|x(t,t_0,\phi)\|\leq\|Bx(t,t_0,\phi)\|\leq V_1(t,x(.))\leq V_1(t_0,\phi(.))\exp(-\mu(t-t_0)),\ t\geq t_0$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak da

$$B_1\|x(t,t_0,\phi)\|\leq V_1(t_0,\phi(.))\exp(-\mu(t-t_0)),\ t\geq t_0$$

olur. Bu durumda,

$$B_1\lim_{t\to\infty}\|x(t,t_0,\phi)\|\leq\lim_{t\to\infty}V_1(t_0,\phi(.))\exp(-\mu(t-t_0))=0,\ t>t_0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t,t_0,\phi)\|=0$$

bulunur. Bu sonuç (8.2) VİDD sisteminin sıfır çözümün asimptotik kararlı olduğunu gösterir.

Gerçekten, (8.6) eşitsizliğinden

$$\frac{d}{dt}V_1^+(t,x(.)) \le -\mu\|Bx\| \tag{8.8}$$

yazılabilir. Şimdi ise

$$I_S \equiv \{(t,x) : \frac{d}{dt}V_1(t,x(t)) = 0\}$$

ile tanımlı cümleyi göz önüne alalım. LaSalle's değişmezlik prensibi dikkate alındığında bkz. (Reissig ve ark, 1974) $(t,x) \in I_S$ ise bu takdirde μ pozitif bir sabit olduğundan $\|Bx\| = 0$ olmalıdır. $b_1 \ne 0,\ b_2 \ne 0, ..., b_n \ne 0$ ve $\|Bx\| = \sum_{i=1}^{n} b_i |x_i|$ olarak tanımlandığında $\|Bx\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ olmasıdır. Buna bağlı olarak $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ değerleri (8.2) VİDD sisteminde yerine yazıldığında $h_i(x_i) = 0$ elde edilir. $h_i(0) = 0$ ve $x_i \ne 0$ iken $h_i(x_i) \ne 0$ olduğundan $h_i(x_i) = 0$ ancak ve ancak $x_i = 0$ olmasıdır. Böylece, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0,$ yani $x = 0$ olur. O halde I_S içerisindeki en büyük değişmez (invariant) cümle $(t,0) \in I_S$ 'dir. Dolayısıyla, (8.2) VİDD 'nin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğu sonucuna varılır.

Teorem 8.2 Eğer $(A1)-(A3)$ şartları sağlanırsa, bu takdirde (8.2) VİDD'nin sıfır çözümü düzgün kararlı olur.

İspat (8.2) VİDD 'nin sıfır çözümünün düzgün kararlılığını göstermek için, Teorem 8. 1'de verilen $V_1 = V_1(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır.

Teorem 8.1'de yer alan yukarıdaki işlemler dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
B_1\|x(t,t_0,\phi)\| &\le V_1(t,x(.)) \le V_1(t_0,\phi(.)) \\
&\le B_2\|\phi(t_0)\| + \bar{K}\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t_0))du\|\phi(s)\|ds \\
&\le B_2\delta + \bar{K}\delta\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t_0))duds \\
&\le B_2\|\phi(t_0)\| + \bar{K}L\|\phi\|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece verilen her bir $\varepsilon > 0,$ sayısı için pozitif bir $\delta = \left(\dfrac{B_1}{B_2 + \bar{K}L} \right) \dfrac{\varepsilon}{2}$ sabiti bulunabilir öyle ki (8.2) VİDD'nin herhangi bir çözümü için $\|\phi(t)\| < \delta, t \in [t_0 - \tau, t_0],$ olduğunda

$$B_1 \|x(t,t_0,\phi)\| \le (B_2 + \bar{K}L)\delta \le \frac{B_1\varepsilon}{2}$$

yani

$$\|x(t,t_0,\phi)\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ (t \ge t_0)$$

olur. Buradan açıktır ki δ sabiti t_0'dan bağımsızdır. Bu durumda, (8.2) VİDD'nin $x(t) \equiv 0$ çözümünün düzgün kararlı olduğu sonucuna varılır.

Teorem 8.3 Eğer $(A1) - (A3)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (8.2) VİDD siteminin tüm çözümleri integrallenebilirdir.

İspat Bu teoremin ispatında Teorem 8.1 ve 8.2'nin ispatlarında kullanılan $V_1 = V_1(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır. Şimdi (8.8) eşitsizliğini ele alalım. Buna bağlı olarak

$$\frac{d}{dt} V_1^+(t, x(.)) \le -\mu B_1 \|x\| \tag{8.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (8.9) 'un t_0'dan t 'ye integrali alınırsa

$$V_1(t, x(.)) - V_1(t_0, \phi(t_0)) \le -\mu B_1 \int_{t_0}^{t} \|x(s)\| ds$$

elde edilir. $V_1(.)$ fonksiyoneli azalan olduğundan

$$\mu B_1 \int_{t_0}^{t} \|x(s)\| ds \le V_1(t_0, \phi(t_0)) - V_1(t, x(.)) \le V_1(t_0, \phi(t_0))$$

yazılabilir.

$$V_1(t_0, \phi(t_0)) = B_0, B_0 > 0, B_0 \in \Re$$

olsun. Bu takdirde $t \to \infty$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(s)\| ds < \mu^{-1} B_1^{-1} B_0$$

bulunur. Böylece Teorem 8.3'ün ispatı tamamlanır.

8.3. Çözümlerin sınırlılığı

Şimdi ise (8.2) sisteminde

$$g_1(t,x_1,...,x_n)\neq 0,....,g_n(t,x_1,...,x_n)\neq 0$$

olsun. Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

B. Varsayımlar

$$(A4)\ \ \|F(t,x(t)\| = \sum_{i=1}^{n}| f_i(t,x_1,...x_n)| \leq \sum_{i=1}^{n}|q_i(t)|(|x_1|+...+|x_n|)$$
$$=\|q(t)\|\|x\|$$

dır. Burada q sürekli skaler bir fonksiyon öyle ki $\|q\|\in L^1(0,\infty),$ yani

$$\int_0^\infty \|q(s)\|ds<\infty$$

dır.

Teorem 8.4 Eğer $(A1)-(A4)$ şartları sağlanırsa, bu takdirde (8.2) VİDD ‘nin tüm çözümleri $t\rightarrow\infty$ için sınırlıdır.

İspat Yukarıda kullanılan $V_1=V_1(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyonelinden tekrar ele alalım. $V_1(t,x(.))=V_1(t)$ olsun. $t\in[t_0-\tau,t_0],t_0\geq 0$ için $\|\phi(t)\|<\tilde{B}_1,\tilde{B}_1>0,\tilde{B}_1\in\Re$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$V_1(t_0)=\|B\phi(t_0)\|+\bar{K}\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t_0))du\ \ \|\phi(s)\|ds$$

$$\leq B_2\,\|\phi(t_0)\|+\bar{K}\tilde{B}_1\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}\|C(u,s)\|\exp(\mu(u-t_0))duds$$

$$\leq B_2\,\|\phi(t_0)\|+\bar{K}\tilde{B}L=B_4$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Teorem 8.4’ün şartları dikkate alındığında V_1 fonksiyoneli (8.2) sistemi boyunca türevi alındığında

$$V_1'(t)\leq-\mu V_1(t)+B_2\,\|q(t)\|\|x\|$$
$$\leq(-\mu+B_1^{-1}B_2\,\|q(t)\|)V_1(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin t_0 ’dan t ’ye integrali hesaplanırsa,

$$V_1(t)\leq V_1(t_0)\exp(-\mu(t-t_0))\exp(B_1^{-1}B_2\int_{t_0}^{t}\|q(s)\|)ds$$

$$\le V_1(t_0)\exp(B_1^{-1}B_2\int_{t_0}^{t}\|q(s)\|)ds$$

$$\le V_1(t_0)\exp(B_1^{-1}B_2\int_{t_0}^{\infty}\|q(s)\|)ds$$

elde edilir. $\int_0^{\infty}\|q(s)\|ds<\infty$ olduğundan $\int_0^{\infty}\|q(s)\|ds=B_3<\infty,\ B_3>0,\ B_3\in\Re$ alınabilir. Bu durumda

$$V_1(t)\le B_4\exp(B_1^{-1}B_2B_3)=K$$

yazılabilir. Böylece $t\to\infty$ için

$$B_1\|x(t,t_0,\phi)\|\le\|Bx(t,t_0,\phi)\|\le V_1(t)\le K$$

sonucuna varabiliriz. Bu nedenle (7.2) VİDD 'nin tüm çözümleri $t\to\infty$ iken sınırlı olur.

Sonuç

Teorem 8.4'ün ispatında Gronwall eşitsizliğinin kullanılmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Ancak ilgili literatüre bakıldığında çözümlerin sınırlılığı ile ilgili sonuçları elde etmede Lyapunov fonksiyonları ya da fonksiyonelleri kullanıldığında hemen hemen bütün çalışmalarda Gronwall eşitsizliğinin de kullanıldığı görülebilir. Bu çalışmada Gronwall eşitsizliğinin kullanılmaması bir bakıma ilgili literatürde ki sonuçların daha az kısıtlayıcı şartlar altında elde edilmesidir.

Bu bölümde lineer olmayan VİDD sitemlerinin bir sınıfı göz önüne alınmaktadır. Çözümlerin kararlılık, asimptotik kararlılık, düzgün kararlılık, integrallenebilirlik ve $t\to\infty$ için çözümlerin sınırlılığı için yeni yeterli koşullar oluşturulmaktadır. Yeni bir Lyapunov fonksiyoneli inşa edilerek bu kavramlarla ilgili dört yeni teorem ispatlanmaktadır. Çözümlerin sınırlılığı ile ilgili yapılan ispatta Gronwall eşitsizliği kullanılmamaktadır. Ayrıca bu bölümdeki sonuçlar literatürdeki birçok sonucu genellemekte ve geliştirmektedir. İlave olarak çözümlerin için $t\to\infty$ sınırlılığı ve integrallenebilirliği ile alakalı iki ilave sonuç verilmektedir.

9. DEĞİŞKEN GECİKMELİ BİR VİDD SİSTEMİ İÇİN ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZLERİ

Du (1995), aşağıdaki lineer değişken gecikmeli VİDD ele aldı:

$$x'(t) = Ax + Bx(t-\tau(t))\int_{t-\tau(t)}^{t} C(t,s)x(s)ds. \tag{9.1}$$

Burada, $x \in \Re^n, t \in \Re^+,\ \Re^+ = [0,\infty),\ \tau(t) \geq 0,$ türevlenebilir değişken gecikme fonksiyonu, $A = (a_{ij})_{n\times n}, n \geq 1,$ ve $B = (b_{ij})_{n\times n}$ sabit matrislerdir ve $C(t,s) = (C_{ij}(t,s))_{n\times n}$ ise $0 \leq s \leq t < \infty$ için $n\times n-$tipinde sürekli bir matristir.

Du (1995), (9.1) VİDD denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığını ispatlamak için yeni bir Lyapunov fonksiyoneli inşa etti ve bu fonksiyonel yardımıyla yeter şartlar içeren bir teorem ispatladı.

Bu bölümde, (9.1) VİDD'den esinlenerek aşağıdaki lineer olmayan

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Bx(t-\tau(t))\int_{t-\tau(t)}^{t} C(t,s)F(x(s))ds + Q(t,x) \tag{9.2}$$

VİDD sistemi ele alınmaktadır.

Bu denklemde $t \in \Re^+, \Re^+ = (0,\infty),\ x \in \Re^n,\ n \geq 1, A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ ve $C(t,s) = (C_{ij}(t,s))_{n\times n}$ matrisleri $-\tau(t_0) \leq 0 \leq s \leq t < \infty$ olmak üzere, sürekli matrisler ve $B = (b_{ij})_{n\times n},$ $n\times n-$ sabit bir matris, $F:\Re^n \to \Re^n,\ (F(0)=0)$ ve $Q:\Re^+ \times \Re^n \to \Re^n$ sürekli fonksiyonlardır.

$x(t) = x(t,t_0,\phi),$ (9.2) VİDD'nin bir çözümü olsun öyle ki; $[t_0-\tau(t_0),t_0], t_0 \geq 0$ aralığında $x(t) = \phi(t)$ ' dir. Burada, $\phi:[t_0-\tau(t_0),t_0] \to \Re^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonudur.

Bu bölümde, $Q(t,x) \equiv 0$ alınarak (9.2) VİDD sisteminin sıfır çözümün düzgün asimptotik kararlılığı, çözümlerinin integrallenebilirliği ve sınırlılığı incelenecektir. İlave olarak, bir sonraki adımda ise, $Q(t,x) \neq 0$ için lineer olmayan (9.2) VİDD sisteminin çözümlerinin $t \to \infty$ için sınırlı olması incelenecektir. Bu bölümün amacına ulaşmak için, lineer olmayan (9.2) VİDD sistemi için anlamlı sonuçlar veren bir Lyapunov fonksiyoneli tanımlanmaktadır.

Bu bölümde elde edilecek sonuçların ilgili literatüre katkıları şu şekilde açıklanabilir: (9.1) VİDD sisteminin lineer olduğu açıktır. Bununla beraber, (9.2) VİDD sistemi lineer değildir. Yani, (9.2) VİDD'mi, (9.1) VİDD sistemini hem kapsar ve geliştirir. Bu nedenle, burada (9.1) VİDD'mi ile ilgili sonuçlar lineer durumdan lineer olmayan (9.2) VİDD sistemi için geliştirilmekte ve genellenmektedir.

İlave olarak, Du (1995), lineer (9.1) VİDD'minin in sıfır çözümünün asimptotik kararlılığını inceledi. Bu bölümde çözümlerin bu niteliksel özelliğine ilave olarak, lineer olmayan (9.2) VİDD'nin çözümlerinin integrallenebilirliği ve sınırlılığını incelenmektedir. Bu kavramların incelenmesi, Du 'nun çalışmasına ek katkılardır.

Son olarak, Du 'nun varsayımlarını sağlayan özel hiçbir örnek vermemiştir. Bu makalede, sonuçların uygulanabilirliğini doğrulayan özel bir örnek sunuyoruz. Bu örnek de yine bu çalışmanın Du ve ilgili literatüre bir katkısıdır.

Şimdi, aşağıda verilen otonom olmayan fonksiyonel diferansiyel denklemini ele alalım:

$$\dot{x} = F(t, x_t). \tag{9.3}$$

Burada, $F:(-\infty,\infty)\times C \to \Re^n$, $F(t,0)=0,$ şeklinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur. $r>0$ bir sabit olmak üzere, $C=C([-r,0],\ \Re^n)$ ifadesi $\phi:[-r,0]\to\Re^n$ şeklinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir uzayını göstermektedir. Her $a\geq 0, t_0\geq 0$ ve $x\in C([t_0-r,t_0+a],\ \Re^n)$ olmak üzere $-r\leq\theta\leq 0$ ve $t\geq t_0$ için $x_t = x(t+\theta)$ olarak tanımlanmaktadır.

$x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\Re^n$ olsun. x 'in normu $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)$ ile tanımlansın. *A*, $n\times n-$ tipinde bir matris olsun. $\|A\|$ normu, $\|A\| = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ şeklinde tanımlanır. Bu bölüm çalışma boyunca $x(t)$ yerine bazen x yazılacaktır.

Herhangi bir $\phi\in C$ fonksiyonu için,

$$\|\phi\|_C = \sup_{\theta\in[-r,0]}\|\phi(\theta)\| = \|\phi(\theta)\|_{[-r,0]}$$

ve

$$C_H = \{\phi : \phi\in C \text{ ve } \|\phi\|_C \leq H < \infty\}$$

olarak tanımlansın.

Bu bölümde (9.2) VİDD'mindeki katsayı fonksiyonlarının ilgili denklemin çözümlerinin varlık ve tekliğini sağlayacak şekilde verildiği varsayılmaktadır. Yani katsayı fonksiyonların hem sürekli ve hem de Lipschitz şartını sağladığı kabul edilmektedir.

$V(t,0)=0$ olmak üzere

$$V(t,\phi):\Re^+\times C_H \to \Re^+, \Re^+ = [0,\infty)$$

t ve ϕ'ye göre sürekli bir fonksiyonel olsun. Ayrıca, $\frac{d}{dt}V(t,x(.))$, (9.3) VİDD'nin herhangi bir $x(t)$ çözümü boyunca $V(t,x(.))$ 'nın türevini göstersin.

Teorem 9.1 Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$(B1)$ $V(t,\phi)$ fonksiyoneli, ϕ'ye göre yerel Lipschitz koşulunu sağlar, yani, her kompakt $S \subset \Re^n$ ve $\gamma > t_0$ için pozitif bir $K_{\gamma s}$ sabiti vardır öyle ki; her $t \in [t_0, \gamma]$ ve $x, y \in C([t_0 - r, t_0], S)$ için,

$$\left|V(t,x(.)) - V(t,y(.))\right| \le K_{\gamma s} \left\|x - y\right\|_{[t_0 - r, t]}$$

eşitsizliği sağlansın.

$(B2)$ $Z(t,\phi)$ fonksiyoneli, t'ye göre tek taraflı yerel Lipschitz koşulunu sağlar. Yani, $0 < t_1 < t_2 < \infty$'yi sağlayan herhangi t_1 ve t_2 sayıları için, pozitif bir K sabiti vardır, öyle ki $\phi \in C_H$ için,

$$\mathrm{Z}(t_2,\phi) - \mathrm{Z}(t_1,\phi) \le K(t_2 - t_1)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\mathrm{Z} : \Re^+ \times C_H \to \Re^+$ sürekli bir fonksiyondur.

$(B3)$ $\omega(s), \omega_1(s), \omega_2(s)$ ve $\omega_3(s)$ wedge fonksiyonları vardır öyle ki; $t \in \Re^+$ ve $x_t \in C_H$ için,

$$\omega(\left\|\phi(0)\right\|) + \mathrm{Z}(t,\phi) \le V(t,\phi) \le \omega_1(\left\|\phi(0)\right\|) + Z(t,\phi),$$

$$\mathrm{Z}(t,\phi) \le \omega_2(\left\|\phi\right\|_C)$$

ve

$$\dot{V}(t,x(.)) \le -\omega_3(\left\|x(t)\right\|)$$

kabulleri sağlanır. Bu takdirde, (9.3) fonksiyonel diferansiyel denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

9.1. (9.2) VİDD'nin Çözümlerinin Niteliksel Davranışları

(9.2) VİDD'minde, $Q(t,x) \equiv 0$ alalım.

A. Varsayımlar

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$(A1)$ γ, k_0 ve L pozitif sabitler olmak üzere

$$\left\|F(x(s))\right\| \le \gamma \left\|x(s)\right\|,$$

$$\|F(x)-F(y)\| \le k_0 \|x-y\|$$

ve

$$\forall s \le t \text{ için } \int_t^{\infty} \|C(u,s)\| du \le L < \infty.$$

$(A2)$ d_i, δ, η, μ ve β_2 pozitif sabitleri vardır öyle ki;

$$d_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} d_j \left|a_{ji}(t)\right| \le -\delta,\ i = 1,2,...,n,$$

$$\delta - \mu\gamma \int_t^{\infty} \|C(u,t)\| du \ge \eta,$$

$$\mu(1-\tau'(t)) \int_t^{\infty} \|C(u,t-\tau(t))\| du \ge \beta_2 \gamma^{-1} \|B\|$$

ve

$$\mu - \beta_2 \ge 0 \text{ burada } \beta_2 = \max\{d_i\},\ i = 1,2,...,n.$$

Teorem 9.2 Eğer $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlanır ise,

$$0 \le \tau(t) \le \left(1 - \frac{\beta_2 \|B\|}{\gamma L}\right) + \tau(0)$$

eşitsizliği sağlanmak kaydıyla (9.2) VİDD'nin sıfır çözümü, düzgün asimptotik kararlı olur. Ayrıca, aynı şartlar altında (9.2) VİDD'nin tüm çözümleri integrallenebilirdir, yani; $x(t) \in L^1[0,\infty)$ 'dir. Burada $L^1[0,\infty)$ uzayı $[0,\infty)$ aralığı üzereinde Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca, (9.2) VİDD'nin tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat $V = V(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyonelini

$$V = \|Dx\| + \mu \int_{t-\tau(t)}^{t} \int_t^{\infty} \|C(u,s)\| du \, \|F(x(s))\| ds, \tag{9.4}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, $D = diag[d_1,...,d_n]$ olmak üzere $i = 1,2,...,n$ için $d_i > 0$ ve $\mu > 0, \mu \in \Re$ 'dir.

Böylece $V(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyonelinin, pozitif tanımlı olduğu açıktır. Gerçekten

$$V(t,0) = 0, V(t,x(.)) \ge \|Dx\|$$

şartlarının sağladığı görülmektedir. Ayrıca, verilen teoremin şartlarına bağlı olarak

$$\left|V(t,x(.)) - V(t,y(.))\right| \le \left| \ \|Dx\| - \|Dy\| \ \right|$$

$$+\mu\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|du[\|F(x(s))\|-\|F(y(s))\|]ds\right|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}d_i\left|x_i-y_i\right|+\mu k_0\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|du[\|x(s)\|-\|y(s)\|]ds$$

$$\leq\beta_2\|x-y\|+\mu k_0\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|du[\|x(s)\|-\|y(s)\|]ds$$

$$\leq\beta_2\|x-y\|+\mu k_0L\tau(t)\max_{t-\tau(t)\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\|$$

$$\leq(\beta_2+\mu k_0L\tau^*)\sup_{t-\tau^*\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\|$$

$$\leq K\sup_{t-\tau^*\leq s\leq t}\|x(s)-y(s)\|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $K=\beta_2+\mu k_0L\tau^*, \beta_2=\max\{d_i\}$ ve $\tau^*=\left(1-\frac{\beta_2\|B\|}{\gamma L}\right)+\tau(0)$ ’dır.

Böylece, $V(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyonelinin x ’e göre lokal Lipschitz şartını sağladığını söyleyebiliriz.

$$\beta_1=\min\{d_i\}, i=1,2,...,n$$

ve

$$Z(t,x(.))=\mu\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|du\|F(x(s))\|ds$$

olsun. Teoremin şartlarına bağlı olarak

$$\beta_1\|x\|+Z(t,x(.))\leq V(t,x(.))\leq\beta_2\|x\|+Z(t,x(.))$$

$$Z(t,x(.))=\mu\int_{t-\tau(t)}^{t}\int_{t}^{\infty}\|C(u,s)\|du\|F(x(s))\|ds\leq\mu L\int_{t-\tau(t)}^{t}\|x(s)\|ds$$

$$\leq\mu L\tau(t)\max_{t-\tau(t)\leq s\leq t}\|x(s)\|$$

$$\leq\mu\tau^*L\|x(s)\|_{[t-\tau^*,t]},$$

$$Z(t_2,x)-Z(t_1,x)=\mu\int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_2}\int_{t_2}^{\infty}\|C(u,s)\|du\|F(x(s))\|ds-\mu\int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_1}\int_{t_1}^{\infty}\|C(u,s)\|du\|F(x(s))\|ds$$

$$=\mu\int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_2}\int_{t_2}^{\infty}\|C(u,s)\|du\|F(x(s))\|ds+\mu\int_{t_1}^{t_1-\tau(t_1)}\int_{t_1}^{\infty}\|C(u,s)\|du\|F(x(s))\|ds$$

$$+\mu \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_2-\tau(t_2)} \int_{t_1}^{\infty} \|C(u,s)\| du \|F(x(s))\| ds - \mu \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_2-\tau(t_2)} \int_{t_1}^{\infty} \|C(u,s)\| du \|F(x(s))\| ds$$

$$\leq \mu \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{\infty} \|C(u,s)\| du \|F(x(s))\| ds - \mu \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_2-\tau(t_2)} \int_{t_1}^{\infty} \|C(u,s)\| du \|F(x(s))\| ds$$

$$\leq \mu \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{\infty} \|C(u,s)\| du \|F(x(s))\| ds \leq \mu\gamma L \int_{t_1}^{t_2} \|x(s)\| ds \leq \mu\gamma LM(t_2 - t_1)$$

elde edilir. Burada

$$M = \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} \|x(s)\| \quad \text{ve } 0 < t_1 < t_2 < \infty$$

dır.

Böylece, $V(t, x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli ve (9.2) VİDD'nin çözümleri boyunca t bağımsız değişkenine göre türevi alındığında,

$$\frac{d}{dt} V^{+}(t, x(.)) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i'(t) \operatorname{sgn} x_i(t+0) + \mu \|F(x(t))\| \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du$$

$$-\mu(1-\tau'(t)) \|F(x(t-\tau(t)))\| \int_{t}^{\infty} \|C(u, t-\tau(t))\| du$$

$$-\mu \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s))\| \; \|F(x(s))\| ds \tag{9.5}$$

bulunur. $(A1)$ ve $(A2)$ şartları kullanıldığında,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \operatorname{sgn} x_i(t+0) x_i'(t) \leq \sum_{i=1}^{n} [d_i a_{ii}(t) |x_i| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_j \left|a_{ji}(t)\right| \; |x_i|$$

$$+\beta_2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| \; \left|x_j(t-\tau(t))\right| + \int_{t-\tau(t)}^{t} \sum_{j=1}^{n} d_i \left|C_{ij}(t,s))\right| \; \left|F_j(x(s))\right| ds]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} [d_i a_{ii}(t) |x_i| + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_j \left|a_{ji}(t)\right| \; |x_i|] + \beta_2 \|B\| \; \|x(t-\tau(t))\|$$

$$+\beta_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \; \|F(x(s))\| ds$$

$$\leq -\delta \|x\| + \beta_2 \|B\| \; \|x(t-\tau(t))\|$$

$$+\beta_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \|F(x(s))\| ds \tag{9.6}$$

elde edilir. (9.5) ve (9.6) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında kolaylıkla,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V^{+}(t,x(.)) \leq & -[\delta - \mu\gamma \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du] \|x\| \\
& - \mu(1-\tau'(t)) \|F(x(t-\tau(t)))\| \int_{t}^{\infty} \|C(u,t-\tau(t))\| du \\
& + \beta_2 \|B\| \; \|x(t-\tau(t))\| - \mu \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \; \|F(x(s))\| ds \\
& + \beta_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \; \|F(x(s))\| ds \\
& \leq -[\delta - \mu\gamma \|x\| \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du] \|x\| \\
& - [\mu(1-\tau'(t)) \int_{t}^{\infty} \|C(u,t-\tau(t))\| du - \beta_2 \gamma^{-1} \|B\|] \|F(x(t-\tau(t)))\| \\
& - \mu \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \; \|F(x(s))\| ds + \beta_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} \|C(t,s)\| \; \|F(x(s))\| ds
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $\mu = \beta_2$ olsun. Bu takdirde, bir önceki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V^{+}(t,x(.)) \leq & -[\delta - \mu\gamma \int_{t}^{\infty} \|C(u,t)\| du] \|x\| \\
& - [\mu(1-\tau'(t)) \int_{t}^{\infty} \|C(u,t-\tau(t))\| du - \beta_2 \gamma^{-1} \|B\|] \|F(x(t-\tau(t)))\|
\end{aligned} \tag{9.7}$$

eşitsizliğine varılır. Böylece $(A1)$ ve $(A2)$ şartları ve (9.7) eşitsizliği yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}V^{+}(t,x(.)) \leq -\eta \|x\|$$

sonucuna varılır. Bu son eşitsizliğin t_0 'dan t 'ye integrallendiğinde,

$$V_1(t,x(.)) - V_1(t_0,\phi(t_0)) \leq -\eta \int_{t_0}^{t} \|x(s)\| ds, \; t \geq t_0$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\eta \int_{t_0}^{t} \|x(s)\| ds \leq V_1(t_0,\phi(t_0)) - V_1(t,x(.)) \leq V_1(t_0,\phi(t_0))$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buna bağlı olarak,

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(s)\| ds \le V_1(t, x(.)) \le \eta^{-1} V_1(t_0, \phi(t_0))$$

eşitsizliği elde edilir.

$\eta^{-1} V_1(t_0, \phi(t_0)) = A_0,\ A_0 > 0,\ A_0 \in \Re$ olsun.

Burada $A_0 \in \Re,\ A_0 > 0$ 'dir. Bu takdirde, son eşitsizlikten,

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(s)\| ds \le A_0 < \infty$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, (9.2) VİDD'nin tüm çözümlerinin $[t_0, \infty)$ aralığında integrallenebilir olduğu sonucuna varılır.

Şimdi ise (9.2) VİDD'nin çözümlerinin sınırlı olduğunu gösterelim.

Yukarıdaki incelemeler sonucunda,

$$\frac{d}{dt} V^{+}(t, x(.)) \le 0$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizliğin t_0 'dan t 'ye integrali alındığında

$$V_1(t, x(.)) - V_1(t_0, \phi(t_0)) \le 0,\ \forall t \ge t_0$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde

$$\beta_1 \|x\| \le \|Dx\| \le V_1(t, x(.)) \le V_1(t_0, \phi(t_0))$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\beta_1^{-1} V_1(t_0, \phi(t_0)) = B_0,\ B_0 > 0,\ B_0 \in \Re$$

olsun. Buradan

$$\|x(t)\| \le B_0,\ \forall t \ge t_0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ise (9.2) VİDD'nin tüm çözümlerinin sınırlı olduğu sonucuna vazılır . Teorem 9.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 9.1 $(A1)$ ve $(A2)$ şartları sağlandığı takdirde, (9.2) VİDD'nin sıfır çözümü hem kararlı hem de düzgün kararlıdır.

(9.2) VİDD'minde , $Q(t, x) = 0$ olsun.

Örnek 9.1 Aşağıdaki lineer olmayan sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6\exp(-2t) & -\exp(-3t) \\ -\exp(-3t) & -3-6\exp(-3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8^{-1} & 0 \\ 0 & 8^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-4^{-1}) \\ x_2(t-4^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$+\int_{t-\frac{1}{4}}^{t} \begin{pmatrix} \exp(-2t+s) & 0 \\ \exp(-2t+s)\sin s & \exp(-t+s+4^{-1})+2\exp(-2t+s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{-1}\sin x_1(s) \\ 4^{-1}\sin x_2(s) \end{pmatrix} ds. \tag{9.8}$$

Burada, $t \geq \dfrac{1}{4}$, $\tau(t) = \dfrac{1}{4}$, $\tau'(t) = 0$, ve $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = x(t) = x \in \Re^2$ ’dir

Eğer, (9.8) VİDD sistemi ile (9.2) VİDD sistemini karşılaştırdığımızda

$$A(t) = \begin{pmatrix} -3-6\exp(-2t) & -\exp(-3t) \\ -\exp(-3t) & -3-6\exp(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 8^{-1} & 0 \\ 0 & 8^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\Omega(t,s) = \begin{pmatrix} \exp(-2t+s) & 0 \\ \exp(-2t+s)\sin s & \exp(-t+s+4^{-1})+2\exp(-2t+s) \end{pmatrix}$$

ve

$$F(x(s)) = \begin{pmatrix} 4^{-1}\sin x_1(s) \\ 4^{-1}\sin x_2(s) \end{pmatrix}$$

elde ederiz.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olsun.

Bu durumda,

$$d_1 = d_2 = \beta_1 = \beta_2 = \mu = 1,$$

$$\|F(x(s))\| = \left\| \begin{pmatrix} 4^{-1}\sin x_1(s) \\ 4^{-1}\sin x_2(s) \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{4}|\sin x_1(s)| + \frac{1}{4}|\sin x_2(s)|$$

$$\leq \frac{1}{4}[|x_1(s)| + |x_2(s)|] = \frac{1}{4}\|x(s)\|,\ \gamma = \frac{1}{4},$$

$$\|F(x(s)) - F(y(s))\| = \left\| \begin{pmatrix} 4^{-1}[\sin x_1(s) - \sin y_1(s)] \\ 4^{-1}[\sin x_2(s) - \sin y_2(s)] \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{4}|\sin x_1(s) - \sin y_1(s)| + \frac{1}{4}|\sin x_2(s) - \sin y_2(s)|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{x_1(s)+y_1(s)}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1(s)-y_1(s)}{2}\right)\right|$$

$$+\frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{x_2(s)+y_2(s)}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2(s)-y_2(s)}{2}\right)\right|$$

$$\leq 4^{-1}[|x_1(s)-y_1(s)|+|x_2(s)-y_2(s)|]$$

$$= 4^{-1}\|x(s)-y(s)\|,\ k_0 = \frac{1}{4}$$

elde ederiz.

Böylece,

$$d_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{2} d_j\,|a_{ji}(t)|$$

$$= a_{ii}(t) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{2} |a_{ji}(t)| \leq -\delta$$

$$\Rightarrow a_{11}(t) + a_{21}(t) = -3 - 6\exp(-2t) - \exp(-3t) \leq -3 = -\delta$$

ve

$$\Rightarrow a_{22}(t) + a_{12}(t) = -3 - 6\exp(-3t) - \exp(-3t) \leq -3 = -\delta$$

elde ederiz.

Şimdi ise

$$\|B\| = \frac{1}{8}$$

olsun.

Bu durumda,

$$\|\Omega(t,s)\| = \max_{1\leq j\leq 2}\left(\sum_{i=1}^{2}|\Omega_{ij}|\right) = = \left\|\begin{pmatrix} \exp(-2t+s) & 0 \\ \exp(-2t+s)\sin s & \exp(-t+s+4^{-1})+2\exp(-2t+s)\end{pmatrix}\right\|$$

$$= \max\{\exp(-2t+s)+\exp(-2t+s)|\sin s|,\ \exp(-t+s+4^{-1})+2\exp(-2t+s)\}$$

$$= \exp(-t+s+4^{-1})+2\exp(-2t+s),\ 0\leq 4^{-1}+s\leq t,$$

$$\|\Omega(u,s)\| = \exp(-u+s+4^{-1})+2\exp(-2u+s),\ \ 0\leq 4^{-1}+s\leq u,$$

$$\int_t^{\infty}\|\Omega(u,s)\|\,du = \int_t^{\infty}\exp(-u+s+4^{-1})du + 2\int_t^{\infty}\exp(-2u+s)du$$

$$= \exp(-t+s+4^{-1})+\exp(-2t+s)\leq 2 = L<\infty,\ \ 0\leq 4^{-1}+s\leq t,$$

$$\|\Omega(u,t)\| = \exp(-u+t+4^{-1})+2\exp(-2u+t),\ \ 0\leq 4^{-1}+t\leq u,$$

$$\int_t^\infty \|\Omega(u,t)\|\,du = \int_t^\infty \exp(-u+t+4^{-1})du + 2\int_t^\infty \exp(-2u+t)du$$

$$= \exp(4^{-1}) + \exp(-t) \le 2 < \infty,$$

$$\delta - \mu\gamma\int_t^\infty \|\Omega(u,t)\|\,du = 3 - 4^{-1}[\exp(4^{-1}) + \exp(-t)] > 1 = \eta,$$

$$\|\Omega(u,t-\tau(t))\| = \left\|\Omega(u,t-\frac{1}{4})\right\| = \exp(-u+t),\ 0 \le t \le u,$$

$$\int_t^\infty \|\Omega(u,t-\tau(t))\|\,du = \int_t^\infty \exp(-u+t)du = 1 > 0,$$

$$\mu(1-\tau'(t))\int_t^\infty \|\Omega(u,t-\tau(t))\|\,du = \int_t^\infty \left\|\Omega(u,t-\frac{1}{4})\right\|du$$

$$= 1 > 0,$$

$$\beta_2\gamma^{-1}\|B\| = 4\|B\| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\mu(1-\tau'(t))\int_t^\infty \|\Omega(u,t-\tau(t))\|\,du = 1 > \frac{1}{2} = \beta_2\gamma^{-1}\|B\|,$$

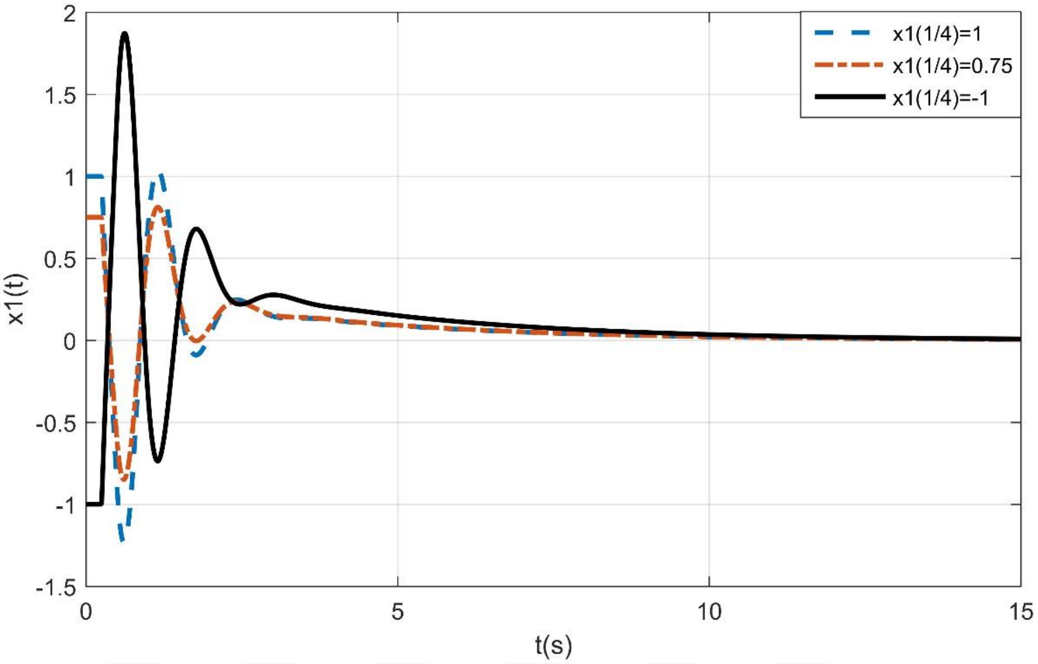
$$\mu - \beta_2 = 1 - 1 = 0$$

ve

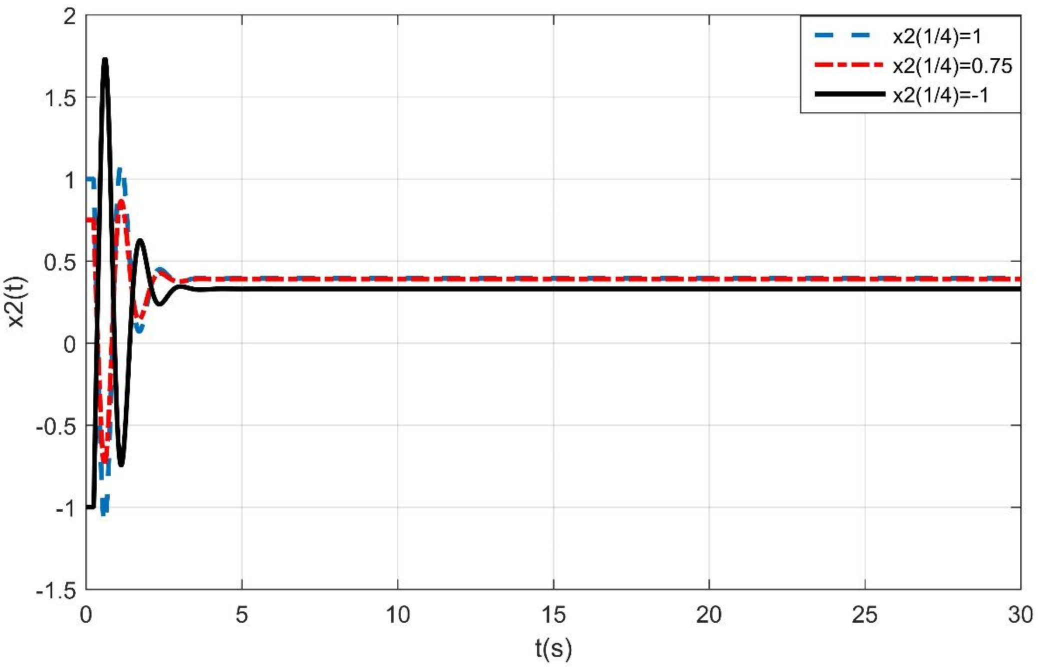
$$0 \le \tau(t) = \frac{1}{4} < \left(1 - \frac{\beta_2\|B\|}{\gamma L}\right) + \tau(0) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = 1$$

elde ederiz.

Böylece, Teorem 9.2’nin tüm şartları sağlanmış olur. Bu nedenle (9.8) VİDD sisteminin sıfır çözümü $x(t) = 0$ için düzgün asimptotik kararlıdır ve sıfırdan farklı çözümleri sınırlı ve integrallenebilirdir.



Şekil 9.1 (9.8) VİDD sisteminin $x_1(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.



Şekil 9.2 (9.8) VİDD sisteminin $x_2(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.

Şimdi ise (9.2) VİDD'minde $Q(t,x) \neq 0$ alalım.

B. Varsayımlar

Aşağıdaki şartlarının sağlandığını kabul edelim.

$(A3)$ Sürekli negatif olmayan bir $q(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\int_{t_0}^{\infty} |q(t)|\, dt < \infty$$

olmak üzere

$$\|Q(t,x(t))\| \le |q(t)| \|x(t)\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 9.3 Eğer $(A1)-(A3)$ şartları sağlanır ise, bu takdirde (9.2) VİDD' nin tüm çözümleri $t \to \infty$ için sınırlıdır.

İspat $V(t,x(.))$ Lyapunov fonksiyoneli, (9.2) VİDD ve $(A1)-(A3)$ şartları yardımıyla,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V^{+}(t,x(.)) &\le -\eta\|x\| + \|Q(t,x)\| \\ &\le -\eta\|x\| + |q(t)|\|x\| \\ &\le \beta_1^{-1}|q(t)| V(t,x)\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Son eşitsizlik t_0'dan t'ye integrallendiğinde,

$$V(t,x(.)) \le V(t_0,\phi(t_0))\exp(\beta_1^{-1}\int_{t_0}^{\infty}|q(s)|)ds$$

eşitsizliği bulunur. Burada,

$$V(t_0,\phi(t_0))\exp(\beta_1^{-1}\int_{t_0}^{\infty}|q(s)|)ds = K_0 > 0,\ K_0 \in \Re$$

alalım.

Böylece $t \to \infty$ için aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$\|x(t)\| \le \beta_1^{-1}K_0$$

Böylece, Teorem 9.3' ün ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 9.2 Teorem 9.2'nin ispatında Gronwall eşitsizliği kullanılmadan $t \to \infty$ iken çözümlerin sınırlılığı elde edilmektedir. Gronwall eşitsizliğinin kullanılmaması bir anlamda literatürdeki ilgili çalışmalardaki şartların hafifletilmesi avantajını sağlar. Ayrıca, ilgili çalışmalardaki Gronwall eşitsizliğinin gerekmediği sonucuna varılır.

Örnek 9.2 $Q(t,x) \ne 0$ için lineer olmayan VİDD sistemini göz önüne alalım:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-6\exp(-2t) & -\exp(-3t) \\ -\exp(-3t) & -3-6\exp(-3t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8^{-1} & 0 \\ 0 & 8^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t-4^{-1}) \\ x_2(t-4^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$+\int_{t-\frac{1}{4}}^{t}\begin{pmatrix} \exp(-2t+s) & 0 \\ \exp(-2t+s)\sin s & \exp(-t+s+4^{-1})+2\exp(-2t+s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{-1}\sin x_1(s) \\ 4^{-1}\sin x_2(s) \end{pmatrix}ds$$

$$+\begin{pmatrix} \dfrac{2t}{1+t^4+x_1^4} \\ \dfrac{2tx_2}{1+t^4+x_2^4} \end{pmatrix}. \qquad (9.9)$$

Burada, $t \geq \dfrac{1}{4}$, $\tau(t) = \dfrac{1}{4}$, $\tau'(t) = 0$, ve $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = x(t) = x \in \Re^2$ ’dir.

(9.9) VİDD sistemi ile (9.2) VİDD sistemini karşılaştırdığımızda Örnek 9.1’deki $A(t)$, B, $\Omega(t,s)$ $F(x(s))$ ve D fonksiyonlarını elde ederiz. Burada Teorem 9.2 şartlarının sağlanması gerekmez.

Bu durumda,

$$Q(t,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{2tx_1}{1+t^4+x_1^4} \\ \dfrac{2tx_2}{1+t^4+x_2^4} \end{pmatrix},$$

elde ederiz.

Burada, $t \geq 0$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Re^2$ ’dir.

Ayrıca

$$\|Q(t,x\| = \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{2tx_1}{1+t^4+x_1^4} \\ \dfrac{2tx_2}{1+t^4+x_2^4} \end{pmatrix} \right\| = \frac{2t|x_1|}{1+t^4+x_1^4} + \frac{2t|x_2|}{1+t^4+x_2^4}$$

$$\leq \frac{2t|x_1|}{1+t^4} + \frac{2t|x_2|}{1+t^4} = \frac{2t}{1+t^4}[|x_1|+|x_2|] = |q(t)|\|x\|,$$

dır.

Burada,

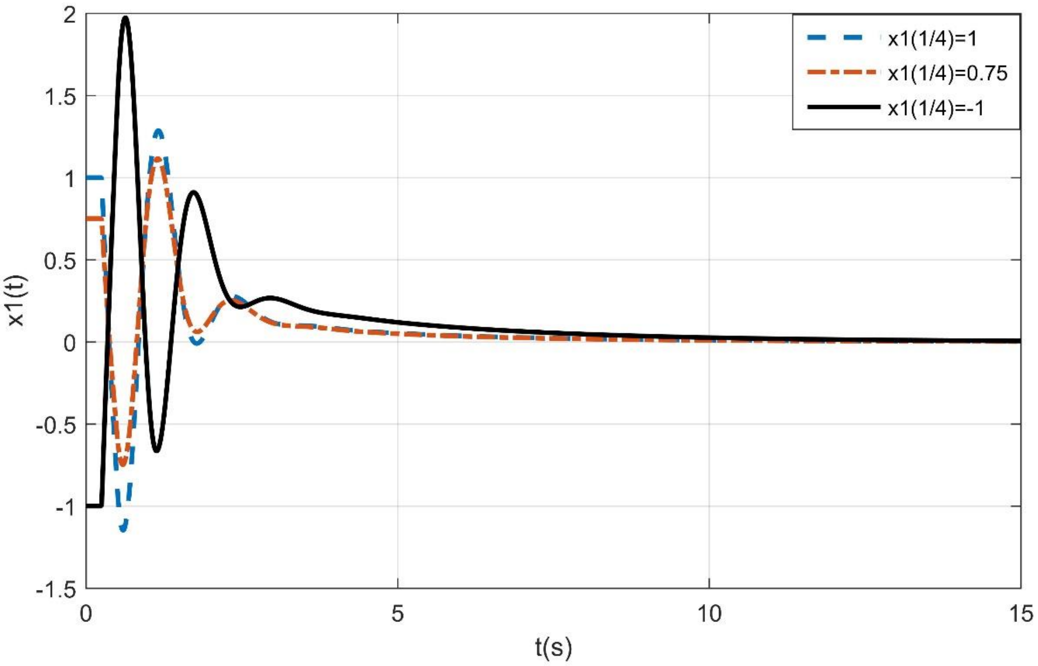
$$|q(t)| = \frac{2t}{1+t^4} \quad \text{ve} \quad |x_1| + |x_2| = \|x\|$$

dır.

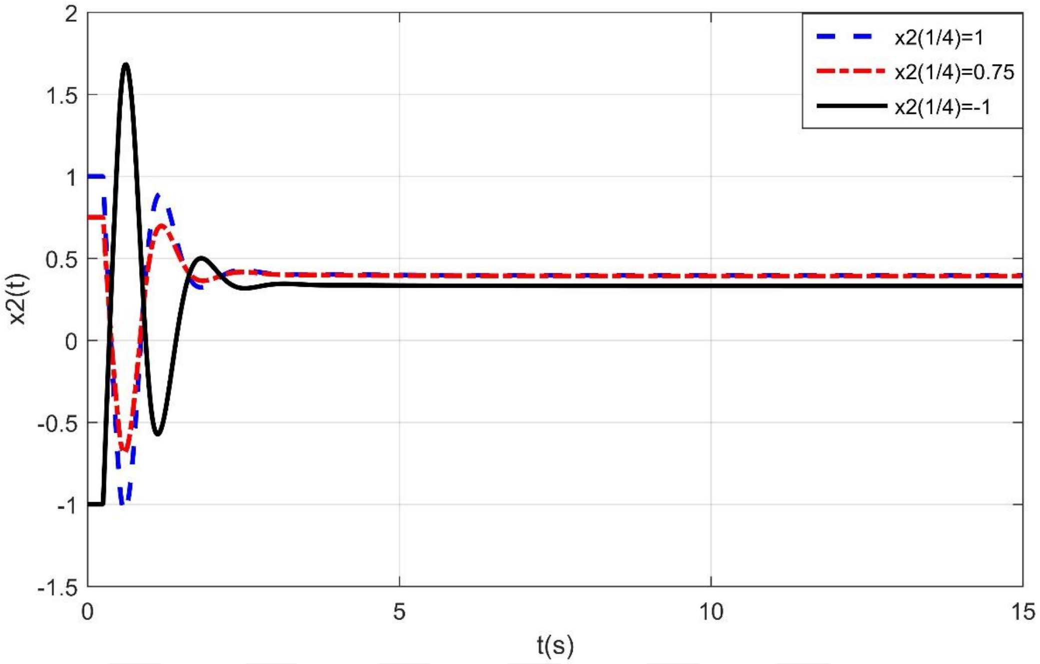
$|p(t)|$ fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında integralini aldığımızda,

$$\int_{t_0}^{\infty} |\, q(t)|\, dt = \int_0^{\infty} |q(t)|\, dt = \int_0^{\infty} \frac{2t}{1+t^4}\, dt = \frac{\pi}{2} < \infty$$

elde ederiz. Böylece, Teorem 9.3'ün tüm şartları sağlanmış olur. Bu durumda $t \to \infty$ için (9.9) VİDD sisteminin çözümleri sınırlıdır.



Şekil 9.3 (9.9) VİDD sisteminin $x_1(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.



Şekil 9.4 (9.9) VİDD sisteminin $x_2(t)$ çözümünün yörüngelerinin davranışları.

Sonuç

Bu bölümde, Du (1995) tarafından incelenen lineer VİDD sistemi ve bu sistemin bazı niteliksel davranışlar için yeter şartlar içeren sonuçlar göz önünde bulundurularak, ilgili lineer VİDD sistemi yerine lineer olmayan değişken gecikmeli bir VİDD sistemi ele alındı. Bu sistemin sıfır çözümünün kararlılık, asimptotik kararlık ve çözümlerinin ise sınırlılığı incelenmiştir. Elde edilen sonuçların uygulanabilirliğini gösteren açıklayıcı bir örnekler verilmiştir. MATLAB-Simulink yardımı ile verilen örneklerin çözümlerin yörüngelerinin hareketleri gösterilmiştir.

10. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde farklı formda Volterra integro-diferansiyel denklemler ele alındı. Ele alınan denklem modellerinin bir kısmı skaler formda, bir kısmı vektör formunda ve bir kısmı ise sistem formunda skaler olarak ifade edilmektedir. Ayrıca, bu denklemler, yerine göre, sabit gecikmeli, değişken gecikmeli, sonsuz gecikmeli ve gecikmesiz olarak verilmektedir. Burada çalışılan denklemler, literatürde çalışılmış bulunan denklemlerden farklı forma sahiptir.

Bu tezde Du (1995), Raffoul ve Rai (2016), Seifert (1973), Wang (1998), Wang ve ark. (1992) ve Xu (1998) çalışmaları ve bu tezin literatüründeki kaynaklardan esinlenerek ele alınan denklemlerin, çözümlerinin karalılık, sınırlılık, integrallenebilirlik vb. davranışları incelendi. Tezdeki yeni sonuçları ispatlamak için Lyapunov'un ikinci (doğrudan) metodu ve Lyapunov- Razumikhin metodu olmak üzere iki farklı yöntem kullanıldı. Bu yöntemlerin temel ve ortak özelliği, incelenen denklemlerin çözümlerinin yapıları hakkında önceden bir bilgi sahibi olmaksızın, bu yöntemlerin kullanımı ile çözümlerin davranışlarını belirleyebilmektir. Bu yöntemlerden birincisi kullanılırken, yeni Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelleri tanımlanarak ispatlar yapıldı. Tezin diğer bölümlerinde ise Lyapunov- Razumikhin metodu (yöntemi) kullanıldı. Literatürde yapılan gözlemlere göre, bu metodun ilk defa tamsayı mertebeli sabit gecikmeli bir integro diferansiyel denklemin çözümlerinin niteliksel davranışlarını incelmede kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca, bu yöntemin sonuçlara ulaşmada son derece etkin olduğu görülmektedir. Burada, çözümlerin sınırlılık ve integrallenebilirliği ile ilgili sonuçlarda, Gronwall eşitsizliği kullanılmadı. Bu olumlu durum, ispatlarda kullanılan Lyapunov-Krasovskii fonksiyonellerinin yapısından kaynaklanmaktadır. Bu eşitsizliğin kullanılmaması sonuçlarda daha hafifletici şartların gelmesine yol açabilmektedir. Bir denklem sistemi hariç, ele alınan tüm denklemlere ait niteliksel sonuçları özelde doğrulayıcı ve bu sonuçların uygulanabilirliğini gösteren örnekler verilip, çözümlerin davranışlarını belirleyen grafikler verildi.

Sonuç olarak, bu tezde ele alınan denklem modelleri ve onların çözümlerinin niteliksel davranışlar fizik, mühendislik, vb. bir çok alanda uygulamalara sahiptir. Bu nedenle, bu tezde ele alınan problemlerin ilgili literatüre katkılarının olabileceği düşünülmektedir. Ayrıca yeni problemler olarak, çalışılan denklemlerin kesir basamaklı matematiksel modellerinin çözümlerinin söz konusu olan ve farklı niteliksel davranışları çalışılabilir. Yöntem olarak ise, sabit nokta metodu, lineer modeller için Laplace dönüşümü, perturbe yöntemler, dönüşüm ve eşitsizlik teknikleri, nümerik yaklaşımlar, vb. düşünülebilir.

KAYNAKLAR

Adıvar, M., Raffoul, Y. N., 2012. Inequalities and exponential stability and instability in finite delay VIDEs. ***Rend. Circ. Mat. Palermo***. **61** (3):321–330.

Ahmad, S., Rama Mohana Rao, M., 1999. ***Theory of Ordinary Differential Equations with Applications in Biology and Engineering.*** Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi.

An, W., Jin, Z. M., 1996. Stability of Volterra integro-differential equations. ***Acta Math. Sci.*** 16 (2): 214–219.

Becker, L. C., 2007. Function bounds for solutions of Volterra equations and exponential asymptotic stability. ***Nonlinear Anal.*** **67** (2): 382-397.

Becker, L. C., 2009. Uniformly continuous L^1 solutions of Volterra equations and global asymptotic stability. ***Cubo.*** **11** (3): 1–24.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., 1997. ***Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.*** *John Wiley & Sons, Inc., New York. vi+* 749.

Burton, T. A., 1979. Stability theory for Volterra equations. ***J. Differential Equations*. 32** (1): 101–118.

Burton, T. A., 1982. Construction of Liapunov functionals for Volterra equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **85** (1): 90–105.

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1983. Stability criteria for Volterra equations. ***Trans. Amer. Math. Soc.,*** **279** (1): 143–174

Burton, T. A., Mahfoud, W. E., 1985. Stability by decompositions for Volterra equations. ***Tohoku Math. J.*** **37** (4): 489–511.

Burton, T. A., 1993. Boundedness and periodicity in integral and integro-differential equations. ***Differential Equations Dynam. Systems,*** **1** (2): 161-172.

Burton, T. A., 2005. ***Volterra Integral and Differential Equations.*** Second edition. Mathematics in Science and Engineering, 202. Elsevier B. V., Amsterdam.

Burton, T. A., 2005. ***Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations.*** *Dover Publications, Inc., Mineola, NY,*. x+342.

Burton, T. A., 2005. Fixed points, Volterra equations, and Becker's resolvent. ***Acta Math. Hungar***. **108** (3): 261–281.

Burton, T.A., Haddock, J. R., 2009. Qualitative properties of solutions of integral equations. ***Nonlinear Anal.*** **71** (11): 5712-5723.

Burton, T. A., 2010. A Liapunov functional for a singular integral equation**.** ***Nonlinear Anal.*** **73** (12): 3873–3882.

Burton, T. A., Purnaras, I. K., 2012. $L^p -$solutions of singular integro-differential equations**.** ***J.Math. Anal. Appl.*** **386** (2): 830–841.

Burton, T. A., Purnaras, I. K., 2013. Singular integro-differential equations with small kernels. J . ***Integral Equations Appl.*** **25** (1): 1–20.

Burton, T. A., Purnaras, I. K., 2013 Volterra's linear equation and Krasnoselskii's hypothesis. ***Commun. Appl. Anal.*** **17** (3-4): 529–553.

Burton, T. A., Purnaras, I. K., 2014. Krasnoselskii's unification, Volterra's integro-differential equation, and the method of Aizerman. ***Nonlinear Stud.*** **21** (1): 1–19.

Corduneanu, C., 1977. ***Principles of Differential and Integral Equations.*** Second edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, New York. xii+205.

Costarelli, D., Spigler, R., 2014. A collocation method for solving nonlinear Volterra integro-differential equations of neutral type by sigmoidal functions. ***J. Integral Equations Appl.*** **26** (1): 15–52.

Chang, X., Wang, R., 2011. Stability of perturbed n -dimensional Volterra differential equations. ***Nonlinear Anal.*** **74** (5): 1672–1675.

Diamandescu, A., 2006. On the strong stability of a nonlinear Volterra integro-differential system. ***Acta Math. Univ. Comenian.*** **75** (2): 153–162.

Dung, N.T., 2013. New stability conditions for mixed linear Levin-Nohel integro- differential equations. ***J. Math. Phys.*** **54** (8): 082705, 11.

Dung, N.T. , 2015. On exponential stability of linear Levin-Nohel integro-differential equations. ***J. Math. Phys.*** **56** (2): 1- 10.

El Hajji, M., 2019. Boundedness and asymptotic stability of nonlinear Volterra integro-differential equations using Lyapunov functional. ***Journal of King Saud University Science.*** **31 (4):** 1516-1521.

Furumochi, T., Matsuoka, S., 1999. Stability and boundedness in Volterra integro-differential equations. ***Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci.*** **32**: 25–40.

Grimmer, R., Zeman, M., 1982. Nonlinear Volterra integro-differential equations in a Banach space. ***Israel J. Math.*** **42**: 162–176.

Gripenberg, G., Londen, S., Staffans, O., 1990. ***Volterra Integral and Functional Equations.*** *Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge*. xxii+701.

Graef, J. R., Tunç, C., 2015. Continuability and boundedness of multi-delay functional integro-differential equations of the second order. ***Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat.Ser. A Math. RACSAM*** **109** (1):169–173

Graef, J. R., Tunç, C., Şevgin S., 2016. Behavior of solutions of non-linear functional Voltera integro -differential equations with multiple delays. ***Dynam. Systems Appl.*** **25** (1-2): 39-46.

Grossman, S. I., Miller, R. K., 1970. Perturbation theory for Volterra integro-differential systems ***J. Differential Equations*** **8**: 457–474.

Hale, J. K., 1977. ***Theory of Functional Differential Equations.*** Second edition. Applied Mathematical Sciences, Vol. 3. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

Hale, J. K., Verduyn L.,, Sjoerd M., 1993***. Introduction to Functional-Differential equations.*** Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, New York.

Hara, T., Yoneyama, T., Itoh, T., 1989. On the characterization of stability concepts of Volterra integro-differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **142** (2): 558–572.

Hara, T., Yoneyama, T., Itoh, T. , 1990. Asymptotic stability criteria for nonlinear Volterra integro-differential equations. ***Funkcial. Ekvac.*** **33** (1): 39–57.

Hara, T., Yoneyama, T., Miyazaki, R., 1992. Volterra integro-differential inequality and Asymptotic criteria. ***Differential Integral Equations*** **5** (1): 201–212.

Hino, Y., Murakami, S., 2005. Stability properties of linear Volterra integro- differential Equations in aBanach space. ***Funkcial. Ekvac.*** **48** (3): 367–392.

Hristova, S., Tunc, C., 2019. Stability of nonlinear Volterra integro-differential equations with Caputo fractional derivative and bounded delays. ***Electron. J. Differential Equations*** (30): 11.

Hsu, S. B., 2013 ***Ordinary Differential Equations with Applications.*** Second edition. Series on Applied Mathematics, 21. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ*. xiv+297.

Islam, M. N., Raffoul, Y., 2003. Stability properties of linear Volterra Integro-differential Integro-differential equations with nonlinear perturbation. ***Commun. Appl.Ana*** **7** (2-3): 405–416.

Lakshmikantham, V., Rama Mohana Rao, M., 1995. ***Theory of Integro-Differential Equations. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 1.*** Gordon and Breach Science Publishers, Lausanne. x+362.

Mahfoud, M. E., 1987. Boundedness properties in Volterra integro-differential systems. ***Proc. Amer. Math. Soc.*** **100** (1): 37–45.

Miller, R. K., 1971. Asymptotic stability properties of linear Volterra integro-differential equations. ***J. Differential Equations*** **10**: 485–506.

Mesmouli, M. B., Ardjouni, A., Djoudi, A., 2015 . Stability in nonlinear Levin-Nohel integro-ifferential equations. ***Nonlinear Stud.*** **22** (4): 705–718.

Morchalo, J., 1991. Stability theory for Volterra equations. ***Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.*** 21 (2): 175–183.

Morchało, J., 1991. Asymptotic equivalence of Volterra integro-differential equations. ***Rad. Mat.*** **7** (2): 207–216.

Murty, K. N., Srinivas, M. A. S., Narasimham, V. A., 1988. Asymptotic behaviour of solutions of matrix integro-differential equations. ***Tamkang J. Math.*** **19** (1): 29–36.

Napoles, V. J. E., 2001. A note on the boundedness of an integro-differential equation. ***Quaest. Math.*** **24** (2): 213–216.

Ngoc, P. H. A. , 2013. On stability of a class of integro-differential equations. ***Taiwanese J. Math.*** **17** (2): 407–425.

Peschel, M., Mende, W., 1986. ***The Predator-prey Model: Do We live in a Volterra World?*** *Springer-Verlag, Vienna,* xi+251.

Rama Mohana Rao, M., Srinivas, P., 1983. Positivity and boundedness of solutions of Volterra integro-differential equations. ***Libertas Math***. (3): 71–81.

Rama Mohana Rao, M., Srinivas, P., 1984. Stability of functional-differential equations of Volterra type. ***Bull. Austral. Math. Soc.*** **29** (1): 93–100.

Rama Mohana Rao, M., Srinivas, P., 1985. Asymptotic behavior of solutions of Volterra integro- differential equations. ***Proc. Amer. Math. Soc.*** **94** (1): 55–60.

Rama Mohana Rao, M., Raghavendra, V., 1987. Asymptotic stability properties of Volterra integro- differential equations. ***Nonlinear Anal.*** **11** (4): 475–480.

Raffoul, Y., N., 2004 Boundedness in nonlinear functional differential equations with applications to Volterra integrodifferential equations. ***J. Integral Equations Appl.*** **16** (4): 375–388.

Raffoul, Y., N., 2007. Construction of Lyapunov functionals in functional differential equations with applications to exponential stability in Volterra integro-differential equations. Aust. ***J. Math. Anal. Appl***. **4** (2): 13.

Raffoul, Y., N., 2009. Exponential analysis of solutions of functional differential equations with unbounded terms. ***Banach J. Math. Anal.*** **3** (2): 28–41.

Raffoul, Y., 2013. Exponential stability and instability in finite delay nonlinear Volterra integro- differential equations. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser***. A Math. Anal.*** **20** (1): 95–106.

Raffoul, Y., Sanbo, A. Y., Raffoul, A.S., 2016. Boundedness and stability results for the finite delay nonlinear Volterra discrete system. ***Nonlinear Stud.*** **23** (1): 87–94.

Raffoul, Y., Rai, H., 2016. Uniform stability in nonlinear infinite delay Volterra integro-differential equations using Lyapunov functionals. ***Nonauton. Dyn. Syst***. **3** (1): 14–23.

Reissig, R., Sansone , G., and Conti, R., 1974. ***Non-linear Differential Equations of Higher Order.*** Translated from the German. Noordhoff International Publishing. Leyden. xiii+669.

Ross, S. L., 1974. ***Differential Equations. Second edition.*** *Xerox College Publishing, Lexington, Mass.-Toronto, Ont.* xi+712.

Seifert, G., 1973. Liapunov-Razumikhin conditions for stability and boundedness of functional differential equations of Volterra type. ***J. Differential Equations*** **14:** 424–430.

Staffans, O. J., 1988. A direct Lyapunov approach to Volterra integro-differential equations. ***SIAM J. Math. Anal.***, **19** (4): 879–901.

Talpalaru, P. , 2000. Stability criteria for Volterra integro-differential equations. An. Ştiinţ. Univ. Al. ***I. Cuza Iaşi. Mat.*** **46** (2): 349–358.

Tunç, C., 2016. A note on the qualitative behaviors of non-linear Volterra integro-differential equation***. J. Egyptian Math. Soc.*** **24** (2): 187–192.

Tunç, C., 2016. New stability and boundedness results to Volterra integro-differential equations with delay***. J. Egyptian Math. Soc.*** **24** (2): 210–213.

Tunç, C., 2016. Properties of solutions to Volterra integro-differential equations with delay. ***Appl. Math. Inf. Sci.*** **10** (5): 1775–1780.

Tunç, C., 2017. Qualitative properties in nonlinear Volterra integro-differential equations with delay. ***Journal of Taibah University for Science.*** **11** 309–314.

Tunç, C., 2017. On qualitative properties in Volterra integro-differential equations. ***AIP Proceedings*** **1798** (1), Article number 020164, 9.

Tunç, C., 2017. Stability and boundedness in Volterra-integro differential equations with delays***. Dynam Systems Appl*** **26** (1), 121-130.

Vanualailai, J., 2002. Some stability and boundedness criteria for a class of Volterra integro-differential systems. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*** (12): 20.

Vanualailai, J., Nakagiri, S., 2003. Stability of a system of Volterra integro-differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** **281** (2): 602–619.

Wang, Z. C., 1985. Some remarks on periodic solutions of Volterra equations. ***Ann. Differential Equations.*** **1** (1): 107–125.

Wang, Q.Y., 1998. Stability of a class of Volterra integro-differential equations. ***J. Huaqiao Univ. Nat. Sci. Ed.*** **19** (1): 1–5.

Wang, Q., 2000. The stability of a class of functional differential equations with infinite delays. ***Ann. Differential Equations*** **16** (1): 89–97.

Wang, T., 2009. Inequalities of solutions of Volterra integral and differential equations. Electron***. J. Qual. Theory Differ. Equ., Special Edition I***, (28): 10.

Wazwaz, A., 2011, ***Linear and Nonlinear Equations. Methods and Applications.*** Higher Education Press, Beijing; Springer, Heidelberg. xviii+639.

Wang, T., 2013. Lower and upper bounds of solutions of functional differential equations. ***Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*** **20** (1): 131–141.

Xu, A., 1998. Uniform asymptotic stability in functional-differential equations with infinite delay. ***Chinese Sci. Bull.*** **43 (**12): 1000–1003.

Yang, S. S., Zhang, Z. D., 1996. Construction and application of V-functionals for linear Volterra systems. ***J. Math. Res. Exposition*** **16** (2): 219–228.

Yoshizawa, T., 1966. ***Stability Theory by Liapunov's Second Method.*** The Mathematical Society of Japan, Tokyo. 223.

Zhang, Z. D., 1990. Asymptotic stability of Volterra integro-differential equations. ***J. Harbin Inst. Tech.*** (4): 11–19.

Zhang, B., 2000. Construction of Liapunov functionals for linear Volterra integro-differential equations and stability of delay systems. ***Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*** *Szeged.*

Zhang, B., 2005. Necessary and sufficient conditions for stability in Volterra equations of nonconvolution type. ***Dynam. Systems Appl.*** **14** (3-4): 525–549.

Zhou, B., Egorov, A. V., 2016. Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems. ***Automatica J. IFAC 71*** 281–291.

ÖZ GEÇMİŞ

1989 yılında Talas/KAYSERİ'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Van'da tamamladı. 2012 yılında üniversite lisans eğitimini ve 2014 yılında yüksek lisans eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2016 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora eğitimine başladı.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 13/05/2020

Tez Başlığı / Konusu: BAZI DENKLEM MODELLERİNDE ÇÖZÜMLERİN NİTELİKSEL ANALİZLERİ

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 115 sayfalık kısmına ilişkin, 13/05/2020 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNİTİN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 19 (yüzde on dokuz) dur.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

13/05/2020

Adı Soyadı: Osman TUNÇ

Öğrenci No: 169102148

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Doktora

Statüsü: Y. Lisans Doktora X

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Suat ŞENSOY