

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ATEŞLEME METODU

Süleyman Safa KEFÇİ

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında, Süleyman Safa KEFÇİ tarafından hazırlanan bu çalışma 23/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği/oy çokluğu (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

İmza:

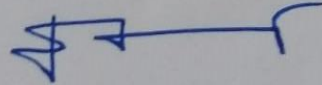
Üye : Prof. Dr. Musa ÇAKIR

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 14 / 06 / 2019 tarih ve 21 / 3 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

“Adi Diferansiyel Denklemlerde Ateşleme Metodu” isimli Yüksek Lisans tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim.

23.05.2019



Süleyman Safa KEFÇİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ATEŞLEME METODU

Süleyman Safa KEFÇİ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Bu çalışma, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin (lineer ve lineer olmayan) çözümü için uygulanan ateşleme metodudur. Lineer problemlerde bu yöntem iki başlangıç-değer problemine indirgenmektedir. Lineer olmayan problemlerde ise oluşan başlangıç değer probleminin yanı sıra tek adımlı fark yöntemleri ve iterasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Ayrıca ele alınan yöntemler sayısal örneklerle desteklenmiştir.

2019, 37 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Ateşleme metodu, Adi diferansiyel denklem, Başlangıç-Değer Problemi, Sınır-değer problemi, Nümerik metot

ABSTRACT

Master Thesis

SHOOTING METHOD IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Süleyman Safa KEFÇİ

Erzincan Binali Yildirim University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

This is a shooting method applied to the solution of boundary value problems (linear and nonlinear) for second order ordinary differential equations. In linear problems, this method is reduced to two initial-value problems. In nonlinear problems, additionally to the initial value problem, one-step difference methods and iterative methods are used. The methods are supported by numerical examples.

2019, 37 Pages

Keywords: Shooting Method, Ordinary Differential Equation, Initial-Value Problem, Boundary-Value Problem, Numerical Method

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım esnasında bana gösterdiği yakın ilgi ve her türlü yardımlarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALI'ye, bana uygun çalışma ortamı sağlayan aileme ve bu çalışmada emeği geçen herkese teşekkürlerimi sunarım.

Süleyman Safa KEFÇİ

Mayıs, 2019



İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| TEŞEKKÜR | iii |
| İÇİNDEKİLER | iv |
| ŞEKİLLER LİSTESİ | v |
| TABLolar LİSTESİ | vi |
| SİMGELER ve KISALTMALAR | vii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. TEMEL BİLGİLER | 3 |
| 2.1. Adi Diferansiyel Denklem İçin Sınır Değer Problemi..... | 3 |
| 2.2. Dördüncü Dereceden Runge-Kutta Formülü..... | 3 |
| 2.3. Newton-Raphson ve Kirişler Yöntemleri | 4 |
| 3. ARAŞTIRMA BULGULARI | 9 |
| 3.1. İkinci Mertebeden Lineer Denklemler İçin Ateşleme Metodu | 9 |
| 3.1.1. Lineer Ateşleme Metodu | 9 |
| 3.1.2. İkinci Mertebeden Fark Denklemini İçin Faktörizasyon Metodu | 14 |
| 3.2. Lineer Olmayan Denklemler İçin Ateşleme Metodu..... | 19 |
| 3.2.1. Giriş..... | 19 |
| 3.2.2. Ateşleme Metodu ile İlgili Temel Kavramlar | 20 |
| 3.2.2.1. Lineer Olmayan Problemlerde Ateşleme Metodu | 21 |
| 3.2.3. Daha İyi Başlangıç Yaklaşımını Etkili ve Kesin Ateşleme Yöntemi..... | 28 |
| 3.2.3.1. Geliştirilmiş Ateşleme Yöntemi | 28 |
| 3.2.3.2. Başlangıç Yakınsamanın İyileştirilmesi İçin İteratif Algoritmalar.... | 29 |
| 3.2.3.3. Başlangıç Değer Problemlerini Çözmek İçin İteratif Formül..... | 31 |
| 3.2.3.4. Nümerik Test Problemleri | 31 |
| 4. SONUÇ VE ÖNERİLER | 36 |
| KAYNAKLAR | 37 |
| ÖZGEÇMİŞ | 38 |

ŞEKİLLER LİSTESİ

| | Sayfa |
|--|--------------|
| Şekil 2.1. Newton-Raphson metodunun geometrik yorumu | 4 |
| Şekil 2.2. Kirişler metodunun geometrik yorumu..... | 7 |
| Şekil 3.1. γ değerinin C' ye göre doğrusal değişikliği..... | 21 |



TABLULAR LİSTESİ

| | Sayfa |
|---|--------------|
| Tablo 2.1. 2.Adıma kadar oluşan sonuçlar..... | 7 |
| Tablo 2.2. 3.Adıma kadar oluşan sonuçlar..... | 8 |
| Tablo 3.1. Bulunan sonuçlar | 11 |
| Tablo 3.2. v ve w fonksiyon değerleri ve kesin çözüm değerleri..... | 12 |
| Tablo 3.3. Runge-Kutta metodu ile bulunan sonuçlar | 20 |
| Tablo 3.4. Problemin Runge-Kutta yöntemiyle çözümüne ait sonuçlar | 24 |
| Tablo 3.5. C_i ve U_i değerlerinin sonuçları..... | 25 |
| Tablo 3.6. z_1 ve z_2 değerlerinin Runge-Kutta yöntemiyle bulunuşu..... | 26 |
| Tablo 3.7. Bulunan değerler yardımıyla elde edilen sonuçlar | 27 |
| Tablo 3.8. Son olarak elde edilen sonuçlar | 27 |

SİMGELER ve KISALTMALAR

Semboller

| | |
|--------------|---|
| g_i | $g(x)$ fonksiyonun x_i düğümündeki değeri |
| h | Şebeke adımı |
| i, j | Şebeke nokta indisleri |
| L^* | Adjoint operatör |
| $u(x), u(t)$ | Sürekli problemin çözümü |
| $P_n(x)$ | N. dereceden polinom |
| q | Yakınsama katsayısı |
| x_n, t_k | İterasyon adımı |
| x_i, t_j | Düğüm noktaları |
| $y(x), y(t)$ | Fark probleminin çözümü |

1. GİRİŞ

Birçok fiziksel ve mekanik süreçlerin adi diferansiyel denklemlerle ifade edildiği iyi bilinmektedir. Bir diferansiyel denklemin bazı koşullara bağlı çözümü söz konusu ise bu tür problemlere sınır değer problemi ya da başlangıç değer problemi denir.

Sınır değer problemleri, akışkanlar mekaniğinde sınır tabaka teorisi, teorik fizik, mühendislik, kontrol ve optimizasyon teorisi gibi uygulamalı matematiğin farklı alanlarında yaygın olarak kullanılmalıdır. (Keller, 1976; Sewell, 2005; Faires and Burden, 2002). Sınır değer probleminin analitik çözümü her zaman mümkün olmadığından, problemi çözümü için kullanışlı ve yakınsak sayısal yöntemler büyük önem taşır. Çeşitli nümerik teknikler arasında, özellikle akışkanlar dinamiğinde sınır değer problemlerini çözmek için ateşleme yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır (Amirali ve Amirali, 2018; Palekar, 2007; Jones, 1993; Wang, 2013). Lineer ateşleme yönteminde sınır değer problemi, başlangıç değer problemlerine dönüştürülür. Daha sonra, bu başlangıç değer problemlerine uygun kararlı ve yakınsaklık özelliklerine sahip sayısal yöntemler uygulanır.

Çok sayıda araştırmacı, lineer olmayan sınır değer problemlerini çözümü için de ateşleme yöntemini geniş ölçüde araştırmıştır. Jones, (1933)'de dördüncü mertebeden sınır değer problemlerinin özdeğerlerini elde etmek için ateşleme yöntemini araştırdı. Palekar, (2007) iki noktalı sınır değer probleminin nümerik çözümü için ateşleme metodunu kullandı. Wang vd. (2013)'te ikinci mertebeden çok noktalı integral sınır değer problemine ateşleme metodunu uyguladı.

Lineer olmayan sınır değer problemi için ateşleme yöntemi, lineer ateşleme metoduna benzer olmakla birlikte buradaki çözüm lineer başlangıç değer problemlerinin kombinasyonu şeklinde ifade edilememektedir. Bu nedenle, sayısal yöntemin yanı sıra çeşitli iterasyon yöntemlerini (Newton-Raphson, Kirişler vb.) kullanma zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca başlangıç yakınsamanın iyi bir seçimi büyük önem taşımaktadır.

Son yıllarda, sonlu fark sınır değer problemleri için lineer ateşleme metoduna benzer faktörizasyon yöntemleri kullanılmıştır. Bu çalışmalarda ikinci mertebeden sonlu fark

sınır değer problemi, birinci mertebeden sonlu fark denklemleri için başlangıç değer problemlerine dnüşürölmektedir. Farklı sınır koşullarına sahip bu türden alışmalar (Samarskii, 2001; Amiraliyev ve akır, 2002; akır ve Amiraliyev, 2010; akır ve Amiraliyev, 2007)tarafından yapılmıştır.

Bu alışma 4 bölümde oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve kaynak özetleri verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan genel bilgiler ve temel kavramlar yer almaktadır. Çalışmanın üçüncü bölümünde ikinci mertebeden ve birinci, ikinci, üçüncü tip sınır şartları içeren diferansiyel sınır değer problemi için lineer ateşleme metodu ele alınmıştır. Bu bölümde ayrıca ikinci mertebeden sonlu fark sınır değer problemi için faktörizasyon metodu incelenmiş ve kararlılık özellikleri tespit edilmiştir ve lineer olmayan problemler için ateşleme metodu ve başlangıç yakınsamanın iyileştirilmesi için iteratif algoritmalar verilmiş olup ayrıca başlangıç değer problemlerini çözmek için iteratif formüller ele alınmıştır. Bölüm sonunda ise test problemleri üzerinde destekleyici nümerik sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölüm ise verilen problemlere ait sonuç ve öneriler yer almaktadır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Adi Diferansiyel Denklem İçin Sınır Değer Problemi

Birçok fiziksel ve mekanik süreçlerin adi diferansiyel denklemlerle ifade edildiği iyi bilinmektedir. Çok sık karşılaşılan sınır-değer problemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u'' = f(x, u, u'), \quad 0 < x < 1 \quad (2.1)$$

$$a_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = \mu_1, \quad a_2 u'(1) + \beta_2 u(1) = \mu_2 \quad (2.2)$$

Burada $a_i, \beta_i, \mu_i (i = 1, 2)$ ' ler $a_i^2 + \beta_i^2 \neq 0 (i = 1, 2)$ olacak şekilde verilmiş sayılar, f ise belirli bir fonksiyondur. $a_i = 0 (i = 1, 2)$ hali birinci tip sınır şartları $\beta_i = 0 (i = 1, 2)$ ikinci tip sınır şartları; $a_i \neq 0, \beta_i \neq 0 (i = 1, 2)$ hali ise üçüncü tip sınır şartları adını alır. (Amirali vd., 2018)

2.2. Dördüncü Dereceden Runge-Kutta Formülü

Aşağıdaki başlangıç-değer problemini verilsin:

$$u' = f(x, u), \quad 0 < x \leq 1 \quad (2.3)$$

$$u(0) = a \quad (2.4)$$

Burada $f(x, u), \{0 \leq x \leq 1, -\infty < u < \infty\}$ bölgesinde tanımlı sürekli reel bir fonksiyon, a ise reel bir sayıdır. $[0, 1]$ aralığında $\{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N; h = 1/N\}$ düzgün şebekesini kuralım. Uygulamalarda sıkça kullanılan dördüncü dereceden Runge-Kutta formülü aşağıdaki şekildedir.

$$y_0 = a \quad (2.5)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i), \quad K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right) \quad (2.6)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \quad (2.7)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.8)$$

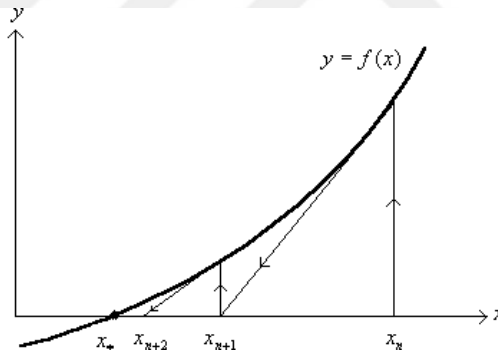
(Amirali vd., 2018)

2.3. Newton-Raphson ve Kirişler Yöntemleri

Newton-Raphson metodunun teğetler metodu olarak da bilindiğini belirtelim. $f(x) = 0$ denklemi basit reel x_* köküne sahip, yani $f(x_*) = 0$ ve $f'(x_*) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(x)$ fonksiyonunun, x_* kökünün belli bir $J_\delta(x_*)$ komşuluğunda ikinci mertebeye kadar sürekli türevlere sahip olduğunu kabul edelim. $f(x) = 0$ denkleminin uygun Newton-Raphson yaklaşımları aşağıdaki gibidir:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

x_0 başlangıç yaklaşımının $J_\delta(x_*)$ 'e ait olması gerekir. (2.9) sürecine sabit nokta iterasyon sürecinin özel bir hali gibi bakılabilir. Fakat ileride görüleceği gibi, genel durumdan farklı olarak, (2.9) iterasyon süreci daha yüksek yakınsama hızına sahiptir.



Şekil 2.1. Newton-Raphson metodunun geometrik yorumu

Matematiksel olarak Newton-Raphson metodundaki x_n yaklaşımı

$$f(x) \approx P_1(x) \equiv f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1})f'(x_{n-1}) = 0$$

lineer denkleminin kökü gibi anlaşılabilir. Geometrik olarak ise, x_n yaklaşımı, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ noktasından $f(x)$ 'in grafiğine çizilen teğetin x eksenini kesişme noktasının apsisisidir.

Newton-Raphson metodunun hata değerlendirilmesi aşağıdaki gibidir:

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_*|^2 \leq q^{2^{n+1}-1} |x_n - x_*| \quad (2.10)$$

Burada

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1, \quad (2.11)$$

$$0 < m_1 = \min_{j_\delta(x_*)} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{j_\delta(x_*)} |f''(x)|, \quad x_0 \in j_\delta(x_*).$$

x_* kökü civarında $f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin işaret değiştirmediği durumlarda Newton-Raphson yaklaşımları monotonluk özelliğine sahip olup, başlangıç yakınsamanın seçimi de kolaylaşmaktadır. Daha somut olarak, aşağıdaki özellik doğrudur:

Teorem 2.1. $[a, b]$ aralığında $f(x) = 0$ denklemini bir tek x_* köküne sahip ve $f(x) \in C^2[a, b]$ olsun.

Eğer

$$f'(x) > 0, f''(x) > 0, x \in [a, b] \quad (2.12)$$

veya

$$f'(x) < 0, f''(x) < 0, x \in [a, b] \quad (2.13)$$

ise, bu durumda $x_0 = b$ için (2.9) sürecinin belirlediği $\{x_n\}$ yaklaşımları monoton azalandır ve x_* 'a yakınsar.

Eğer

$$f'(x) > 0, f''(x) < 0, x \in [a, b] \quad (2.14)$$

veya

$$f'(x) < 0, f''(x) > 0, x \in [a, b] \quad (2.15)$$

ise, bu durumda $x_0 = a$ için (2.9) sürecinin belirlediği $\{x_n\}$ yaklaşımları monoton artandır ve x_* 'a yakınsar.

Kirişler Metodu, eğer (2.9) sürecinde $f(x)$ 'in x_{n-1} noktasındaki türev değerini geri fark türeviyle (bölünmüş farkla) değiştirirsek,

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

kirişler metodu denilen aşağıdaki iterasyon sürecini elde ederiz:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \equiv \frac{x_{n-2}f(x_{n-1}) - x_{n-1}f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

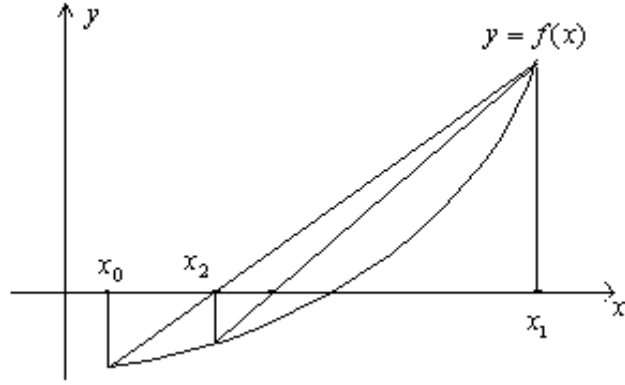
Bu metot Newton-Raphson metodundan farklı olarak iki adımlıdır: x_n 'in hesaplanması için x_{n-1} ve x_{n-2} değerlerinin bilinmesi gerekir, dolayısıyla sürecin işlemesi için x_0 ve x_1 başlangıç değerleri bilinmelidir. x_0 yaklaşımı aynen Newton-Raphson metodunda olduğu gibi, örneğin, $f(x_0)f''(x_0) > 0$ olacak şekilde seçilebilir. x_1 yaklaşımı ise $x_1 \in J_\delta(x_*)$ ve $f(x_0)f(x_1) < 0$ olacak şekilde seçilmelidir.

Matematiksel olarak yorumlayacak olursak, (2.16) süreci x_n yaklaşımı $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ ve $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ noktalarına göre kurulan lineer interpolasyon polinomunun köküdür. Geometrik açıdan yorumlarsak, x_n yaklaşımı $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ ve $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ noktalarından geçen doğru ile x ekseninin kesişme noktasının apsisiidir.

Kirişler metodunun hatası için aşağıdaki değerlendirme doğru olacaktır:

$$|x_{n+1} - x_*| = O\left(|(x_n - x_*)(x_{n-1} - x_*)|\right).$$

Dolayısıyla, girişler metodunun hata hızının Newton-Raphson metodunun hata hızına yakın, fakat biraz daha düşük olduğu söylenebilir ki, bu da genelde örneklerle tespit edilmektedir. (Amirali vd., 2018)



Şekil 2.2. Kirişler metodunun geometrik yorumu

Problem 2.2. $f(x) = x - e^{-x} = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığındaki kökünün bulunması için Newton-Raphson ve kirişler metotlarının uygulama sonuçları aşağıda verilmiştir:

Uygun Newton-Raphson iterasyon süreci şu şekildedir:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - e^{-x_{n-1}}}{1 + e^{-x_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 2.1. 2.Adıma kadar oluşan sonuçlar

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|----------|------------------------|
| 0 | 0,550000 | -0,026950 |
| 1 | 0,567090 | -0,000084 |
| 2 | 0,567143 | $-4,55 \times 10^{-7}$ |

Tablodan,

$$|x_2 - x_1| = 5,3 \times 10^{-5}$$

olduğu görülmektedir.

Şimdi ise uygun Kirişler metodunu ele alırsak bu durumda

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - e^{-x_{n-1}})}{x_{n-1} - e^{-x_{n-1}} - x_{n-2} + e^{-x_{n-2}}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$x_0 = 0,55, \quad x_1 = 0,575.$$

sürecine uygun üçüncü adıma kadar oluşan sonuçlar şu şekildedir.

Tablo 2.2. 3.Adıma kadar oluşan sonuçlar

| n | x_n | $f(x_n)$ |
|-----|----------|-----------------------|
| 0 | 0,55 | -0,026950 |
| 1 | 0,575 | 0,012295 |
| 2 | 0,567168 | 0,000038 |
| 3 | 0,567143 | $5,28 \times 10^{-8}$ |

Tablolardan görüldüğü üzere Newton-Raphson metodu Kirişler metoduna göre az miktarda iyileşme göstermektedir bu da teorik bilgilerle uyumludur. (Amirali vd., 2018)

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. İkinci Mertebeden Lineer Denklemler İçin Ateşleme Metodu

Sınır-değer problemlerinin çözümü için uygulanan çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bunlara sonlu farklar, sonlu elemanlar, collocation vb. metotları örnektir. Ele aldığımız ateşleme metodu ise farklı bir alternatif oluşturmaktadır.

3.1.1. Lineer Ateşleme Metodu

Bu durumda sınır-değer probleminin çözümü iki ardışık başlangıç değer probleminin çözümüne gelmektedir. Önce

$$Lu: = u'' + a(x)u' + b(x)u = f(x), 0 < x < 1, \quad (3.1)$$

$$u(0) = \mu_1, u(1) = \mu_2 \quad (3.2)$$

problemini ele alalım.(3.1)-(3.2) probleminin çözümünün varlığını kabul ederek, bu çözümün nasıl bulunabileceğini inceleyelim.

$u'(0)$ bilinmeyenine λ diyelim: $u'(0) = \lambda$. $v(x)$ ve $w(x)$ sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olsun:

$$Lv = f(x), 0 < x < 1 \quad (3.3)$$

$$v(0) = \mu_1, v'(0) = 0,$$

$$Lw = 0, 0 < x < 1, \quad (3.4)$$

$$w(0) = 0, w'(0) = 1.$$

Bu durumda

$$u(x) = v(x) + \lambda w(x) \quad (3.5)$$

fonksiyonun, (3.1) denklemini ve (3.2₁)sınır koşulunu sağladığı açıktır. (3.2₂)şartından yararlanılırsa

$$\lambda = \frac{\mu_2 - v(l)}{w(l)} \quad (3.6)$$

bulunur. (3)-(6) algoritmasına (1)-(2) probleminin çözümüne yönelik ateşleme metodu denir. Ayrıca, (1)-(2) problemi tek çözüme sahip olduğu için $w(1) \neq 0$ olacaktır.

Daha genel

$$a_1 u'(0) + \beta_1 u(0) = \mu_1, \quad a_2 u'(1) + \beta_2 u(1) = \mu_2 \quad (3.7)$$

sınır koşulları söz konusu olursa, (3.1) ve (3.7) problemi için ateşleme süreci yukarıdakine benzer olarak

$$u(x) = v(x) + \lambda w(x)$$

$$Lv = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v'_0$$

$$Lw = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w'_0$$

$$\lambda = \frac{\mu_2 - [a_2 v'(1) + \beta_2 v(1)]}{w a_2 w'(1) + \beta_2 w(l)}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$v_0 = \begin{cases} \alpha_1, & \alpha_1 \neq 0 \text{ ise} \\ \beta_1^{-1} \mu_1, & \alpha_1 = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad v'_0 = \begin{cases} -\beta_1 + \alpha_1^{-1} \mu_1, & \alpha_1 \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & \alpha_1 = 0 \text{ ise} \end{cases},$$

$$w_0 = -\alpha_1,$$

$$w'_0 = \beta_1$$

Problem 3.1. Ateşleme metodunu

$$u'' - u = x - 2, \quad 0 < x < 1, u(0) = 2, u(1) = 1$$

probleminin çözümüne uygulayalım. Çözüm algoritmasını yazalım:

$$v'' - v = x - 2, \quad v(0) = 2, v'(0) = 0, \quad (3.8)$$

$$w'' - w = 0, \quad w(0) = 2, w(1) = 1, \quad (3.9)$$

$$\lambda = (1 - v(1))/w(1)$$

$$u(x) = v(x) + \lambda w(x)$$

(3.8) ve (3.9) problemlerinin çözümlerinin bulunması için $h = 0.1$ için klasik Runge-Kutta metodu uygulanmıştır. Hesaplanan değerler $\lambda = -1$ olduğunu göstermektedir. Bulunan sonuçların bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.1.Bulunan sonuçlar

| x_i | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| v_i | 2,00133583 | 2,01075198 | 2,03665301 | 2,0881051 | 2,1751999 |
| w_i | 0,20133583 | 0,41075194 | 0,63665301 | 0,8881051 | 1,1751999 |
| $u(x_i)$ | 1,80000000 | 1,60000000 | 1,40000000 | 1,20000000 | 1,00000000 |

Problem 3.2.

$$u'' + (x + 1)u' - 2u = (1 - x^2)e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad u(0) = -1: \quad u(1) = 0$$

sınır değer problemini ateşleme metoduyla çözüünüz.

Çözüm. Ateşleme metodu yuvarlatma hatalarına karşı duyarlı olduğundan 4.mertebe Runge-Kutta yönteminin kullanılması uygundur. Uygun v ve w fonksiyon değerleri ve kesin çözüm değerleri Tablo 3.2. de verilmiştir. $\mu_2 = 0$ olduğunda $\lambda = -\frac{-1,5091}{0,7546} = 2$ 'dir. Problemin kesin çözümü ise $u = (x - 1)e^{-x}$ 'dir.

Tablo 3.2. v ve w fonksiyon değerleri ve kesin çözüm değerleri

| x_i | v | w | u |
|-------|---------|--------|---------|
| 0,0 | -1,0000 | 0,0000 | -1,0000 |
| 0,1 | -1,0050 | 0,0953 | -0,8144 |
| 0,2 | -1,0201 | 0,1825 | -0,6550 |
| 0,3 | -1,0452 | 0,2633 | -0,5156 |
| 0,4 | -1,0806 | 0,3392 | -0,4022 |
| 0,5 | -1,1263 | 0,4115 | -0,3033 |
| 0,6 | -1,1824 | 0,4814 | -0,2195 |
| 0,7 | -1,2488 | 0,5499 | -0,1490 |
| 0,8 | -1,3254 | 0,6178 | -0,0899 |
| 0,9 | -1,4123 | 0,6858 | -0,0407 |
| 1,0 | -1,5091 | 0,7545 | 0,0000 |

Problem 3.3. Kesin çözümünü $u(x) = \sin(x)$ olan

$$u'' = 400u - 401 \sin(x) ,$$

$$u(0) = 0,$$

(3.10)

$$u(1) = \sin 1 ,$$

problemine ateşleme metodu uygulanmıştır. Probleme uygun birinci mertebeden sistem için başlangıç değer problemi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
u' &= v, & u(0) &= 0, \\
v' &= 400u - 401 \sin(x) & v(0) &= \beta.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11) problemi $\beta_1 = 3$ ve $\beta_2 = 2$ başlangıç değerleri kullanılarak iki defa çözülmüştür. Daha sonra sekant formülü 4 ondalık basamağa kadar doğru $\beta_3 = 1.0$ doğru değerler vermiştir. ($u(x) = \sin(x)$, $u'(0) = 1$ olduğundan dolayı) (3.11) problemi tam olarak 1' e eşit β değeriyle çözüldüğü zaman, başlangıç değer çözücü, IVPRK için hata toleransı küçük ayarlanmış olsa bile $(1, \sin(1))$ hedef noktayı 100 faktör ile kaçırdı. Aksi yönde bir ateşlemenin, β değerinin $u(1) = \sin(1)$, $u'(1) = \beta$ başlangıç değerleri için diferansiyel denklemin çözümünün $u(0) = 0$ olacak şekilde seçilmesiyle de aynı derecede başarısız olduğu görüldü.

Problemi anlamak için (3.11)'in analitik çözümünün

$$u_\beta(x) = \frac{(\beta - 1)[e^{20x} - e^{-20x}]}{40} + \sin(x)$$

olduğunu belirtelim, öyle ki,

$$R(\beta) = u_\beta(1) - \sin(1) = \frac{(\beta-1)[e^{20}-e^{-20}]}{40} = 1,2 \times 10^7(\beta - 1).$$

$R(\beta)$ fonksiyonun $\beta = 1$ kökü yakınında dik olduğunu söylemek yetersiz olur. β açısındaki çok küçük bir yanlışlık $u_\beta(1)$ 'in hedefi büyük bir farkla kaçırmaya neden olur. β tam olarak 1'e ayarlanmış olsa bile, başlangıç değer çözücü tarafından verilen küçük ve kaçınılmaz hatalar $x = 1$ 'de büyük oranda büyütülür. Bu nedenle ateşleme metodu β 'nın doğru bir şekilde belirlenmesine izin vermesine rağmen, bu parametre 0 ile 1 arasındaki çözümün şeklini öngörmeye sayısal olarak işe yaramaz. Bu tür bir zorluk hiç de nadir değildir ve neden "basit" ateşleme metodlarının genel değer problemleri için önerilmediğini göstermektedir. Burada ki zorluk açıkça e^{20x} teriminin homojen çözümündeki varlığıdır. (Tersine ateşleme e^{-20x} terimi ile bir soruna sahiptir). Ancak bu terimler, (3.10)'ı çözmek için sonlu farklar yöntemi kullanıldığında herhangi bir zorluk yaratmamıştır.

3.1.2. İkinci Mertebeden Fark Denklemleri İçin Faktörizasyon Metodu

Bu metod ikinci mertebeden fark değer probleminin çözümünün üç tane birinci mertebeden fark başlangıç-değer problemine indirgeme yoluyla elde edilmesi yöntemidir.

Genelde üç köşegenli matrisine sahip $Ay = f$ lineer denklemler sisteminin çözümü için geniş biçimde uygulanan bir algoritmadır, öyle ki buradaki $A = (a_{ij})$ matrisinde esas köşegen ve ona komşu iki köşegen hariç bütün elemanlar sıfırdır ($a_{ij} = 0$ $j > i + 1$ ve $j < i - 1$ için). Böyle sistemler bizim daha önce karşılaştığımız

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.12)$$

$$y_0 = k_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2 \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilirler. İncelemiş olduğumuz üç noktalı fark sınır-değer problemlerinin çoğunluğu bu sınıfa girer. $k_1 = k_2 = 0$ hali birinci tip diferansiyel sınır şartının karşılığıdır. (3.12)-(3.13) sistemine uygun kare matris

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_2 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve boyutu $N + 1$ 'dir. Birinci tip sınır şartları durumunda ((3.5)-(3.6) sistemi) boyut $N - 1$ olacaktır.

Şimdi de faktörizasyon metoduna uygun işlem formüllerinin bulunmasına geçelim. (3.12)-(3.13)'ün çözümünü

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

şeklinde arayalım, buradaki α_i, β_i 'ler şimdilik belirsiz katsayılardır. O halde

$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i = \alpha_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i+1} + (\alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ olur. Bu denklemde yerine yazılırsa

$$[\alpha_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + B_i] y_{i+1} + \beta_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + A_i \beta_i + F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \text{ elde edilir.}$$

Buradan

$$\alpha_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + B_i = 0, \quad \beta_{i+1}(A_i \alpha_i - C_i) + A_i \beta_i + F_i = 0$$

veya

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15)$$

bulunur. α_i, β_i 'lerin (3.15) formülleri ile hesaplanabilmesi için α_1, β_1 başlangıç değerlerinin bilinmesi gerekir. (3.11₁)'in (3.12)'nin $i = 0$ durumuna denkliğinden

$$\alpha_1 = k_1, \quad \beta_1 = \mu_1 \quad (3.16)$$

olduğu tespit edilir. (3.13)-(3.14) sürecine *ileri (düz) kovma* denir. α_i, β_i kovma katsayıları bulunduktan sonra (3.12) formülünden y_i 'nin bulunması işlemine geçilir. Bu işleme başlamak için y_N 'nin bilinmesi gerekir ve bu değer

$$y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$$

bağıntılarından bulunur ve böylece *ters kovma* süreci

$$y_N = \frac{k_2 \beta_N + \mu_2}{1 - k_2 \alpha_N} \quad (3.17)$$

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 0$$

şeklinde olur. (3.15)-(3.17) algoritmalarına, (3.12)-(3.13) sistemine uygun *kovma metodu* denir.

Not3.4. Görüldüğü gibi faktörizasyon (kovma) metodu, (3.13) ve (3.15) formüllerinde paydalar sıfırdan farklı olduğu zaman uygulanabilir:

$$C_i - \alpha_i A_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.18)$$

$$1 - k_2 \alpha_N \neq 0. \quad (3.19)$$

Bunların sağlanması için yeterli şartların

$$A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0, \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.20)$$

$$|k_1| \leq 1, \quad |k_2| < 1 \quad (3.21)$$

olduğunu gösterelim. Önce (3.20), (3.21) koşulları dahilinde $|\alpha_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) olduğunu gösterelim. Tümevarım yönteminden yararlanırsak, $i = 1$ için (3.16), (3.21)'den $|\alpha_1| = |k_1| \leq 1$ olur. $|\alpha_i| \leq 1$ olduğunu kabul edelim ve bu durumda $|\alpha_{i+1}| \leq 1$ olduğunu gösterelim.

$$|C_i - \alpha_i A_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| \geq |C_i| - |A_i| \geq |B_i| \quad (3.22)$$

ve (38)'e göre $|C_i - \alpha_i A_i| > 0$, yani (3.18) sağlanır. Ayrıca, (3.22)'e göre

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1$$

olduğunu görürüz. Böylece $|\alpha_i| \leq 1$ $i = 1, 2, \dots, N$ olduğunu göstermiş olduk.

Daha sonra (3.21₂)'den ve $|\alpha_N| \leq 1$ olmasından yararlanırsak

$$|1 - k_2 \alpha_N| \geq 1 - |k_2| |\alpha_N| \geq 1 - |k_2| > 0,$$

olur, başka bir ifadeyle, (3.19) şartı da sağlanır.

(3.21) şartının daha genel

$$|k_s| \leq 1, \quad s = 1, 2; \quad |k_1| + |k_2| < 2$$

veya

$$|k_s| \leq 1, \quad s = 1, 2; \quad \exists i_0, \quad |C_{i_0}| > |A_{i_0}| + |B_{i_0}|$$

şartıyla değiştirilebileceğini belirtelim.

Ayrıca $|\alpha_i| \leq 1$ koşulu kovma sürecinin kararlılığını temin etmektedir. Bu da işlem sürecinde yapılan yuvarlama hatalarının kesinlik kaybına veya taşmaya uğramayacağı anlamına gelir. Gerçekten de, y_{i_0+1} 'in belli bir δ_{i_0+1} hatasıyla hesaplanmış olsun:

$$\widehat{y}_{i_0+1} = y_{i_0+1} + \delta_{i_0+1},$$

o halde, bir sonraki adım için

$$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1} \quad (3.23)$$

yerine

$$\widehat{y}_{i_0} = \alpha_{i_0+1} (y_{i_0+1} + \delta_{i_0+1}) + \beta_{i_0+1} \quad (3.24)$$

hesaplanacaktır. (3.23) ve (3.24)'den

$$\delta_{i_0} = \widehat{y}_{i_0} - y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} \delta_{i_0+1}$$

ve

$$|\delta_{i_0}| \leq |\alpha_{i_0+1}| |\delta_{i_0+1}| \leq |\delta_{i_0+1}|$$

elde edilir, yani hata artmaz.

Örnek 3.5.

$$-u'' + 2u = x, \quad 0 < x < 2$$

$$u(0) = 0, \quad u(2) = 1$$

sınır-değer problemi için sonlu fark şemasını yazınız. ($h=0,5$) ve faktörizasyon algoritmasını kullanarak bu fark probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Uygun fark şeması aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(0,5)^2} + 2y_i = x_i, \quad i = 1,2,3$$

$$y_0 = 0 \quad y_4 = 1$$

burada $x_i = 0,5i, i = 0,1,2,3,4$. Şemayı aşağıdaki şekilde düzenleyelim:

$$-A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1,2,3,$$

burada

$$A_i = B_i = 4, \quad C_i = 10, \quad F_i = x_i.$$

Şimdi bu katsayılara göre (3.18)-(3.20) formüllerini kullanmaya başlayalım:

$$a_1 = 0, \beta_1 = \mu_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{B_1}{C_1 - a_1 A_1} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$a_3 = \frac{B_2}{C_2 - a_2 A_2} = \frac{4}{10 - 4(0,4)} = 0,47619$$

$$a_4 = \frac{B_3}{C_3 - a_3 A_3} = \frac{4}{10 - 4(0,47619)} = 0,49412$$

ve

$$\beta_2 = \frac{A_1 \beta_1 + F_1}{C_1 - a_1 A_1} = \frac{0,5}{10} = 0,05$$

$$\beta_3 = \frac{A_2 \beta_2 + F_2}{C_2 - a_2 A_2} = \frac{4(0,5) + 1}{10 - 4(0,4)} = 0,14286$$

$$\beta_4 = \frac{A_3 \beta_3 + F_3}{C_3 - a_3 A_3} = \frac{4(0,14286) + 1,5}{10 - 4(0,47619)} = 0,25588.$$

Böylece, fark şemasının çözümü için aşağıdaki değerleri bulunur.

$$y_4 = 1$$

$$y_3 = a_4 y_4 + \beta_4 = 0,49412 + 0,25588 = 0,75000$$

$$y_2 = a_3 y_3 + \beta_3 = 0,47619 \times 0,75 + 0,14286 = 0,50000$$

$$y_1 = a_2 y_2 + \beta_2 = 0,4 \times 0,5 + 0,05 = 0,25000.$$

3.2. Linear Olmayan Denklemler İçin Ateşleme Metodu

3.2.1. Giriş

Linear olmayan ateşlemede başlangıç değer problemine indirgeme sürecinde, ayrıca tek adımlı fark yöntemleri ve iterasyon yöntemleri kullanılmaktadır.

Bu kısımda

$$u'' = f(x, u, u'), \quad 0 < x < 1, \quad (3.25)$$

$$u(0) = \mu_1, u(1) = \mu_2, \quad (3.26)$$

problemini ele alalım. $f(x, u, u')$ fonksiyonu (3.25)-(3.26) probleminin bir tek çözümünü varlığını sağlayacak şekilde bir fonksiyondur.

Bilinmeyen u' değerini λ ile gösterelim. $u'(0) = \lambda$

$$u'' = f(x, u, u'), \quad 0 < x < 1 \quad (3.27)$$

$$u(0) = \mu_1, u(1) = \lambda.$$

problemi de λ 'nın keyfi değerleri için bir tek çözüme sahip olacaktır ve bu çözümün λ parametresine bağlı bir fonksiyon olacağı açıktır: $u(x, \lambda)$. Bu aileden λ yı (9₂) sınır şartını sağlayacak şekilde seçelim: $u(1, \lambda) = \mu_2$. $u(1, \lambda) = \psi(\lambda)$ dersek,

$$\psi(\lambda) - \mu_2 = 0 \quad (3.28)$$

Şeklinde bir skaler denklemi çözmemiz gerekecektir. (3.28) denklemi genelde değişik yaklaşık yöntemlerle çözülmektedir. Örneğin, (3.28)'in sol tarafından değişik işaretlere sahip olacak şekilde herhangi bir λ_0 değerinden başlanarak (3.27) probleminin çözümü için $u(\ell, \lambda_{n_0-1}), u(\ell, \lambda_{n_0})$ değerleri bulunur. Bu aranan λ 'nın $(\lambda_{n_0-1}, \lambda_{n_0})$ aralığında olduğunu gösterir. Cevabı kesinleştirmek için kirisler süreci

$$\lambda_{n_0+1} = \lambda_{n_0} - [\psi(\lambda_{n_0}) - \mu_2] \frac{\lambda_{n_0} - \lambda_{n_0-1}}{\psi(\lambda_{n_0}) - \psi(\lambda_{n_0-1})} \quad (3.29)$$

Şeklinde yazılabilir. Ayrıca, başlangıç λ_0 değeri (3.28)'in köküne yakın seçilmiş ise, (3.29) süreci hızlı yakınsaklığa sahip olacaktır. Eğer $f(x, u, u')$ fonksiyonu ikinci ve üçüncü argümanlarına göre lineer ise, $\psi(\lambda)\lambda'$ ya göre lineer bir ifade olacaktır.

Problem 3.6. Lineer olmayan

$$u'' = 1 + uu', u(0) = 1, u(0.6) = 2,$$

problemine bakalım. Uygun $\psi(\lambda)$ fonksiyonu λ' ya göre lineer olmayacaktır. λ için başlangıç değerleri olarak $\lambda_2 = \frac{2-1}{0.6-0} \approx 1.67$, $\lambda_1 = 0.8$ alınmıştır. Sonraki değerler (3.29) eşitliğinden hesaplanmıştır. Başlangıç-değer probleminin çözümü için $h = 0.01$ adımına göre klasik Runge-Kutta metodu kullanılmıştır.

Tablo 3.3. Runge-Kutta metodu ile bulunan sonuçlar

| λ_n | $u(0,6; \lambda_n)$ | $\psi(\lambda_n) - \mu_2$ |
|-------------|---------------------|---------------------------|
| 1,67 | 2,879 | 0,879 |
| 0,8 | 0,955 | -0,045 |
| 0,842 | 1,9957 | -0,0043 |
| 0,846437 | 2,000113 | 0,000113 |

3.2.2. Ateşleme Metodu ile İlgili Temel Kavramlar

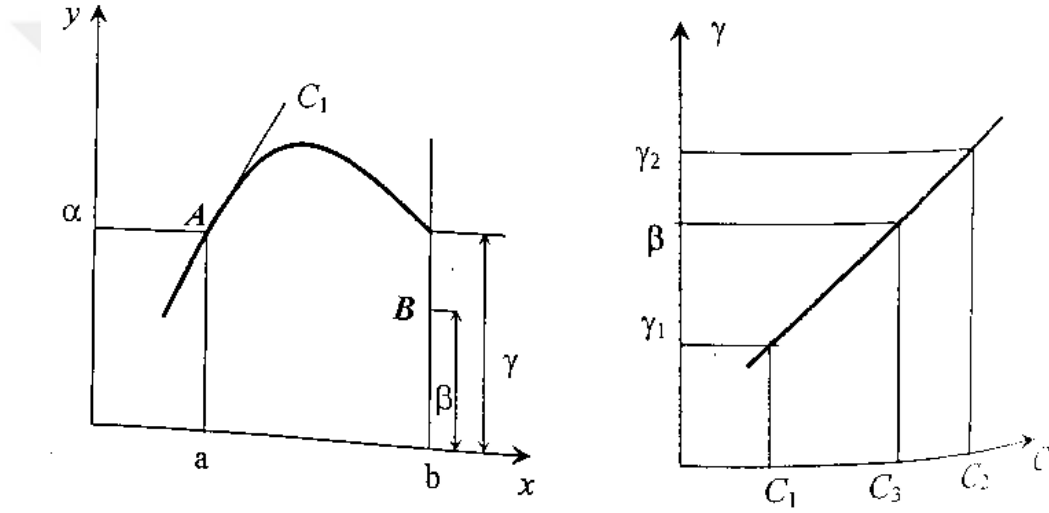
Çok kullanışlı olan bu yöntem ikinci mertebe diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılır. Ateşleme metodunun genel düşüncesi basit olduğu gibi yöntemin programlanması da basittir. Yöntemin yakınsaması garanti edilemez buna karşın yöntem yakınsar ise çok kullanışlı bir yöntemdir. Ateşleme metodu için:

$$u'' = f(x, u, u') \quad a \leq x \leq b \quad u(a) = \mu_1 \quad u(b) = \mu_2 \quad (3.30)$$

Şeklinde verilen ikinci mertebe diferansiyel denklemin sınır değer problemini göz önüne alalım. Verilen ateşleme metodunda,

$$u'' = f(x, u, u') \quad a \leq x \leq b \quad u(a) = \mu_1 \quad u'(b) = C_1 \quad (3.31)$$

şeklinde başlangıç değer problemine çevrilir. Burada C_1 değeri tahmini olarak seçilen bir başlangıç değeridir. Bu başlangıç değer problemi çözülerek $u(b)$ değeri hesaplanır ve $u(b) = \mu_2$ olacak şekilde C_1 değeri değiştirilerek çözüm bulunur. Çözüm bir deneme yanılma yöntemidir. Çözüm şekil 3.1 de görüldüğü gibi A noktasında eğrinin eğimini değiştirerek eğrinin B noktasından geçmesini sağlamaktır. Bu nedenle ateşleme metodu adı verilmektedir. Problemin sayısal çözümünde detaylar diferansiyel denklemin lineer olup olmamasına göre değişmektedir.



Şekil 3.1. γ değerinin C' ye göre doğrusal değişikliği

3.2.2.1. Lineer Olmayan Problemlerde Ateşleme Metodu

C_1 değeri için $u(b) = \gamma_1$ 'i elde edilsin. İkinci denemede C_2 değeri için $u(b) = \gamma_1$ 'i elde edilsin. γ değerinin C' ye göre şekil 3.1 görüldüğü gibi doğrusal değişikliğini kabul edelim. Bu durumda (C_1, γ_1) ve (C_2, γ_2) noktası verilen $\gamma(C)$ doğrusunun denklemi

$$\frac{\gamma - \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{C - C_2}{C_2 - C_1} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{C_2 - C_1} (C - C_2) + \gamma_2 \quad (3.32)$$

şeklinindedir. Üçüncü atışta μ_2 değerini elde edebilmek için $\gamma(C)$ doğrusunun denkleminde γ yerine μ_2 ve C yerine C_3 konulduğunda

$$\mu_2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{C_2 - C_1} (C_3 - C_2) + \gamma_2 \rightarrow C_3 = C_2 - \frac{C_2 - C_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 - \mu_2) \quad (3.33)$$

bulunur. C_3 ile atış yapıldığında γ_3 elde edilsin. Bu kez (C_3, γ_3) ile (C_2, γ_2) arasında interpolasyon yapılarak devam edildiğinde k inci atış için C_k değeri

$$C_k = C_{k-1} - \frac{C_{k-1} - C_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} (\gamma_{k-1} - \mu_2) \quad (k = 3, 4, 5 \dots) \quad (3.34)$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edildiğinde işlem yakınsar ise sonuç elde edilir. Denklem doğrusal veya doğrusala yakın ise iyi sonuç verir. Lineer olmayan denklemlerde iyi sonuç alınmayabilir.

Yukarıda yapılan işlem, $g(C) = u(b; C) - \mu_2$ denkleminin köklerini bölüm 2 de anlatılan giriş yöntemi ile bulma işlemidir. $g(C) = 0$ denkleminin kökleri Newton-Raphson yöntemi ile bulunmak istendiğinde

$$C_k = C_{k-1} - \frac{g(C_{k-1})}{dg(C_{k-1})/dC} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.35)$$

bağıntısı kullanılmalıdır. Burada problem analitik olarak bilinmeyen bir $g(C)$ fonksiyonunun türevinin bulunmasıdır. Bunun için (3.31) verilen ifadelerin aynı zamanda C' ye bağlı olduğunu belirtmek için

$$u''(x; C) = f[x, u(x, C), u'(x, C)], a \leq x \leq b, u(a; C) = \mu_1, u'(a; C) = \mu_2 \quad (3.36)$$

şeklinde yazalım. Bu ifadelerin C' ye göre türevleri alındığında $a \leq x \leq b'$ de

$$\frac{\partial u''}{\partial C} = \frac{\partial f}{\partial C} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial C}, \quad \frac{\partial u(a; C)}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial u'(a; C)}{\partial C} = 1 \quad (3.37)$$

bulunur. C ve x değişkenleri birbirinden bağımsız olduklarında $\partial x / \partial C$ ifadesi sıfır olacağından yukarıda verilen bağıntılar

$$\frac{\partial u''}{\partial C} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial u'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial C}, \quad \frac{\partial u(a; C)}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial u'(a; C)}{\partial C} = 1 \quad (3.38)$$

şeklinde yazılır. $z(x; C) = \partial u / \partial C$ tanımı yapıldığında

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot z + \frac{\partial f}{\partial u'} \cdot z' \quad z(a; C) = 0 \quad z'(a; C) = 1 \quad (3.39)$$

şeklinde bir başlangıç değer problemi elde edilir. $g(C) = u(b:c) - \mu_2$ olduğundan $dg/dC = \partial u(b:C)/\partial C$ 'dir. Dolayısıyla (3.35) bağıntısı aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$C_k = C_{k-1} - \frac{u(b:C_{k-1}) - \mu_2}{z(b:C_{k-1})} \quad (3.40)$$

Burada görüldüğü gibi ateşleme yönteminde, Newton-Raphson yöntemi kullanıldığında her bir adımda (3.31) ve (3.39) ile verilen iki başlangıç değer probleminin çözülmesi gerekmektedir.

Ateşleme yöntemi lineer ve lineer olmayan problemlerde, yuvarlatma hatalarına karşı genelde hassastır. Yöntem uygulanırken yuvarlatma hataları büyüyor ise ateşleme yöntemi tersten, yani son noktayı başlangıç noktası olarak, uygulanabilir. Bu durumda da yuvarlatma hataları etken ise yöntemi değiştirmek gerekir.

Excel gibi elektronik tablolardan yararlandığında yukarıda anlatılan ardışık yaklaşımları tablonun "hedef ara" komutu ile kolay bir şekilde yaptırmak mümkündür. Bu duruma ait bir örnek, problem 3.7 de verilmiştir.

Problem 3.7.

$u'' = u^3 - uu'$ ($1 \leq x \leq 2$) $u(1) = \frac{1}{2}$ ve $u(2) = \frac{1}{3}$ sınır değer problemini ateşleme yöntemini çözünüz. Problemi çözerken eğrinin başlangıçtaki eğimini belirleyen C sabitini:a)Kirişler yöntemiyle b)Newton-Raphson yöntemiyle c)Elektronik tabloların özelliğini kullanarak bulunuz.

Çözüm. Verilen problemdeki ikinci mertebeden diferansiyel denklem iki tane birinci mertebeden diferansiyel denkleme indirgenen Runge-Kutta yöntemiyle çözülecektir. $u = u(x)$ eğrisi başlangıçtaki eğimi C olsun. Problem aşağıda verilen başlangıç değer problemine indirgenir.

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 & u(1) &= \frac{1}{2} \\ u_2' &= u_1^3 - u_1 u_2 & u_2(1) &= C \end{aligned}$$

Yukarıda verilen C değeri $u_1(2) = \frac{1}{3}$ şartından bulunacaktır. Bunun için C değeri değiştirilerek $u_1(2)$ değeri hesaplanacak ve bu değeri $\frac{1}{3}$ yapan C değeri ve bu hale ait eğri problemin çözümüdür.

a) $C_1 = 1$ alınarak, problemin 4.mertebe Runge-Kutta yöntemiyle çözümü tablo 3.4 de verilmiştir.

Tablo 3.4. Problemin Runge-Kutta yöntemiyle çözümüne ait sonuçlar

| x_i | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ | $k_{3,1}$ | $k_{3,2}$ | $k_{4,1}$ | $k_{4,2}$ | u_1 | u_2 |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|--------|
| 1,0 | | | | | | | | | 0,5000 | 1,0000 |
| 1,1 | 1,000 | -0,375 | 0,981 | -0,373 | 0,981 | -0,373 | 0,963 | -0,362 | 0,5981 | 0,9628 |
| 1,2 | 0,963 | -0,362 | 0,945 | -0,341 | 0,946 | -0,342 | 0,929 | -0,311 | 0,6927 | 0,9289 |
| 1,3 | 0,929 | -0,311 | 0,913 | -0,271 | 0,915 | -0,273 | 0,902 | -0,225 | 0,7841 | 0,9018 |
| 1,4 | 0,902 | -0,225 | 0,891 | -0,168 | 0,893 | -0,171 | 0,885 | -0,106 | 0,8734 | 0,8850 |
| 1,5 | 0,885 | -0,107 | 0,880 | -0,034 | 0,883 | -0,038 | 0,881 | 0,042 | 0,9616 | 0,8815 |
| 1,6 | 0,881 | 0,042 | 0,884 | 0,129 | 0,888 | 0,124 | 0,894 | 0,220 | 1,0502 | 0,8942 |
| 1,7 | 0,894 | 0,219 | 0,905 | 0,322 | 0,910 | 0,317 | 0,926 | 0,430 | 1,1411 | 0,9263 |
| 1,8 | 0,926 | 0,429 | 0,948 | 0,549 | 0,954 | 0,545 | 0,981 | 0,677 | 1,2362 | 0,9812 |
| 1,9 | 0,981 | 0,676 | 1,015 | 0,819 | 1,022 | 0,816 | 1,063 | 0,975 | 1,3382 | 1,0633 |
| 2,0 | 1,063 | 0,974 | 1,112 | 1,146 | 1,121 | 1,146 | 1,178 | 1,342 | 1,4500 | 1,1783 |

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi $u_1(2) = 1,4500$ 'dır. $C_2 = 0,5$ alındığında $u_2(2) = 0,9971$ bulunur. Bu iki değer kullanılarak (3.34) formülü yardımıyla $C_3 = 0,2328$ olarak elde edilir. C_3 değeri kullanılarak $u_1(2) = 0,3488$ elde edilir. Son bulunan iki değer yardımıyla (3.34)'den $C_4 = 0,2503$ olarak elde edilir. C_4 kullanılarak $u_1(2) = 0,3331$ elde edilir. Yine son iki değer yardımıyla $C_5 = -0,2500$ elde edilir ve C_5 yardımıyla da $u_1(2) = 0,3333$ bulunur. Sonraki işlemlerde sonuç değişmemektedir. C_i ve u_i değerlerinin toplu sonuçları tablo 3.5 de verilmiştir. Sonuçta bulunan eğrinin x_i noktalarındaki değerleri c) şikkındaki tablo 3.8 de verilmiştir.

Tablo 3.5 C_i ve u_i değerlerinin sonuçları

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|--------|--------|---------|--------|---------|
| C_k | 1,0000 | 0,5000 | -0,2328 | 0,2503 | -0,2500 |
| u_k | 1,4500 | 0,9971 | 0,3488 | 0,3331 | 0,33333 |

Problemin kesin çözümü $u = \frac{1}{1+x}$ olup $C = u'(2) = -0,2500$ 'dır.

b) Newton-Raphson yönteminin kullanılması için gerekli ikinci başlangıç değer problemi aşağıda verilmiştir.

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial u} z + \frac{\partial f}{\partial u'} z' = (3u^2 - u')z - uz' \quad z(1) = 0 \quad z'(1) = 1$$

yukarıda verilen ikinci mertebeden başlangıç değer problemi

$$z_1' = z_2 \quad z_1(1) = 0$$

$$z_2' = (3u_1^2 - u_2)z_1 - u_1z_2 \quad z_2(1) = 1$$

Şeklinde iki tane 1.mertebeden başlangıç değer problemine indirgenir. Bu problemdeki z_1 ve z_2 değerleri y_1 ve y_2 ile birlikte bulunacaktır. $C_1 = 1$ alındığında tablo 3.4 'deki değerler yardımıyla z_1 ve z_2 değerlerinin Runge-Kutta yöntemiyle bulunuşu aşağıda tablo 3.6 da verilmiştir.

Tablo 3.6. z_1 ve z_2 değerlerinin Runge-Kutta yöntemiyle bulunuşu

| x_i | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ | $k_{3,1}$ | $k_{3,2}$ | $k_{4,1}$ | $k_{4,2}$ | z_1 | z_2 |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|--------|
| 1,0 | | | | | | | | | 0,0000 | 1,0000 |
| 1,1 | 1,000 | -0,500 | 0,975 | -0,550 | 0,973 | -0,549 | 0,945 | -0,597 | 0,0973 | 0,9451 |
| 1,2 | 0,945 | -0,555 | 0,917 | -0,579 | 0,916 | -0,578 | 0,887 | -0,601 | 0,1890 | 0,8872 |
| 1,3 | 0,887 | -0,518 | 0,861 | -0,517 | 0,861 | -0,517 | 0,836 | -0,513 | 0,2751 | 0,8356 |
| 1,4 | 0,836 | -0,396 | 0,816 | -0,370 | 0,817 | -0,371 | 0,799 | -0,343 | 0,3568 | 0,7986 |
| 1,5 | 0,799 | -0,197 | 0,789 | -0,149 | 0,791 | -0,150 | 0,784 | -0,100 | 0,4358 | 0,7837 |
| 1,6 | 0,784 | 0,071 | 0,787 | 0,139 | 0,791 | 0,138 | 0,798 | 0,210 | 0,5148 | 0,7977 |
| 1,7 | 0,798 | 0,405 | 0,818 | 0,495 | 0,822 | 0,495 | 0,847 | 0,591 | 0,5969 | 0,8473 |
| 1,8 | 0,847 | 0,812 | 0,888 | 0,928 | 0,894 | 0,931 | 0,940 | 1,060 | 0,6861 | 0,9404 |
| 1,9 | 0,940 | 1,310 | 1,006 | 1,464 | 1,014 | 0,473 | 1,088 | 1,650 | 0,7872 | 1,0877 |
| 2,0 | 1,088 | 1,937 | 1,185 | 2,152 | 1,195 | 2,170 | 1,305 | 2,425 | 0,9064 | 1,3044 |

Yukarıda verilen tabloda $z(2, C_1) = 0,9064$ ve tablo (4.2) de $u(2, C_1) = 1,4500$ 'dir. $\mu_2 = \frac{1}{3}$ olduğundan, (3.40) yardımıyla $C_2 = -0,2320$ bulunur. Bu değer kullanılarak u_1 ve u_2 değerleri tekrar hesaplanır. Hesaplanan u_1 ve u_2 değerleri yardımıyla z_1 ve z_2 değerleri hesaplandıktan sonra $C_3 = -0,2505$ olarak bulunur. Daha sonraki yaklaşımda ise $C_4 = -0,2500$ olarak bulunur. Sonraki adımda C_k değeri değişmemektedir. Sonuçlar tablo halinde 3.7 de verilmiştir.

Tablo 3.7. Bulunan değerler yardımıyla elde edilen sonuçlar

| k | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|
| C_k | 1,000 | -0,2320 | -0,2505 | -0,2500 |
| $u(b)$ | 1,4500 | 0,3496 | 0,3329 | 0,3333 |
| $g(C)$ | 1,1166 | 0,0162 | -0,0004 | 0,0000 |
| $g(C)/dC$ | 0,9064 | 0,8784 | 0,8798 | 0,8797 |

c) Excel programında “hedef ara” komutu ile C değeri hesaplanabilir. Tablo 3.4 de olduğu gibi $u_2(1) = 1,0000$ alındıktan sonra ($u_2(1)$ olarak başka değer de alınabilir) hedef ara komutu ile $u_1(2) = 0,33$ olacak şekilde $u_2(1)$ değerinin bulunması istenir. Bu durumda çözümler aşağıda tablo 3.8 de verilmiştir.

Tablo 3.8. Son olarak elde edilen sonuçlar

| x_i | $k_{1,1}$ | $k_{1,2}$ | $k_{2,1}$ | $k_{2,2}$ | $k_{3,1}$ | $k_{3,2}$ | $k_{4,1}$ | $k_{4,2}$ | u_1 | u_2 |
|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1,0 | | | | | | | | | 0,5000 | -0,2500 |
| 1,1 | -0,250 | 0,250 | -0,238 | 0,232 | -0,238 | 0,238 | -0,227 | 0,216 | 0,4762 | -0,2268 |
| 1,2 | -0,227 | 0,216 | -0,216 | 0,201 | -0,217 | 0,202 | -0,207 | 0,188 | 0,4545 | -0,2066 |
| 1,3 | -0,207 | 0,188 | -0,197 | 0,175 | -0,198 | 0,176 | -0,189 | 0,164 | 0,4348 | -0,1890 |
| 1,4 | -0,189 | 0,164 | -0,181 | 0,154 | -0,181 | 0,154 | -0,174 | 0,145 | 0,4167 | -0,1736 |
| 1,5 | -0,174 | 0,145 | -0,166 | 0,136 | -0,167 | 0,136 | -0,160 | 0,128 | 0,4000 | -0,1600 |
| 1,6 | -0,160 | 0,128 | -0,154 | 0,120 | -0,154 | 0,121 | -0,148 | 0,114 | 0,3846 | -0,1479 |
| 1,7 | -0,148 | 0,114 | -0,142 | 0,107 | -0,143 | 0,108 | -0,137 | 0,102 | 0,3704 | -0,1372 |
| 1,8 | -0,137 | 0,102 | -0,132 | 0,096 | -0,132 | 0,096 | -0,128 | 0,091 | 0,3571 | -0,1276 |
| 1,9 | -0,128 | 0,091 | -0,123 | 0,086 | -0,123 | 0,086 | -0,119 | 0,082 | 0,3448 | -0,1189 |
| 2,0 | -0,119 | 0,082 | -0,115 | 0,078 | -0,115 | 0,078 | -0,111 | 0,074 | 0,3333 | -0,1111 |

3.2.3. Daha İyi Başlangıç Yaklaşımli Etkili ve Kesin Ateşleme Yöntemi

Sınır değer problemlerinin çözümü için ateşleme metodu kullanılarak daha iyi başlangıç yakınsamanın elde edilmesi için iyileştirilmiş algoritmalar sunulmuştur. Her bir sınır değer problemi bir denklem sistemi olarak, yani bilinmeyen bir başlangıç koşuluyla başlangıç değer problemleri olarak yeniden düzenlenir. Daha sonra denklemler sistemi yeni geliştirilen ateşleme metodu kullanılarak çözülmektedir. Bu çalışma, terminal koşullarına hızlı bir şekilde yaklaşmak için klasik Newton yöntemine göre daha etkili başlangıç yakınsama algoritmaları önermektedir. İyileştirilmiş başlangıç değerler kullanarak ateşleme metodunun verimliliğini ve kesinliğini artırdık. Önerilen teknik, farklı lineer olmayan yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin çözümüne uygulandı. Sonuçlar, önerilen yöntemin *MATLAB* 'da kullanılan yerleşik fonksiyonlara kıyasla daha verimli ve doğru olduğunu göstermektedir.

3.2.3.1. Geliştirilmiş Ateşleme Yöntemi

Lineer olmayan bir ikinci dereceden sınır değer problemini düşünelim:

$$u'' = f(x, u, u'), a \leq x \leq b \text{ için burada } u(a) = \alpha \text{ ve } u(b) = \beta. \quad (3.41)$$

Bir sınır değer problemini

$$y' = z, \quad z' = f(x, y, z)u(a) = \alpha \text{ ve } u(b) = \beta. \quad (3.42)$$

olarak düzenlenebilir.

Daha sonra, bir sınır değer problemi, $x = b$ 'deki sınır koşulu değiştirilmesiyle aşağıdaki başlangıç değer problemine dönüştürülür.

$$u' = z, \quad z' = f(x, u, z)u(a) = \alpha \text{ ve } u'(a) = t. \quad (3.43)$$

Daha sonra $t = t_k$ parametresi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(b, t_k) = u(b) = \beta, \quad (3.44)$$

(3.44) koşulunu sağlayacak şekilde seçilir, burada $u(x, t_k)$, $t = t_k$ (3.43) başlangıç değer probleminin çözümü olup $u(x)$ ise (3.41) denkleminin çözümüdür. Sınır değer probleminin (bkz.3.41) çözümünü temsil eder. $u(b, t_0)\beta$ 'ya yeterince yakın değilse, başlangıçta $t = t_0$ parametresi ile hedefi vurmaya başlarız, $u(b, t_0)$ hedef β 'ı vurmaya yetecek kadar yaklaşıncaya kadar, başka bir yükseklik seçiyoruz yani t_1 . Genelde Newton yöntemi veya sekant yöntemi, bir sınır değer probleminin çözümü için ilk yakınsamanın seçilmesinde kullanılır.

(3.43) başlangıç değer problemi çözümü olarak çözümün hem x hem t 'ye bağlı olduğunu vurgulamaktadır.

$$u''(x, t) = f(x, u(x, t), u'(x, t)), a \leq x \leq b \text{ için}$$

burada

$$u(a, t) = a \text{ ve } u'(a, t) = t. \quad (3.45)$$

Hedefi bulmak için örneğin β gibi, bazı yüksek dereceli algoritmalar kullanılır. Bunun için $\frac{dy}{dt}(b, t_k)$ 'ı hesaplıyoruz. 3.45 denklemini t 'ye göre diferansiyel ise

$$z''(x, t) = f_u(x, u, u')z(x, t) + f_{u'}(x, u, u')z'(x, t), a \leq x \leq b \text{ için} \quad (3.46)$$

burada

$$z(a, t) = 0 \text{ ve } z'(a, t) = 1 \quad (3.47)$$

Şimdi, her bir iterasyon için (denklemler 3.43 ve 3.46) iki başlangıç değeri probleminin çözümü gereklidir. (3.46) denkleminde $z(b, t_k)$ değeri elde edilecek ve sonraki alt bölümde sağ sınır şartına yani $u(b) = \beta$ hızlı bir şekilde ulaşmak için t_k dizisini bulmak için kullanılacaktır.

3.2.3.2. Başlangıç Yakınsamanın İyileştirilmesi İçin İteratif Algoritmalar

Son yıllarda, lineer olmayan denklemlerin çözümü için birkaç yüksek dereceden iteratif yöntemler geliştirilmiştir (3.51-3.53) Bu yöntemler, çeşitli tekniklere, örneğin Taylor serisine, ayırıştırma yöntemine, varyasyonel iteratif tekniğine, homotopi pertürbasyon yöntemine ve kuadratur formülüne dayanmaktadır. Çeşitli araştırmacılar bu teknikleri,

daha yüksek dereceli yakınsama elde etmek için bazı “bir ve iki adımlı iteratif yöntemler” geliştirmek için kullandılar.

Bu makale, Newton ve sekant yöntemlerini uygulamak yerine iki veya üç adım yönteminin kullanılmasını önermektedir. Önerilen algoritmalar, geleneksel yöntemlerle karşılaştırıldığında hızlı yakınsama olduğunu kanıtlamaktadır. Bir sonraki bölümde, uygulanan algoritmalar sunuldu ve sınır değer problemlerinin sonuçlarını karşılaştırmak için Newton yöntemi kullanılmıştır.

Algoritma 3.8. Newton Metodu

Verilen bir t_0 için, t_1, t_2, \dots hesaplıyoruz, öyle ki

$$t_{k+1} = t_k - \frac{u(b, t_k) - \beta}{z(b, t_k)}. \quad (3.48)$$

Algoritma 3.9.

Verilen bir t_0 için, t_1, t_2, \dots hesaplıyoruz, öyle ki

$$t_{k+1} = t_k - \frac{[u(b, s_k) - \beta][u(b, r_k) - \beta]}{z(b, r_k)[u(b, r_k) - \beta] - 2\gamma[u(b, s_k) - \beta]}, \quad (3.49)$$

$$\text{burada } r_k = t_k - \frac{u(b, t_k) - \beta}{z(b, t_k)}, \quad \text{ve } s_k = r_k - \frac{u(b, r_k) - \beta}{z(b, r_k)}.$$

Burada, γ kontrol parametresi olup 0'dan farklı olmalıdır. Ayrıca, γ paydayı daha büyük yapacak şekilde seçilmelidir. Algoritma 3.9, altıncı altıncı dereceden kesinliğe sahiptir.

Algoritma 3.10

Verilen bir t_0 için, t_1, t_2, \dots hesaplıyoruz, öyle ki

$$t_{k+1} = t_k - \frac{2[u(b, t_k) - \beta]}{z(b, t_k) \pm \sqrt{[z(b, t_k)]^2 + 4p^3 [z(b, t_k) - \beta]^3}} \quad (3.50)$$

Burada $p \in R$, paydayı daha büyük yapmak için seçilmelidir. Ayrıca $[u(t_k) - \beta]$ ile payını işarete sahip olmalıdır. Algoritma 3.10 ikinci dereceden kesinliğe sahiptir.

Algoritma 3.11.

Verilen bir t_0 için, t_1, t_2, \dots hesaplıyoruz, öyle ki

$$t_{k+1} = s_k - \frac{[y(b, s_k) - \beta][u(b, r_k) - \beta]}{z(b, r_k)[u(b, r_k) - \beta] - \gamma([u(b, r_k) - \beta] - 2[u(b, s_k) - \beta])}, \quad (3.51)$$

$$\text{burada } r_k = t_k - \frac{u(b, t_k) - \beta}{z(b, t_k)}, \quad \text{ve } s_k = r_k - \frac{u(b, r_k) - \beta}{z(b, r_k)}.$$

Burada, γ paydayı daha büyük yapacak şekilde seçilmeli ve 0'dan farklı olmalıdır. (3.11) algoritması dördüncü dereceden kesinliğe sahiptir.

3.2.3.3. Başlangıç Değer Problemlerini Çözmek İçin İteratif Formül

Çeşitli iteratif formüller örn., Euler metodu ve Runge-Kutta metodu başlangıç değer problemlerinin çözümü için kullanılabilir. Bu çalışmada, (3.43) ve (3.46) denklemlerde verilen başlangıç değer problemleri, Taylor serisi yaklaşımı kullanılarak önerilen, iteratif formül ile çözülmüştür.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(k_0 + k_1 + k_3), \quad (3.52)$$

$$x_{n+1} = x_n + h,$$

Burada,

$$k_0 = f(x_n + y_n),$$

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_0\right),$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots \text{ için ; } \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1).$$

Önerilen yöntem, sonraki bölümde lineer ve lineer olmayan sınır değer problemlerini çözmek için uygulanacaktır.

3.2.3.4. Nümerik Test Problemleri

Bu bölüm, esas olarak akışkan dinamiğinde ortaya çıkan üç lineer olmayan sınır değer problemlerinden oluşmaktadır. Test problemlerinde, başlangıç yakınsamanın güncellenmesi için önerilen algoritmalarla başlangıç değer problemlerini çözmek için önerilen iteratif formül uygulanır.

Problem 3.12. Blasius Denklemi

Blasius denklemi, benzerlik dönüşümünü kullanarak sınır tabaka akışları için ünlü Navier-Stokes denklemlerinden türetilmiştir.

Denklem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$f''' = (\eta) + f(\eta) \cdot f''(\eta) = 0, \quad f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ ve } f'(\infty) = 1 \quad (3.53)$$

(3.53) problemi başlangıç değer problemine dönüştürdükten sonra, $f'(\infty) = 1$ koşulunu sağlayan $f''(0) = t$ (başlangıç yakınsama) göz önünde bulunduruyoruz.

Blasius denkleminin çözümünü bulmak için, yani $f'(\infty) = 1$ bölgesi keyfi şekilde $f'(10) = 1$ ile sınırlandırılmıştır.

İlk başlangıç yakınsama $t_0 = 0,332$ olarak alınmıştır. İlk ateşleme yöntemi iterasyonları tamamlanmasından sonra, başlangıçları almak için 3.8-3.11 algoritmaları uygulandı. İlk t_1 başlangıç yakınsamalar aşağıdaki şekildedir.

Algoritma 3.8, $t_1 = 0,4617497568$ değerini verir,

Algoritma 3.9, $t_1 = 0,4695996403$ değerini verir,

Algoritma 3.10, $t_1 = 0,4613020362$ değerini verir,

Algoritma 3.11, $t_1 = 0,4696004256$ değerini verir.

Yukarıda belirtilen başlangıç değerleri kullanarak, problemin çözümü için önceki bölümde sunulan teknik uygulanır.

Göreceli yüzde hatası, aşağıda verilen formül kullanılarak hesaplanmıştır:

$$\text{Göreceli yüzde hatası} = \frac{\text{mutlak hata}}{\text{kesin çözüm}} \times \%100 \quad (3.54)$$

Algoritma 3.8 ve algoritma 3.9 ilk iterasyonda hedefi vurmadiğundan, süreci tekrarladık ve bir sonraki başlangıç elde ettik. Algoritma 3.8 ve algoritma 3.10 'dan elde edilen yeni başlangıç değerleri sırasıyla $t_2 = 0,4696015437$ ve $t_2 = 0,4696002883$ 'tür. Güncellenmiş başlangıç değerlerini kullandıktan sonra (t_2 olarak adlandırılan), ateşleme

metodu hedefe yaklaşır, yani $f'(10) = 1$, algoritma 3.9 ve 3.11'in bir iterasyon hedefe vururken, algoritma 3.8 ve 3.10 iki iterasyondan söz edebiliriz. Bu nedenle, algoritma 3.9 ve 3.11'in sınır değer problemlerini çözmek için ateşleme metodunda ilk yakınsamada bulunmak için daha uygun algoritmalar olduğu kanıtlanmıştır. Bu sonuçlara dayanarak daha iyi başlangıç yaklaşımı algoritmaları içeren ateşleme metodunun az zaman içerisinde daha kesin sonuçlar verdiği görüldü.

Örnek 3.13. Falkner-Skan denklemi

Aşağıdaki şekilde ifade edilen ünlü Falkner-Skan denklemi ele alalım:

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1, \quad f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ ve } f'(\infty) = 1 \quad (3.55)$$

(3.50) denklemi başlangıç değer problemine dönüştürdükten sonra, $f'(\infty) = 1$ koşulunu yerine getiren $f''(0) = t$ (ilk başlangıç değer) bağıntısını ele alıyoruz.

Falkner-Skan denkleminin çözümünü bulmak için, problemin alanı keyfi olarak $f'(10) = 1$ ile sınırlandırılmıştır.

İlk başlangıç değeri $t_0 = 1,224744871391$ olarak alınmıştır. Ateşleme yönteminin birinci iterasyonun tamamlanmasından sonra, bir sonraki t_1 yakınsamasını elde etmek için 3.8-3.11 algoritmalarını uyguladık.

Algoritma 3.8, $t_1 = 1,23350588$ değerini verir,

Algoritma 3.9, $t_1 = 1,23258786$ değerini verir,

Algoritma 3.10, $t_1 = 1,23350543$ değerini verir,

Algoritma 3.11, $t_1 = 1,232587955$ değerini verir.

Yukarıda belirtilen başlangıç değerleri kullanarak, problemin çözümü için önceki bölümde sunulan teknik uygulandı. Önerilen algoritma 3.9 ve algoritma 3.11 kullanılarak, sonuçlar hedefe (sağ sınır) algoritma 3.8 (Newton yöntemi) ve algoritma 3.10 ile karşılaştırıldığında daha kesin bir şekilde yaklaşmıştır.

Bu nedenle algoritma 3.9 ve algoritma 3.11 daha kesin ve etkilidir. Algoritma 3.8 ve algoritma 3.10 ilk iterasyonda hedefe ulaşmadığından, süreci tekrar ettik ve bir sonraki başlangıçlar t_2 ve t_3 elde edildi. Algoritma 3.8 ve algoritma 3.10'dan elde edilen yeni değerler sırasıyla $t_3 = 1,232587638$ ve $t_3 = 1,232587601$ 'dir. Güncellenen başlangıç değerlerini kullandıktan sonra (t_3 olarak adlandırılan), ateşleme yöntemi hedefe yaklaştı, yani $f'(10) = 1$ ' e hızlıca yaklaştı. Algoritmalar 3.9 ve 3.11 hedefleri bir iterasyonda vururken algoritma 3.8 ve 3.10 tekrar iki iterasyon aldı. Böylece, algoritma 3.8 ve 3.10, algoritma 3.9 ve algoritma 3.11'e kıyasla daha fazla hesaplama süresi gerektirir. Bu sonuçlara dayanarak, algoritma 3.9 ve 3.11'in sınır değer problemlerinin çözümü için ateşleme yönteminde ilk değerlerin elde edilmesi için daha uygun algoritmalar olduğu kanıtlanmıştır.

Örnek 4.7. Hidromanyetik akışkan problemi

Aşağıdaki hidromanyetik sıvı problemini ele alalım,

$$f''' + ff'' - f' - f'^2 = 0, \quad f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ ve } f'(\infty) = 0 \quad (3.56)$$

(3.56) denklemini başlangıç değer problemine dönüştürdükten sonra, $f'(\infty) = 0$ koşulunu sağlayan $f''(0) = t$ (ilk başlangıç değer) değerini alıyoruz.

Problemi çözmek için bölge $f'(10) = 0$ şeklinde sınırlandırıldı.

İlk başlangıç değeri $t_0 = -1,42$ olarak alınmıştır. Ateşleme yönteminin ilk iterasyonunun tamamlanmasından sonra, bir sonraki t_1 değeri bulabilmek için 3.8-3.11 algoritmaları uyguladık. Çözüm kesin bir şekilde yakınsaklık göstermedi. Böylece, t_2 'i iyileştirmek için tekrar 3.8-3.11 algoritmaları kullandık. İkinci adımdan sonra, aşağıdaki yeni başlangıç değerlerini elde ettik.

Algoritma 3.8, $t_2 = -1,414200017$ değerini verir,

Algoritma 3.9, $t_2 = -1,414213560$ değerini verir,

Algoritma 3.10, $t_2 = -1,414200061$ değerini verir,

Algoritma 3.11, $t_2 = -1,414213566$ değerini verir.

Algoritma 3.8 ve algoritma 3.10 iki iterasyonda hedefe ulaşmadığından süreci tekrarladık ve bir sonraki değerleri (yani t_3 ve t_4) elde edildi. Algoritma 3.8 ve algoritma 3.10'dan elde edilen yeni başlangıç değerleri sırasıyla $t_4 = -1,414213559$ ve $t_4 = -1,414213563$ 'tir. Güncellenen başlangıç değerlerini kullandıktan sonra (t_4 olarak adlandırılan), ateşleme yöntemi hedefe ulaştı, yani $f'(10) = 0$ oldu. Algoritma 3.8 ve 3.10 hedefe ulaşma da dört iterasyon gerektirirken, algoritma 3.9 ve 3.11 ise iki iterasyon gerektiğini belirtelim. Bu nedenle, algoritmalar 3.9 ve 3.11'in sınır değer probleminin çözümü için ateşleme yönteminde ilk değerleri elde etmek için optimum algoritmalar olarak kanıtlanmıştır.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, lineer ve lineer olmayan sınır değer problemleri çözmek için kullanılan ateşleme metodu ele alındı. Lineer problem durumunda sınır değer problemi iki lineer başlangıç değer problemi şeklinde ifade edildi. Oluşan başlangıç değer problemlerinin çözümü için dördüncü dereceden Runge-Kutta metodu kullanılarak sayısal sonuçlar elde edildi. Lineer olmayan problem durumunda ise dördüncü dereceden Runge-Kutta yönteminin yanı sıra Kirişler yöntemini kullanarak sayısal sonuçlar bulundu. Tezin son kısmında sınır değer problemlerinin çözümü için kullanılan Ateşleme metodu ile birlikte başlangıç yaklaşımların iyileştirilmesi için algoritmalar sunuldu. Tezde kullanılan bazı yöntemler farklı tip sınır şartları içeren sınır değer problemi içinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Amirali G. ve Amirali I. (2018) “Nümerik Analiz” *Seçkin Yayıncılık*, 1-495
- Amiraliyev G.M. and Cakir M. (2002)“Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition”*Applied Mathematics Mechanics (English Edition)* 23 (7) 755–764.
- Cakir M. and Amiraliyev G. M. (2010) “A numerical method for a singularly perturbed three-point boundary value problem” *Journal of Applied Mathematics*, 10, 1-17.
- Cakir M. and Amiraliyev G. M. , (2007) “Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem” *International Journal of Computer Mathematics*, 10, 1465–1481.
- Faires J. D. and Burden R. L. (2002) “Numerical Analysis” *Brooks Cole*, 640 pp.
- Jones, D. J. (1993)“Use of a shooting method to compute eigenvalues of fourth-order two point boundary value problems.”*Journal of Computational and Applied Mathematics*, 47(3), 395-400
- Keller, H. B. (1976) “Numerical solution of two point boundary value problem”, 3rd ed. , *Slam*, Philadelphia
- Palekar, M.G. (2007)“Numerical solution of two-point boundary value problem.”*International Journal of Computer Mathematics*, 4(4), 191-195
- Samarskii A. A. (2001)“Theory of difference schemes”*Marcel Dekker Inc.*, New York.
- Sewell G. (2005) “The numerical solution of Ordinary and Partial Differential Equations” *John Wiley & Sons*, 333 pp
- Wang, H, Ouyang Z. and Wang, L. (2013) “Application of the shooting method to second-order multi-point integral boundary-value problems.”*Boundary Value Problems*.1, 1-10,

ÖZGEÇMİŞ

Süleyman Safa KEFÇİ 1989 yılında Erzincan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve 2014 yılında mezun oldu. 2016 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve halen öğrenimine devam etmektedir.

