T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k −LUCAS SAYILARDA CATALAN DÖNÜŞÜMÜ

Olcay GÜNGÖR

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Prof.Dr.Engin Özkan danışmanlığında, Olcay Güngör tarafından hazırlanan bu çalışma 28/03/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr.Engin Özkan	İmza:
Üye	: Dr.Öğr.Üyesi Ali Aydoğdu	İmza:
Üye	: Dr.Öğr.Üyesi Tufan Özdin	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 29/05/20.19 tarih ve 20/..6...... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

“$\boldsymbol{k}$ −Lucas Sayılarda Catalan Dönüşümü” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 28/02/2019

OLCAY GÜNGÖR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

k −LUCAS SAYILARDA CATALAN DÖNÜŞÜMÜ

Olcay GÜNGÖR

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu çalışmada, Falcon tarafından verilen k–Lucas dizisinin $\{L_{k,n}\}$ Catalan dönüşümünün $CL_{k,n}$ tanımı verildi. k–Lucas dizisinin $\{L_{k,n}\}$ Catalan dönüşümünün $CL_{k,n}$ geren fonksiyonu elde edildi. Ayrıca, $CL_{k,n}$ dönüşümü, alt üçgen matris olan Catalan matrisi C ile n × 1 tipindeki L_k matrisinin çarpımı olarak yazıldı. Hankel fonksiyonu kullanılarak $CL_{k,n}$ ler ile oluşturulan matrislerin determinantları hesaplandı.

2019, 31 sayfa

Anahtar kelimeler: k −Lucas, k −Fibonacci, Catalan, Hankel

ABSTRACT

Master Thesis

CATALAN TRANSFORMATION IN NUMBERS OF *k*–LUCAS

Olcay GÜNGÖR

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this study, the $CL_{k,n}$ description of Catalan transformation of k-Lucas $\{L_{k,n}\}$ series given by Falcon was explained. The $CL_{k,n}$ generating function of Catalan transformation of k-Lucas $\{L_{k,n}\}$ series was ensued. And also, $CL_{k,n}$ transformation was written as the multiplying of Catalan matris C which is the lower triangular matris, and the L_k matris of n x 1 type. Determinants of matrises which were formed with $CL_{k,n}$ by using Hankel function were calculated.

2019, 31 pages

Keywords: k −Lucas, k −Fibonacci, Catalan, Hankel

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada desteğini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Engin ÖZKAN hocama ve Merve TAŞTAN hanımefendiye ayrıca arkadaşlarım Kadir ALPARSLAN ve Mustafa BAŞOL' a teşekkürü borç bilirim.

Olcay GÜNGÖR

Şubat, 2019

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

YÖK watermark

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\sum_{n=0}^{\infty}$:	Sınırları 0’dan ∞’a giden toplam sembolü
$\det(A)$:	A matrisinin determinantı
$\lVert\ \rVert$:	Tam değer
σ:	Sigma
ϕ:	Fi
C_n:	n. Catalan Sayısı
F_n:	n. Fibonacci Sayısı
L_n:	n. Lucas Sayısı
$F_{k,n}$:	n. k – Fibonacci Sayısı
$L_{k,n}$:	n. k – Lucas Sayısı
CF_k:	Catalan k – Fibonacci Polinomu
CL_k:	Catalan k – Lucas Polinomu
$CF_{k,n}$:	n. Catalan k – Fibonacci Sayısı
$CL_{k,n}$:	n. Catalan k – Lucas Sayısı

1. GİRİŞ

1.1. Fibonacci Sayıları

Tanım 1.1.1. Her bir terimi, kendinden önceki iki terimin toplamı olarak ifade edilen 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,... sayılarının dizisi Fibonacci dizisi olarak bilinir. Bu sayıların her birine Fibonacci Sayıları denir ve n. Fibonacci Sayısı F_n ile gösterilir.

Bu sayı dizisi aşağıdaki tavsan probleminden yola çıkarak ortaya çıkmıştır.

1.1.1. Tavşan Problemi

Biri dişi, biri erkek olan yeni doğmuş iki tavsan olduğunu farz edelim;

1) Her çiftin olgun olması için bir ayın geçtiği,

2) 2.aydan sonra, her çiftin, her ay bir çift doğurduğu,

3) Yıl boyunca hiçbir tavşanın ölmediği,

şartları altında bir yılda doğan tavşan çiftlerinin sayısını bulalım (Yosma, 2008).

İlk tavsan çiftinin 1 Ocak'ta doğduğunu farz edelim. Bu ilk tavsan çiftinin olgunlaşması bir ay alır. Bu yüzden 1 Şubat'ta, hâlâ, yalnız bir çift vardır. 1 Mart'ta bu tavsan çifti iki aylıktır. Ve yeni bir çift doğururlar. Toplamda iki çift olur. Bu şekilde devam ederek, 1 Nisan'da 3 çift olacak, 1 Mayıs'ta 5 çift olacak ve böylece aşağıdaki tablo oluşacaktır:

Tablo 1.1. Aylara göre tavşan çiftlerinin sayıları

Çiftlerin Sayısı	**Ocak**	**Şubat**	**Mart**	**Nisan**	**Mayıs**	**Haziran**	**Temmuz**	**Ağustos**
Bebekler	1	0	1	1	2	3	5	8
Yetişkinler	0	1	1	2	3	5	8	13
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21

1.1.2. Rekürans Belirleme

$F_1 = F_2 = 1$ (Başlangıç Koşulları)

$n \geq 3$ ise $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (Rekürans Bağıntısı)

Tablo 1.1.; yetişkin çiftler, bebek çiftler ve toplam çiftler arasında birkaç ilginç bağıntı olduğunu gösterir. Bu bağıntıları görmek için, $n.$ aydaki yetişkin çiftlerin sayısını A_n, bebek çiftlerin sayısını ise B_n ile gösterelim. Burada $n \geq 1$ dir. Başlangıç koşulları;

$A_1 = 0$ ve $A_2 = 1 = B_1$

dir.

$n \geq 3$ olduğunu varsayalım:

$n.$ aydaki her yetişkin çift, yeni (bebek) bir çift doğuracağı için, n. aydaki bebek çiftlerin sayısı, bundan önceki yetişkin çiftlerin sayısına eşittir.

$$\begin{pmatrix} n. aydaki\ yetişkin \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1). aydaki\ yetişkin \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n-1). aydaki\ bebek \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix}$$

Yani;

$$A = A_{n-1} + B_{n-1} \qquad n \geq 3$$

veya

$$A = A_{n-1} + A_{n-2} \qquad n \geq 3$$

Bundan böyle A_n, Fibonacci Rekürans Bağıntısına karşılık gelecek. Burada

$A_2 = 1 = A_3$ dir. Sonuç olarak

$$F_n = A_{n+1} \qquad n \geq 1$$

dir.

$$\begin{pmatrix} n.\,aydaki\ çiftlerin \\ toplam\ sayısı \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.\,aydaki\ yetişkin \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n.\,aydaki\ bebek \\ çiftlerin\ sayısı \end{pmatrix}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Yani;

$$n \geq 3\ için\ F_n = A_n + B_n$$

dir. Bundan böyle;

$$n \geq 3\ için\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir. Burada n = 2 olduğunda $F_2 = F_1 + F_0$ dır. Ve $F_2 = 1 = F_1$ olduğundan $1 = 1 + F_0$ ise $F_0 = 0$ olur.

1.1.3. Fibonacci Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

Bu çalışma için kullanılan özdeşlikler aşağıda verilmiştir (Atalay, 2013).

1) **(Cassini's Formülü)**

$$F_{n-1}.F_{n+1} - {F_n}^2 = (-1)^n \qquad n \geq 1$$

2) **(Fibonacci Binet Formülü)** $\alpha > 0\ ve\ \beta < 0$ olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad n \geq 1$$

3)

$$F_n + F_{n-2} = \frac{F_{2n-2}}{F_{n-1}}$$

4) **(d'Ocagne Özdeşliği)**

$$F_m.F_{n+1} - F_n.F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$$

5) **(Honsberger Formülü)**

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$$

1.2. Lucas Sayıları

Fibonacci rekürans bağıntısı kullanılarak, farklı başlangıç koşulları altında, yeni sayı dizileri elde edilebilir. Bu sayı dizilerinden biri de Lucas sayı dizileridir.

Tanım 1.2.1. L_n, Lucas sayıları;

$$\begin{cases} L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \\ L_0 = 2, \qquad L_1 = 1' \end{cases} \qquad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Lucas sayıları için Binet Formülü;

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad n = 0, 1, \dots$$

şeklinde verilir. Daha sonra Lucas sayıları ile Fibonacci sayılarının

$$L_n = F_n + F_{n-2} = \frac{F_{2n-2}}{F_{n-1}}$$

formülü ile bağlantılı olduğunu görülür.

Bu bölümde yararlanacağımız bazı özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

1) $n \geq 2 \text{ } için \text{ } L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+2}$
2) $L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 5.(-1)^n$
3) $L_n^2 = L_{2n} + 2.(-1)^n$

1.3. Fibonacci Sayıları ile Lucas Sayıları Arasındaki Özdeşlikler

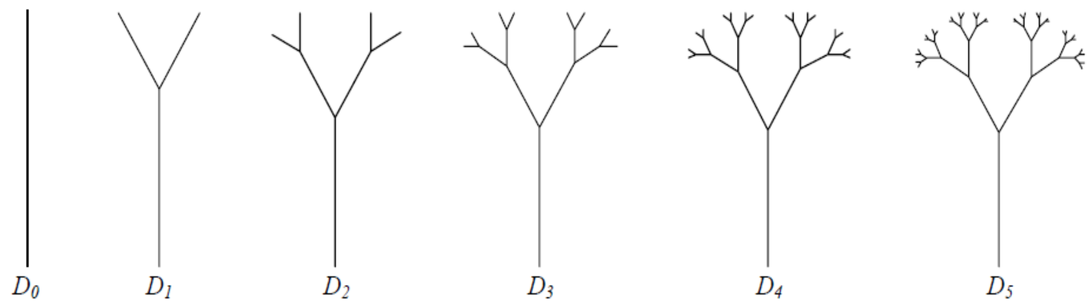
1) $n > 1 \text{ } için \text{ } F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$
2) $n > 2 \text{ } için \text{ } F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
3) $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$
4) $F_{2n} = F_nL_n$
5) $5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n$
6) $m > n$ olmak üzere, $2F_{m+n} = F_mL_n + F_nL_m$

1.4. Anten Geometrisi

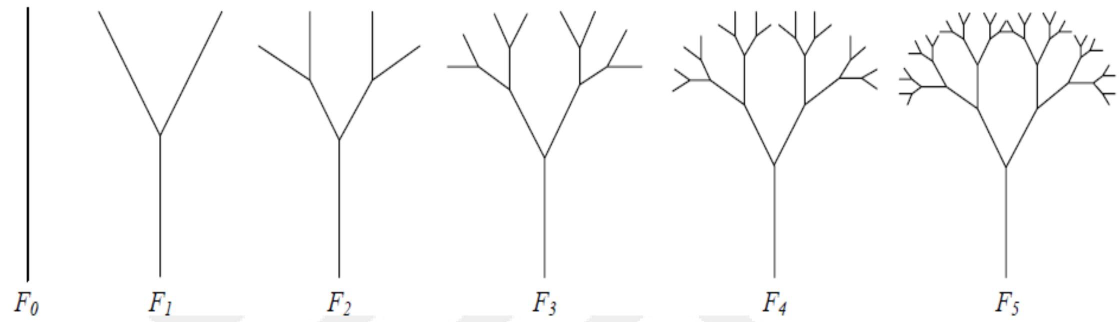
Daha önce incelenmiş olan ağaç antenler genel olarak Şekil 1’de gösterildiği gibi kapalı dal geometrisine sahiptirler. Bir sonraki dal uzunluğu öncekinin iki katı olan fraktal ağaç antenler ise Şekil 1a’da verilmekte ve D antenler olarak adlandırılmışlardır. Dal uzunlukları Fibonacci sayı dizisine göre değişen antenler Fibonacci fraktal ağaç antenleri olarak Şekil 1b’de gösterilmekte ve bu antenler *F* antenleri olarak adlandırılmışlardır. Dal uzunlukları, değiştirilmiş Fibonacci dizisine göre uyarlanan ağaç antenler ise F_m anteni olarak adlandırılırlar.

Aynı dal uzunluğuna sahip antenlerin geometrilerinin rezonans frekansına etkisini anlayabilmek için birbiri ardına sıralanan dalların sağa ve sola 30° açı yaparak oluşturduğu yeni uyarlanan ağaç antenler, aynı şekilde adlandırılmış açık geometriye sahip antenlerdir. Bu yolla uyarlanan *D* antenleri Şekil 2’de ve *F* antenleri ise Şekil 3’te verilmektedir. F_m anteninin geometrisi ise düşük iterasyonlar da *F* anteninden biraz değişkenlik göstermekle beraber iterasyon sayısı arttıkça iki anten birbirine oldukça benzer hale gelmektedir (Özbakış ve Kuştepeli, 2004).

Şekil 1. Fraktal ağaç antenlerin dördüncü iterasyonları a) *D* anteni b) *F* anteni



Şekil 2. *D* anteninin geometrisi



Şekil 3. *F* anteninin geometrisi

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Son yıllarda Fibonacci, Lucas ve Catalan ile ilgili aşağıda özetleri verilen çalışmalar yapılmıştır.

Atalay vd. (2013) tarafından Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan k −Fibonacci ve k −Lucas ailelerini elde etmiş ve çeşitli teoremler ve özdeşlikler verilmiştir.

Ekici (2013) Binom katsayılarını ve binom katsayılarının özelliklerini kullanarak Catalan sayılarının özelliklerini incelemiş ve Catalan Matrisleri üzerinde durulmuştur.

Bilgici vd. (2017) çalışmalarında k −Fibonacci ve k −Lucas kuaterniyonları ve geren fonksiyonlarını,

$\{F_n\}_{n=0,}^{\infty}$ $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ altında

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

vermişlerdir.

Taşçı ve Kılıç (2004) çalışmalarında Lucas sayılarında matris temsillerini vermişlerdir.

Rekürans bağıntısı,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3, \qquad F_1 = 1 \; ve \; F_2 = 1$$

$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

Kalman (1982) Generalized Fibonacci Numbers isimli çalışmasında bunun özel bir dizi olduğunu belirtti.

Lineer kombinasyonları,

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ sabitleri reel sayılardır. Kalman da genelleştirilmiş matris dizileri elde etmiştir.

Yukarıdaki k dizileri, k −Fibonacci dizilerinden olacak şekilde,

$n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i$$

$1 - k \leq n \leq 0$;

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & eğer\ i = 1 - n \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$c_j,\ \ 1 \leq j \leq k,\ \ g_n^i$ nin n. terimleri

$$\begin{bmatrix} g_{n+1}^i \\ g_n^i \\ \vdots \\ g_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+1}^i \end{bmatrix}$$

verilmiştir.

Özkan ve Dervişoğlu (2012) Modüler aritmetikte Catalan Sayıları asal sayılar için incelemişler ve onunla ilgili bazı teoremler vermişlerdir. Ayrıca, p asal sayı olmak üzere, $modp$, $modp^2$, $modp^3$ için Catalan Sayılarla ilgili teoremleri vermişlerdir.

Sayı dizileri ve onların polinomları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

Özkan vd. (2017) Lucas sayıları ve yeni Fibonacci dizi ailesi arasındaki bazı bağıntıları vermişlerdir. Ayrıca onlar k-Lucas sayılarının yeni bir ailesini tanımlamışlardır. Ve bu dizinin özelliklerini vermişlerdir.

Özkan vd. (2018) yeni bir 2-Fibonacci polinomları tanımladılar. Onlar 2-Fibonacci polinomlarının katsayıları ile Pascal üçgeni arasındaki bağıntıyı verdiler. Ayrıca bu polinomların bazı özelliklerini ifade ettiler. Bu polinomların türevlerini de çalışmalarında vermişlerdir.

Barry (2005) makalesinde ki Hankel dönüşümünde Catalan sayıları kullanılarak;

$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ ve Hankel determinantı $\{h_0, h_1, h_2, \ldots\}$

$$A_n = \{a_n\}_{n \in N_0} \rightarrow h = \{h_n\}_{n \in N_0}$$

$$h_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{2n} \end{vmatrix}$$

ve Catalan sayıları L parametresiyle $a_0 = L + 1$

$$a_n = a_n(L) = C(n; L) + C(n+1, L) \qquad (n \in N)$$

$$C(n; L) = T(2n, n; L) - T(2n, n-1; L)$$

$$T(n, k; L) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} L^j$$

şeklinde belirtmiştir.

Bala (2017) yılındaki makalesinde,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

geren fonksiyonu olan bir sayı dizisinde Barry (2005)'nin verdiği

$$A\big(xC(x)\big) = a_0 + a_1x + (a_1 + a_2)x^2 + (2a_1 + 2a_2 + a_3)x^3$$
$$+ (5a_1 + 5a_2 + 2a_3 + a_4)x^4 + \cdots$$

Catalan dönüşümünü uygulayarak

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & & \\ 1 & 5 & 5 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 5a_1 + 5a_2 + 3a_3 + a_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

yukarıda sol tarafta verilen alt üçgen matrisin, Catalan dizisi olduğu durumda, bu dizilimin Bell tarafından verilen bir yarı grup olan Riorda grubunun bir elemanı olduğunu belirtmiştir.

3. KURAMSAL TEMELLER

Teorem 3.1. $n \geq 1$ ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. Bu takdirde,

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: İspatı n üzerinden tümevarımla verelim.

$n = 1$ için,

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

$n = 1$ için iddia doğrudur.

$n = k$ için iddia doğru olsun. O halde,

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

dir. Bu takdirde;

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n = k + 1$ için,

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

olup, ispat tamamlanır.

Teorem 3.2. $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: $|Q| = (-1)$ ve $|Q^n| = (-1)^n$ dir. Teorem 3.2'den

$$|Q^n| = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$$

dir.

Teorem 3.3. (Cassini Formülü)

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad n \geq 1$$

eşitliği mevcuttur.

İspat: Bir önceki teoreme göre, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $\det(A) = -1$'dir.

Ayrıca

$$(-1)^n = (\det(A))^n = \det(A^n) = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

bulunur.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

k −Fibonacci sayıları, Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olup Falcon ve Plaza tarafından geliştirilmiştir. Bu kısımda k −Fibonacci sayıları konusunda yararlandığımız tanım ve özdeşlikleri ele alacağız.

4.1. k –Fibonacci sayılar

Tanım 4.1.1. k–Fibonacci sayısı; her $k > 0$ reel sayısı için $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \qquad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır ve $\{F_{k,n}\}_{n\in N}$ ile gösterilir.

Burada $k = 1$ için bilinen Fibonacci dizilerini, $k = 2$ için Pell dizilerini elde edilir.

k −Fibonacci sayılarının karakteristik kökleri σ_1 ve σ_2 olmak üzere,

$$\sigma^2 = k\sigma + 1$$

rekürans bağıntısıyla,

$$F_{k,n} = \frac{\sigma_1^n - \sigma_2^n}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

olur.

Burada karakteristik kökler,

$$\sigma_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

$$F_{k,n} = \frac{\sigma^n - (-\sigma)^{-n}}{\sigma - \sigma^{-1}}.$$

İki terimin limitleri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{k,n+r}}{F_{k,n}} = \sigma^r$$

dir.

Teorem 4.1.2. k –Lucas ve k –Fibonacci sayıları arasında

$$L_{k,n} = F_{k,n-1} + F_{k,n+1}, \qquad n \geq 1$$

bağıntısı vardır (Koshy, 2001).

İspat: Eğer $n = 1$'den

$$F_{k,0} + F_{k,2} = k = L_{k,1}$$

$n-$ 1'e kadar formülün doğru olduğunu varsayalım.

$$L_{k,n-2} = F_{k,n-3} + F_{k,n-1} \ ve$$

$$L_{k,n-1} = F_{k,n-2} + F_{k,n}$$

$$L_{k,n} = k.L_{k,n-1} + L_{k,n-2} = k.\left(F_{k,n-2} + F_{k,n}\right) + F_{k,n-3} + F_{k,n-1}$$

$$\left(kF_{k,n-2} + F_{k,n-3}\right) + \left(kF_{k,n} + F_{k,n-1}\right) = F_{k,n-1} + F_{k,n+1}$$

Teorem 4.1.3. $n, r \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik vardır (Koshy, 2001).

$$L_{k,n}.L_{k,n+r} = L_{k,2n+r} + (-1)^n L_{k,r}.$$

İspat:

$$r = 0,$$

$$L_{k,n}^2 = (\sigma_k^n + (-\sigma_k)^{-n})^2$$

$$= \sigma_k^{2n} + (-\sigma_k)^{-2n} + 2(-1)^n$$

$$= L_{k,2n} + (-1)^n L_{k,0}$$

doğru olduğunu kabul edelim.

$r-1$ için;

$$L_{k,n}.L_{k,n+r-1} = L_{k,2n+r-1} + (-1)^n L_{k,r-1}$$

$$L_{k,n}.L_{k,n+r} = L_{k,n} + \left(k.L_{k,n+r-1} + L_{k,n+r-2}\right)$$

$$= k.\left(L_{k,2n+r-1} + (-1)^n L_{k,r-1}\right) + L_{k,2n+r-2} + (-1)^n L_{k,r-2}$$

$$= k.\left(L_{k,2n+r-1} + L_{k,2n+r-2}\right) + (-1)^n\left(k.L_{k,r-1} + L_{k,r-2}\right)$$

$$= L_{k,2n+r} + (-1)^n L_{k,r}$$

Özel durumlar

Eğer $r = 0$, $L_{k,2n} = L_{k,n}^2 + 2(-1)^{n+1}$

$r = 1$,

$$L_{k,n}.L_{k,n+1} = L_{k,2n+1} + k(-1)^n$$

ve

$$L_{k,2n+1} = L_{k,n}.L_{k,n+1} + k(-1)^{n+1}$$

Eğer $k = 1$ olursa Lucas sayılarda

$$L_{2n+1} = L_n L_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Eğer $r = n$ olursa

$$L_{k,3n} = L_{k,n}(L_{k,n}^2 + 3(-1)^{n+1})$$

Özel denklemi $k = 1$ için altın oran yani

$$ø = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

verir.

k – Fibonacci sayılarının genel terimleri,

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-2i-1} (k^2+4)^i$$

veya

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-2i-1}$$

bağıntılarıyla elde edilir.

Özdeşlikler:

1) **(Falcon ve Plaza)**

$$F_{k,n-r}F_{k,n+r} - F_{n,r}^2 = (-1)^{n-r+1}F_{k,r}^2$$

2) **(Falcon ve Plaza)**

$$F_{k,r+s} = F_{k,r+1}F_{k,s} + F_{k,r}F_{k,s-1}$$

3) **(Falcon ve Plaza)**

$$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$$

4)

$$F_{k,n-1} + F_{k,n+1} = \frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}$$

5)

$$F_{k,2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^i F_{k,i}$$

6) (Falcon ve Plaza)

$$F_{k,n}^2 - F_{k,n-1}F_{k,n+1} = (-1)^{n+1}$$

4.2. $\boldsymbol{k}$ – Lucas Sayıları

Bu bölümde $k-$Lucas sayılarını kullanarak $k-$Lucas polinomları elde edildi ve $k-$Lucas polinomların rekürans bağıntısı yardımıyla Binet formülleri verildi.

Tanım 4.2.1. Her $k > 0$ reel sayısı için k–Lucas sayıları; $L_{k,0} = 2$ ve $L_{k,1} = k$ olmak üzere

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}$$

şeklinde tanımlanır ve $\{L_{k,n}\}_{n\in N}$ ile gösterilir.

k – Lucas sayılarının formülleri karakteristik denklemi,

$$r^2 - kr - 1 = 0$$

ve $r_1 > r_2$ olmak üzere denklemin kökleri;

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2} \qquad r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}$$

olur. Burada

$$r_1 + r_2 = k, \qquad r_1 r_2 = -1$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{k^2+4}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = k^2 + 2$$

dir.

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

bağıntısıyla,

$L_{k,0} = 2$

$L_{k,1} = k$

$L_{k,2} = kL_{k,1} + L_{k,0} = k^2 + 2$

$L_{k,3} = kL_{k,2} + L_{k,1} = k(k^2 + 2) + 1 = k^3 + 3k$

$L_{k,4} = kL_{k,3} + L_{k,2} = k(k^3 + 3k) + k^2 + 2$

$L_{k,4} = k^4 + 4k^2 + 2$

$L_{k,5} = kL_{k,4} + L_{k,3} = k(k^4 + 4k^2 + 2) + k^3 + 3k$

$L_{k,5} = k^5 + 5k^3 + 5k$

$L_{k,6} = kL_{k,5} + L_{k,4} = k(k^5 + 5k^3 + 5k) + k^4 + 4k^2 + 2$

$L_{k,6} = k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2$

$$\begin{aligned} L_{k,7} &= kL_{k,6} + L_{k,5} \\ &= k(k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2) + k^5 + 5k^3 + 5k \\ &= k^7 + 7k^5 + 14k^3 + 7k \end{aligned}$$

polinomları bulunur (Falcon, 2011).

Teorem 4.2.1. k **–** Lucas dizileri

$$L_{k,n} = \sigma_k^n + (-\sigma_k)^{-n} \; ve \;\; \sigma_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

bağıntıları ile elde edilir.

İspat: Karakteristik denklemi

$$r^2 - kr - 1 = 0$$

çözümleri,

$$\sigma_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \; ve \; \sigma'_k = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

$$L_{k,n} = c_1 \sigma_k^n + c_2 \sigma_k^n$$

$n = 0$ için $L_{k,0} = 2$ ve n = 1 için $L_{k,1} = k$ ve $c_1 = c_2 = 1$ elde ederiz ve sonunda $\sigma_k \sigma'_k = -1$ olduğundan,

$$\sigma'_k = -\frac{1}{\sigma_k} \quad L_{k,n} = \sigma_k^n + (-\sigma_k)^{-n}$$

bulunur (Falcon, 2011).

4.3. Catalan Sayılar

Catalan sayılar,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

formülü ve Catalan geren fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

ile elde edilmiştir. Daha sonra $n = 0, 1, 2, \ldots$ için Catalan sayılarını

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{2(2n+1)}{2n}$$

$$\{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \ldots\}$$

şeklinde elde edilmiştir (Falcon, 2013).

4.4. k – Fibonacci Sayılarında Catalan Dönüşümü

Falcon (2013), daha sonra k – Fibonacci sayılarda Catalan dönüşümü uygulayıp, CF_k polinomlarını elde etmiştir.

$$CF_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2n-i}\binom{2n-i}{n-i} F_{k,i}, \qquad n \geq 1$$

dönüşümü ile

$$CF_{k,1} = \sum_{1}^{1} \frac{i}{2-i}\binom{2-i}{1-i} F_{k,i} = 1$$

$$CF_{k,2} = \sum_{1}^{2} \frac{i}{4-i}\binom{4-i}{2-i} F_{k,i} = k+1$$

$$CF_{k,3} = \sum_{1}^{3} \frac{i}{6-i}\binom{6-i}{3-i} F_{k,i} = k^2+2k+3$$

$$CF_{k,4} = k^3+3k^2+7k+8$$

$$CF_{k,5} = k^4+4k^3+12k^2+22k+24$$

$$CF_{k,6} = k^5+5k^4+18k^3+43k^2+73k+75$$

Bu denklemleri $n\ x\ 1$ türünde alt üçgen matris şeklinde belirtip,

$$\begin{bmatrix} CF_{k,1} \\ CF_{k,2} \\ CF_{k,3} \\ CF_{k,4} \\ CF_{k,5} \\ CF_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k,1} \\ F_{k,2} \\ F_{k,3} \\ F_{k,4} \\ F_{k,5} \\ F_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

C matrisinin elemanları tekrarlama ilişkisini doğrular ve C matrisinin 1. ve 2. sütunları Catalan sayılarından oluşmaktadır.

4.5. *k*–Fibonacci Fonksiyonun Catalan Dönüşümünün Geren Fonksiyonu

$$f_k(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

olmak üzere, Catalan sayıların geren fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

ve Catalan sayıların formülü

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}.$$

burada $C(x)$ Catalan sayı dizisinin geren fonksiyonu olduğu ispatlanmış ve $A(x)$ geren fonksiyonunun görüntüsü altında $A(x * C(x))$ bir geren fonksiyon olduğu ispatlanmıştır.

Sonuç olarak k – Fibonacci sayıların Catalan dönüşümünün geren fonksiyonu

$$Cf_k(x) = f_k(x * C(x)) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{1 - k + (k+1)\sqrt{1 - 4x} + 2x}$$

elde edilmiştir (Falcon, 2013).

4.6. *k*–Fibonacci Dizisinin Catalan dönüşümü için Hankel Fonksiyonu

$A = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$ sayıları reel sayılar olmak üzere

$$H_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

yani, $H_n = \mathrm{Det}[a_{i+i-2}]$ sayı dizisinin determinantına Hankel fonksiyonu denir.

A, nxn türünde matris, Hankel determinantının bir alt determinantıdır.

k – Fibonacci sayılarına Catalan dönüşümü uygulayıp bulunan CF_k polinomları Hankel determinantına tabi tutulursa;

$$HCF_1 = Det[1] = 1$$

$$HCF_2 = \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & k^2+2k+3 \end{vmatrix} = 2$$

$$HCF_3 = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & k^2+2k+3 \\ k+1 & k^2+2k+3 & k^3+3k^2+7k+8 \\ k^2+2k+3 & k^3+3k^2+7k+8 & k^4+4k^3+12k^2+22k+24 \end{vmatrix} = 5$$

elde edilir (Falcon, 2013).

Teorem 4.6.1. $k-$ Fibonacci sayıların Catalan dönüşümünün Hankel dönüşümü Fibonacci sayılarını iki kısıma ayırır (Falcon, 2013).

$k \in N$ olmak üzere,

$$\{HCF_{k,n}\} = \{F_{2n+1}\}$$

dir.

İspat: $H_n \neq 0$ olduğundan dolayı H_n tekil olmayan matris, L_n ve $U_n$matrislerinin

$$L_n . U_n$$

çarpımı olarak yazılabilir. Sırasıyla

L_n alt üçgen matris ve köşegeni

$$\{1, 1, 1, \dots\}$$

ve birinci sütunu

$$\{CF_1, CF_2, CF_3, \dots\}$$

dir. U_n ise üst üçgen matristir. Matrisin ilk satırı da

$$\{CF_1, CF_2, CF_3, \}$$

dir ve esas köşegeni

$$\left\{1, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5}, \frac{34}{13}, \qquad \dots\right\}$$

dir.

$$H_n = Det(L_n).\mathrm{Det}(U_n) = \mathrm{Det}(U_n)$$

$$= a_{11}.a_{22} \dots a_{nn}$$

determinantına eşittir. Yani,

$$\{HCF_{k,n}\} = \{F_{2n+1}\}$$

dir.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde *k*-Lucas dizilerde Catalan dönüşümü tanımlanıp Catalan *k*-Lucas polinomları elde edildi. Daha sonra bulunan Catalan *k*-Lucas polinomların matris gösterimi yapıldı. Catalan *k*-Lucas sayıların Geren fonksiyonu elde edildi. Catalan *k*-Lucas polinomları Hankel determinantına tabi tutularak değerleri hesaplandı.

5.1. k – Lucas Dizilerinde Catalan Dönüşümü

Tanım 5.1.1. $n \geq 1$ ve $k > 0$ olmak üzere

$$CL_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} L_{k,i}$$

eşitliğine k–Lucas dizilerinde Catalan dönüşümü denir.

Yukarıdaki tanımı kullanarak;

$$CL_{k,1} = \sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} L_{k,i} = 1L_{k,1} = k$$

$$CL_{k,2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} L_{k,i} = \frac{1}{3}\binom{3}{1} L_{k,1} + \binom{2}{0} L_{k,2} = k^2 + k + 2$$

$$CL_{k,3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} L_{k,i} = \frac{1}{5}\binom{5}{2} L_{k,1} + \frac{2}{4}\binom{4}{1} L_{k,2} + \frac{3}{3}\binom{3}{0} L_{k,3}$$

$$= \frac{1}{5} 10. k + \frac{2}{4}. 4. (k^2 + 2) + \frac{3}{3}. 1(k^3 + 3k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 4$$

$$CL_{k,4} = \sum_{i=1}^{4} \frac{i}{8-i} \binom{8-i}{4-i} L_{k,i} = \frac{1}{7}\binom{7}{3} L_{k,1} + \frac{2}{6}\binom{6}{2} L_{k,2} + \frac{3}{5}\binom{5}{1} L_{k,3} + \frac{4}{4}\binom{4}{0} L_{k,4}$$

$$= \frac{1}{7}. 35. k + \frac{2}{6}. 15. (k^2 + 2) + \frac{3}{5}. 5(k^3 + 3k) + \frac{4}{4}. 1. (k^4 + 4k^2 + 2)$$

$$= k^4 + 3k^3 + 9k^2 + 14k + 12$$

$$CL_{k,5}=\sum_{i=1}^{5}\frac{i}{10-i}\binom{10-i}{5-i}L_{k,i}$$

$$=\frac{1}{9}\binom{9}{4}L_{k,1}+\frac{2}{8}\binom{8}{3}L_{k,2}+\frac{3}{7}\binom{7}{2}L_{k,3}+\frac{4}{6}\binom{6}{1}L_{k,4}+\frac{5}{5}\binom{5}{0}L_{k,5}$$

$$=\frac{1}{9}.126.k+\frac{2}{8}.56.(k^2+2)+\frac{3}{7}.21(k^3+3k)+\frac{4}{6}.6.(k^4+4k^2+2)$$
$$+\frac{5}{5}.1.(k^5+5k^3+5k)$$

$$=k^5+4k^4+14k^3+30k^2+46k+36$$

$$CL_{k,6}=\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{12-i}\binom{12-i}{6-i}L_{k,i}$$

$$=\frac{1}{11}\binom{11}{5}L_{k,1}+\frac{2}{10}\binom{10}{4}L_{k,2}+\frac{3}{9}\binom{9}{3}L_{k,3}+\frac{4}{8}\binom{8}{2}L_{k,4}+\frac{5}{7}\binom{7}{1}L_{k,5}+\frac{6}{6}\binom{6}{0}L_{k,6}$$

$$=\frac{1}{11}.462.k+\frac{2}{10}.210.(k^2+2)+\frac{3}{9}.84(k^3+3k)+\frac{4}{8}.28.(k^4+4k^2+2)$$
$$+\frac{5}{7}.7.(k^5+5k^3+5k)+\frac{6}{6}.1.(k^6+6k^4+9k^2+2)$$

$$=k^6+5k^5+20k^4+53k^3+107k^2+151k+114$$

$$CL_{k,7}=\sum_{i=1}^{7}\frac{i}{14-i}\binom{14-i}{7-i}L_{k,i}$$

$$=\frac{1}{13}\binom{13}{6}L_{k,1}+\frac{2}{12}\binom{12}{5}L_{k,2}+\frac{3}{11}\binom{11}{4}L_{k,3}+\frac{4}{10}\binom{10}{3}L_{k,4}+\frac{5}{9}\binom{9}{2}L_{k,5}$$
$$+\frac{6}{8}\binom{8}{1}L_{k,6}+\frac{7}{7}\binom{7}{0}L_{k,7}$$

$$= 132.k + \frac{792}{6}.(k^2+2) + \frac{3}{11}.330(k^3+3k) + \frac{4}{10}.120.(k^4+4k^2+2)$$
$$+ \frac{5}{9}.36.(k^5+5k^3+5k) + \frac{6}{8}.8.(k^6+6k^4+9k^2+2)$$
$$+ \frac{7}{7}.1.(k^7+7k^5+14k^3+7k)$$

$$= k^7 + 6k^6 + 27k^5 + 84k^4 + 204k^3 + 378k^2 + 509k + 372$$

polinomları elde edilir.

Elde edilen $CL_{k,n}$ polinomlarını C alt üçgen matrisi ve $n\,x\,1$ boyutlu L_k matrisinin çarpımı olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} CL_{k,1} \\ CL_{k,2} \\ CL_{k,3} \\ CL_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \cdots \\ 1 & 1 & & & \cdots \\ 2 & 2 & 1 & & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,2} \\ L_{k,3} \\ L_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Yani;

$$\begin{bmatrix} k \\ k^2+k+2 \\ k^3+2k^2+5k+4 \\ k^4+3k^3+9k^2+14k+12 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \cdots \\ 1 & 1 & & & \cdots \\ 2 & 2 & 1 & & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k^2+2 \\ k^3+3k \\ k^4+4k^2+2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

5.2. k – Lucas Sayılarında Catalan Dönüşümünün Geren Fonksiyonu

Wilf (1994) tarafından k – Lucas geren fonksiyonu kullanılarak Catalan geren fonksiyonu

$$L_k(x) = L_{k,0} + L_{k,1}x + L_{k,2}x^2 + \cdots + L_{k,n}x^n + \cdots$$

$$k.x.L_k(x) = k.L_{k,0}x + k.L_{k,1}x^2 + k.L_{k,2}x^3 + \cdots + k.L_{k,n}x^{n+1} + \cdots$$

$$x^2.L_k(x) = L_{k,0}x^2 + L_{k,1}x^3 + L_{k,2}x^4 + \cdots + L_{k,n}x^{n+2} + \cdots$$

$$(1 - kx - x^2)L_k(x) = 2 - kx$$

$$L_k(x) = \frac{2 - kx}{1 - kx - x^2}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Catalan fonksiyonlarının geren fonksiyonu;

Larcombe ve Wilson (2001)

$$G(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

$$G(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1} x^{m+1} - x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k c_{m-k} x^m$$

$c_0 = 1$ için,

$$G(x) - 1 = xG^2(x)$$

$$G(x) = \frac{1}{2x}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4x}\right)$$

$$G(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots$$

şeklinde elde edilmiş.

Yukarıdaki bilgilerden hareketle sonuç olarak;

k-Lucas sayılarında Catalan dönüşümünün geren fonksiyonunu, k-Lucas geren fonksiyonunu Catalan fonksiyonunun görüntüsü altında yazılarak

$$CL_k(x) = L_k(x * C(x)) = \frac{4 - k + k.\sqrt{1 - 4x}}{1 + 2x - k + (k + 1)\sqrt{1 - 4x}}$$

elde edilir.

5.3. k – Lucas Dizisinin Catalan dönüşümü için Hankel Fonksiyonu

İlk altı CL_k polinomu için Hankel fonksiyonunu uygularsak

$$HCL_1 = Det[k] = k$$

$$HCL_2 = \begin{vmatrix} k & k^2+k+2 \\ k^2+k+2 & k^3+2k^2+5k+4 \end{vmatrix} = -4$$

ve

$$HCL_3 = \begin{vmatrix} k & k^2+k+2 & k^3+2k^2+5k+4 \\ k^2+k+2 & k^3+2k^2+5k+4 & k^4+3k^3+9k^2+14k+12 \\ k^3+2k^2+5k+4 & k^4+3k^3+9k^2+14k+12 & k^5+4k^4+14k^3+30k^2+46k+36 \end{vmatrix} = k^3-4k^2-8k-16$$

determinant değerleri elde edilir.

6. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Falcon tarafından verilen k–Lucas dizisinin $\{L_{k,n}\}$ Catalan dönüşümünün $CL_{k,n}$ tanımı verildi. k–Lucas dizisinin $\{L_{k,n}\}$ Catalan dönüşümünün $CL_{k,n}$ geren fonksiyonu elde edildi. Ayrıca, $CL_{k,n}$ dönüşümü, alt üçgen matris olan Catalan matrisi C ile $n \times 1$ tipindeki L_k matrisinin çarpımı olarak yazıldı. Hankel fonksiyonu kullanılarak $CL_{k,n}$ ler ile oluşturulan matrislerin determinantları hesaplandı. Ancak bulunan determinant değerlerinin genelleştirilemediği görüldü.

Bu çalışma incelendiği takdirde Pell ve Pell – Lucas sayıları ve Jacobsthal sayılarında Catalan ve Hankel dönüşümlerinin belli özellikleri bulunabilir.

k – Lucas Dizisinin Catalan dönüşümü için Hankel Fonksiyonu ile elde edilen determinant değerlerini bir dizi olarak göz önüne alındığında uygun k değerleri için bilinen herhangi bir sayı dizisine karşılık gelip gelmediği araştırılabilir.

7. KAYNAKLAR

Atalay, A. (2013) “Genelleştirilmiş k−Fibonacci ve k−Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesi”, Yüksek Lisans Tezi, ***Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Konya

Bala, P. (2017) “A Note on the Catalan Transform of a Sequence”, https://oeis.org/A001517/a001517.pdf, 11.11.2018

Barry, P. (2005) “A Catalan Transform and Related Transformation of İnteger Sequences”, ***Journal of Integer Sequences***, Vol.8 Article 0.5.4.4.

Barry, P., Rajkovic, P. and Petkovic, M.D. (2006) “The Hankel Transform of the Sum of Consecutive Generalized Catalan Numbers”, ***Mathematics, Subject Classification***, 11Y, 55, 34 A25

Bilgici, G., Tokeşer, Ü. and Ünal, Z. (2017) “k − Fibonacci and k −Lucas Generalized Quartenions”, ***Journal of Mathematics***, Volume 5 No:2, 102 – 113

Ekici, H. T. (2013) “Catalan Sayıları ve Catalan Matrisleri”, Yüksek Lisans Tezi, ***Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Kırşehir

Falcon, S. (2011) “On the k − Lucas Numbers”, ***International Journal of Contemporary Math Science***, Vol.6 No:21, 1039 – 1050

Falcon, S. (2013) “Catalan Transform of the k − Fibonacci Sequence”, ***Communications of the Korean Math Society*** 28 No:4, pp 827 – 832

Falcon, S. and Plaza, A. (2007) “On the Fibonacci k − Numbers”, ***Chaos Solutions Fractals***, 32 No:5, 1615 – 1624

Kalman, D. (1982) “Generalized Fibonacci numbers by matrix methods”, ***Fibonacci Quart,*** 20 (1): 73–76.

Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, ***A Wiley Interscience Publication***, John Wiley&Sonlnc ISBN: 978 – 0 – 471 – 39969 – 8

Larcombe, P. J. and Wilson, P. D. C. (2001) “On The Generating Function of the Catalan Sequence: ***A Historical Perspective***”

Özbakış, B. and Kuştepeli, A. (2004) “Two Novel Designs for Fractal Tree Antenna Aplications”, ***URSI International Symp on Electromagnetic Theory***, Pisa, Italy, S.245-247

Özkan, E. ve Dervişoğlu, S. (2012) “Catalan Sayılar ve Modüler Aritmetik”, ***Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi***, 2:63 – 66

Özkan E., Altun İ. and Göçer A. (2017) "On Relationship Among A New Family Of k-Fibonacci, k-Lucas Numbers, Fibonacci And Lucas Numbers", ***Chıang Maı Journal Of Scıence***, vol.44, pp.1744-1750

Özkan E., Taştan M. and Aydoğdu, A.(2018) " 2-Fibonacci Polynomials in The Family of Fibonacci Numbers.", ***Notes on Number Theory and Discrete Mathematics***, vol.24, pp.47-55, 201

Taşçı, D. and Kılıç, E. (2004) “On The Order $k-$Generalized Lucas Numbers”, ***Applied Mathematics Computation***, 155, 637 – 641

Wilf, H. S. (1994) “Generating Functionology”, ***Academic Press Inc***., London

Yosma, Z. (2008) “Fibonacci ve Lucas Sayıları”, Yüksek Lisans Tezi, ***Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Sakarya

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve ortaokulu Malatya'da okudu. Lise eğitiminin bir kısmını Erzincan Fen Lisesinde diğer kısmını da Malatya Lisesinde tamamladı. Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 2003 yılında mezun oldu. Özel okul ve dershanelerde Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2015 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.