T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN İNTEGRAL DENKLEMLER METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Emre YETER

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında, Emre YETER tarafından hazırlanan bu çalışma 28/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ	İmza:
Üye	: Doç. Dr. İlhame AMİRALİ	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 12/07/2019 tarih ve 27/5..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kayn olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemler Metodu ile Çözümü" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 28/06/2019

(İmza)

Emre YETER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN İNTEGRAL DENKLEMLER METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Emre YETER

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Bu çalışmada, sınır-değer problemlerinin çözüm metotlarından birisi olan, sınır-değer probleminin integral denkleme dönüştürülmesi ve çözümü üzerinde duruldu. Bu tür problemler için öncelikle Green fonksiyonu oluşturuldu. Daha sonra sınır-değer problemi, Green fonksiyonu yardımıyla integral denkleme dönüştürülerek çözüldü. Son olarak kullanılan metot örnekler üzerinde uygulanarak test edildi.

2019, 38 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Green fonksiyonu, İntegral denklemler, Sınır değer problemi.

ABSTRACT

Master Thesis

SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS BY INTEGRAL EQUATIONS METHOD

Emre YETER

Erzincan Binali Yildirim University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

In this study, the transformation and solution of the boundary-value problem, which is one of the solution methods of the boundary-value problems, to the integral equation is emphasized. For such problems, the Green function was created first. Then, the boundary-value problem was solved by converting to the integral equation with the help of Green's function. Finally, the method used was tested on the samples.

2019, 38 Pages

Keywords: Boundary value problem, Green function, Integral equations.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde gerçekleştirilmiştir.

Çalışmalarımın her aşamasında karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, büyük bir sabır ve titizlikle beni yönlendiren çok değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye teşekkür ederim.

Yüksek Lisans eğitimim süresince bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan, başta Dr. Öğretim Üyesi Mustafa KUDU hocam olmak üzere Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, hayatımın her anında desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

Emre YETER
Haziran, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\lvert A \rvert$	A' nın determinantı
$\delta(x)$	Dirac Delta fonksiyonu
$G(x,t)$	Green fonksiyon
$H(x)$	Heaviside fonksiyonu
$K(x,t)$	Çekirdek fonksiyonu
λ	Özdeğer
$\phi(x)$	Özfonksiyon
L	Diferansiyel operatör
L^*	Adjoint operatör
$L\{\ \}$	Laplace dönüşümü
W	Wronskian determinantı
y'	y fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
y''	y fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$y^{(n)}$	y fonksiyonunun $n.$ mertebeden türevi
$\int ...(n)... \int$	Katlı integralde (n) katlılık mertebesi

1. GİRİŞ

Bilinmeyen bir $u(x)$ fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislikte, birçok problemin çözümünde 19. yüzyılın başlarından itibaren incelenmeye ve üzerinde araştırmalar yapılmaya başlanılmış bir konudur. Abel'in 1823 yılında, mekanik bir problemi incelediği sırada ilk defa integral denkleme rastladığı ve mekanik problemlerinin genel formülü olan integral denklemi ortaya koyduğu bilinmektedir. Fakat integral denklem terimi ilk kez 1888 yılında De Bois Reymond tarafından kullanılmıştır. Volterra'nın 1884 yılında integral denklemler üzerinde çalışmaya başladığı, ancak ilk ciddi çalışmaları 1896 yılında yapmıştır. İntegral sınırlarından birinin x değişkeni olduğu lineer integrallerle ilgili çalışmalar Volterra tarafından yapılmıştır. Volterra integral denklemi tanımı ilk kez 1908 yılında Lalesco tarafından verilmiştir. İntegral sınırlarının sabit olduğu integral denklemler ilgili ilk çalışma ise, Eric Ivan Fredholm tarafından 1900 yılında yapılmıştır. Önceleri, rastgele ve sistematik olmayan bir şekilde yapılan çalışmalar, teknolojinin gelişmesine paralel olarak bu yüzyılın sonuna doğru daha düzenli ve bilimsel yöntemler uygulanarak yapılmaya ve birtakım sonuçlar alınmaya başlanılmıştır (Bocher, 1913; Wazvaz 1997; Green 1969; Jerri 1999).

Diferansiyel denklemler ile integral denklemler arasında sıkı bir ilişki vardır. Diferansiyel denklemler, tek başlarına değil, başlangıç ve sınır şartları denilen ilave şartlar ile anlam kazanır. İntegral denklemler ise, diferansiyel denklemlerin aksine ilave şart gerekmeksizin bir problemin tam tanımını verebilirler.

Diferansiyel denklemlerin çok geniş bir uygulama alanına sahip olması bu ilişki sayesinde integral denklemlerin de fizik, modern mühendisliğin ve diğer alanların problemlerinin çözümünde daha çok kullanılmaya başlanmış ve önemi gittikçe artmıştır. İntegral denklemlerin kullanıldığı bazı alanlar; aerodinamik, akustik, jeofizik, elektrik ve manyetizma, biyoloji, popülasyon genetiği, mekanik, termoelastikiyet, dalgaların kırınımı, radyasyon, kimyasal reaktör teorisi, elektromanyetik teorisi, gazların kinetik teorisi, kuantum mekaniği, ışıma, ısı transferi, optimazisyon ve diğer fiziksel alanlardır (Bloom 1980; Kopeikin vd., 1984; Holmaker 1993; Yue vd., 1995; Büyükaksoy vd., 1995; Ray ve Sahu 2013).

Diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri ile integral denklemler arasındaki bağıntının tesis edilebilmesi için uygulamalı bilimlerde çok sık kullanılan problemler içerisinde Green fonksiyonu kavramı ayrıca bir önem arz etmektedir. Genel olarak L diferansiyel operatörü, u 'da bulunması istenen fonksiyon ve f 'de verilmiş fonksiyon olmak üzere

$$Lu = f$$

denklemini ele alalım. L operatörü üzerindeki uygun koşullar altında başlangıç ve sınır koşullarına bağlı olarak da bir integral denklem biçiminde ifade edilebilir. u fonksiyonunun çözüm olduğu bu integral denklem Green fonksiyonunu içerir.

Green fonksiyonu ile ilgili ilk çalışma Green (1828) tarafından yapılmıştır. Bu fonksiyona Green kendi adını vermemiştir. Ancak daha sonra Riemann (1826-1866) bu fonksiyonları "Green fonksiyonları" olarak adlandırmıştır. Sınır değer problemleri içeren adi diferansiyel denklemler için Green fonksiyonu uygulamaları, Burkhardt (1861-1914) çalışması ile başlamıştır (Duffy, 2001).

Sınır değer problemlerinin integral denklemler metodu ile çözümünü içeren pek çok orijinal araştırma makalesi ve kitap bulunmaktadır (Tricomi, 1955; Schwank, 1963; Roach, 1970; Hsiao ve Maccamy, 1973; Krasnov vd., 1976; Saranen ve Vainikko, 2002; Collins, 2006; Altın, 2011; Köklü, 2018).

Bu tezin amacı sınır değer problemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde karşılaşılan Green fonksiyonunun tanımlanarak problemi integral denklemlere dönüştürüp çözmektir. Green fonksiyonu bilindiği takdirde problemin çözümü bir integral denklem ile kolayca yazılabilmektedir. Bu amaçla tezde diferansiyel denklemlere ilişkin sınır-değer problemleri için Green fonksiyonu, irdelenmiştir.

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve literatür bildirişleri verilmiştir. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde sınır değer problemlerinin Green fonksiyonu yardımıyla integral denklemlere dönüştürülmesi, oluşturulan integral denklemin çözümü üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde ise sunulan metot problemler üzerinde uygulanarak test edilmiştir. Çalışmanın 5. bölümünde ise bazı sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm, diferansiyel denklemler ve integral denklemler ile ilgili temel oluşturacak bazı tanım, kavram ve teorilerden oluşmaktadır.

2.1. Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.1.1. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun, x bağımsız değişkeni, y bağımlı değişkeni ve bunun sonlu herhangi bir mertebeye kadar türevleri arasındaki bağıntıya diferansiyel denklem denir.

Bu tanıma göre, bir diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \quad (2.1)$$

veya

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

şeklindedir. Bazı durumlarda, bir diferansiyel denklem, türev operatörü kullanılarak da ifade edilmektedir.

Tanım 2.1.2. $a_0(x) \neq 0$ ve $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ ve $b(x)$ $I \subset R$ aralığında tanımlı ve sürekli sürekli fonksiyonlar ve $b(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (2.3)$$

denklemine $n.$ mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklem denir. Eğer, $b(x) = 0$ ise (2.3) denklemine $n.$ mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem denir. (2.3) denkleminde, $a_i(x)$ katsayılarının sabit olması halinde denklem sabit katsayılı, $a_i(x)$ lerin değişken katsayılı olması halinde ise değişken katsayılı denklem adını alır.

Tanım 2.1.3. $a_0(x), a_1(x)$ ve $a_2(x) \in C[a,b]$ ve $b(x)$ $I \subset R$ aralığında tanımlı ve sürekli sürekli fonksiyonlar ve $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x) \tag{2.4}$$

denklemine, $x\in(a,b)$ için

$$B_1(y)=\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)+\beta_{11}y(b)+\beta_{12}y'(b)=\gamma_1 \tag{2.5}$$

$$B_2(y)=\alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a)+\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=\gamma_2 \tag{2.6}$$

sınır koşulları ile bir sınır-değer problemi denir.

(2.5)-(2.6) ile verilen sınır koşulları en genel halde olup $\beta_{11}=\beta_{12}=0$ ve $\alpha_{21}=\alpha_{22}=0$ ise sınır koşulları ayrık sınır koşulları adını alır. Eğer $\alpha_{12}=\beta_{12}=0$ ve $\alpha_{21}=\beta_{21}=0$ ve $\gamma_1=\gamma_2=0$ ise sınır koşulları periyodik olarak adlandırılır. Öte yandan $\alpha_{12}=\beta_{11}=\beta_{12}=\alpha_{21}=\beta_{21}=\beta_{22}=0$ olması halinde söz konusu sınır koşulları $y(a)=\dfrac{\gamma_1}{\alpha_{11}}, y'(a)=\dfrac{\gamma_2}{\alpha_{21}}$ şeklinde başlangıç koşuluna dönüşür. Yukarıda verilmiş olan B_1 ve B_2 sınır operatörleri lineerdir.

Sınır-değer problemlerinin çözümünde önce 2. mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. Genel çözümdeki keyfi sabitler, sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenir. Böylece sınır-değer probleminin çözümü hem diferansiyel denklemi hem de sınır koşullarını sağlar.

Tanım 2.1.4. Homojen sınır-değer problemlerinin daima $y(x)=0$ çözümü vardır. Bu çözüme denklemin aşikâr (trivial) çözümü denir. Denklemin eğer sıfırdan farklı $(y(x)\neq 0)$ çözümleri var ise bu çözümlere ise aşikâr olmayan çözümler adı verilir.

Tanım 2.1.5. n tane fonksiyonun birbirinden lineer bağımsız olmalarının gerek ve yeter şartı, Wronskian determinantı denilen aşağıdaki determinantın sıfırdan farklı olmasıdır. Bu determinantın sonucuna Wronskian denir.

Fonksiyonlar, $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ olmak üzere,

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.7}$$

ise, $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar.

(2.4) denkleminin çözümleri olan $y_1:[a,b]\to R$ ve $y_2:[a,b]\to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ise $\forall\ x\in[a,b]$ için y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskian'ı $W(y_1,y_2):[a,b]\to R$,

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlıdır (Aksoy, 2004).

Tanım2.1.6. $[a,b]$ aralığında tanımlı $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları için en az biri sıfırdan farklı olan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reel sayıları verildiğinde

$$c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n=0 \tag{2.9}$$

eşitliği sağlanıyorsa $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımlı fonksiyonlar denir. Eğer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayılarının hepsi sıfır olduğunda sağlanıyorsa $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Tanım 2.1.7. $f(x)$ ve $g(x)$ bir I aralığında reel değerli ve integrallenebilen herhangi iki fonksiyon olsun. Eğer, $\langle f, g\rangle$ iç çarpımı için,

$$\langle f, g\rangle=\int_I f(x)g(x)r(x)dx=0 \tag{2.10}$$

sağlanıyor ise f ve g fonksiyonlarına I aralığında $r(x)\geq 0$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir. I aralığı sonlu ya da sonsuz olabilir. Ayrıca sonlu I aralığının uçlarından biri ya da her ikisi açık veya kapalı olabilir. (2.10)'da $f = g$ alındığında f nin normu

$$\| f \| = \left[\int_I f^2(x) r(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

olarak tanımlanır (Altın, 2011).

Tanım 2.1.8. Belirli bir küme üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları ve α ve β skalerleri için,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L f + \beta L g \tag{2.12}$$

koşulunu sağlayan L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.1.9. $A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.13}$$

Tanım 2.1.10. $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a,b]$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilirse, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.11. Boş olmayan bir fonksiyonlar kümesi X olmak üzere $f_n : X \to F,\ n \in N$

şeklinde fonksiyonlar olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $f_n(x) \to f(x)$ oluyorsa yani $\forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(x, \varepsilon)$

varsa ve $\forall n \in N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye noktasal yakınsar denir.

$ii)$ $\forall\varepsilon \in 0$ için $\exists N = N(\varepsilon)$ varsa $\forall x \in X$ ve $\forall n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye düzgün yakınsar denir.

Tanım 2.1.12. $\forall a \in N$ için $f_n : E \to R$ olmak üzere $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi verilsin. $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ olarak alındığında $S_n : E \to R$ biçiminde E üzerinde tanımlanan bir $\{S_n\}$ fonksiyonları dizisi elde edilir ki

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x) \tag{2.14}$$

olur. Bu durumda $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin x noktasında oluşturduğu reel sayı serisi yakınsak olur ve toplam $f(x)$ 'dir.

Bir E kümesinde tanımlı $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi düzdün yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin oluşturduğu fonksiyon serisi düzgün yakınsak olur.

Tanım 2.1.13. $[a,b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad a \leq x \leq b \tag{2.15}$$

biçiminde $\phi_n(x),\ (n = 1, 2, ...)$ ortonormal fonksiyonların serisine açılabildiği düşünülürse, bu durumda söz konusu serilere ortonormal seriler denir.

Tanım 2.1.14. λ bir parametre olmak üzere

$$a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_2(x)\frac{dy}{dx} + [a_3(x) + \lambda]y = 0 \tag{2.16}$$

lineer diferansiyel denklemi verilsin ve eğer, (2.16) denkleminde

$$p(x) = \exp\left[\int^{x} \frac{a_2(t)}{a_1(t)}dt\right], \quad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x), \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)} \tag{2.17}$$

dönüşümleri yapılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(q+\lambda s)y=0 \tag{2.18}$$

Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Bu denklem

$$L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q \tag{2.19}$$

operatörü yardımıyla

$$L\left[y\right]+\lambda s(x)y=0 \tag{2.20}$$

şeklinde yazılabilir. Burada p,q ve s reel değerli fonksiyonlardır ve çözümlerin varlığını garanti edebilmek için, $\left[a,b\right]$ aralığında q ve s nin sürekli, p nin ise türevlenebilir olduğu kabul edilmektedir.

Tanım 2.1.15. $p(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $\left[a,b\right]$ aralığında pozitif iseler, (2.18) Sturm-Liouville denklemine $\left[a,b\right]$ de düzgündür denir. Bir düzgün Sturm- Liouville denklemi, verilen bir λ için $\left[a,b\right]$ aralığında iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

Tanım 2.1.16. (2.20) Sturm- Liouville denklemi, $a\le x\le b$ olmak üzere,

$$\begin{cases} a_1 y(a)+a_2 y'(a)=0 \\ b_1 y(b)+b_2 y'(b)=0 \end{cases} \tag{2.21}$$

olarak verilen sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Burada a_1,a_2 ve b_1,b_2 ler reel sabitler olup $a_1{}^2+a_2{}^2\neq 0$ ve $b_1{}^2+b_2{}^2\neq 0$ dır.

Tanım 2.1.17. Bir Sturm-Liouville sistemi için aşikâr olmayan çözümler veren λ değerlerine özdeğer ve bu özdeğere karşılık gelen çözümlere de özfonksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.18. $n.$ mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=f(x) \tag{2.22}$$

olmak üzere,

$$L = a_0 \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n \tag{2.23}$$

türev operatörü için $Ly = f$ denklemindeki L^* adjoint operatörü,

$$L^* = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(\bar{a}_0 y) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\bar{a}_1 y) + ... + +\bar{a}_n y \tag{2.24}$$

şeklindedir. Eğer $L^* = L$ ise L ' ye self-adjoint operatör denir. Burada $\bar{a}_n$ fonksiyonu, a_n fonksiyonunun kompleks eşleneğidir. Her bir a_k fonksiyonu k. mertebeden sürekli türevlenebilir, u ve v fonksiyonları da herhangi bir aralıkta $n.$ mertebeden sürekli türevlenebilir ise bu durumda Lagrange özdeşliğinden,

$$\bar{v}Lu - u\,\overline{L^* v} = \frac{d}{dx} B[u,v] \tag{2.25}$$

yazılabilir. Buradaki $B[u,v]$ bilineer formu,

$$B[u,v] = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j\geq 0, k\geq 0}} (-1)^j u^k (a_m \bar{v})^{(j)} \tag{2.26}$$

olarak tanımlıdır. Eğer L ikinci mertebeden bir diferansiyel operatörü ise,

$$\bar{v}Lu - u\,\overline{L^* v} = \frac{d}{dx}\left[ua_1\bar{v} + u'a_2\bar{v} - u(a_2\bar{v})'\right] \tag{2.27}$$

$$= u''a_2\bar{v} + u'a_1\bar{v} + u\left[-a_2\bar{v}'' + (-2a_2' + a_1)\bar{v}' + (-a_2'' + a_1')\bar{v}\right]$$

şeklini alır. Bu ifade L operatörü için Lagrange özdeşliği olarak bilinir.

Teorem 2.1.19. (Lagrange özdeşliği): $u, v \in C^2[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}(pW[u,v]) \tag{2.28}$$

eşitliği sağlanır. Burada, $W[u,v] = uv' - u'v$, u ve v 'nin Wronskianıdır (Maunch, 2004).

Tanım 2.1.20. $[a,b]$ aralığında (2.28) eşitliğinin her iki tarafın integralini alarak

$$\int_a^b (uL[v]-vL[u])dx = \left((p(x)W[u,v])\right)\Big|_a^b \tag{2.29}$$

elde edilir. Lagrange özdeşliğinin bir sonucu olan (2.29) eşitliğine Green Özdeşliği denir (Maunch, 2004).

Tanım 2.1.21.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Dirac-Delta fonksiyonu denir. Burada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{2.31}$$

ve $\phi(x)$ test fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\delta(x)dx = \phi(0) \tag{2.32}$$

olur (Roach, 1970).

Tanım 2.1.22.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

şeklinde ifade edilen Heaviside birim fonksiyonu, Dirac delta fonksiyonunun integralidir. $\phi(x)$ test fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi'(x)dx \tag{2.34}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)dx$$

$$= \phi(x)$$

olur ki buradan sonuç

$$H'(x) = \delta(x) \tag{2.35}$$

elde edilir (Roach, 1970).

2.2. İntegral Denklemler ve Sınıflandırılması

λ bir parametre olmak üzere, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında kullanılmasıyla oluşan

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{2.36}$$

şeklindeki denkleme integral denklem denir. Burada $K(x,t)$, çekirdek fonksiyonudur. $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ integral sınırlarıdır. İntegral denklemler, çekirdek fonksiyonun özellikleri, bilinmeyen fonksiyonun denklemdeki bulunuş şekli ve integral sınırlarına göre çeşitli şekillerde sınıflandırılabilirler. En sık kullanılan integral denklemler Volterra ve Fredholm integral denklemleri olmak üzere iki ana sınıfa ayrılır. İntegral denklemler, homojen veya homojen olmayan ve lineer veya lineer olmayan olarak sınıflandırılırlar. Bazı pratik problemlerde tekil denklemlerle de karşılaşılmaktadır.

Genel olarak, başlangıç-değer problemleri Volterra integral denklemi ile, sınır-değer problemi ise, Fredholm integral denklemi ile ilişkilidir. Önce Volterra integral denklemlerini, sonra da Fredholm integral denklemlerini tanıtalım.

Tanım 2.2.1. Homojen olmayan lineer Volterra integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{2.37}$$

homojen lineer Volterra integral denklemi,

$$u(x) = \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{2.38}$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u^n(t) dt \tag{2.39}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, integral denklemler, yapılarına göre birinci ve ikinci çeşit denklemler olarak da ifade edilir.

İkinci çeşit Volterra integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt \tag{2.40}$$

birinci çeşit Volterra integral denklemi

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt \tag{2.41}$$

şeklinde tanımlanır (Collins, 2006).

Tanım 2.2.2. Homojen olmayan lineer Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt \tag{2.42}$$

homojen lineer Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt \tag{2.43}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u^n(t) dt \tag{2.44}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca, integral denklemler, yapılarına göre birinci ve ikinci çeşit denklemler olarak da ifade edilir.

İkinci çeşit Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.45)$$

Birinci çeşit Fredholm integral denklemi,

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.46)$$

şeklinde tanımlanır (Collins, 2006).

2.2.1. Tekil ve tekil olmayan integral denklemler

Eğer integral denklemde $K(x,t)$ fonksiyonu verilen belli bir aralıkta tanımlı ve sürekli ise, tekil olmayan integral denklem denir. $K(x,t)$ fonksiyonu verilen belli bir aralıkta sürekli değilse, tekil integral denklem denir. Bir tekil integral denklemi sonsuz sınırlarla bir integral olarak tanımlanır veya integralin çekirdeği aralıktaki belirli bir noktada sınırsız olduğunda tekil integral olarak adlandırılır. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt \qquad (2.47)$$

integral denkleminde $x = t$ süreksizlik noktası olduğundan verilen integral tekil integraldir.

2.3. İntegral Denklemlerle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç-değer problemi Volterra tipindeki bir integral denkleme dönüştürülebileceği gibi, sınır-değer problemi de Fredholm integral denklemine dönüştürülebilir.

2.3.1. Diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüştürülmesi

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.48)$$

diferansiyel denkleminin

$y(0) = \alpha_0$, $y'(0) = \alpha_1, \ldots,$ $y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü integral denklemler yardımıyla yazalım.

Önce, $y^{(n)}$ için

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

şeklindeki dönüşüm yazılabilir. Buradan,

$$\int_0^x \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)dx = \int_0^x u(x)dx$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x)dx + c_{n-1}$$

yazılır. Benzer şekilde art arda integre edilirse, ikinci, üçüncü ve $n.$ integralden sonra,

$$\int_0^x \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)dx = \int_0^x \left(\int_0^x u(x)dx + c_{n-1}\right)dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_{n-1}\int_0^x dx + c_{n-2}$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(x)dxdx + c_{n-1}x + c_{n-2}$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(x)dxdxdx + \frac{1}{2!}c_{n-1}x^2 + c_{n-2}x + c_{n-3}$$

....

....

....

$$y(x) = \int_0^x ...(n)...\int_0^x u(x)dx...dx + \frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2} + ...c_1 x + c_0$$

elde edilir. Burada n katlı integral

$$\int .....(n).....\int$$

biçimindeki notasyon kullanılmıştır. Yani, integraller arasındaki (n), katlılık mertebesini göstermektedir.

Yukarıdaki ifadeler, (2.48)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemelerden sonra,

$$u(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

biçimindeki, ikinci çeşit Volterra integral denklemi elde edilir. Böylece (2.48) denklemi Volterra integral denklemine dönüşür (Köklü, 2018).

Teorem 2.3.1. u sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^x ...(n)...\int_0^x u(t)dt...dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt \tag{2.49}$$

dır (Aksoy, 1998).

2.3.2. İntegral denklemin diferansiyel denkleme dönüştürülmesi

Eğer, $a: R \to R$ $b: R \to R$ sürekli diferansiyellenebilir, $f: R^2 \to R$ ve $\frac{\partial f}{\partial x}$ sürekli ise, o zaman

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,b(x))\frac{db}{dx} - f(x,a(x))\frac{da}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \tag{2.50}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlik Leibnitz Formülü olarak bilinir (Collins, 2006).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonunun Oluşturulması

$p_0(x), p_1(x),..., p_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $p_0(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$L[y] \equiv p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde $n.$ mertebeden bir diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Sınır koşullarımız ise $(k = 1, 2..., n)$ olmak üzere,

$$V_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^1 y'(a) + ... + \alpha_k^{n-1} y^{n-1}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^1 y'(b) + ... + \beta_k^{n-1} y^{n-1}(b) \tag{3.2}$$

ile verilmektedir; burada $y'(a),..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b),..., y^{(n-1)}(b)$ 'nin fonksiyonu olan $V_1,...,V_n$ ler lineer bağımsız formlardır.

(3.1)-(3.2) ile verilen homojen sınır değer probleminin $y(x) \equiv 0$ trivial(aşikar) çözümünden başka bir çözüm olmadığını varsayarsak aşağıdaki tanım geçerlidir.

Tanım 3.1. (3.1) -(3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu olan $G(x,t)$, $a < t < b$ olmak üzere herhangi bir t için inşa edilmiş bulunan ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir fonksiyondur (Krasnov vd., 1976).

Özellikler

1) G(*x*,*t*) fonksiyonu $a \leq t \leq b$ aralığında süreklidir ve x 'e göre ilk $n-2$ mertebeden sürekli türevleri vardır.

2) x 'e göre $(n-1).$ mertebeden türevinin $x = t$ noktasında birinci çeşit bir süreksizliği vardır ve sıçrama miktarı $\frac{1}{p_0(x)}$ kadardır; bir başka deyişle:

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=t+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=t-0} = \frac{1}{p_0(x)} \tag{3.3}$$

3) $[a,t)$ ve $(t,b]$ aralıklarının ikisinde de $G(x,t)$ fonksiyonu x 'in bir fonksiyonu olarak düşünülecektir ve (3.1) denkleminin bir çözümü olacaktır.

$$L[G]=0 \tag{3.4}$$

4) $G(x,t)$ fonksiyonu (3.2) sınır koşullarını sağlar.

$$V_k[G]=0 \quad (k=1,2,...,n) \tag{3.5}$$

Teorem 3.2. (3.1) ve (3.2) sınır değer probleminin $y(x)\equiv 0$ aşikâr çözümünden başka çözümü yoksa L operatörünün $G(x,t)$ gibi bir ve yalnız bir tane Green fonksiyonu vardır (Krasnov vd., 1976).

İspat: $L[y]=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ olsun. Bu takdirde (3) özelliğine göre $G(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonun $[a,t)$ ve $(t,b]$ aralıkları üzerinde aşağıdaki formda bir gösterilimi söz konusu olmalıdır:

$$a\le x<t \text{ için } G(x,t) = a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+...+a_ny_n(x)$$

$$t\le x<b \text{ için } G(x,t) = b_1y_1(x)+b_2y_2(x)+...+b_ny_n(x)$$

burada $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ büyüklükleri t değişkeninin fonksiyonudur. $G(x,t)$ fonksiyonunun ve x 'e göre ilk $n-2$ mertebeden türevlerinin $x=t$ noktasında sürekli olma özelliğinden yaralanarak,

$$\left[b_1y_1(t)+...+b_ny_n(t)\right]-\left[a_1y_1(t)+...+a_ny_n(t)\right]=0$$
$$\left[b_1y_1'(t)+...+b_ny_n'(t)\right]-\left[a_1y_1'(t)+...+a_ny_n'(t)\right]=0$$

……..

……..

$$\left[b_1y_1^{(n-2)}(t)+...+b_ny_n^{(n-2)}(t)\right]-\left[a_1y_1^{(n-2)}(t)+...+a_ny_n^{(n-2)}(t)\right]=0$$

bağıntıları oluşturulabilir. (3.3) koşulu

$$\left[b_1 y_1^{(n-1)}(t)+...+b_n y_n^{(n-1)}(t)\right]-\left[a_1 y_1^{(n-1)}(t)+...+a_n y_n^{(n-1)}(t)\right]=\frac{1}{p_0(t)}$$

formunu alır. $c_k(t)=b_k(t)-a_k(t)$ $(k=1,2,..,n)$ koyalım. Bunun sonucu olarak $c_k(t)$ cinsinden yazılmış aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t)+...+c_n y_n(t)=0\\
&c_1 y_1'(t)+c_2 y_2'(t)+...+c_n y_n'(t)=0\\
&\dots\dots\dots..\\
&c_1 y_1^{(n-2)}(t)+c_2 y_2^{(n-2)}(t)+...+c_n y_n^{(n-2)}(t)=0\\
&c_1 y_1^{(n-1)}(t)+c_2 y_2^{(n-1)}(t)+...+c_n y_n^{(n-1)}(t)=\frac{1}{p_0(t)}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6) sisteminin determinantı $W(y_1,y_2,...,y_n)$ Wronskiyeninin $x=t$ noktasındaki değerine eşittir ve bu nedenle sıfırdan farklıdır. Bu nedenle (3.6) sistemi $c_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ fonksiyonlarını tek türlü olarak belirler. $a_k(t)$ ve $b_k(t)$

fonksiyonlarını belirlemek için (3.2) sınır koşulundan yararlanalım. $V_k(y)$ 'yi şu formda yazalım:

$$V_k(y)=A_k(y)+B_k(y) \tag{3.7}$$

burada

$$A_k(y)=\alpha_k y(a)+\alpha_k^1 y'(a)+...+\alpha_k^{n-1} y^{(n-1)}(a)$$

$$B_k(y)=\beta_k y(b)+\beta_k^1 y'(b)+...+\beta_k^{n-1} y^{(n-1)}(b)$$

dir. (3.5) koşulundan

$$V_k(G)=a_1 A_k(y_1)+a_2 A_k(y_2)+...+a_n A_k(y_n)+b_1 B_k(y_1)+...$$

$$+b_n B_k(y_n) \quad (k=1,2,...,n)$$

elde edilir. $a_k = b_k - c_k$ olduğu dikkate alınarak

$$(b_1-c_1)A_k(y_1)+(b_2-c_2)A_k(y_2)+...+(b_n-c_n)A_k(y_n)+b_1B_k(y_1)+b_2B_k(y_2)+$$

$$...+b_nB_k(y_n)=0 \quad (k=1,2,...,n)$$

ve (3.7) eşitliği kullanılarak

$$b_1V_k(y_1)+b_2V_k(y_2)+...+b_nV_k(y_n)=c_1A_k(y_1)+c_1A_k(y_2)+...+$$

$$c_nA_k(y_n) \ , \ (k=1,2,...,n) \tag{3.8}$$

bulunur. (3.8) sisteminin $b_1,b_2,..,b_n$ cinsinden lineer bir sistemdir. Sistemin determinantı $V_1,V_2,...,V_n$ formlarının lineer olma varsayımının bir sonucu olarak sıfırdan farklıdır.

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & .... & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & .... & V_2(y_n) \\ .... & .... & .... & .... \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & .... & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.9}$$

Sonuç olarak (3.8) denklem sisteminin $b_1(t),b_2(t),...,b_n(t)$ türünden bir tek çözümü vardır ve $a_k(t)=b_k(t)-c_k(t)$ olması nedeniyle $a_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ ler de tek türlü olarak belirlenmiş olacaktır. Böylece $G(x,t)$ Green fonksiyonunun varlığı ve tekliği kanıtlanmış, çözümü verecek bir yöntem geliştirilmiş olur.

Teorem 3.3. (3.1) ve (3.2) sınır değer problemi self-adjoint ise Green fonksiyonu simetriktir:

$$G(x,t)=G(t,x)$$

tersi de doğrudur.

İspat: $a<t<\eta<b$ için

$$G=G(x,t)$$

$$H = G(x,\eta)$$

Green Fonksiyonlarını ele alalım. L operatörü *self-adjoint* olduğu için

$$GL[H] - HL[G] = \frac{d}{dx}\left[p(H'G - HG')\right]$$

Lagrange özdeşliği sağlanır. G ve H Green Fonksiyonu olduğu için homojen denklemini sağlar. Yani;

$$L[G] = 0 \text{ ve } L[H] = 0$$

dır.

$[a,t]$, $[t,\eta]$ ve $[\eta,b]$ aralıkları üzerinden integral alınırsa,

$$\left[p(H'G - HG')\right]_a^t + \left[p(H'G - HG')\right]_t^\eta + \left[p(H'G - HG')\right]_\eta^b = 0$$

dır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$p(t)G(t,t)\left[H'(t^-,\eta - H'(t^+,\eta)\right] + p(t)H(t,\eta)\left[G'(t^+,t) - G'(t^-,t)\right]$$

$$+p(\eta)G(\eta,t)\left[H'(\eta^-,\eta) - H'(\eta^+,\eta)\right] + p(\eta)H(\eta,\eta)\left[G'(\eta^+,t) - G'(\eta^-,t)\right]$$

$$p(\eta)G(\eta,t)\left[H'(\eta^-,\eta) - H'(\eta^+,\eta)\right]$$

3.1.1. İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için Green fonksiyonunun oluşturulması

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \tag{3.10}$$

sınır koşullarına sahip,

$$\left[p(x)y'\right]' + q(x)y = 0 \ , \ x \in [a,b] \Rightarrow p(x) \neq 0, p(x) \in C^{(1)}[a,b] \tag{3.11}$$

formuna sahip ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin Green fonksiyonunu oluşturalım. $y_1(x)$ in (3.11) denkleminin bir çözümü olduğunu ve

$$y_1(a)=0\ ,\ y_1'(a)=\alpha\neq 0 \tag{3.12}$$

başlangıç koşullarını sağladığını varsayalım. Genel olarak bu çözümün ikinci sınır koşulunu sağlaması gerekmez, bu nedenle

$$y_1(b)\neq 0$$

olduğunu varsayalım. C_1 keyfi bir sabit olmak üzere $C_1y_1(x)$ şeklindeki fonksiyonlar (3.11) denkleminin çözümleridir ve

$$y(a)=0$$

koşulunu gerçekler. (3.11)’ in sıfırdan farklı $y_2(x)$ çözümünü de benzeri yoldan buluruz ve bu çözüm

$$y_2(b)=0$$

koşulunu gerçekler. Bu koşul, C_2 keyfi bir sabit olmak üzere $C_2y_2(x)$ ailesinin tüm çözümleri tarafından gerçeklenir. (3.10) -(3.11) probleminin

$$G(x,t)=\begin{cases} C_1y_1(x)\ , & a\leq x\leq t \\ C_2y_2(x)\ , & t\leq x\leq b \end{cases} \tag{3.13}$$

formunda olmak üzere Green fonksiyonunu arayacağız ve C_1, C_2 sabitlerini, $G(x,t)$ fonksiyonunun t’nin sabit değerleri için x’e göre sürekli, özellikle $x=t$ noktasında sürekli, yani

$$C_1y_1(t)=C_2y_2(t)$$

ve $G'(x,t)$ fonksiyonun $x=t$ noktasında $\dfrac{1}{p(t)}$’ ye eşit bir sıçramaya sahip, yani

$$C_2y_2'(t)-C_1y_1'(t)=\frac{1}{p(t)}$$

olmasını sağlayacak tarzda belirleyeceğiz:

Son iki denklemi

$$\begin{cases} -C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = 0 \\ -C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = \dfrac{1}{p(t)} \end{cases} \tag{3.14}$$

formunda yazalım. (3.14) sisteminin determinantı, (3.11) denkleminin lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin $x = t$ noktasında hesaplanan $W\left[y_1(x), y_2(x)\right] = W(x)$

Wronskian determinantıdır ve bu nedenle sıfırdan farklıdır:

$$W(t) \neq 0$$

ve (3.14) sisteminden C_1 ve C_2 çözülürse

$$C_1 = \frac{y_2(t)}{p(t)W(t)} \;,\; C_2 = \frac{y_1(t)}{p(t)W(t)} \tag{3.15}$$

bulunur. C_1 ve C_2 nin bu değerleri (3.13) de yerine yazılırsa

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{p(t)W(t)} &, \quad a \leq x \leq t \\ \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{p(t)W(t)} &, \quad t \leq x \leq b \end{cases} \tag{3.16}$$

elde edilir.

(3.11) denkleminin $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri, $y_1(b) \neq 0$ olması varsayımın bir sonucu olarak lineer bağımsızdırlar.

Gerçekten $y_1(x)$ ile lineer bağımlı olan bütün çözümler $C_1 y_1(x)$ formundadır ve sonuç itibariyle $C_1 \neq 0$ için $x = b$ noktasında sıfır olmazlar; fakat bizim seçimimizin bir sonucu olarak söz konusu noktada $y_2(x)$ sıfır olmaktadır.

İkinci mertebeden

$$y'' + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \tag{3.17}$$

formunda olan ve

$$y(a) = A\,, \quad y(b) = B \tag{3.18}$$

sınır koşullarına sahip bir denklem için sınır değer problemi, yukarıda ele alınan problem (3.10)-(3.11) sistemine şu tarzda dönüştürülür:

a-) (3.17) lineer denklemi $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$ ile çarpılarak (3.11)'a indirgenir.

($q(x)$ için $p(x)p_2(x)$ i almalıyız.)

b-) (3.18) sınır koşulu, lineer

$$z(x) = y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A$$

değişken dönüşümü yardımıyla (3.10) sınır koşullarına indirgenir. Bu değişken dönüşümü (3.17)'nin lineerliğini korur, fakat (3.11)'den farklı olarak $L\left[z\right] = f(x)$ gibi homojen olmayan bir denklem elde edilir. Burada

$$f(x) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)\right]q(x) - \frac{B-A}{b-a}\,p(x)$$

dir. Bununla birlikte $L\left[z\right] = 0$, $z(a) = z(b) = 0$ homojen sınır değer problemi için Green teoremini uygulayabilir ve bu da (3.10)-(3.11) ile bütünüyle çakışır (Krasnov vd., 1976).

Örnek 3.4.

$$y^{iv}(x) = 0 \tag{3.19}$$

denklemi için sınır koşulları

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

şeklinde verilen problemin Green fonksiyonunu oluşturalım.

Önce (3.19)-(3.20) sınır değer probleminin yalnızca aşikâr çözümünün var olduğu gösterilmelidir. (3.19) denklemi için çözümlerin temel sistemi

$$y_1(x)=1\ ,\ y_2(x)=x\ ,\ y_3(x)=x^2\ ,\ y_4(x)=x^3 \tag{3.21}$$

dir. Dolayısıyla genel çözüm A,B,C ve D sabit büyüklükler olmak üzere,

$$y(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3$$

dir. (3.20) koşulları A,B,C ve D sabitlerini bulmamızı sağlayacak şu bağıntıların oluşmasını mümkün kılar.

$$y(0)=A=0,$$

$$y'(0)=B=0,$$

$$y(1)=A+B+C+D=0$$

$$y'=B+2C+3D=0$$

ve buradan $A=B=C=D=0$ bulunur. Sonuç itibariyle (3.19)-(3.20)'nin yalnızca $y(x)=0$ gibi bir aşikâr çözümü vardır. Onun için bir tek $G(x,t)$ Green fonksiyonu inşa edilebilir.

(3.21) çözümlerin temel sistemini kullanarak $G(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$G(x,t)=a_1.1+a_2.x+a_3.x^2+a_4.x^3 \quad , \quad 0\le x\le t \tag{3.22}$$

$$G(x,t)=b_1.1+b_2.x+b_3.x^2+b_4.x^3 \quad , \quad t\le x\le 1 \tag{3.23}$$

burada $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1\ ,b_2\ ,b_3,\ b_4$ büyüklükleri, t'nin henüz bilinmeyen fonksiyonlarıdır. $c_k(t)=b_k(t)-a_k(t)\quad (k=1,2,3,4)$ koyalım ve lineer denklem sistemini $c_k(t)$ fonksiyonlarını bulma amacıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 = 0\,,$$

$$c_2 + c_3.2t + c_4.3t^2 = 0\,, \tag{3.24}$$

$$c_3.2 + c_4.6t = 0\,,$$

$$c_4.6 = 1$$

(3.24) sistemi çözülerek,

$$\begin{cases} c_1(t) = -\dfrac{1}{6}t^2 \quad , \quad c_2(t) = \dfrac{1}{2}t^2 \\ c_3(t) = -\dfrac{1}{2}t \quad , \quad c_4(t) = \dfrac{1}{6} \end{cases} \tag{3.25}$$

bulunur. Green fonksiyonunun gerçeklediği Tanım 3.1. (4) özelliği kullanıldığında, $G(x,t)$ 'nin aşağıdaki bağıntıları gerçeklediği görülür.

$$\begin{aligned} G(0,t) = 0, \quad G'(0,t) = 0 \\ G(1,t) = 0, \quad G'(1,t) = 0 \end{aligned}$$

Bu bağıntılar, problem için aşağıdaki formda ortaya çıkar.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0 \\ b_2 + 2b_3 + 3b_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$c_k = b_k - a_k \quad (k = 1,2,3,4)$ bağıntısını kullanarak (3.25) ve (3.26)' dan

$$\begin{aligned} a_1 = 0, \quad b_1 &= -\frac{1}{6}t^3 \\ a_2 = 0, \quad b_2 &= \frac{1}{2}t^2 \\ a_3 = \frac{1}{2}t - t^2 + \frac{1}{2}t^3, \quad b_3 &= \frac{1}{2}t^3 - t^2 \\ a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3, \quad b_4 &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur. $a_{1,}a_2,,,b_4$ ün (3.27)'den bulunan değerleri (3.22) ve (3.23)'de yerine yazılarak Green fonksiyonu oluşturulmuş olur.

$$G(x,t)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}t-t^2+\frac{1}{2}t^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right)x^3, & 0\le x\le t \\ -\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2x+\left(\frac{1}{2}t^3-t^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right)x^3, & t\le x\le 1 \end{cases}$$

Bu ifade de

$$G(x,t)=\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)t^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)t^3, \quad t\le x\le 1$$

formunda yazılabilir. Burada $G(x,t)=G(t,x)$ olduğu, yani Green fonksiyonunun simetrik olduğu görülmektedir. (3.19)-(3.20) sınır değer probleminin self-adjoint olması durumunda Green fonksiyonunun simetrik olacağı görülür.

3.2. Sınır Değer Problemlerinin Çözümünde İntegral Denklemlerin Kullanılması

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+......+p_n(x)y(x)=f(x) \tag{3.28}$$

şeklinde homojen olmayan bir diferansiyel denklem ve

$$V_1(y)=0,\ V_2(y)=0,\ldots,\ V_n(y)=0 \tag{3.29}$$

Sınır koşulları verilmiş olsun.

$$y(a),\ y'(a),\ldots,\ y^{(n-1)}(a),\ y(b),\ y'(b),\ldots,\ y^{(n-1)}(b)$$

cinsinden ifade edilmiş olan, V_1, V_2,....,V_n lineer formlarının lineer bağımsız olduğunu varsayacağız.

Teorem 3.5. Eğer $G(x,t)$, $L[y]=0$, $V_k(y)=0$, $(k=1,2,....,n)$ homojen sınır değer probleminin bir çözümü ise (3.28) ve (3.29) sınır değer probleminin çözümü

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)dt \tag{3.30}$$

formülü ile verilir (Krasnov vd., 1976).

Örnek 3.6. Aşağıdaki sınır değer problemini ele alarak, onu bir integral denkleme dönüştürerek çözelim.

$$y''(x) - y(x) = x \tag{3.31}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{3.32}$$

Çözüm:

a) Önce homojen sınır değer problemi için Green fonksiyonunun olup olmadığını araştıralım.

$$y''(x) - y(x) = 0 \tag{3.33}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{3.34}$$

$y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = e^{-x}$ fonksiyonları (3.33) in bir çözümüdür. Dolayısıyla bu denklemin genel çözümü

$$y\ (x) = Ae^x + Be^{-x}$$

ile verilecektir. (3.32) nin sınır koşulu ancak ve ancak $A = B = 0$ yani, $y(x) = 0$ olması durumunda gerçeklenir. Bunun anlamı Green fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

b) (3.33) ve (3.34) sınır değer probleminin Green foksiyonu;

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(t-1)\sinh x}{\sinh 1} & 0 \le x \le t \\ \dfrac{\sinh t \sinh(x-1)}{\sinh 1} & t \le x \le 1 \end{cases} \tag{3.35}$$

c) Green fonksiyonu verildiğine göre (3.31) ve (3.32) sınır değer probleminin çözümünü

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t) t dt \tag{3.36}$$

formu şeklinde yazabiliriz. İntegral aralığını iki kısma ayırır ve (3.35) Green fonksiyonunu (3.36)'da yerine yazarsak,

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sinh t \sinh(x-1)}{\sinh 1} t dt + \int_x^1 \frac{\sinh(t-1)\sinh x}{\sinh 1} t dt$$

$$= \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1} \int_0^x t \sinh t dt + \frac{\sinh x}{\sinh 1} \int_x^1 t \sinh(t-1) dt \tag{3.37}$$

buluruz. Buradaki integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^x t\sinh t dt = x\cosh x - \sinh x$$

$$\int_x^1 t\sinh(t-1)dt = 1 - x\cosh(x-1) + \sinh(x-1)$$

olur. Buna göre çözümü,

$$y(x) = \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1}\left[x\cosh x - \sinh x\right] + \frac{\sinh x}{\sinh 1}\left[1 - x\cosh(x-1) + \sinh(x-1)\right]$$

$$= \frac{\sinh x}{\sinh 1} - x$$

şeklinde bulunur. Burada $\sinh(a \pm b) = \sinh a.\cosh b \pm \cosh a.\sinh b$ formülünden ve $\sinh x$ fonksiyonunun tek olma özelliğinden yararlanıldı. Doğrudan yerine yazıldığında,

$$y(x) = \frac{\sinh x}{\sinh 1} - x$$

fonksiyonun (3.31) denklemini sağladığı ve (3.32) sınır değer koşullarını sağladığı görülür.

3.3. Bir Parametre İçeren Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi

$$L\left[y\right] \equiv \lambda y + h(x) \tag{3.38}$$

$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{3.39}$$

tipinde sınır değer problemini ele alalım; burada

$$L\left[y\right] \equiv p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x)y(x)$$

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)}y'(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(\alpha)$$

$$+\beta_k y(b) + \beta_k^{(1)}y'(b) + ... + \beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b) \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

dir; $V_1, V_2, ..., V_n$ ler lineer bağımsız formlar, $h(x)$ bilinen bir fonksiyon, λ ise sayısal bir parametredir

$$h(x) \equiv 0 \text{ ise}$$

$$L[y] = \lambda y \,,\; V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{3.40}$$

homojen sınır değer problemi oluşur.

Tanım 3.7. λ 'nın (3.40) sınır değer probleminin aşikâr olmayan $y(x)$ çözümlerinin var olmasına olanak tanıyan değerlerine (3.40)' nin özdeğerleri denir.

Teorem 3.8.

$$L[y] = 0 \quad V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{3.41}$$

sınır değer probleminin $G(x,t)$ Green fonksiyonu varsa, (3.38)-(3.39) sınır değer problemi

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x,t) y(t) dt \tag{3.42}$$

Fredholm integral denklemine denktir; burada

$$f(x) = \int_a^b G(x,t) h(t) dt$$

dir. Özellikle (3.40) sınır değer problemi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,t) y(t) dt \tag{3.43}$$

şeklindeki homojen integral denkleme denktir (Köklü, 2018).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Test Problemi

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alarak, onu bir integral denkleme dönüştürerek çözelim.

$$y''(x)+\lambda y=x \tag{4.1}$$

$$y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{4.2}$$

Çözüm:

$$y''(x)=0\,,\; y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0$$

şeklindeki homojen problemin $G(x,t)$ Green fonksiyonunu bulalım.

$y''(x)=0$ denkleminin $y(0)=0\,,$ $y(\frac{\pi}{2})=0$ koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri sırasıyla $y_1(x)=x$ ve $y_2(x)=x-\frac{\pi}{2}$ olduğu için,

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(t)}{p(t)W(t)} & ,\quad 0\le x\le t\\[2ex] \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{p(t)W(t)} & ,\quad t\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \tag{4.3}$$

formunda bir Green fonksiyonu arayacağız. Burada

$$W(t)=\begin{vmatrix} t & t-\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}$$

dir. Dolayısıyla,

$$G(x,t)=\begin{cases}\left(\dfrac{2t}{\pi}-1\right)x, & 0\le x\le t\\[2ex] \left(\dfrac{2x}{\pi}-1\right)t, & t\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

olacaktır. Bu bulduğumuz Green fonksiyonu bir integral denklemin çekirdeğidir ve $y(x)$ için aşağıdaki integral denklemi elde ederiz.

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) y(t) dt$$

Burada

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) t dt = \int_0^x \left(\frac{2x}{\pi} - 1 \right) t^2 dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2t}{\pi} - 1 \right) x t dt = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2 x}{24}$$

dir. Böylece (4.1) -(4.2) sınır değer problemi aşağıdaki integral denkleme indirilmiş olur.

$$y(x) + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) y(t) dt = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2 x}{24} \tag{4.4}$$

$$y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2 x}{24} - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) y(t) dt$$

elde edilir.

4.2. Test Problemi

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alarak, onu bir integral denkleme dönüştürerek çözelim.

$$y'' + y = -1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \tag{4.5}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{4.6}$$

Çözüm:

$$L[y] = y'' + y = 0$$

homojen denkleminin genel çözümü $y(x) = A\cos x + B\sin x$ olup aşikâr çözümden başka çözümü yoktur. O halde Green fonksiyonu oluşturabilir. $y(0) = 0$ koşulunu sağlayan çözümü

$$y_1(x) = \sin x, \quad 0 \le x < t$$

ve aynı denklemin $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ koşulunu sağlayan çözümü

$$y_1(x) = \cos x, \quad t < x \le \frac{\pi}{2}$$

dir. y_1 ve y_2 'nin Wronskian determinantı

$$W(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1$$

olup, $p(x) = 1$ 'den dolayı $pW = -1$ dir. Green fonksiyonu

$$G(x,t) = \begin{cases} -\sin x \cos t, & 0 \le x \le t \\ -\cos x \sin t, & t \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

olur. Böylece verilen problemin çözümü

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) f(t) dt = \int_0^x G(x,t) f(t) dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} G(x,t) f(t) dt$$

$$= \int_0^x \cos x \sin t dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t dt$$

$$= \sin x + \cos x - 1 \tag{4.7}$$

dir. (4.7) fonksiyonunun (4.5) denklemini sağladığı ve (4.6) sınır değer koşullarını yerine getirdiği kolayca görülür.

4.3. Test Problemi

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alarak, onu bir integral denkleme dönüştürerek çözelim.

$$y'' + y = -f(x) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.8}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{4.9}$$

Çözüm:

$L[y]=y''+y=0$ homojen denkleminin genel çözümü

$$y(x)=A\cos x+B\sin x$$

dir. Bu çözümün verilen sınır şartlarını sağlaması için $A=B=0$ olması gerekir. O halde sisteme karşılık gelen homojen problem sadece $y=0$ aşikâr çözüme sahiptir. Green fonksiyonunu elde etmek için

$$y_1(x)=\sin x\ ,$$

$$y_2(x)=\sin(x-1)=\cos 1\sin x-\sin 1\cos x$$

alınırsa, $y_1(0)=0$ ve $y_2(1)=0$ olup, y_1 ve y_2 'nin Wronskian determinantı

$$W(t)=\begin{vmatrix}\sin t & \sin(t-1)\\ \cos t & \cos(t-1)\end{vmatrix}=\sin 1$$

olup $p(x)=1$den dolayı $pW=\sin 1$ dir. Green fonksiyonu

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\sin(t-1)}{\sin 1}, & 0\le x\le t\\ \dfrac{\sin t\sin(x-1)}{\sin 1}, & t\le x\le 1\end{cases}$$

olur. Böylece aranılan çözüm

$$y(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)dt$$

de $G(x,t)$ yerine konularak elde edilir. Özel olarak $f(x)=1$ alınırsa

$$y(x)=\frac{\sin(x-1)-\sin x}{\sin 1}+1 \qquad (4.10)$$

bulunur. (4.10) fonksiyonunun (4.8) denklemini sağladığı ve (4.9) sınır değer koşullarını yerine getirdiği kolayca görülür.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte, mühendislikte ve birçok alanda karşılaşılan sınır değer problemlerinin Green fonksiyonu aracılığı ile integral denklemlere dönüştürülmesi ve oluşturulan integral denklemin çözümü üzerinde duruldu. Bu metot üç test problemine uygulandı ve bulunan çözümlerin sınır değer problemlerini sağladığı görüldü. Test problemlerinden de görüleceği üzere Green fonksiyonu bilindiği taktirde problemin çözümü integral denklem ile kolayca bulunabilir. O halde çözümün bulunması için esas problem Green fonksiyonunun tanımlanmasıdır.

Fiziğin temel denklemlerinin birçoğunun adi veya kısmi diferansiyel denklemler şeklinde olduğu göz önünde bulundurulursa, sınır değer problemleri ile integral denklemler arasındaki bağıntının ortaya konması zaruret halini almaktadır. Böylece bir fizik probleminin integral denklemle ifade edilmesi, problemin çözümünde bizlere kolaylık sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

Abbasbandy, S. and Shivanian, E. (2011) "A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations", ***Numerical Algorithms Journal***, 56, 27-43.

Aksoy, Y. (1998) İntegral Denklemler, ISBN:975-461-056-8, ***YTÜ Basım-Yayın Merkezi***, İstanbul, 1-24.

Aksoy, Y. (2004) Diferansiyel Denklemler, ***YTÜ Basım-Yayın Merkezi***, İstanbul, 155-162.

Altın, A. (2011) Uygulamalı Matematik, ***Gazi Kitabevi,*** Ankara, 190-195.

Bloom, F. (1980) "Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integrodifferential equations of elektromanyetic theory", ***Journal of Mathematical Analysis and Applications,*** 73(2), 524-542.

Bocher, M. (1913) An Introduction to the Study of Integral Equations, New York.

Büyükaksoy, A. and Alkumru, A. (1995) "Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip", ***Journal of Engineering Mathematics***, 29(2), 105-120.

Collins, P.J. (2006) Differential and Integral Equations, ***Oxford University Press Inc,*** New York.

Duffy, D. G. (2001) Green's functions With Applications, Washington, ***C.H,*** New York, 1-4.

Green, C.D. (1969) İntegral Equations Methods, ***Barnes and Noble***, New York.

Holmekar, K. (1993) "Global asymtotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones", ***SIAM Journal Mathematics***, 24(1), 116-128.

Hsiao, G. and Maccamy, R.C. (1973) "Solution of boundary problems by integral equations of the first kind", ***SIAM Review***, 15(4), 687-705.

Jerri, A. (1999) Introduction to Integral Equations with Applications, ***Wiley***, New York.

Köklü, K.Ö. (2018) İntegral Denklemler, ***Papatya Yayıncılık Eğitim***, İstanbul, 13-24.

Kopeikin, I.D. and Shishkin, V.P. (1984) "Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity", ***Journal of Applied Mathematics and Mechanics***, 48(1), 117-119.

Krasnov, M. Kiselev, A and Makarenko, G. (1971) İntegral Denklemler, Cerit, C., ***Kendi Yayını***, İstanbul, 105-118.

Mauch, S. (2004) Introduction To Methods Of Applied Matematics Or Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers, ***Mauch Publishing Company***, California, 1314-1323.

Navabpour, H.R. and Ghaini, F.M. (2015) “A Direct Analytic Method for Solution of Linear Fredhom İntegral and İntegro-Differential Equations of the Second Kind”, ***Journal of Mathhematical Extension***, 9(2), 59-77.

Roach, G.F. (1970) Green’s Functions Introductory Theory with Applications, ***Cambridge University Press***, London, 141-145.

Saranen, J. and Vainikko, G. (2002), Periodic İntegral and Pseudodiffrential Equations with Numerical Approximation, ***Springer***, Berlin.

Schwank, F. (1963) Sınır Değer Problemleri, Tameroğlu. S, ***TÜ Matbaası,*** İstanbul, 435-436.

Tricomi, F.G. (1955) Integral Equations, ***University of Turin***, Italy.

Wazwaz, A.M. (1997) A First Course in İntegral Equations, ***World Scientific***, Singapore.

Yue, Z.Q. and Selvadurai, A.P.S. (1995) “Contac problem for saturated poroelastic solid”, ***Journal of Engineering Mechanics***, 121(4), 502-512.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Amirali, G., **Yeter, E**. (2018) "Sınır değer problemlerinin integral denklemler metodu ile çözümü", ***XXXI. Ulusal Matematik Sempozyumu, 12-15 Eylül 2018,*** Erzincan.

ÖZGEÇMİŞ

Emre YETER, 1986 yılında Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 2004 yılında başladığı Erzurum Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erzincan Anadolu İmam Hatip Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2014 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda lisansüstü öğrenimine başladı ve halen öğrenimine devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.

.