T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR PROBLEMLERİ İÇİN İTERASYON YÖNTEMLERİ VE DEJENERE OLMUŞ FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Şennur TOPCU

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında, Şennur TOPCU tarafından hazırlanan bu çalışma 28/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ	İmza:
Üye	: Doç. Dr. İlhame AMİRALİ	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 08 / 08/ 2019 tarih ve 31/…4….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Özdeğer-Özvektör Problemleri İçin İterasyon Yöntemleri ve Dejenere Olmuş Fredholm İntegral Denklemleri" isimli "Yüksek Lisans" tezimin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 28/06/2019

Şennur TOPCU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR PROBLEMLERİ İÇİN İTERASYON YÖNTEMLERİ VE DEJENERE OLMUŞ FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Şennur TOPCU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Bu çalışmada, Özdeğer-Özvektör problemleri için bazı iterasyon metodlarının yakınsaklık özellikleri ve Dejenere Çekirdekli Fredholm İntegral Denklemleri için çözüm yöntemlerinin incelenmesi ele alınmıştır. Öncelikle Özdeğer-Özvektör problemleri için hata payı sıfıra yakın olan uygun yaklaşık (iterasyon) çözüm metotları belirlenerek, uygulanabilirliği gösterilmiştir. Daha sonra Dejenere Çekirdekli Fredholm İntegral Denklemleri için çözüm yöntemleri incelenerek örnekler üzerinde nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.

2019, 42 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, Özvektör, İterasyon, Fredholm İntegral Denklemi

ABSTRACT

Master Thesis

ITERATIVE METHODS FOR EIGENVALUE-EIGENVECTOR PROBLEMS AND DEGENERATE FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS

Şennur TOPCU

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

In this study, the usage of some iteration methods for eigenvalue-eigenvector problems and the investigation of the solution methods for the degenerated Fredholm integral equations are researched. First,the suitable approximation (iteration) solution methods with a margin of error close to zero of the eigenvalue-eigenvector problems were determined and their applicability was shown. Then, the solution methods for the Fredholm integral equations with degenerated kernel were examined and it was shown that the numerical results of the examples were consistent with the theoretical results.

2019, 42 Pages

Keywords: Eigenvalue, Eigenvector, Iteration, Fredholm Integral Equation

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezim olarak sunulan bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde yapılmış bir çalışmadır.

Tez çalışmam süresince bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli hocam sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca sabrıyla ve ihtiyaç duyduğum anlardaki yardımlarıyla, maddi manevi desteğini esirgemeyen değerli eşim Doç. Dr. Cihan TOPCU'ya, çalışmama izin verdikleri için kızım Sena TOPCU ve oğlum Ferhat Emir TOPCU'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, tez çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU, Arş. Gör. Ömer YAPMAN, ve Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkürlerimi sunarım.

Şennur TOPCU
Haziran, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\|A\|$	A 'nın normu
A^{-1}	Ters matris
$P(\lambda)$	Matrisin karakteristik polinomu
x, t	Bağımsız değişkenler
$K(x,t)$	Çekirdek
c, c_i, c_k	x'den bağımsız pozitif sabitler
$u(x)$	Çözüm fonksiyonu
$M_{n,n}$	nxn tipindeki kare matrisler kümesi
$x^{(i)}$	λ_i 'ye karşılık gelen özvektör
$p_k(x)$	Yalnız x'e bağlı fonksiyon
$q_k(t)$	Yalnız t'ye bağlı fonksiyon
(x, y)	Skaler çarpım

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR BİLGİLERİ

Bilinmeyen fonksiyonun, integral işareti altında olduğu denklemlere integral denklemler denir. Günümüzde, özellikle fizik ve mühendislik uygulamalarında integral denklemler ile sıkça karşılaşılır. İntegral denklemin çözülmesi; aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin, o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. Dolayısıyla bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden, çözülmesi çok zor evrensel denklemlerdir (Kadalbajoo, M. K. and Patidar, K. C. 2002; Lin, T. 2010; O'Malley, R. E. 1991; Nayfeh, A. H. 1973).

İntegral denklemlere ilk olarak 1782 yılında Laplace'ın lineer fark denklemleri ve diferansiyel denklemlerin çözümünde kullandığı integral dönüşümlerde, daha sonra 1822 yılında Fourier'in ortaya koyduğu özel integral dönüşümlerin inversiyon denklemlerinde rastlanmaktadır. Ancak, integral denklemlerin ortaya çıkmasına asıl sebep olan Abel'in 1823 yılında karşılaştığı bir fizik problemidir. Bu problem, lineer integral denkleme indirgenmiş ve yine Abel tarafından 1826 yılında çözümlenmiştir. Bu tip denklemlerin *integral denklem* olarak adlandırılması ise**,** Du Bois Reymond'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır (Bocher, M. 1913).

Sonraki yıllarda, integral denklem sistemleri ve uygulamaları birçok farklı alanda yapılan çalışmalar ile karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan bazılarını aşağıdaki şekilde özetlememiz mümkündür.

Ekici tarafından 2010 yılında yapılan "Lineer Singüler Ve Singüler Olmayan İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma: Fracture Mekanik" başlıklı Yüksek lisans tez çalışmasında integral denklemlerinin tipleri ve sınıflandırılmasına yer verilmiştir. Fredholm ve Volterra integral denklemleri için analitik çözüm yöntemleri verilmiş ve her biri örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca, integral denklemlerinin nümerik çözümleri üzerine odaklanılmış ve 2. tip singüler integral denklemlerin uygulama problemlerine yer verilmiştir (Ekici, M. 2010).

Kopeikin veShishkin1984 yılında yaptıkları "Kararlı Termoelastisite Denklemlerinin Genel Çözümünün İntegral Formu" başlıklı çalışmasında integral denklem sistemlerini termoelastikiyet alanına uygulamış ve sonuçlarını ifade etmişlerdir (Kopeikin, I.D. and Shishkin, V.P., 1984).

Holmaker, 1993 yılında yaptığı "Karaciğer Zonlarının Oluşumunu Tanımlayan Bir İntegro-Diferansiyel Denklem Sisteminin Sabit Bir Çözümü İçin Global Asimptotik Stabilite" başlıklı çalışmasında integral denklem sistemlerini biyoloji alanına uygulamış ve sonuçlarını ifade etmiştir (Holmaker, K.,1993).

Yue ve Selvadurai 1995 yılında yaptıkları "Sıvı doymuş bir poroelastik ortama gömülü sert disk içerme mekaniği" başlıklı çalışmasında integral denklem sistemlerini mekanik alanına uygulamış ve sonuçlarını ifade etmişlerdir (Yue, Z. Q. and Selvadurai, A. P. S. 1995).

Büyükaksoy ve Alkumru tarafından 1995 yılında yapılan "Düzlem dalgaların yumuşak / sert bir şerit ile çoklu kırınımı" başlıklı çalışmada integral denklem sistemleri dalgaların kırınımı alanına uygulanmış ve sonuçları ortaya konulmuştur (Büyükaksoy, A. ve Alkumru, A. 1995).

İntegral denklem sistemleri yukarıda ifade edildiği gibi elektromanyetik teori, termoelastikiyet, biyoloji, mekanik ve dalgaların kırınımı gibi birçok farklı mühendislik ve temel bilim alanlarında karşımıza çıkmasına rağmen bunların çözümü için belirlenmiş genel bir yöntem yoktur. Bu nedenle günümüzde halen bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasına ihtiyaç duyulmakta ve bu alan araştırmacılar tarafından ilgi görmektedir.

Bu tez çalışmasında uygulamalı matematikte ve bilim dallarının değişik alanlarında kullanılan özdeğer-özvektör problemleri için iterasyon yöntemleri ve dejenere olmuş Fredholm integral denklemleri için farklı problemler ele alınmış ve çözümü gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışması 4 ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel olarak giriş ve literatür özetleri verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde temel bilgilere ve tanımlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde Araştırma bulguları başlığı altında; özdeğer-özvektör problemlerinin iterasyon metotlarıyla çözülebilirliği gösterilmiş, ifade edilen bilgiler doğrultusunda dejenere çekirdekli Fredholm integral denklemlerin çözümü araştırılmış ve örneklerle yöntemlerin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Son, dördüncü bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

2.1. Matris Normu

Tanım 2.1: $M_{n,n}$, nxn tipindeki kare matrislerin kümesi olsun. $\forall A, B \in M_{n,n}$ için,

$$\|.\|: M_{n,n} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon**:**

i) $\|A\| \geq 0$,

ii) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (A sıfır matrisi)

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$,

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

v) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

şartlarını sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna, $n \times n$ matrisler kümesinde tanımlı *matris normu* denir.

Bilinen ve en çok kullanılan matris normları aşağıdaki gibidir**:**

1) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ matrisin maksimum sütun normu,

2) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ matrisin maksimum satır normu,

3) $\|A\|_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ matrisin ℓ_1 normu,

4) $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \sigma_i^{\,2}(A) \right)^{1/2}$ matrisin Euclidean veya ℓ_2 normu,

5) $\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^{\,p}(A) \right)^{1/p}$ matrisin ℓ_p normu,

6) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda^*}$ matrisin spektral normu,

($\lambda^* : A^T A$ matrisinin en büyük özdeğeri).

2.2. Lineer Bağımsızlık

Tanım 2.2 E= $\left\{ x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \right\}$ vektörler kümesi olsun.

$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_k x^{(k)} = 0$ denklemi yalnızca $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sabitlerinin sıfır olması durumunda sağlanıyorsa E kümesi *lineer bağımsızdır* denir. Denklemi sağlayan $\exists\ c_i \neq 0$ sabiti varsa küme *lineer bağımlıdır* denir.

$x^{(i)}$ sıfır vektörü olmak üzere, $x^{(i)}$'nin katsayısı olan $c_i \neq 0$ için de denklem sağlanacağından, sıfır vektörü içeren tüm vektör kümeleri lineer bağımlıdır.

Örnek 2.1. $X^{(1)} = (1,2)^T$, $X^{(2)} = (-1,3)^T$ vektörlerinin IR^2 de lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} = 0$ için

$$c_1(1,2)^T + c_2(-1,3)^T = (0,0)$$

$$(c_1, 2c_1) + (-c_2, 3c_2) = (0,0)$$

$$\underbrace{c_1 - c_2 = 0}_{c_1 = c_2} \quad \text{ve} \quad \underbrace{2c_1 + 3c_2 = 0}_{5c_1 = 0}$$

Olur. Buradan $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. O halde $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ vektörleri IR^2de lineer bağımsızdır.

2.3. Özdeğerler ve Özvektörler

Tanım 2.3.

$$Ax = \lambda x \tag{2.1}$$

özdeğer probleminin çözümü $\{x, \lambda\}$ ikilisidir. Burada $A = (a_{ij})$ $n \times n$ matris, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \neq \mathbf{0}$ ve λ sayısal parametredir. Bu durumda λ'ya *özdeğer*, x'e ise bu özdeğere uygun *özvektör* denir (Amirali, G. and Amirali, I. 2018).

$Ax = \lambda x$ için

$Ax - \lambda x = 0$

$$(A - \lambda I_n)x = 0 \text{ elde edilir.} \tag{2.2}$$

$(A - \lambda I_n)$ ifadesinin matris gösterimi:

$$(A - \lambda I_n) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantına A matrisinin *karakteristik polinomu* denir.

$x \neq 0$ için

$$P(\lambda) = D\text{et}(A - \lambda I_n) = 0 \tag{2.4}$$

olmalıdır. Bu denklemin kökleri bize λ 'yı, yani A matrisinin özdeğerlerini; her bir λ için elde edilen x vektörleri de A matrisinin özvektörlerini verir.

$P(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerinin bulunması, yüksek boyutlu matrislerde oldukça zordur. Bu sebeple daha çok yaklaşık metotlar ile yapılan çözümler tercih edilmektedir.

2.3.1. Bazı Matris Türleri

i) Eğer $v^{(i)}, v^{(j)} \in \left\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\right\}$ olmak üzere, $(v^{(i)}, v^{(j)})_2 = 0$, $i, j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j$ ise, $\left\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\right\}$ vektörler kümesine *ortogonaldir* denir. Daha açık bir ifadeyle vektörler kümesinin tüm elemanları ikişerli olarak birbirine diktir.

ii) $\forall v^{(i)} \in \left\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\right\}$ olmak üzere $\left\|v^{(i)}\right\|_2 = 1$, $i = 1, 2, ..., n$ ise, $\left\{v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}\right\}$ kümesi *ortonormaldir* denir. Diğer bir ifadeyle, kümenin tüm elemanları birim uzunluğa sahiptir.

Yukarıda kullanılan $(v^{(i)}, v^{(j)})_2$ ve $\left\|v^{(i)}\right\|_2$ ifadelerinin açılımları

$$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \quad \|x\|_2^2 = (x, x)_2 \tag{2.5}$$

şeklindedir.

iii) $P^{-1} = P^T$ şartını sağlayan P, $n \times n$ tipindeki kare matris *ortogonal* matristir.

iv) Her elamanı asal köşegene göre simetrik olan karesel matrise *simetrik matris* denir

v) Determinantı sıfır olan karesel matrislere *singüler*(tekil) matris, determinantı sıfır olmayan karesel matrislere de *regüler* matris denir.

2.3.2. Benzer Matrisler

Eğer $B = S^{-1}AS$ olacak şekilde singüler olmayan S matrisi varsa, bu durumda A ve B matrislerine *benzer matrisler* denir.

Benzer matrisler aynı özdeğerlere sahiptir. Ayrıca, eğer x vektörü B matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ise, Sx vektörü A matrisinin bu özdeğere karşılık gelen özvektörüdür.

Lemma 2.1.

i) A keyfi $n \times n$ matris, *T*, esas köşegen elemanları *A* matrisinin özdeğerleri olan üst üçgen matris olsun. Bu durumda;

$$T = U^{-1}AU \tag{2.6}$$

olacak şekilde singüler olmayan *U* matrisi vardır. Buradan,

$$d\,\mathrm{et}(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \tag{2.7}$$

olduğu açıktır.

ii) A $n \times n$ simetrik matris, *D* ise *A* matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegen matris olsun. Bu durumda öyle ortogonal *P* matrisi bulunur ki

$$D = P^{-1}AP = P^{T}AP \tag{2.8}$$

olur.

iii) P matrisinin n tane sütunu; simetrik A $n \times n$ matrisi için, n özvektörden oluşan ortogonal küme oluşturur.

iv) Simetrik matrisin özdeğerleri reeldir.

v) Simetrik $A n \times n$ matrisi ancak ve ancak özdeğerleri pozitif ise pozitif tanımlıdır.

2.4. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır. Tanımlarda bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, çekirdek fonksiyonu da $K(x,t)$ ile ifade edilmiştir.

2.4.1. I. Tip İntegral Denklemler

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.9}$$

ve

$$f(x) = p(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.10}$$

şeklindeki integral denklemlere *I. tip integral denklemler* denir. Bu tip denklemlerde bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $f(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır.

$f(x) - p(x) = h(x)$ olsun. Bu ifade (2.9) de yerine yazılırsa, (2.10) denklemi de (2.9) denklemine dönüşmüş olur.

$$x^2 = \int_1^5 (x+t)u(t)dt \tag{2.11}$$

ve

$$e^{3x} = \int_{1}^{5/3} 5tx^2 u(t)dt \tag{2.12}$$

ifadeleri I. tip integral denklemlere örnektir.

2.4.1 II. Tip İntegral Denklemler

$$u(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt \tag{2.13}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt \tag{2.14}$$

şeklindeki integral denklemler ise *II. tip integral denklemler* sınıfına girmektedir. Görüldüğü gibi, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır.

$$u(x) = \int_{0}^{2} e^{3x+t} u(t)dt \tag{2.15}$$

ve

$$u(x) = 2(x+3)^2 + \int_{1/2}^{7} \cos(x+t)u(t)dt \tag{2.16}$$

ifadeleri de II. tip integral denklemlere örnektir.

2.4.2 III. Tip İntegral Denklemler

III. tip integral denklemler ise I. ve II. tip integral denklemlerinin genelleştirilmiş hali olan

$$f(x).u(x) = p(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.17}$$

şeklindedir. Örneğin;

$$x^2.u(x) = e^{x-1} + \int_0^1 \sin(x+t)u(t)dt \tag{2.18}$$

denklemi *III. cins bir integral denklemdir*. Buradan I. ve II. cinsintegral denklemlerin, III. cins integral denklemlerin birer özel hali olduğu görülmektedir.

2.5. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

Yapılarına bakılmaksızın, integral sınırlarının sabit ya da değişken olmasına bağlı olarak da sınıflandırılırlar.

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.19}$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.20}$$

$$f(x).u(x) = p(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.21}$$

şeklindeki integralin üst sınırı değişken olan denklemlere Volterra İntegral Denklemleri denir. Eğer integralin her iki sınırı da sabit ise denklemler:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.22}$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.23}$$

$$f(x)u(x) = p(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.24}$$

şekline dönüşür. Bu tip integral denklemlere ise Fredholm İntegral denklemler denir (Ekici, M. 2010).

$u(x) = 5x + 3\int_0^x e^{x+t}.u(t)dt$ denklemi bir Volterra İntegral Denklemi

$u(x) = 5x + 3\int_0^1 e^{x+t}.u(t)dt$ denklemi ise Fredholm İntegral Denklemidir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Özdeğerler ve Özvektörlerin Bulunması İçin İterasyon Yöntemleri

Matematik**,** fizik, mekanik, mühendislik ve birçok başka alanda sıkça matrisin özdeğer ve özvektörlerinin bulunması problemleri ile karşılaşılmaktadır. Bu sebeple Özdeğer ve Özvektör problemlerinin mümkünse kesin sonuçlarla, mümkün değilse en az hatayla çözülmesi oldukça önemlidir.

İterasyon metotları genelde kısmi problem denilen problemin çözümü için uygulanır. Bu durumda bir veya birkaç özdeğer ve onlara karşılık gelen özvektörler hesaplanır. Biz burada *kuvvet metodu* denilen metodun iki farklı şekli üzerinde duracağız. Metot, genelde baştan modülce en büyük olan birkaç özdeğerin ve onlara karşılık gelen özvektörlerin bulunması için kullanılır.

3.1.1. Kuvvet Yöntemi

$A\, n\times n$ matrisi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ özdeğerlerine ve onlara karşılık gelen lineer bağımsız $\{x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(n)}\}$ özvektörlerine sahip olsun (Örneğin, eğer A matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı veya A matrisi simetrik ise). Ayrıca, A matrisinin bir özdeğerinin modülce diğerlerinden büyük olsun :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n|. \tag{3.1}$$

Keyfi $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)},..., y_n^{(0)})^T$ vektöründen başlayarak,

$$\begin{aligned} & y^{(1)} = Ay^{(0)}\ , \\ & y^{(2)} = Ay^{(1)} = A^2 y^{(0)}\, , \\ & \text{..................................} \\ & y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = ... = A^k y^{(0)} \\ & \text{..} \end{aligned} \tag{3.2}$$

ardışık vektörleri yazıldığında k'nın büyük değerleri için $y^{(k)}$'ların davranışlarını anlamak için başlangıç $y^{(0)}$ vektörünün özvektörlere göre açılımı yazılacak olursa ;

$$y^{(0)} = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_n x^{(n)} \tag{3.3}$$

$A^k x^{(i)} = \lambda_i^k \, x^{(i)} \;\; (k \geq 0,\, i = 1, 2, \ldots, n)$ olduğu için (3.3)'den,

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= A^k y^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2^k x^{(2)} + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k x^{(n)} \\ &= \lambda_1^k [\alpha_1 x^{(1)} + (\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1})^k \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_n (\tfrac{\lambda_n}{\lambda_1})^k x^{(n)}] \end{aligned} \tag{3.4}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer $\alpha_1 \neq 0$ ise, (3.3)'den k'nın büyük değerleri için

$$x^{(1)} \approx \frac{1}{\alpha_1 \lambda_1^k} y^{(k)} \tag{3.5}$$

yaklaşık eşitliği yazılabilir. Genellikle $C_k y^{(k)}$ ($C_k =$ sbt.) biçimindeki herhangi bir vektör, yönüne göre $x^{(1)}$ özvektörüne yakın olacaktır. λ_1 özdeğerini bulmak için (3.4) eşitliğini bileşenlerine göre yazmak uygun olacaktır.

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})^T \;,\;\; k = 0, 1, \ldots \\ x^{(i)} &= (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})^T \;,\;\; i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.6}$$

olduğu dikkate alınırsa, (3.4)'den

$$y_j^{(k)} = \beta_{1j}\lambda_1^k + \beta_{2j}\lambda_2^k + \ldots + \beta_{nj}\lambda_n^k \ , \ \beta_{ij} = \alpha_i x_j^{(i)} \ , \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.7}$$

bağıntıları elde edilir. Buradan ise

$$\frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} = \frac{\beta_{1j}\lambda_1^k + \beta_{2j}\lambda_2^k + \ldots + \beta_{nj}\lambda_n^k}{\beta_{1j}\lambda_1^{k-1} + \beta_{2j}\lambda_2^{k-1} + \ldots + \beta_{nj}\lambda_n^{k-1}}$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \gamma_{2j}\mu_2^k + \ldots + \gamma_{nj}\mu_n^k}{1 + \gamma_{2j}\mu_2^{k-1} + \ldots + \gamma_{nj}\mu_n^{k-1}}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{1j}} \ , \ \mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \tag{3.8}$$

yazılabilir. $|\mu_i| < 1 \ (i > 1)$ olduğu için buradan da

$$\frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} = \lambda_1 + O\left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{k-1} \right) \tag{3.9}$$

bağıntısı yazılabilir. Böylece k’nın yeterince büyük değerlerinde λ_1 özdeğerinin bulunması için

$$\lambda_1 \approx \frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} \ , 1 \le j \le n \tag{3.10}$$

yaklaşık formülü elde edilir. Eğer özdeğer probleminin belli bir $\varepsilon > 0$ kesinliği ile çözümü istenirse, bu durumda prosesin nereye kadar devam ettirileceği

$$\max_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}} \left| \frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} - \frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} \right| < \varepsilon \tag{3.11}$$

şartı ile kontrol edilebilir.

Eğer A matrisi simetrik ise, bu durumda özdeğerler reeldir ve özvektörlerden oluşan ortonormal baz bulunur. Başka bir deyişle, $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\}$ özvektörlerinin ortonormal oldukları düşünülebilir:

$$\left\| x^{(i)} \right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^{(i)} \right|^2 \right)^{1/2} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n \,. \tag{3.12}$$

Bu durumda $x^{(1)}$ özvektörünün yaklaşık değeri için

$$x^{(1)} \approx \frac{y^{(k)}}{\left\| y^{(k)} \right\|_2} \tag{3.13}$$

formülü kullanılabilir.

A matrisinin (3.1) şartını sağlayan λ_1 özdeğerini ve buna karşılık gelen $x^{(1)}$ özvektörü yaklaşık olarak bulmak için (3.2), (3.10), (3.5) veya A matrisinin simetrik olduğu durumda (3.1.2), (3.5), (3.10) formülleri kullanılacaktır.

Bundan sonraki açıklamalarda A matrisinin simetrik olduğu kabul edilecektir.

3.1.2. Simetrik Matris

Simetrik matris durumunda daha hızlı sonuca götüren iterasyon sürecinden yararlanmak mümkündür. (3.4) bağıntısından ve özvektörlerin ortonormalliğinden

$$(y^{(k)}, y^{(k)}) = \alpha_1^2 \lambda_1^{2k} + \alpha_2^2 \lambda_2^{2k} + \ldots + \alpha_n^2 \lambda_n^{2k} \tag{3.14}$$

ve

$$(y^{(k-1)}, y^{(k)}) = \alpha_1^2 \lambda_1^{2k-1} + \alpha_2^2 \lambda_2^{2k-1} + \ldots + \alpha_n^2 \lambda_n^{2k-1} \tag{3.15}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $(v,w) \equiv (v,w)_2 = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ iki vektörün skaler çarpımıdır. (3.14) ve (3.15)'den

$$\frac{(y^{(k)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, y^{(k-1)})} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k-1}\right) \tag{3.16}$$

olur. Dolayısıyla simetrik matris durumunda mutlak değerce en büyük özdeğerin bulunması için

$$\lambda_1 \approx \frac{(y^{(k)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, y^{(k-1)})} \tag{3.17}$$

formülü uygulanabilir. Burada $y^{(k)}$'lar keyfi $y^{(0)}$ vektöründen başlanarak (3.2) kuralıyla hesaplanır.

Örnek 3.1.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. A matrisi üç köşegenli, simetrik ve pozitif tanımlı matristir. Bu tip matrislerin $n\times n$ genel hali için özdeğer ve ortonormal özvektörlerin açık şekli bellidir:

$$\lambda_i = 4\sin^2\frac{\pi i}{2(n+1)} \equiv 2(1-\cos\frac{\pi i}{n+1}),$$

$$x^{(i)} = \left(\sqrt{\tfrac{2}{n+1}}\sin\frac{\pi i}{n+1},\ \sqrt{\tfrac{2}{n+1}}\sin\frac{2\pi i}{n+1},\ ...,\ \sqrt{\tfrac{2}{n+1}}\sin\frac{n\pi i}{n+1}\right)^T,\ \ i=1,2,...,n.$$

Buradan, en büyük özdeğerin (özdeğerler pozitiftir)

$$\lambda_n = 2\left(1-\cos\frac{\pi n}{n+1}\right) = 2(1+\cos\frac{\pi}{n+1})$$

ve buna ait özvektörün

$$x^{(n)} = \left(\sqrt{\tfrac{2}{n+1}}\sin\frac{\pi n}{n+1},\ \sqrt{\tfrac{2}{n+1}}\sin\frac{2\pi n}{n+1},\ ...,\ \sqrt{\tfrac{2}{n+1}}\sin\frac{n^2\pi}{n+1}\right)^T$$

olduğu görülmektedir. $n=4$ için

$$\lambda_4 = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right) \approx 2(1+0.8090) = 3.618034,$$

$$x^{(4)} = \left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}\sin\frac{\pi}{5},\, -\sqrt{\tfrac{2}{5}}\sin\frac{2\pi}{5},\, \sqrt{\tfrac{2}{5}}\sin\frac{2\pi}{5}, -\sqrt{\tfrac{2}{5}}\sin\frac{\pi}{5}\right)^T$$

$$\approx (0.371748,\, -0.601501,\, 0.601501,\, -0.371748)^T$$

olacaktır.

$y^{(0)} = (1,-1,\ 1,-1)^T$ alınarak (3.1.7) formülü uygulandığında sekizinci adımda $j = 1,2,3,4$ değerleri için sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$3,61702 \quad ; \quad 3,61842 \quad ; \quad 3,61842 \quad ; \quad 3,61702$$

Bu cevapların her birinin hatası hem (3.11)'le, hem de λ'nın kesin cevabıyla kıyaslandığında 10^{-2}'yi aşmadığı görülür. Bu özdeğere uygun ortonormal özvektör ise

$$x^4 \approx y^8 = (0.37182, -0.60147, 0.60147, -0.37182)^T$$

şeklinde bulunur.

Eğer $k = 8$ için bu defa (3.17) formülü kullanılırsa, en büyük özdeğer için daha kesin cevap bulunur.

$$\lambda_4 \approx 3.61804$$

olur ve uygun hatanın 10^{-4} ile sınırlı olduğu görülür.

Not 3.1. $|\lambda_1| > 1$ için $\left\|y^{(k)}\right\|_2 \to \infty, k \to \infty$ olduğundan, belli bir k'dan sonra bilgisayarda taşma olayı ile karşılaşılacak ve süreç duracaktır. Ayrıca $|\lambda_1| < 1$ için $\left\|y^{(k)}\right\| \to 0$

olduğundan belli bir k'dan sonra $y^{(k)} \equiv 0$ olacaktır. Bu olumsuzlukları önlemek amacıyla (3.2), (3.10) ve (3.13) formülleri aşağıdakine denk şekilde kullanılabilirler:

$w^{(k)} = Ay^{(k-1)}$, $y^{(0)}$ keyfi olmak üzere $y^{(k)} = \dfrac{1}{c_k} w^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$

c_k : $w^{(k)}$' nın mutlak değerce en büyük bileşeni (birkaç tane ise, birincisi)

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)} = \frac{w_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}}, 1 \le j \le n \tag{3.18}$$

(veya $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k)} = \dfrac{(Ay^{(k-1)})_j}{y_j^{(k-1)}}$, $y^{(k)} = \dfrac{1}{c_k} Ay^{(k-1)}$, $k \ge 1$)

$$x^{(1)} \approx \frac{y^{(k)}}{\left\| y^{(k)} \right\|_2} \tag{3.19}$$

(3.17) formülü ise

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(w^{(k)}, w^{(k)}\right)}{\left(w^{(k)}, y^{(k-1)}\right)} \equiv \frac{\left(A\, y^{(k-1)}, A\, y^{(k-1)}\right)}{\left(A\, y^{(k-1)}, y^{(k-1)}\right)} \tag{3.20}$$

$w^{(k)} = A\, y^{(k-1)}$, $y^{(k)} = \dfrac{1}{c_k} A\, y^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ şeklinde kullanılabilir. c_k, $Ay^{(k-1)}$ vektörünün mutlak değerce en büyük bileşenidir. Örneğin, (3.18) eşitliğinin doğruluğu

$$w^{(k)} = A\, y^{(k-1)} = \frac{1}{c_{k-1}} A\, w^{(k-1)} = \ldots = \frac{1}{c_{k-1} c_{k-2} \cdots c_1} A^{k-1}\, w^{(1)}$$

$$= \frac{1}{c_{k-1}c_{k-2}\cdots c_1} A^k y^{(0)} \quad , \tag{3.21}$$

$$y^{(k-1)} = \frac{1}{c_{k\text{-}1}} w^{(k-1)} = \frac{1}{c_{k-1}} A\, y^{(k-2)} = .\ .\ .= \frac{1}{c_{k-1}c_{k-2}\cdots c_1} A^{k-1} y^{(0)} \tag{3.22}$$

bağıntılarından çıkar.

Not 3.2. İterasyon sürecini açıklarken, (3.3) eşitliğinde $\alpha_1 \neq 0$ olduğu kabul edilmişti. Eğer $\alpha_1 = 0$ olursa herhangi bir sıkıntı olmayacaktır, çünkü yuvarlamalar sonucu x_1'li terim er veya geç ortaya çıkacak ve iterasyon sayısı arttıkça bu terim diğerlerine göre üstünlük sağlayacaktır.

Örnek 3.2. (3.20) formülünü kullanarak

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2.4 & 0.8 & 3.3 \\ 0.8 & 1.4 & 1.7 \\ 3.3 & 1.7 & 0.6 \end{pmatrix}$$

matrisinin birinci özdeğerinin beş basamak kesinliği ile bulunması için: $y^{(0)} = (1,1,1)^T$ başlangıç vektöründen başlayarak bulunan uygun işlem sonuçları Tablo 1.'de verilmiştir.

Tablo 1. $y^{(0)} = (1,1,1)^T$ başlangıç vektöründen başlayarak bulunan uygun işlem sonuçları

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$\left(Ay^{(k)}, Ay^{(k)}\right)$	$\left(Ay^{(k)}, y^{(k)}\right)$	λ_1
0	1	1	1	88.82	16.0	5.5512
1	1	0.6	0.8615	65.7881	11.7530	5.5975
2	1	0.5425	0.8452	62.9617	11.2454	5.5989
3	1	0.5329	0.8411	62.4241	11.1493	5.5989

şeklindedir. Cevap $\lambda_1 \approx 5.5989$ olacaktır.

3.1.3. Katlı Özdeğerler

λ_1'in r katlı kök olması $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r$ ve ayrıca

$$|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq |\lambda_{r+2}| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \tag{3.23}$$

şartının sağlanması durumunda da (3.10) ve (3.17) formüllerine benzer formüllerin doğruluğu kolayca ispatlanabilir:

$$\frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right), \tag{3.24}$$

$$\frac{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)}{\left(y^{(k)}, y^{(k-1)}\right)} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right|^{2k-1}\right). \tag{3.25}$$

λ_1 katlı köküne karşılık γ tane lineer bağımsız özvektör bulunacaktır. (3.13) formülü bunların sadece bir tanesini hesaplamaya imkan sağlar. Diğer özvektörlerin bulunması için başlangıç $y^{(0)}$ vektörünün değiştirilmesi gerekmektedir.

A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{r+1} = -\lambda_{r+1} = \cdots = -\lambda_{r+p}$ ve

$$\left|\lambda_1\right| = \ldots = \left|\lambda_{r+p}\right| > \left|\lambda_{r+p+1}\right| \geq \cdots \geq \left|\lambda_n\right| \tag{3.26}$$

şeklinde olsun. Bu durumda (3.18) ve (3.20) formülleri λ_1 ve λ_{r+1} özdeğerlerinin bulunması için kullanılamaz, fakat bu durumda λ_1 özdeğerinin bulunması için

$$\begin{aligned} \frac{y_j^{(2k+2)}}{y_j^{(2k)}} &= \lambda_1^2 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+p+1}}{\lambda_1}\right|^{2k}\right) \\ \frac{y_j^{(2k+1)}}{y_j^{(2k-1)}} &= \lambda_1^2 + O\left(\left|\frac{\lambda_{r+p+1}}{\lambda_1}\right|^{2k}\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitlikleri doğru olacaktır. Böylece, (3.23) durumunda da mutlak değerce en büyük özdeğer, iterasyon süreci kullanılarak bulunabilir. $y^{(k)} + \lambda_1 y^{(k-1)}$ ve $y^{(k)} - \lambda_1 y^{(k-1)}$ vektörleri ise uygun olarak, λ_1 ve $-\lambda_1$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin yaklaşık ifadeleri olacaktır. Ayrıca, r ve p veya bunlardan bir tanesi birden büyükse, diğer özvektörlerin bulunması için başlangıç $y^{(0)}$ vektörünün değiştirilmesi gerekmektedir.

3.1.4. Diğer Özdeğer ve Özvektörlerin Bulunması

Eğer simetrik *A* matrisi için λ_1 ve $x^{(1)}$ bulunmuş ise, sonraki özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması için değişik yöntemler uygulanabilir. Bunlardan ikisi aşağıdaki gibidir.

a) λ_1 ve $x^{(1)}$ bulunduktan sonra *A* matrisi yerine

$$A_1 = A - \lambda_1 x^{(1)} (x^{(1)})^T \tag{3.28}$$

Matrisi ele alınsın, burada $x^{(1)}(x^{(1)})^T$ ifadesi $n \times 1$ matrisinin $1 \times n$ matrisiyle çarpımı olarak anlaşılacaktır ve dolayısıyla sonuç bir $n \times n$ matrisi olacaktır. A_1 matrisi simetrik ve ayrıca *A* matrisinin özvektörleri ortonormal olduğundan ($(x^{(1)})^T x^{(1)} = 1$)

$$A_1 x^{(1)} = Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)} (x^{(1)})^T x^{(1)}$$

$$= Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)} = 0 \tag{3.29}$$

olduğu kolayca görülmektedir. Diğer taraftan, $(x^{(1)})^T x^{(i)} = 0 \ (i > 1)$ olduğu için

$$A_1 x^{(i)} = Ax^{(i)} - \lambda_1 x^{(1)} (x^{(1)})^T x^{(i)}$$

$$= Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)} \ , \ i = 2,3,\ldots,n$$

(3.30)

eşitliği sağlanır. Bu ise şunu göstermektedir: A_1 matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri, λ_1 hariç, *A* matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri ile aynıdır. A_1 matrisinin birinci özdeğeri sıfır ve buna karşılık gelen özvektör $x^{(1)}$ olur. Yukarıda açıklanan iterasyon süreci A_1 matrisine uygulanarak λ_2 özdeğeri ve buna uygun $x^{(2)}$ özvektörü bulunabilir. Daha sonra (3.28) kuralı ile A_1 matrisi, ama aslında yeni A_2 matrisi oluşturulur ve iterasyon süreci sonucu λ_3 özdeğeri ve $x^{(3)}$ özvektörü bulunabilir vs. Böylece, her adımda boyut indirgeme yapılarak (her adımda bir özdeğer daha sıfıra indirgenir) işleme devam edilebilir.

Örnek 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

simetrik matrisi $\lambda_1 = 2$ özdeğerine ve buna karşılık gelen normalize edilmiş

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

özvektörüne sahiptir. Bu durumda,

$$A_1 = A - 2\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \;,\; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

olur. A_1 matrisinin birinci özdeğeri sıfır, ikinci özdeğeri ise A matrisininki ile aynıdır. Bu iterasyon yöntemi kullanılarak bulunabilir.

b) λ_1 ve $x^{(1)}$ bulunsun. Keyfi v vektörü alarak

$$y = v - (v, x^{(1)})x^{(1)} \tag{3.31}$$

vektörünün oluşturulması için aşağıdaki adımlar izlenir:

$$(x^{(1)}, y) = (v, x^{(1)}) - (v, x^{(1)})(x^{(1)}, x^{(1)})$$

$$= (v, x^{(1)}) - (v, x^{(1)}) = 0 \tag{3.32}$$

olduğundan, *y* vektörü $x^{(1)}$'e ortogonaldir ve dolayısıyla özvektörlere göre açılımı

$$y = \alpha_2 x^{(2)} + \alpha_3 x^{(3)} + ... + \alpha_n x^{(n)} \tag{3.33}$$

şeklinde olur. Buradan

$$y^{(k)} = A^k y = \alpha_2 \lambda_2^{(k)} x^{(2)} + \alpha_3 \lambda_3^{(k)} x^{(3)} + ... + \alpha_n \lambda_n^{(k)} x^{(n)} \tag{3.34}$$

yazılabilir. Böylece, eğer $|\lambda_2| > |\lambda_i|$ $(i = 3,...,n)$ ise, λ_1 ve $x^{(2)}$'e karşılık

$$\begin{aligned} y^{(k)} &\approx \alpha_2 \lambda_2^{(k)} x^{(2)} , \\ \lambda_2 &\approx \frac{y_j^{(k)}}{y_j^{(k-1)}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

formülleri bulunur. İkinci adımda

$$z = v - (v, x^{(1)}) x^{(1)} - (v, x^{(2)}) x^{(2)} \tag{3.36}$$

başlangıç vektöründen yola çıkarak λ_3 ve $x^{(3)}$ bulunabilir vs. Fakat, şunu da belirtelim ki, iterasyon sürecinde yuvarlama işlemleri sonucu mutlak değerce büyük özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin bileşenleri ortaya çıkacaktır ve bu nedenle zaman zaman bu bileşenlerin (3.31), (3.36) ve benzeri formüllerle yok edilmesi gerekecektir.

3.1.5. İterasyon Süreçlerinin Hızlandırılması

Eğer verilen problemin çözümü istenen belli bir kesinlikle iterasyon süreci kullanılarak hesaplanırsa, bu durumda, bilindiği gibi, iterasyon sayısı başlangıç yaklaşımının seçimine ve metodun tipine bağlı olacaktır. Pratikte, bazen istenen kesinliğe ulaşmak için çok sayıda iterasyon gerçekleştirmek gerekebilir. Bu sayıyı azaltmak için de hızlandırma formüllerinden yararlanılabilir. Başta iterasyon formülü ile birkaç tane iterasyon hesaplanır ve daha sonra uygun hızlandırma formülü kullanılarak daha iyileştirilmiş cevap bulunur.

i) Verilen *A* matrisi reel, simetrik ve bunun mutlak değerce en büyük özdeğeri tek olsun ((3.2) şartı sağlanır). (3.17)'den $k \to \infty$ durumunda

$$\lambda_1 - \lambda_1^{(k)} \approx C\left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \,, \; C = \text{sbt.} \;, \quad \lambda_1^{(k)} = y_j^{(k+1)} / y_j^{(k)} \tag{3.37}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan,

$$\lambda_1 - \lambda_1^{(k+1)} \approx q\,(\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}) \,, \quad q = \lambda_2 / \lambda_1 \tag{3.38}$$

eşitliği kolayca çıkar. (3.37)'dan yararlanarak,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{3.39}$$

olduğu görülebilir. (3.38)'de

$$q = \frac{\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}} \tag{3.40}$$

alınırsa, λ_1'in hesaplanması için aşağıdaki formül elde edilir:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{1-q}[\lambda_1^{(k+1)} - q\lambda_1^{(k)}] = \lambda_1^{(k+1)} + \frac{q}{1-q}[\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}]. \tag{3.41}$$

(3.41) formülüne *Aitken Ekstrapolasyon formülü* adı verilir. Aitken formülü aynı zamanda her adımdaki hatayı değerlendirmeye de imkan sağlar:

$$\lambda_1 - \lambda_1^{(k+1)} \approx \frac{q}{q-1}[\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}], \tag{3.42}$$

buradaki q sayısı (3.40)'dan hesaplanır.

Not 3.3. (3.41) formülü, (3.17) formülünün iyileştirilmesi için de kullanılabilir, bu durumda (3.41)'de

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{(y^{(k+1)}, y^{(k)})}{(y^{(k)}, y^{(k)})} \tag{3.43}$$

dönüşümü yapılacaktır.

Örnek 3.4.

$$A=\begin{pmatrix} -7 & 13 & -16 \\ 13 & -10 & 13 \\ -16 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

matrisi için

$$y^{(0)}=(1,\,-0.8\,,\ 0.9)^T$$

alınıp, (3.10) formülü kullanılarak λ_1 için

$$\lambda_1^{(5)}\approx -35.99013,$$
$$\lambda_1^{(6)}\approx -36.00245,$$
$$\lambda_1^{(7)}\approx -35.99939$$

yaklaşımları bulunur. Böylece

$$\lambda_1^{(7)}-\lambda_1^{(6)}=3.06.10^{-3},\ \ \lambda_1^{(6)}-\lambda_1^{(5)}=-1.232.10^{-2}$$

olur. (3.41), (3.40) Aitken formülü λ_1 için daha kesin cevabı verecektir:

$$\lambda_1\approx \lambda_1^{(7)}+\frac{q}{1-q}(\lambda_1^{(7)}-\lambda_1^{(6)})$$

$$=-35.99939+\frac{-0.248}{1+0.248}0.00306$$

$$=-35.99939-0.00061$$
$$=-36$$

(A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=-36$, $\lambda_2=9$ ve $\lambda_3=3$ şeklindedir).

ii) İkinci olarak, (3.42) formülüne karşılık gelen hızlandırma formülünü bulmak için

$$Ax=b \tag{3.44}$$

lineer cebirsel denklem sisteminde

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d \tag{3.45}$$

Jacobi iterasyon süreci kullanılsın. *B* matrisi sade bir yapıya, yani *n* tane lineer bağımsız özvektöre sahip olsun ve modülce en büyük özdeğeri reel ve tek olsun. $x^{(1)} - x^{(0)}$ vektörünün *B* matrisinin özvektörlerine göre açılımı

$$x^{(1)} - x^{(0)} = d_1 z_1 + d_2 z_2 + ... + d_n z_n \tag{3.46}$$

şeklindedir. O halde

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = B^k (x^{(1)} - x^{(0)}) = d_1 \lambda_1^{(k)} z_1 + d_2 \lambda_2^{(k)} z_2 + ... + d_n \lambda_n^{(k)} z_n \tag{3.47}$$

ve

$$x - x^{(k)} = \sum_{s=0}^{\infty} (x^{(k+s+1)} - x^{(k+s)}) = \frac{\lambda_1^k}{1-\lambda_1} d_1 z_1 + \frac{\lambda_2^k}{1-\lambda_2} d_2 z_2 + ... + \frac{\lambda_n^k}{1-\lambda_n} d_n z_n \tag{3.48}$$

olur. Buradan *k*'nın yeterince büyük değerleri için

$$x - x^{(k)} \approx \frac{\lambda_1^k}{1-\lambda_1} d_1 z_1 \tag{3.49}$$

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} \approx \lambda_1^k d_1 z_1 \tag{3.50}$$

yaklaşık eşitlikleri yazılabilir. Böylece

$$\tilde{x} = x^{(k)} + \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \tag{3.51}$$

şeklindeki vektörün $x^{(k)}$ ve $x^{(k+1)}$'e göre (3.44)'ün x kesin köküne daha yakın olacağını beklemek daha uygun olacaktır (λ_1, B matrisinin birinci özdeğeridir, genelde onun yaklaşık $\tilde{\lambda}_1$ değerinin belli olduğu düşünülebilir). Gerçekten de, (3.49)'a göre

$$x - x^{(k)} = O(\lambda_1^k) \tag{3.52}$$

olduğu halde

$$x - \tilde{x} = O(\lambda_2^k) \tag{3.53}$$

olacağı kolayca ispatlanabilir, dolayısıyla $\tilde{x}$ vektörü x kesin çözümü için iyileştirilmiş bir yaklaşık değer olur.

Eğer λ_1 özdeğeri 1'e yakın ise (3.45) yerine

$$\tilde{x} = x^{(k)} + \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1^p}\left(x^{(k+p)} - x^{(k)}\right) \quad (p > 1) \tag{3.54}$$

formülü kullanılabilir. Ayrıca, metot λ_1'in katlı kök olduğu durumda da kullanışlıdır.

Not 3.4. Eğer λ_1 özdeğeri belli değilse, $x^{(k)}$'nın iyileştirilmesi için

$$\hat{x}_i = x_i^{(k)} - \Delta x_i^{(k)} \Delta x_i^{(k-1)} (\Delta^2 x_i^{(k-1)})^{-1} \equiv \frac{x_i^{(k+1)} x_i^{(k-1)} - (x_i^{(k)})^2}{x_i^{(k+1)} - 2x_i^{(k)} + x_i^{(k-1)}}$$

$$\equiv x_i^{(k+1)} + \frac{q}{1-q} \Delta x_i^{(k)} \tag{3.55}$$

$$q = \Delta x_i^{(k)} / \Delta x_i^{(k-1)} \; (\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) \tag{3.56}$$

formülü kullanılabilir. (3.37) formülü λ_1 özdeğerinin iyileştirilmesi için sunulan (3.41) Aitken formülünün benzeridir ve aynı yolla (3.49) ve (3.50)'i kullanarak çıkarılabilir.

(3.55) formülü, $x^{(1)}$ özvektörüne uygun (3.13) formülü ile bulunan cevabı iyileştirmek için de kullanılabilir.

3.2. Dejenere Çekirdekli İntegral Denklemler

İkinci çeşit Fredholm İntegral denkleminin K(x,t) çekirdeği, yalnızca x'e bağlı $p_k\,(x)$ ve yalnızca t'ye bağlı $q_k\,(t)$ fonksiyonlarının çarpımından oluşan terimlerin toplamından ibaret ise, yani:

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\,q_k(t) \tag{3.57}$$

ise bu denklem, *Dejenere Çekirdekli İntegral Denklem* olarak adlandırılır.

$p_k(x)$ ve $q_k(t)$ (k=1,2,…,n) , $a \le x$, $t \le b$ aralığında sürekli ve lineer bağımsız verilmiş fonksiyonlar olsun. (1) dejenere çekirdeğine sahip

$$u(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\,q_k(t)\right]u(t)\,dt = f(x) \tag{3.58}$$

integral denklemi aşağıdaki şekilde çözülür.

(3.58) denkleminde $u(x)$ yalnız bırakılırsa,

$$u(x)= f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\int_a^b q_k(t)\,u(t)\,dt \tag{3.59}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Burada;

$$\int_a^b q_k(t)\,u(t)\,dt = C_k \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{3.60}$$

olarak tanımlanarak (3.59) da yerine yazılırsa, (3.59) denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \ p_k(x) \tag{3.61}$$

formuna dönüşecektir. $u(x)$ bilinmediği için, C_k ‘lar da bilinmeyen sabitlerdir.

Bu yapılan düzenlemeler sonucunda, dejenere çekirdekli Fredholm İntegral Denklemi çözme problemi C_k sabitlerini bulma problemine indirgenmiş olacaktır. (3.61) ifadesini (3.58) denkleminde yerine yazarak bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{m=1}^{n} \left[C_m - \int_a^b q_m(t) \left(f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \, p_k(t) \right) dt \right] p_m(x) = 0 \tag{3.62}$$

elde edilir. $P_m(x)$ $(m = 1,2,\dots,n)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan

$$C_m - \int_p^q q_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \, p_k(t) \right] dt) = 0 \tag{3.63}$$

veya

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b p_k(t) \, q_m(t) dt \ = \ \int_a^b q_m(t) \ f(t) \, dt \tag{3.64}$$

bulunur. Daha kısa bir ifade elde edebilmek için $p_{km} = \int_a^b p_k(t) \, q_m(t) dt$, $f_m = \int_a^b q_m(t) \ f(t) dt$ şeklinde tanımlanarak yerine yazılırsa,

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} p_{km} C_k = f_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.65}$$

İfadesi elde edilir. $u(x)$ fonksiyonunun (3.61) ile verilen değeri (3.60) denkleminde yerine yazılarak daha açık bir ifade olan;

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \quad \ldots \quad -\lambda a_{1n}C_n = f_1, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - \quad \ldots \quad -\lambda a_{2n}C_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \cdots \quad \cdots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - -\lambda a_{n2}C_2 - \quad \cdots \quad + (1-\lambda a_{nn})C_n = f_n \end{cases} \tag{3.66}$$

ifadesi elde edilir. Burada n bilinmeyenli n adet lineer denklem vardır. Bu denklem sisteminden faydalanarak C_k sabitleri bulunabilir.

Bu denklem sisteminin determinantı:

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.67}$$

şeklindedir. Determinantın sıfırdan farklı olması durumunda sistemin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sabitlerini tek tür olarak belirleyen bir çözümü vardır ve aşağıdaki Cramer formüllerinden elde edilir.

$$C_k = \frac{1}{\triangle(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1k-1} & f_1 - \lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2k-1} & f_2 - \lambda a_{2k+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{nk-1} & f_n - \lambda a_{nk+1} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.68}$$

(3.61) integral denkleminde $u(x)$ fonksiyonu, $u(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \; p_k(x)$ şeklinde tanımlanmıştı. Burada bilinmeyen C_k sabitleri (3.68) formüllerinden elde edilir.

3.3. Örnekler

Örnek 3.5

$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\, u(t)\, dt$ dejenere çekirdekli integral denkleminin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini araştırınız.

Çözüm:

Burada trigonometrik fonksiyonların toplam formüllerinden olan $\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$ açılımı yerine yazılarak denklem düzenlenirse ,

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda \cos x \int_0^{\pi} \cos t \; u(t)dt - \frac{2}{\pi}\lambda \sin x \int_0^{\pi} \sin t \; u(t)dt \qquad (3.69)$$

Elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{\pi} \cos t \; u(t)dt \\ \beta &= \int_0^{\pi} \sin t \; u(t)dt \end{aligned}\right\} \qquad (3.70)$$

şeklinde α ve β tanımlanırsa denklem

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda[\alpha \cos x - \beta \sin x] \qquad (3.71)$$

şekline dönüşür. $u(x)$'in (3.71) deki değeri (3.70) de yerine yazılırsa,

$$\alpha = \lambda\alpha$$

$$\beta = -\lambda\beta \tag{3.72}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin özdeğerlerini hesaplayabilmek için $\Delta = 0$ eşitliğinin çözülmesi gerekir:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ise,} \quad 1-\lambda^2 = 0 \text{ olur.}$$

Buradan $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1$ bulunur.

$\lambda_1 = 1$ değeri (3.72) de yerine yazılırsa, $\alpha = \alpha$ ve $\beta = -\beta$ ifadelerini elde edilir. Buradan, $\alpha = \alpha$ ve $\beta = 0$ olarak bulunur. Bulunan bu değerler (3.71) denkleminde yerine yazılırsa, denklemin $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü

$$u_1(x) = \frac{2}{\pi}\alpha\cos x \tag{3.73}$$

olarak hesaplanır. Aynı şekilde $\lambda_2 = -1$ değeri denklem sisteminde yerine yazılarak çözüm yapılırsa $\alpha = 0$ ve $\beta = -\beta$ bulunur. Bu değerler de (3.71) denkleminde yerine yazılırsa, denklemin $\lambda_2 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü;

$$u_2(x) = \frac{2}{\pi}\beta\sin x \tag{3.74}$$

olarak hesaplanmış olur.

Örnek 3.6.

$u(x)-\lambda \int_0^1 (xt-2x^2)\,u(t)\,dt=0$ dejenere çekirdekli integral denkleminin özdeğerlerini ve bu özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini araştırınız.

Çözüm:

$$u(x)-\lambda \int_0^1 (xt-2x^2)\,u(t)\,dt=0 \tag{3.75}$$

denkleminde

$$\alpha = \int_0^1 t(\alpha\lambda t-2\beta\lambda t^2)\,dt$$

$$\beta = \int_0^1 (\alpha\lambda t-2\beta\lambda t^2)\,dt \tag{3.76}$$

şeklinde yazarak integral alma işlemleri gerçekleştirilirse,

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha\lambda - \frac{1}{2}\beta\lambda$$

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha\lambda - \frac{2}{3}\beta\lambda \tag{3.77}$$

şeklinde bir denklem sistemi oluşur. (3.77) denklem sistemi düzenlenecek olursa,

$$(1-\frac{\lambda}{3})\alpha + \frac{\lambda}{2}\beta = 0$$

$$(-\frac{\lambda}{2})\alpha + (1+\frac{2\lambda}{3})\beta = 0 \tag{3.78}$$

elde edilir Elde edilen bu denklem sisteminin öz değerlerini bulabilmek için $\Delta = 0$ eşitliği çözülürse;

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ise} \quad (6+\lambda)^2 = 0 \text{ olur.}$$

Buradan da $\lambda = -6$ bulunur. Bulunan $\lambda = -6$ özdeğeri denklem sisteminde yerine yazılırsa, iki denklemden de $\alpha - \beta = 0$ eşitliği elde edilir. Burada $\alpha = \beta = c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ olarak tanımlanacak olursa,

$$u(x) = c(x - 2x^2) \tag{3.79}$$

olarak $\lambda = -6$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü hesaplanmış olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Dejenere Çekirdekli Fredholm İntegral Denklemlerinin çözümü incelenmiştir. Bunun için matematik, fizik, mekanik, mühendislik ve birçok başka alanda sıkça karşılaşılan özdeğer ve özvektör problemlerine uygulanan iterasyon yöntemleri kullanılmıştır. Özdeğer-Özvektör Problemlerinin iterasyon yöntemleriyle çözümünde; baştan modülce en büyük olan birkaç özdeğerin ve onlara karşılık gelen özvektörlerin bulunması şeklinde ilerleyen Kuvvet Metodu uygulanmıştır. Çözüm sürecinde her adımda boyut indirgeme yapılarak (her adımda bir özdeğer sıfıra indirgenir) işleme devam edilmiştir. Minimum hatayla sonuca ulaşılması amaçlanmıştır. Daha sonra Dejenere Çekirdekli Fredholm İntegral Denklemlerinin çözümü araştırılmış ve örneklerle yöntemlerin uygulanabilirliği gösterilmiştir. Burada amaç özellikle fizik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan ve çözümü oldukça zor olan integral denklemlerinin çözülmesine katkıda bulunmaktır.

KAYNAKLAR

Amirali, G. ve Amirali, I. (2018) “Nümerik Analiz 1”, ***Seçkin Yayıncılık*** 1,Ankara, 1-495.

Bôcher, M. (1913) “Applications and Generalizations of the Conception Adjoint Systems” ***Transactions of the American Mathematical Society,*** 14(4), 403-420.

Büyükaksoy, A., and Alkumru, A. (1995) “Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip”. ***Journal of engineering mathematics,*** 29(2), 105-120.

Ekici, M. (2010) “Lineer Singüler Ve Singüler Olmayan İntegral Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma: Fracture Mekanik” Yüksek Lisans Tezi, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Ankara, 1-104.

Holmåker, K. (1993) “Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones” ***SIAM Journal on Mathematical Analysis,*** 24(1), 116-128.

Kadalbajoo, M. K. and Patidar K.C. (2002) “A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations” ***Applied. Matematics and Computation,*** 130, 457–510.

Kopeikin, I. D., and Shishkin, V. P. (1984) “Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity” ***Journal of Applied Mathematics and Mechanics,*** 48(1), 117-119.

Köklü, K. Ö. (2018) “İntegral Denklemler 1”, ***Papatya Bilim*** 1,1-304.

Lin, T. (2010) “Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems” ***Springer-Verlag***, Berlin,

Nayfeh, A. H., (1973) “Perturbation methods” ***Wiley-Interscience (John Wiley & Sons)***, New York.

O'Malley, R. E. (1991) “Singular perturbation methods for ordinary differential equations” ***Springer-Verlag***, New York.

Yue, Z. Q., and Selvadurai, A. P. S. (1995) “On the mechanics of a rigid disc inclusion embedded in a fluid saturated poroelastic medium” ***International Journal of Engineering Science,*** 33(11), 1633-1662.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Topcu Şennur, Amirali Gabil (2018). Özdeğer ve özvektörlerin bulunması için iterasyon yöntemleri. ***31. Ulusal Matematik Sempozyumu*** 12-15 Eylül, 2018 Erzincan/Türkiye (Özet Bildiri/Poster)

ÖZGEÇMİŞ

Şennur TOPCU 1983 yılında Trabzon ili Akçaabat ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2002 yılında girdiği ÖSS sınavı ile Gazi Üniversitesi, Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü kazandı. 2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş yaparak lisans öğrenimini 2006 yılında burada tamamladı. 2006-2010 yılları arasında Trabzon'daki özel dershanelerde uzman öğretici olarak görev yaptı. 2011 yılında Erzincan Valiliği V.H.K.İ. kadrosuna atandı. 2016 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda lisansüstü öğrenimine başladı ve halen öğrenimine devam etmektedir. Evli ve biri kız diğeri erkek olmak üzere iki çocuk annesidir.