

T.C.  
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARAMETREYE BAĞLI BAŞLANGIÇ KATI İÇEREN  
DİFERANSİYEL PROBLEMLERİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Gülsüm YÜRÜCÜOĞLU

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

MATEMATİK  
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN  
2019  
Her Hakkı Saklıdır.

### Kabul ve Onay Sayfası

Öğr.Üyesi Dr. Mustafa KUDU danışmanlığında, Gülsüm YÜRÜCÜOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 24/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

İmza:

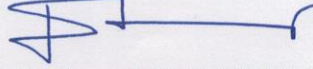
Üye : Prof.Dr. Yılmaz ALTUN

İmza:

Üye : Öğr. Üyesi Dr. Mustafa KUDU

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 21/06/2019 tarih ve 22/13.. sayılı kararı ile onaylanmıştır.



**Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY**  
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

### **Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası**

“Parametreye Bağlı Başlangıç Katı İçeren Diferansiyel Problemlerin Sonlu Fark özümleri” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 24/05/2019



**Gülsüm  
YÜRÜCÜOğLU**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### PARAMETREYE BAĞLI BAŞLANGIÇ KATI İÇEREN DİFERANSİYEL PROBLEMLERİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Gülsüm YÜRÜCÜOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

Bu tez çalışmasında, parametreye bağlı singüler perturbe olmuş çözüm fonksiyonuna göre lineer ve integral sınır şartı içeren lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümleri incelenmiştir. Bu problemler için nümerik metod verilmeden önce singular perturbe özellikli problemlerin özellikleri incelenmiştir. Lineer problem için sonlu fark şeması düzgün şebeke üzerinde üstel katsayılı baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren kuadratür formüllerinden yararlanılarak kurulmuştur. Lineer olmayan integral sınır şartlı problem için ise Bakhvalov şebekesi üzerinde parçalı sabit baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratür formüllerinden yararlanılarak kurulmuştur.

Lineer ve lineer olmayan problemlerinin fark şemalarının  $\varepsilon$  perturbasyon parametresinden bağımsız, ayırık normda birinci mertebeden düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Son olarak sonlu fark metodunun etkinliği için etkili ve uygun birer çözüm algoritması ve teoriyi destekleyen nümerik sonuçlar da verilmiştir.

**2019, 51 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Bakhvalov şebekesi, İntegral sınır şartı, Parametreye bağlı problem

## ABSTRACT

Master Thesis

### FINITE DIFFERENCE SOLUTIONS OF PARAMETERIZED DIFFERENTIAL PROBLEMS WITH INITIAL LAYER

Gülsüm YÜRÜCÜOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım University  
Institute of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Mustafa KUDU

In this thesis, numerical solutions of nonlinear differential equations with linear and integral boundary conditions according to the parameterized singularly perturbed solution function are examined by using finite difference method. Before introducing a numerical method for these problems, the characteristics of singular perturbation problems were investigated. The finite difference scheme for linear problem is established by using the base functions of exponential coefficients on the uniform mesh and the quadrature formulas with weight functions and integral remainder terms. For nonlinear integral boundary conditional problems, it is established by using interpolation quadrature formulas with partial constant base functions on a Bakhvalov mesh and integral remainder terms.

In the discrete norm, the first order uniform convergence of difference schemes of the linear and nonlinear problems, independent of the perturbation parameter, was investigated. Finally, an effective and appropriate solution algorithm for the efficiency of the finite difference method and numerical results supporting the theory are given.

**2019, 51 Pages**

**Keywords:** Bakhvalov mesh, Integral boundary condition, Parameterized problem

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalıŐması sűresince gűstermiŐ oldukları yakın ilgi ve yardımlarından dolayı saygıdeğer hocam ve danıŐmanım Dr. Őęr. Őyesi Mustafa KUDU'ya, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ' ye teŐekkűr ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalıŐmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sűrecinde her zaman desteęini hissettięim anne ve babama teŐekkűr etmeyi bir borç bilirim.

Gűlsűm YŪRŪCŪOęLU

Nisan, 2019

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	<b>v</b>
<b>TABLolar LİSTESİ</b> .....	<b>vi</b>
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR</b> .....	<b>vii</b>
<b>1.GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER</b> .....	<b>8</b>
<b>3.MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>17</b>
3.1. Parametreye Bağlı Çözüm Fonksiyonuna Göre Linear Problemin Çözümünün Bazı Özellikleri .....	17
3.1.1. (1.1)-(1.2) Probleminin kesin çözümü için asimptotik değerlendirmeler ...	17
3.1.2. (1.1)-(1.2) Probleminin fark şemasının kurulması.....	21
3.1.3. Yakınsaklık ve hata değerlendirmesi .....	22
3.2. Parametreye Bağlı İntegral Sınır Şartlı Problemin Çözümü .....	27
3.2.1. (1.4)-(1.6) Probleminin kesin çözümü için asimptotik değerlendirmeler ...	27
3.2.2. (1.4)-(1.6) Problemi için fark şemasının kurulması.....	31
3.2.3 Şebekenin seçimi ve Bakhvalov şebekesi .....	33
3.2.4. Hata değerlendirmesi.....	34
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI</b> .....	<b>40</b>
4.1. (1.1)-(1.2) Problemi için Çözüm Algoritması ve Nümerik Sonuçlar .....	40
4.2. (1.4)-(1.6) Problemi için Çözüm Algoritması ve Nümerik Sonuçlar .....	43
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ</b> .....	<b>46</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>48</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>52</b>

## ŞEKİLLER LİSTESİ

**Sayfa**

Şekil 2.1. Örnek 2.1.2'deki problemin çözümünün  $\varepsilon$  'na göre değişimi ..... 11





## TABLÖLAR LİSTESİ

### Sayfa

Tablo 4.1 (4.4)-(4.5) probleminin çözümünden elde edilen $e_u^{\varepsilon,h}$ maksimum hata ve $p_u^{\varepsilon,h}$ yakınsama hızları.....	41
Tablo 4.2 (4.4)-(4.5) probleminin çözümünden elde edilen $e_\lambda^{\varepsilon,h}$ maksimum hata ve $p_\lambda^{\varepsilon,h}$ yakınsama hızları.....	42
Tablo 4.3 (4.9)-(4.11) probleminin çözümünden elde edilen ve $\omega_N$ Bakhvalov şebekesi üzerinde $e_u^{\varepsilon,N}$ maksimum hata ve $p_u^{\varepsilon,N}$ yakınsama hızları.....	44
Tablo 4.4 (4.9)-(4.11) probleminin çözümünden elde edilen ve $\omega_N$ Bakhvalov şebekesi üzerinde $e_\lambda^{\varepsilon,N}$ maksimum hata ve $p_\lambda^{\varepsilon,N}$ yakınsama hızları.....	45

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$\ \cdot\ _{C(\omega_h)}$	$\omega_h$ Şebekesindeki Ayırık Norm
$\ell$	Diferansiyel Fark Operatörü
$L$	Diferansiyel Operatör
$x_i$	Düğüm Noktaları
$y_i$	Fark Probleminin Çözümü
$\omega_{N,p}$	Her Bir Aralıkta Düzgün Şebeke
$R_i$	Kalan Terim
$\varepsilon$	Singüler Pertürbasyon Parametresi
$h$	Şebeke Adımı
$i$	Şebeke İndeksi

## 1.GİRİŞ

Uygulamalı bilimler (Fizik, biyoloji, kimya, tıbbi ve mühendislik vb.) de ve reel dünyada karşılaşılan pek çok fiziksel olay, matematiksel olarak, diferansiyel denklemlerin değişik tipleriyle ilişkili olan singular perturbe problemlerle tanımlanır. Singular perturbe özellikli problemler; akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, aerodinamik, plazma dinamik, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, kütle hareketi, plastik, kimyasal-reaktör teori, oşinografi, meteoroloji, yayma teori, reaksiyon-difüzyon süreçleri, atmosferik kirlilik, ışık yayan dalgalar, plazmadaki elektron plazma dalgaları, iletişim hatları, elektrik akımı, iyon akustik dalgaları vb. gibi çeşitli modern karmaşık süreçlerin modellenmesinde ortaya çıkmaktadır. Bu değişik olayları tanımlayan matematiksel modeller, fiziksel küçük bir parametre içerir ve bu parametrenin etkisinin küçük bir dar bölgede bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre ani değişimini inceler. Parametrenin çok küçük değerlerinde bağımlı değişkenin ani değişim gösterdiği bölgeye başlangıç veya sınır katı bölgesi denir (Doolan vd. 1980; O' Malley, 1991; Nayfeh, 1993; Kevorkian ve Cole, 1996; Farrel vd. 2000; Roos vd. 2008).

Sınır katı kavramı ilk olarak 1904'te Heidelberg'deki Üçüncü Uluslararası Matematikçiler Kongresi'nde sunulan yedi sayfalık bir raporda Prandtl (1905) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu terim, Friedrichs ve Wasow (1946)'un New York Üniversitesi'nde doğrusal olmayan titreşimlerle ilgili bir seminerde sunduğu çalışmasını takiben daha genel hali olan "singular pertürbasyon" terimi olarak literatüre girmiştir. Singüler pertürbasyon problemlerinin çözümleri tipik olarak başlangıç veya sınır katları içerir.

Kaydedelim ki, sınır katlı(singular perturbe olmuş) problemlere ilgi yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında asimptotik açılımlarla başlamış, 1960'lı yılların ortalarından beri, nümerik yöntemler ile singular perturbe problemlere ilgi giderek daha dikkat çeken hale gelmiştir. Bu konuda daha geniş ve açıklayıcı bilgi, Kadalbajoo ve Reddy (1989), Kadalbajoo ve Padidar (2002), Kumar vd. (2007), Kadalbajoo ve Gupta (2010) ve Gupta ve Kumar (2012) ve survey çalışmalarında yer almaktadır. Bu konu şimdilerde uygulamalı matematik ve çeşitli mühendislik alanlarında çalışan bir çok

matematikçinin araştırma konusu olmuştur. Nümerik ve asimptotik çözüm yöntemleri singüler pertürbasyon problemlerin çözümünde kullanılan başlıca iki yaklaşımdır.

Nümerik yöntemler, belirli bir problem hakkında nicel bilgi sağlamaya çalışırken, asimptotik yöntemler, bir problem ailesinin niteliksel davranışını inceler. Bu alanda çok sayıda araştırma kitabı yayımlanmıştır. Bunlar ya asimptotik yaklaşım (Bellman, R. (1964); O'Malley (1991); Nayfeh (1993); Kevorkian vd. (1996)) ya da nümerik yaklaşım (Doolan vd. (1980); Farrel vd. (2000); Roos vd. (2008); Linß (2010), Miller vd. (2012); Sigamani vd. (2015); Amirali ve Amiraliyeva (2018)) ile konuyu ele almışlardır.

Bu tür problemler matematiksel ifadeyle, yüksek mertebeli türevler içeren terimlerinin katsayılarının küçük pozitif bir  $\varepsilon$  ile çarpılmış problemler olarak adlandırılır. Parametrenin küçük değerleri için böyle problemlerin çözümleri, tanım bölgesinin başlangıç veya sınır katları denilen ince geçiş katlarında çok hızlı ve oldukça düzensiz değişirken, diğer bölgelerde ise yavaş ve düzenli değişir. Bu düzensizlik singüler pertürbe problemlerin çözümünün sınırsız türevlere sahip olmasına neden olur. Bu nedenle de klasik nümerik yöntemlerin kararsızlıkları nedeniyle uygulanması imkansız olur. Böylece singular pertürbe olmuş problemlerin işleyişinde ciddi zorluklar ortaya çıkar. Bu özellikler nümerik çözümde de kendini gösterir (Doolan vd., 1980; O'Riordan ve Stynes, 1987; Farrel vd., 2000; Roos vd. 2008; Linß, 2010, Miller vd. 2012; Sigamani vd. 2015; Amirali ve Amiraliyev, 2018). Çünkü şema adımlarının küçülmesiyle yaklaşık çözüm kesin çözümden iraksar. Dolayısıyla "singuler pertürbe" olmuş problemler için, bu özellikleri dikkate alabilecek özgü nümerik metotların kurulması büyük önem taşımaktadır.

Baslangıç katı içeren baslangıç-değer probleminin çözümünün nümerik metodlarla incelenmesi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Doolan vd. (1980), Sigamani, V. vd. (2015) baslangıç ve sınır katı içeren problemler için düzgün şebekede pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak üstel katsayılı fark şemalarını incelemişlerdir. Shishkina ve Shishkin (2018)' de baslangıç değer problemi için parçalı düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şemasının düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

Bellman (1964), Robert (1982), O' Malley (1991) ve Nayfeh (1993) singüler pertürbe olmuş sınır-değer problemleri için sınır değer tekniklerini geliştirmişler ve bazı özel durumları için problemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerini incelemişlerdir.

Singüler pertürbe özellikli adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği, asimptotik ve analitik durumları üzerindeki çalışmalar ise Kassooy (1982); Schmisser ve Wiess (1986); Kadalbajoo ve Reddy (1989); O' Malley (1991) tarafından yapılmıştır.

Parametreye bağlı sınır-değer problemlerin singüler pertürbe olmamış durumları bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu tür problemler ekzotermik ve izotermal kimyasal tepkimeleri, kararlı durum sıcaklık dağılımlarını, bir parametre ile bir diferansiyel denkleme yol açan iki yayın bağlı kütleinin salınımını açıklayan fiziksel kimya ve fizikte ortaya çıkar(Na, 1979; Lui vd., 2001; Pomantale, 1976).

Parametreye bağlı sınır-değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği üzerindeki çalışmalar, Pomentale (1976), Jankowski (1993, 2002, 2003) ve Feckan (1994) tarafından yapılmıştır. Parametreye bağlı problemlerin analitik-yaklaşık iterasyon çözüm metotları gibi özellikleri, Jankowski ve Lakshmikantham (1997), Duru ve Gülle (1998), Abd-Elateef Kamar (1999, 2002) ve Lui ve McRae (2001) tarafından incelenmiştir. Son yıllarda birçok araştırmacı parametreye bağlı problemlerin singüler pertürbasyon durumları için değişik nümerik yöntemleri sunmuştur. Parametreye bağlı singüler pertürbe özellikli iki nokta sınır değer probleminin çözümü için düzgün yakınsak sonlu fark şemaları Amiraliyev vd. (2004, 2006); Cen (2008); Xie vd. (2008); Amiraliyeva vd. (2009); Wang vd. (2010); Das (2015); Shakti ve Mohapatra (2015); Kumar ve Kumar (2017)' de ele alınmıştır.

Amiraliyev vd. (2005-2006), Shakti (2015), Kumar vd. (2017) benzer bir problemi çözmek için sınır katı tekniğini kullanmışlardır. Xie vd. (2008); Wang vd. (2010) ve Türkyılmazoğlu (2009) da analitik yaklaşık çözüm için homotopi analiz tekniğine dayanan bir metodoloji sunmuşlardır. Analitik yaklaşık çözüm için homotopi analiz tekniğine dayalı bir metodoloji ise Xie vd. (2008); Wang vd. (2010) ve Türkyılmazoğlu (2009) tarafından sunulmuştur.

Ayrıca, integral sınır şartlı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin, uygulamalı bilimlerde, örneğin, ısı transferi, kimya mühendisliği uygulamaları, yer altı su akışı gibi bir çok uygulamasının olduğu bilinmektedir (Cannon, 1968; Iokin, 1977; Nicoud vd., 2002). İntegral sınır şartı içeren sınır değer problemleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Samoilenko ve Martynyuk, 1991; Jankowski, 2002; Ahmad vd., 2005; Amiraliev vd. 2007; Cakir ve Amiraliev, 2007; Cen ve Cai, 2008; Kudu ve Amiraliev, 2015; Çakir, 2016). Böyle problemlerin singüler perturbe olmamış durumları için varlık ve tekliği ile ilgili özellikleri Samoilenko vd. (1991); Jankowski (2002) ve Ahmad (2005) tarafından incelenmiştir. Son zamanlarda bu türden problemlerin singüler perturbasyon durumları için sonlu fark yöntemi ile kurulmuş fark şemalarının düzgün yakınsaklığı ile ilgili çalışmalar Amiraliev vd. (2007); Cakir ve Amiraliev (2007); Cen ve Cai (2008); Kudu ve Amiraliev (2015); Çakir (2016) tarafından incelenmiştir.

Amiraliev vd. (2007)'da Shishkin şebekesi üzerinde integral sınır şartlı problem için sonlu bir fark şeması geliştirmiş ve yöntemin logaritmik bir faktör dışında neredeyse birinci dereceden yakınsak olduğu gösterilmiştir. Cen ve Cai (2008) aynı problem için Shishkin şebekesi üzerinde bir hibrid fark şeması oluşturmuş ve fark şemasının ikinci dereceden yakınsak olduğunu göstermiştir. İkinci mertebeden integral sınır şartlı singüler perturbe diferansiyel denklemler ile ilgili nümerik çalışmalar Çakir vd. (2007); Çakir (2016); Kudu vd. (2016) tarafından yapılmıştır. Son yıllarda, literatür taramalarından görüldüğü kadarıyla, hem kontrol parametresi hem de integral koşulu içeren singüler perturbe sınır değer probleminin nümerik çözümü ilk olarak Kudu (2018); Kudu vd. (2018) tarafından incelenmiştir.

Bu tezin amacı; aşağıdaki parametreye bağlı singüler perturbe olmuş çözüm fonksiyonuna göre lineer ve integral sınır şartı içeren lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümleri incelemektir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konuyla ilgili giriş ve literatür bildirişleri yer almaktadır.

İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan genel tanım ve teoremler özet olarak verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünün ilk kısmında aşağıdaki birinci mertebeden parametreye bağlı singular perturbe özellikli çözüm fonksiyonuna göre lineer olan

$$\varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x, \lambda), \quad (1.1)$$

$$u(0) = A, \quad u(\ell) = B \quad (1.2)$$

problemi incelenmiştir. Burada  $\varepsilon \in (0, 1]$  perturbasyon parametresi,  $\lambda$  kontrol parametresi,  $A$  ve  $B$  verilmiş sabitlerdir.  $a(x)$  ve  $f(x, \lambda)$  sırasıyla  $\bar{\Omega} = [0, \ell]$  ve  $\Omega \times R$  üzerinde yeterince sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun ve ayrıca

$$\begin{aligned} a(x) &\geq \alpha > 0, \quad \bar{\Omega} = [0, \ell], \\ 0 < m_1 &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \leq M_1 < \infty, \quad \bar{\Omega} \times R. \end{aligned} \quad (1.3)$$

$\{u(t), \lambda\} \in C'[0, \ell] \times R$  çifti (1.1)-(1.2) probleminin çözümüdür. Bu varsayımlar altında (1.1)-(1.2) probleminin bir tek  $u(x)$  çözümü vardır.  $\varepsilon \leq 1$  için,  $u(x)$  fonksiyonu genel olarak  $x=0$  komşuluğunda  $O(\varepsilon)$  genişliğinde bir başlangıç katına sahiptir (Amiraliyev vd., 2004).

Önce, (1.1)-(1.2) probleminin, fark şemasının hatasının değerlendirilmesinde ve yakınsaklığının incelenmesinde gerekli olan,  $u(x)$  çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şeması ise, üstel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonları içeren integral kuadratur formüllerinden yararlanılarak kurulmuş ve fark şemasının ayrık maksimum normda birinci dereceden  $\varepsilon$  -düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Bu metot, Surla (1988); Miller ve Carrol (1990); Selvakumar (1994); Amiraliyev ve Memedov (1995); Amiraliyev vd. (2004)'de kullanılan metoda benzerdir.

Üçüncü bölümün ikinci kısmında integral sınır şartlı parametreye bağlı singular perturbe özellikli birinci mertebeden lineer olmayan

$$\varepsilon u'(t) + f(t, u, \lambda), \quad t \in \Omega = (0, T), T > 0, \quad (1.4)$$

$$u(0) + \int_0^T K(s, u(s)) ds = A, \quad (1.5)$$

$$u(T) = B \quad (1.6)$$

problemi incelenmiştir. Burada  $\varepsilon \in (0,1]$  perturbasyon parametresi,  $\lambda$  kontrol parametresi, A ve B verilmiş sabitlerdir.  $K(t,u)$  ve  $f(t,u,\lambda)$  sırasıyla  $\bar{\Omega} = \Omega \cup (t=0)$  ve  $\Omega \times R^2$  üzerinde yeterince sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve ayrıca

$$0 < \alpha \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq a^* < \infty, \quad (1.7)$$

$$0 < m_1 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \leq M_1 < \infty, \quad (1.8)$$

$$\left| \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x, u, \lambda) \right| \leq N_i < \infty, \quad i = 0, 1 \quad (1.9)$$

$$0 \leq \frac{\partial K}{\partial u} \leq K^* < \infty, \quad (1.10)$$

şartları sağlanır. Burada  $m_1, M_1, \alpha, a^*, K^*$  ve  $N_i (i=0,1)$  sonlu sabitlerdir.

Yukardaki şartlar altında  $\{u(t), \lambda\} \in C^1[0, T] \times R$  çifti (1.4)-(1.6) probleminin çözümüdür. Bu varsayımlar altında (1.4)-(1.6) probleminin bit tek  $u(t)$  çözümü vardır.  $0 < \varepsilon \ll 1$  için,  $u(t)$  fonksiyonu genel olarak  $t=0$  komşuluğunda  $O(\varepsilon)$  genişliğinde bir başlangıç katına sahiptir (Amirali vd., 2018; Kudu, 2018).

Önce, (1.4)-(1.6) probleminin fark şemasının hatasının değerlendirilmesinde ve yakınsaklığının incelenmesinde gerekli olan, problemin  $u(x)$  çözümü bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra fark şeması ise, Bakhvalov şebekesi üzerinde parçalı sabit baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuş ve fark şemasının ayrık maksimum prensibine göre  $O(N^{-1})$  kesinlikli düzgün yakınsaklığa sahip olduğu incelenmiştir. Ayrıca, bu fark problemlerinin gerçekleştirilmesi için uygun birer iterasyon süreci de incelenmiştir. Buna benzer teknikler Bakhvalov (1969); Amilaliyev (1988); Amiraliyev vd. (2006); Kudu (2018)'de kullanılmıştır.



Dördüncü bölümde elde edilen teorik sonuçları destekleyen nümerik örnekler değerlendirilmiştir.

Beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.



## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilmektedir.

### 2.1. Regüler ve Singüler Pertürbe Problemleri

Matemtikte “singular pertürbe” terimi genellikle,  $P_\varepsilon$  ile belirtilen, küçük  $\varepsilon > 0$  parametresine bağlı problemler ailesi için kullanılır.  $\varepsilon = 0$  olduğunda  $P_0$  indirgenmiş problem olur. Biz burada uygun varsayımlar altında  $P_0$  çözümü ve  $P_\varepsilon$  çözümü arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

$P_\varepsilon$  pertürbe problemi, bir adi diferansiyel denklem veya başlangıç veya sınır katıyla birlikte verilen bir diferansiyel denklem sisteminden oluşabilir. Böylece,  $P_\varepsilon$  problemi genellikle

$$P_\varepsilon \begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u, \varepsilon) \\ \text{uygun başlangıç, sınır veya karışık şartlar} \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $\varepsilon$  küçük pozitif pertürbasyon parametresi,  $u$  ve  $f$  n-boyutlu vektör fonksiyonları,  $x$  verilen aralıkta bir sayısal değişkendir.

Eğer  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken, bütün aralıkta  $x$  bağımsız değişkenine göre,  $u_\varepsilon(x)$  çözümü, indirgenmiş problemin çözümü olan  $u_0(x)$ 'e düzgün yakınsıyorsa (2.1) pertürbe problemi regüler pertürbe problem olarak adlandırılır. Regüler pertürbe problemlerinin çözümü,  $\varepsilon$ 'un artan pozitif kuvvetlerine göre seriye açılabilir.

Eğer  $u_\varepsilon(x)$ ,  $u_0(x)$  'ye  $x$  'nin tüm aralığında değil sadece bir kısmında yakınsar ve böylece uç noktalarda “sınır katları” veya başlangıç noktasında “başlangıç katı” meydana gelirse bu tür problemler singular pertürbe problem olarak adlandırılır. Singular pertürbe problemlerinin çözümü,  $\varepsilon$ 'un artan pozitif kuvvetlerine göre seriye açılmaz, ancak sınır veya başlangıç kat fonksiyonları şeklinde ifade edilir.

Bu durumu göstermek için iki örnek verelim.

**Örnek 2.1.1.**  $\varepsilon > 0$  küçük parametre olmak üzere,

$$P_\varepsilon \begin{cases} \frac{du}{dx} - \varepsilon u = 0, & x \in [0,1] \\ u_\varepsilon(0) = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

problemini ele alalım.

Bu problemin tam çözümü,

$$u_\varepsilon(x) = e^{\varepsilon x}. \quad (2.3)$$

Diğer taraftan  $\varepsilon = 0$  için  $P_\varepsilon$  problemi

$$P_0 \begin{cases} \frac{du}{dx} = 0, & x \in [0,1] \\ u_0(0) = 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklindeki  $P_0$  indirgenmiş problemine dönüşür. Görüldüğü gibi  $P_0$  denkleminin mertebesi  $P_\varepsilon$  ile aynı mertebeden olduğundan  $u_\varepsilon(0) = 1$  başlangıç şartının gereksiz hale geldiği görülür. Yani, (2.4)'ün çözümü

$$u_0(x) = 1$$

şeklinindedir. Buradan  $[0,1]$  aralığında  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken

$$u_\varepsilon(x) = e^{\varepsilon x} \rightarrow u_0(x) = 1. \quad (2.5)$$

düzgün yakınsar. Böylece bu problemin regular pertürbe problem olduğu görülür. Ayrıca, (2.3) çözümü başlangıç şartını sağlar ve  $\varepsilon$ 'un artan pozitif kuvvetlerine göre

$$u_\varepsilon(x) = e^{\varepsilon x} = 1 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{2} x^2 + \frac{\varepsilon^3}{3} x^3 + \dots$$

şeklindeki seriye açılabilir. Ayrıca,  $[0,1]$  aralığındaki keyfi bir  $x_0$  noktası için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow x_0 > 0} u_\varepsilon(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow x_0 > 0} e^{-\varepsilon x}) = 1, \quad 0 < x \leq x_0, \quad x_0 \in [0,1],$$

tekrarlı limitleri eşit olduğundan verilen problem regular pertürbe olmuş problemdir.

**Örnek 2.1.2.**

$$P_\varepsilon \begin{cases} \varepsilon \frac{du}{dx} + u = 0, & x \in [0,1] \\ u_\varepsilon(0) = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

(2.6) probleminin tam çözümü,

$$u_\varepsilon = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad (2.7)$$

şeklindedir.

Diğer taraftan  $\varepsilon = 0$  için  $P_\varepsilon$  problemi

$$P_0 \begin{cases} u = 0, x \in [0,1] \\ u_0(0) = 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

şeklindeki  $P_0$  indirgenmiş problemine dönüşür. Görüldüğü gibi  $P_0$  denkleminin mertebesi  $P_\varepsilon$  ile aynı mertebeden olmadığından  $u_\varepsilon(0) = 1$  başlangıç şartının gereksiz hale gelmiştir. Yani, (2.8)'in çözümü,

$$u_0(x) = 0$$

olur. Dolayısıyla,  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken  $[0,1]$  aralığında,  $u_\varepsilon = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$  çözümü  $u_0 = 0$  çözümüne düzgün yakınsamaz.

Burada,  $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$  fonksiyonu başlangıç kat fonksiyonu ve  $x=0$  başlangıç katıdır. Ayrıca,  $[0,1]$  aralığındaki keyfi bir  $x_0$  noktası için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow x_0 > 0} u_\varepsilon(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow x_0 > 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) = 0, \quad 0 < x \leq x_0, x_0 \in [0,1]$$

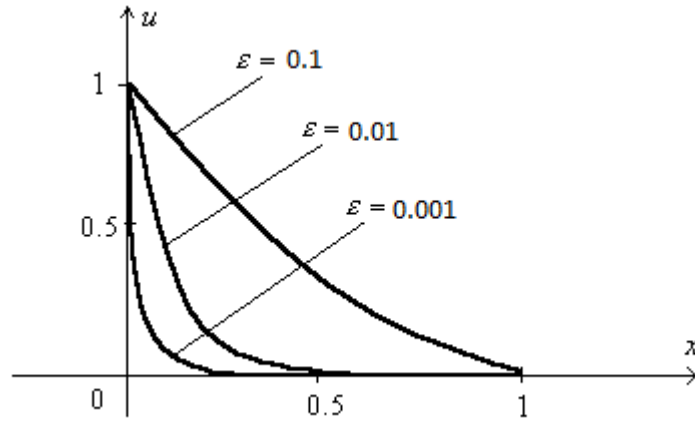
olur. Ancak,  $x=0$  için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0^+} u_\varepsilon(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) = 0$$

tekrarlı limitleri eşit olmadığından verilen problem singüler pertürbe olmuş problemidir. Böyle eşitsizlikler singüler pertürbe özellikli problemlere özgü bir özelliktir ve başlangıç veya sınır katının varlığının belirtisidir.  $\varepsilon$  parametresinin çok küçük  $\square$  değerleri için

$x=0$  noktası civarında çözümün hızlı bir şekilde değiştiği aşağıdaki grafikten görülmektedir.



Şekil 2.1. Örnek 2.1.2'deki problemin çözümünün  $\varepsilon$  'na göre değişimi

## 2.2. Başlangıç Katı ve Sınır Katı

Başlangıç katı ve sınır katı varlığı problemin singüler pertürbe olduğunun kanıtıdır. Singüler pertürbe problemin çözümünün ani hızlı değişebildiği herhangi bir sınır veya başlangıç noktasının bir komşuluğuna, o noktanın sınır veya başlangıç katı denir. Sınır katı dışındaki üstel biçimli küçük değerlere sahip fonksiyona ise sınır veya başlangıç katı fonksiyonu denir (Amirali ve Amirali, 2018).

## 2.3. Ortalama Değer Teoremi

Bir  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $(a, b)$  açık aralığında türevlenebilir ise

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

olacak şekilde en az bir  $c \in (a, b)$  vardır (Fikhtengol'ts, 1973).

## 2.4. Diferansiyel Eşitlikler

$f(x, \lambda)$  ve  $a(x)$ ,  $[0, \ell]$  kapalı aralığında sürekli fonksiyon olduğu kabul edilsin. Verilen (1.1)-(1.2) ve (1.4)-(1.6) problemlerinin  $u(x)$  çözümüne aşağıdaki formüllerle ulaşılmıştır:

$$u(x) = u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\xi, \lambda) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi \quad (2.9)$$

$$u(x) = u(\ell)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\xi) d\xi} - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell f(\xi, \lambda) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\xi a(\tau) d\tau} d\xi \quad (2.10)$$

## 2.5. Bazı İnterpolasyon Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulmasında ve değerlendirilmesinde aşağıda verilen, kalan terimleri integral biçiminde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılacaktır (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev, 1998).

(F1) Formu:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \left[ \int_a^b p(x) dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma) f(a) \} + f(a; b) \int_a^b (x - x^{(\sigma)}) p(x) dx + R(f) \quad (2.11)$$

Burada  $\sigma$  -reel parametre,  $p(x) \in C[a, b]$  ağırlık fonksiyonu,

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad n=1 \text{ veya } 2$$

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1} (x - a)(b - \xi)^s \quad s = 0, 1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f(a; b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s / s!, \quad \lambda \geq 0; T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0.$$

(F1) formunda verilen ikinci terim bazı durumlarda kalan terime dahil olur.

(F2) Formu:

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f(a; b) \int_a^b p(x) dx + \bar{R}(f) \quad (2.12)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad n=1 \text{ veya } 2.$$

(F1) ve (F2) formlarında aynı  $K_{n-1}(x, \xi)$  fonksiyonu kullanılmaktadır.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x) dx + R^*(f) \quad (2.13)$$

$$R^*(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^n(\xi) K_{n-1}^*(x, \xi) d\xi + (n-1) f(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x) dx, \quad n = 1 \text{ veya } 2,$$

$$K_s^*(x, \xi) = T_s(x - \xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) + (b-a)^s (b - \xi) \left(\frac{a+b}{2} - \xi\right), \quad s = 0, 1$$

## 2.6. Sürekli Problem için Maksimum Prensibi

Eğer  $v(x) \in C^1[0, \ell]$ ,  $Lv(x) \geq 0, (0 \leq x \leq \ell)$ ,  $v(0) \geq 0$  şartlarını sağlayan bir fonksiyon ise, o zaman  $v(x) \geq 0, (0 \leq x \leq \ell)$  olur (Amirali vd. 2018).

## 2.7. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[a, b]$  kapalı aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına şebeke denir. Bu şebekede tanımlanan fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir.

### i) Düzgün olmayan şebeke

$[a, b]$  aralığında tanımlanan

$$\bar{\omega}_h = \{x_i : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine  $[a, b]$  aralığında düzgün olmayan şebeke denir.  $x_i$  noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir.  $h_i = x_i - x_{i-1}$  şebeke adımlarıdır.  $\bar{\omega}$  şebekesinde tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir ve  $f_i$  şeklinde gösterilir.

### ii) Düzgün şebeke

$[a, b]$  aralığında tanımlanan düğümlerin eşit aralıklı olmasıyla oluşan

$$\omega_h = \left\{x_i = ih; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \text{ ve } h = \frac{b-a}{N}\right\} \quad \text{şebekesine } [a, b] \text{ aralığındaki düzgün}$$

şebeke denir. Buradaki  $h$  sabitine de şebeke adımı denir.

## 2.8.Fark Türevleri

$[a, b]$  aralığındaki  $y(x)$  fonksiyonunun düzgün şebekede fark türevleri aşağıdadır (Samarskii, 2001):

i)  $y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$  ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denilmektedir.

ii)  $y_{x,i}^- = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$  ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denilmektedir.

iii)  $y_{x,i}^{\cdot} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$  ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi denilmektedir.

Geri fark türevi olan  $y_{x,i}^-$  ile ileri fark türevi olan  $y_{x,i}$   $h \rightarrow 0$  olduğunda  $u'(x_i)$  ye  $O(h)$  hızıyla yaklaşır. Oysaki merkezi fark türevi olan  $y_{x,i}^{\cdot}$   $h \rightarrow 0$  olduğunda  $u'(x_i)$  ye  $O(h^2)$  hızıyla yaklaşır.

iv)  $y_{xx,i}^- = \frac{y_{x,i} - y_{x,i}^-}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$  ifadesine de ikinci mertebeden fark türevi denilmektedir.

İkinci mertebeden fark türevi olan  $y_{xx,i}^-$   $h \rightarrow 0$  olduğunda  $u''(x_i)$  ye  $O(h^2)$  hızıyla yaklaşır(Samarskii,2001).

## 2.9. Birinci Mertebe Fark Denklemleri

$p_i$  ve  $q_i$  belli tam argümanlı fonksiyonlar ve  $y_i = p_i y_{i-1} + q_i$   $i = 1, 2, \dots$  şeklinde olan birinci mertebeden fark denkleminin çözümü,

$$y_i = y_0 \left( \prod_{k=1}^i p_k \right) + \sum_{j=1}^i q_j \left( \prod_{k=j+1}^i p_k \right) \quad i = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

## 2.10. Sonlu Fark Yöntemi

Verilen diferansiyel denklemdaki türevler yerine belli bir şebekede üzerinde fark türevleri konularak elde edilen ve diferansiyel denklemi lineer bir cebirsel denklemler sistemine dönüştürerek gerekli çözümün elde edilmesini sağlayan işlemler sürecine



sonlu farklar yöntemi denir. Bu sistemin çözümünden, çözüm fonksiyonunun ayrik noktadaki değerlerine ulaşarak nümerik bir çözüm elde edilir. Kısaca, belli bir şebekede tanımlanmış fonksiyonun değerleri bulunmaktadır(Samarskii, 2001).

### 2.11. Ayrik Maksimum Prensibi

Herhangi bir  $v(x_i)$  şebeke fonksiyonu için,  $v_i(0) \geq 0$  ve  $1 \leq i \leq N$  için  $\ell_h v(x_i) \geq 0$  eşitsizlikleri sağlanıyorsa, o zaman her  $i$ , ( $1 \leq i \leq N$ ) için  $v(x_i) \geq 0$  olur.

**İspat:**  $i^*$ ,  $v(x_{i^*}) = \min_i v(x_i)$  şartını sağlayan bir nokta olsun ve kabul edelim ki Lemma doğru olmasın. O zaman  $v(x_{i^*}) < 0$  olur. Hipotezden  $i^* \neq 0$  ve  $v(x_{i^*}) - v(x_{i^*-1}) \leq 0$  elde edilir. Buradan

$$\ell_h v_{i^*} = \frac{v(x_{i^*}) - v(x_{i^*-1})}{h_{i^*}} + a(x_{i^*})v(x_{i^*}) \leq a(x_{i^*})v(x_{i^*}) < 0,$$

bulunur ki, bu ise Lemmanın hipotezi ile çelişir. Böylece, kabulümüz yanlış olup Lemma ispatlanmış olur.

### 2.12. Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık

$u$ , verilen problemin kesin çözümü ve  $y$ 'de üzerinde çalışılan şebekedeki bu probleme uygun fark probleminin çözümü olsun.  $z = y - u$  ise fark probleminin hatası veya hata fonksiyonu olarak tanımlansın. O zaman  $\|\cdot\|_1$  söz konusu şebekedeki herhangi bir norm olmak üzere,

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$$

ise bu durumda fark probleminin çözümü verilen problemin çözümüne yakınsaktır. Ayrıca yeterince küçük  $h$  sabitleri için

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|y - u\|_1 \leq Ch^p, \quad p > 0,$$

ise bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme  $O(h^p)$  hızıyla yakınsar veya yaklaşık çözüm  $O(h^p)$  kesinliğine sahiptir denir.  $C$ ,  $h$  ve  $\varepsilon$ 'dan bağımsız sabit ise o zaman yaklaşık çözüm kesin çözüme  $\varepsilon$ 'a göre düzgün yakınsaktır denir (Samarskii, 2001).

### 2.13. Fark Şemasının Kararlılığı

$L_h$  ve  $l_h$   $\bar{\omega}_h$  da tanımlanan fark operatörleri,  $\theta_h, \varnothing_h$  belli şebeke başlangıç veri fonksiyonları olmak üzere, verilen herhangi bir diferansiyel probleme karşılık gelen fark şeması,

$$L_h(y) = \theta_h, \quad x \in \omega_h \quad (2.14)$$

$$l_h(y) = \varnothing_h, \quad x \in \gamma_h \quad (2.15)$$

şeklinde ve başlangıç veri fonksiyonlarındaki küçük  $\bar{\theta}_h$  ve  $\bar{\varnothing}_h$  perturbelerin çözümü  $\bar{y}$  olsun. Eğer,  $h$ 'a bağlı olmayan  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri varsa; yeteri kadar küçük  $h \leq h_0$  için

$$\|\bar{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\bar{\theta}_h - \theta_h\|_2 + C_2 \|\bar{\varnothing}_h - \varnothing_h\|_3$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman (2.14)- (2.15) fark şeması sağ tarafa ve sınır(veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir. Burada  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$  herhangi şebeke normlarıdır (Samarskii, 2001). Yani kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli ve  $h$  'a göre düzgün biçimli bağlıdır.

### 3.MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Parametreye Bağlı Çözüm Fonksiyonuna Göre Lineer Problemin Çözümünün Bazı Özellikleri

Bu bölümde, ilk önce (1.1)-(1.2) birinci mertebeden singüler pertürbe olmuş sınır-değer probleminin fark şemasının hatasının değerlendirilmesinde ve yakınsaklığının incelenmesinde gerekli olan,  $u(x)$  çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiştir.

Daha sonra düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şeması ise üstel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonları içeren integral kuadratur formüllerinden yararlanılarak kurulmuş ve fark şemasının ayırık maksimum normda birinci dereceden  $\varepsilon$ -düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

##### 3.1.1. (1.1)-(1.2) Probleminin kesin çözümü için asimptotik değerlendirmeler

**Lemma 3.1:** (1.1)-(1.2) probleminin çözümü  $\{u(x), \lambda\}$  aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$|\lambda| \leq c_0, \quad (3.1)$$

$$\|u\|_\infty \leq c_1, \quad (3.2)$$

burada

$$c_0 = \frac{a^*}{m_1(1 - \exp(-a^*l))} (|A| + |B|) + m_1^{-1} \|F\|_\infty,$$

$$c_0 = |A| + \alpha^{-1} \|F\|_\infty + c_0 \alpha^{-1} M_1 \quad (F(x) = f(x, 0))$$

ve her  $x \in \bar{\Omega}$  için  $|\lambda| \leq c_0$ ,  $|u| \leq c_1$  ve  $|\partial f / \partial t| \leq C$  şartları altında

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right) \right\}, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3.3)$$

**İspat:** (1.1) denkleminde  $f(x, \lambda)$  fonksiyonuna  $\lambda$ 'ya göre ortalama değer teoremi uygulanır,

$$f(x, \lambda) = f(x, 0) + \lambda \frac{\partial f(x, \tilde{\lambda})}{\partial \lambda}, \quad \tilde{\lambda} = \gamma \lambda, \quad 0 < \gamma < 1,$$

ve

$$b(x) = \frac{\partial f(x, \tilde{\lambda})}{\partial \lambda}$$

denirse, (1.1) denklemi

$$\varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = \lambda b(x) + F(x) \quad (3.4)$$

şeklinde homojen olmayan lineer bir denklem olur. (3.4) denkleminin (2.9) ve (2.10) formülleri uygulanırsa,

$$u(x) = u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \quad (3.5)$$

$$u(x) = u(\ell)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\eta) d\eta} - \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell F(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \quad (3.6)$$

elde edilir

(3.5) ve (3.6) den  $\lambda$  çekilirse,

$$\lambda = - \frac{u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} + \frac{u(\ell)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} - \frac{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e f(\eta, 0) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \quad (3.7)$$

(3.7)'nin sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı değerlendirelim. Önce (3.7)'nin sağ tarafındaki birinci terimi için,

$$\left| \frac{u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \right| \leq \frac{|u(0)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}$$

$$\leq \frac{|u(0)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[ \alpha^{-1} \varepsilon (e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}} - 1) + \alpha^{-1} \varepsilon (e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}}) \right]}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte  $\varepsilon \leq 1$  için  $e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - 1 > e^{\alpha \ell} - 1 > 0$  olduğu dikkate alınırsa,

$$\left| \frac{u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \right| \leq \frac{|u(0)|}{\alpha^{-1} m_1 (e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - 1)} \leq \frac{|u(0)|}{\alpha^{-1} m_1 (e^{\alpha \ell} - 1)} \quad (3.8)$$

olur. (3.7)'nin sağ tarafındaki ikinci terim için benzer değerlendirmeler yapılırsa,

$$\left| \frac{u(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \right| \leq \frac{|u(\ell)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]}$$

$$\leq \frac{|u(\ell)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[ (a^*)^{-1} \varepsilon (e^{\frac{a^*(x-\ell)}{\varepsilon}} - e^{-\frac{a^* \ell}{\varepsilon}}) + (a^*)^{-1} \varepsilon (1 - e^{\frac{a^*(x-\ell)}{\varepsilon}}) \right]}$$

$$\leq \frac{|u(\ell)|}{m_1 (a^*)^{-1} (1 - e^{-\frac{a^* \ell}{\varepsilon}})} \leq \frac{|u(\ell)|}{m_1 (a^*)^{-1} (1 - e^{-a^* \ell})} \quad (3.9)$$

elde edilir.

Son olarak, (3.7)'nin sağ tarafındaki üçüncü terime integraller için ortalama teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta}^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^{\ell} b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{\eta} a(\tau) d\tau} d\eta \right] \right| \\
& \left| \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x b(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta}^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^{\ell} b(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{\eta} a(\tau) d\tau} d\eta \right] \right| \\
& \leq \frac{\|F\|_{C[0,\ell]}}{\varepsilon} \left[ \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta}^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^{\ell} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{\eta} a(\tau) d\tau} d\eta \right] \\
& \leq \frac{m_1}{\varepsilon} \left[ \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta}^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^{\ell} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{\eta} a(\tau) d\tau} d\eta \right] \\
& \leq m_1^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, (3.8), (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri (3.7)'de yerine yazılırsa,

$$|\lambda| \leq m_1^{-1} c_0 |A| + m_1^{-1} c_1 |B| + m_1^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]} \tag{3.11}$$

olur. Böylece (3.1) eşitsizliği ispatlanmış oldu.

Şimdi (3.2)'nin doğruluğunu gösterelim. (3.5)'den

$$\begin{aligned}
|u(x)| & \leq |u(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{|\lambda|}{\varepsilon} \int_0^x |b(\eta)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta}^x a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x |F(\eta)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\eta}^x a(\tau) d\tau} d\eta \\
& \leq |u(0)| e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} (1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}) (\|F\|_{\infty} + |\lambda| M_1) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

olur. Buradan, (3.11) eşitsizliğini (3.12)'de dikkate alırsak, (3.2)'nin doğruluğu gösterilmiş olur.

Son olarak ise, (3.3) eşitsizliğini değerlendirelim. (3.12)'nin  $x$ 'e türevi ve  $|u(0)| \leq C$ ,  $\alpha^{-1} (\|F\|_{\infty} + |\lambda| M_1) \leq C$  olduğu dikkate alınırsa,

$$|u'(x)| \leq \frac{\alpha}{\varepsilon} |u(0)| e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{\alpha}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} (\alpha^{-1} \|F\|_{\infty} + |\lambda| M_1) \leq C (1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}})$$

elde edilir. Böylece (3.3) eşitsizliği ispatlanmış olur.

### 3.1.2. (1.1)-(1.2) Probleminin fark şemasının kurulması

(1.1)-(1.2) probleminin fark şemasının kurulması için  $[0, \ell]$  aralığındaki düzgün şebeke

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = \ell / N\}, \varpi_h = \omega_h \cup \{x = 0, \ell\}$$

şeklinde olsun. (1.1) denkleminin  $(x_{i-1}, x_i)$  aralığında integrali alınır, aşağıdaki özdeşlik elde edilir:

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x)\phi_i(x)dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\phi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

burada,

$$\phi_i(x) = e^{-\frac{a_i(x_i-x)}{\varepsilon}}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)dx = \frac{1 - e^{-a_i \rho}}{a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

şeklindedir.  $\phi_i(x)$  baz fonksiyonu olup,

$$\begin{aligned} -\varepsilon\phi'(x) + a_i\phi(x) &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \phi(x_i) &= 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

probleminin çözümüdür. (3.13) özdeşliği daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$\chi_i h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\phi_i(x)dx + \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u(x)\phi_i(x)dx = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \lambda)\phi_i(x)dx$$

olur. Buradan,

$$\chi_i h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\phi_i(x)dx + a_i \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x)\phi_i(x)dx = f(x_i, \lambda) - R_i \quad (3.15)$$

yazılır. Burada  $R_i$  kalan terimi,

$$R_i = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)]u(x)\phi_i(x)dx + \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)]\phi_i(x)dx \quad (3.16)$$

biçimindedir.

Daha sonra, (3.15)'nin solundaki birinci integrale (F2) formu, ikinci integrale (F1) formu  $(x_{i-1}, x_i)$  aralığında  $p(x) = \phi_i(x)$ ,  $f(x) = u(x)$  ve  $\sigma = 1$  alınarak ve (3.14) bağıntısı göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} & \chi_i h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + a_i \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \varepsilon \left\{ 1 + \chi_i h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \right\} u_{\bar{x},i} + a_i u_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.15) ve (3.17)'den

$$l_h u_i \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i = f(x_i, \lambda) - R_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

$$u_0 = A, \quad u_N = B \quad (3.19)$$

olur. Burada  $\theta_i$ , yapılan işlemler sonucu

$$\theta_i = 1 + \chi_i h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi(x) dx = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon} \quad (3.20)$$

olarak bulunur.

Böylece, (3.18)'de  $R_i$  ihmal edilirse, (1.1) problemi için, aşağıdaki fark şeması yazılabilir.

$$l_h y_i \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i}^h + a_i u_i^h = f(x_i, \lambda^h), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.21)$$

$$u_0^h = A, \quad u_N^h = B. \quad (3.22)$$

### 3.1.3. Yakınsaklık ve hata değerlendirilmesi

Bu kısımda, (3.21)-(3.22) fark şemasının  $\varepsilon$ 'a göre birinci derecen  $O(h)$  düzgün yakınsak olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle gerekli olan aşağıdaki Lemma'lar verilecektir.

Yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesi için  $z_i^h = u_i^h - u_i$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $\mu^N = \lambda^N - \lambda$  hata fonksiyonları olsun. Bu durumda, (3.18)-(3.19) ve (3.21)-(3.22)'den

$$l_h z_i \equiv \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i}^h + a_i z_i^h = f(x_i, \mu^h + \lambda) - f(x_i, \lambda) + R_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.23)$$

$$z_0^h = 0, \quad z_N^h = 0 \quad (3.24)$$

yazılır. Burada  $R_i$  kalan terimi (3.16)'da tanımlanmıştır.

**Lemma 3.2.** (3.16) ifadesi için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.



$$|R_i| \leq Ch, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

**İspat:**  $R_i$  kalan terimi  $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$  olarak yazılabilir. Burada,  $R_i^{(1)}$  ve  $R_i^{(2)}$ ,

$$R_i^{(1)} = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \quad (3.26)$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)] \varphi_i(x) dx \quad (3.27)$$

biçimindedir.

İlk önce (3.26)'nın

$$|R_i^{(1)}| \leq C_1 h$$

olduğu gösterilecek. Buradan,

$$|R_i^{(1)}| \leq \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |a(x) - a(x_i)| |u(x)| \varphi_i(x) dx$$

yazılır. Ortalama değer teoreminden,

$$|a(x) - a(x_i)| = |a'(\eta_i)| |x - x_i|$$

$$|a(x) - a(x_i)| \leq \max_{[0, \ell]} |a'(x_i)| \max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i|$$

olur.  $\max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \leq h$  ve  $\max_{[0, \ell]} |a'(x_i)| \leq C_1$  olduğundan,

$$|a(x) - a(x_i)| \leq C_1 h, \quad x_{i-1} < \eta_i < x_i \quad (3.28)$$

elde edilir. Lemma 3.1'e göre  $|u(x)| \leq C_0$  yazılabileceğinden ve  $\chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = 1$

olduğundan,

$$|R_i^{(1)}| \leq C_0 C_1 h \quad (3.29)$$

yazılır. Şimdi (3.27)'nin

$$|R_i^{(2)}| \leq N_1 h$$

olduğunu gösterelim. Açıktır ki

$$|R_i^{(2)}| \leq \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| \varphi_i(x) dx.$$

Ortalama Değer Teoreminden,

$$|f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\eta_i, \lambda) \right| |x_i - x|$$

$$|f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| \leq \max_{[0, \ell]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \right| \max_{[x_{i-1}, x_i]} |x_i - x|$$

yazılır.  $\max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \leq h$  ve  $\max_{[0, \ell]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \right| \leq N_1$  olduğundan,

$$|f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| \leq N_1 h, \quad x_{i-1} < \eta < x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.30)$$

olur. (3.27) ve (3.30)'dan ve ayrıca,  $\chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = 1$  olduğundan,

$$|R_i^{(2)}| \leq N_1 h \quad (3.31)$$

yazılır. Böylece, (3.29) ve (3.31)'den ise,

$$|R_i| \leq |R_i^{(1)}| + |R_i^{(2)}|$$

$$\leq C_0 C_1 h + N_1 h$$

elde edilir. Buradan, (3.25)'in doğruluğu açıktır.

**Lemma 3.3.** (3.23)-(3.24) problemi için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$|\mu^h| \leq m_1^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)} \quad (3.32)$$

$$\|z^h\|_{C(\omega_h)} \leq \alpha^{-1} |\mu^h| \|\tilde{f}_\lambda\|_{C[0, \ell]} + \alpha^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)} \quad (3.33)$$

**İspat:** (3.33) eşitsizliği (3.32)'ye bağlı olduğundan, önce (3.32) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiştir. Bunun için, (3.23) bağıntısından Ortalama Değer Teoremine göre,

$$\varepsilon \theta_i z_{\bar{x}, i}^h + a_i z_i^h = b_i \mu^h + R_i \quad (3.34)$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x_i, \lambda + \gamma \mu^h), \quad 0 < \gamma < 1.$$

(3.34)'ün açık ifadesi

$$z_i^h = \frac{\varepsilon \theta_i}{\varepsilon \theta_i + h a_i} z_{i-1}^h + \mu^N \frac{h_i b_i}{\varepsilon \theta_i + h a_i} + \frac{h_i R_i}{\varepsilon \theta_i + h a_i}$$

biçiminde birinci dereceden bir fark denklemini elde edilir. Birinci mertebeden bu fark denklemini  $z_i^h$ 'ye göre çözer ve  $z_0^h = 0$  sınır şartı kullanılırsa,

$$z_i^h = \mu^h \sum_{k=1}^i \frac{h_k b_k}{\varepsilon \theta_k + h_k a_k} Q_{ik} + \sum_{k=1}^i \frac{h_k R_k}{\varepsilon \theta_k + h_k a_k} Q_{ik}$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$Q_{ik} = \begin{cases} 1, & k = i \\ \prod_{j=k+1}^i \frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h_j a_j}, & 1 \leq k \leq i-1. \end{cases}$$

$i = N$  için,  $z_N^h = 0$  olduğu dikkate alınır

$$\mu^N = - \frac{\sum_{k=1}^N \frac{h_k R_k}{\varepsilon \theta_k + h_k a_k} Q_{N,k}}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon \theta_k + h_k a_k} Q_{N,k}}$$

elde edilir. Kolayca görülebilir ki, keyfi  $j$ 'ler için,  $\varepsilon \theta_j + h a_j > 0$  olduğundan,

$$|\mu^h| \leq \frac{h \|R\|_{C(\omega_h)} \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\varepsilon \theta_\ell + h a_\ell} Q_{i\ell}}{h m_1 \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\varepsilon \theta_\ell + h a_\ell} Q_{i\ell}}$$

eşitsizliğini yazabilir. Buradan, lemma 3.1'in ispatına benzer şekilde (3.32) eşitsizliği

$$\|\mu^h\| \leq m_1^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi ise,  $z_i^h$ 'nin değerlendirilmesine geçildiğinde, kolayca görülebilir ki,  $\ell_h z_i^h := \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i}^h + a_i z_i^h, 1 \leq i \leq N$  fark operatörü için, ayrık maksimum prensibi uygulanırsa,

$$\|z^h\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq \alpha^{-1} \left( M_1 |\mu^h| + \|R\|_{\infty, \omega_N} \right)$$

eşitsizliğine ulaşılır, bu da (3.32) eşitliği ile birlikte (3.33)'ü verir.

Şimdi Lemma 3.2 ve Lemma 3.3 'ün sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.1.**  $\{u(x), \lambda\}$  (1.1)-(1.2) probleminin çözümü ve  $\{u_i^h, \lambda^h\}$  de (3.21)-(3.22)'nin çözümü olsun. Bu durumda,

$$|\lambda - \lambda^h| \leq Ch, \quad (3.35)$$

$$\|u - u^h\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch \quad (3.36)$$

hata eşitsizlikleri doğrudur.

**İspat.** Lemma 3.2. nin direkt olarak (3.32) ve (3.33)'de dikkate alınmasıyla (3.37) ve (3.38)'in  $O(h)$  olduğu kolayca görülür.



### 3.2. Parametreye Bağlı İntegral Sınır Şarhı Problemin Çözümü

Bu kısımda, önce, (1.4)-(1.6) probleminin fark şemasının hatasının değerlendirilmesinde ve yakınsaklığının incelenmesinde gerekli olan, problemin  $u(x)$  çözümü bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra fark şeması ise, Bakhvalov şebekesi üzerinde parçalı sabit baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuş ve fark şemasının ayrık maksimum prensibine göre  $O(N^{-1})$  kesinlikli düzgün yakınsaklığa sahip olduğu incelenmiştir.

#### 3.2.1. (1.4)-(1.6) Problemin kesin çözümü için asimptotik değerlendirmeler

**Lemma 3.4.** (1.4)-(1.6) probleminin  $\{u(t), \lambda\}$  çözümü için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$|\lambda| \leq c_0, \quad (3.37)$$

$$\|u\|_\infty \leq c_1, \quad (3.38)$$

burada,

$$c_0 = m_1^{-1} \left\{ \frac{\alpha |A|}{e^{\alpha T} - 1} + \frac{|B| a^* (1 - K^* T)}{1 - e^{-a^* T}} + \|F\|_\infty \right\}, \quad F(t) = f(t, 0, 0),$$

$$c_1 = A + \alpha^{-1} (1 + K^* T) (\|F\|_\infty + c_0 M_1)$$

ve her  $t \in [0, T]$  için  $|\lambda| \leq c_0$ ,  $|u| \leq c_1$  ve  $|\partial f / \partial t| \leq C$  şartları altında

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right\}. \quad (3.39)$$

**İspat:** (1.4) denklemini yeniden düzenleyelim. Bunun için  $f(t, u, \lambda)$  fonksiyonu için ortalama değer teoreminden gelen

$$f(t, u, \lambda) = f(t, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{u}, \bar{\lambda})u + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \bar{u}, \bar{\lambda})\lambda$$

bağıntısı (1.4)'de yerine yazılırsa yeni denklem

$$\varepsilon u'(t) + a(t)u(t) = F(t) + \lambda b(t) \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır.

Burada  $F(t) = f(t, 0, 0)$  ,  $a(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{u}, \lambda)$  ve  $b(t) = -\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \bar{u}, \bar{\lambda})$  ;  $\bar{u} = \gamma u$  ,  $\bar{\lambda} = \gamma \lambda$   
 $(0 < \gamma < 1)$  ortalama değer teoreminden gelen değerlerdir.

Önce (3.37) eşitsizliğini ispat edelim.  $\lambda$  değerini bulmak için (3.40) denklemi (2.10) eşitliğine göre

$$u(t) = B e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_t^T a(\tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_t^T F(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_t^T a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_t^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_t^T a(\eta) d\eta} d\tau \quad (3.41)$$

şeklinde yazılır. (3.41) çözümü (1.5) integral sınır şartında yerine yazılırsa,

$$B e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T F(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\eta) d\eta} d\tau + \int_0^T K(s, 0) ds + B \int_0^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\tau) d\tau} ds$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(s) \left[ \int_s^T F(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} d\tau \right] ds + \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^T c(s) \left[ \int_s^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} d\tau \right] ds = A$$

bulunur. Burada ,  $K(t, u(t)) = K(t, 0) + c(t)u(t)$  ,  $c(t) = \frac{\partial K}{\partial u}(t, u)$  ,  $u = \gamma u$  şeklindedir.

Buradan  $\lambda$  değeri çekilirse,

$$\lambda = \frac{A - \int_0^T K(s, 0) ds}{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau}$$

$$\frac{B e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\tau) d\tau} + B \int_0^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\tau) d\tau} ds}{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T F(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T F(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau}{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau} \quad (3.42)$$

elde edilir.

Şimdi, (3.42)'nin sağ tarafındaki sırayla üçüncü, ikinci ve birinci terimleri  $c(t) \geq 0$  olmak üzere değerlendirelim. İntegraller için ortalama değer teoreminden

$$\left| \frac{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T F(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T F(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{\tau} a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau}{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{\tau} a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau} \right| \leq m_1^{-1} \|F\|_{\infty} \quad (3.43)$$

$$\left| \frac{B e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\tau) d\tau} + B \int_0^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\tau) d\tau} ds}{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{\tau} a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau} \right| \leq \frac{|B|(1+K^*T) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T a(\xi) d\xi}}{m_1 \varepsilon^{-1} \int_0^T e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^T a(\eta) d\eta} d\xi} \leq \frac{|B|(1+K^*T)}{m_1 (a^*)^{-1} (1 - e^{-\frac{a^*T}{\varepsilon}})} \leq \frac{|B|(1+K^*T)}{m_1 (a^*)^{-1} (1 - e^{-a^*T})}. \quad (3.44)$$

Şimdi ise,  $\varepsilon \leq 1$  değerleri için (3.42)'nin sağ tarafındaki birinci terim için

$$\left| \frac{A - \int_0^T K(s, 0) ds}{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\eta) d\eta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) \left[ \int_s^T c(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{\tau} a(\eta) d\eta} ds \right] d\tau} \right| \leq \frac{\left| A - \int_0^T K(s, 0) ds \right|}{\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T b(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} a(\eta) d\eta} d\tau \right|} \leq \frac{\alpha \left| A - \int_0^T K(s, 0) ds \right|}{m_1 (e^{a^*T} - 1)} \quad (3.45)$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece, (3.42) bağıntısı ve (3.43)-(3.45) ifadelerinden (3.37)'nin doğruluğu gösterilmiş olur.

(3.40) eşitsizliğinin ispatı: (3.41) lineer diferansiyel denkleminin

$$u(t) = u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^t a(\eta) d\eta} ds, \quad \Phi(t) = F(t) - \lambda b(t)$$

şeklindeki çözümünden ve bu çözümün (1.3) integral sınır şartında yerine yazılmasıyla  $u(0)$  aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u(0) = \frac{A - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(s) \left[ \int_0^s \Phi(\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^s a(\eta) d\eta} d\tau \right] ds}{1 + \int_0^T c(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\tau) d\tau} ds}.$$

$t \in [0, T]$  için  $c(t)$  negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |u(0)| &= \left| \frac{A - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(s) \left[ \int_0^s \Phi(\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^s a(\eta) d\eta} d\tau \right] ds}{1 + \int_0^T c(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s a(\tau) d\tau} ds} \right| \leq |A| + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(s) \left[ \int_0^s \Phi(\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^s a(\eta) d\eta} d\tau \right] ds \\ &\leq |A| + \frac{1}{\varepsilon} K^* (\|F\|_\infty + M_1 c_0) \alpha^{-1} \varepsilon \int_0^T (1 - e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}}) ds \\ &\leq |A| + \alpha^{-1} K^* T (\|F\|_\infty + M_1 c_0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

değerlendirmesi yazılır. Buradan da maksimum prensibine göre,

$$\|u\|_\infty \leq |u(0)| + \alpha^{-1} (\|F\|_\infty - b\lambda M_1) \leq |u(0)| + \alpha^{-1} (\|F\|_\infty + |\lambda| M_1)$$

eşitsizliği de (3.38) ve (3.46) dikkate alınarak (3.39) eşitsizliği ispatlanmış olur.

(3.41) eşitsizliğini ispatlamak için öncelikle  $|u'(0)|$ 'ı değerlendirelim:

(3.41) denkleminde ve (3.38)'den

$$|u'(0)| \leq \frac{|F(0) - a(0)u(0) - b(0)\lambda|}{\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (3.47)$$

olduğu açıktır.

Şimdi de (3.41) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\varepsilon v'(t) = p(t)v(t) = g(t) \quad (3.48)$$

elde edilir ve burada



$$v = u' , p(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t), \lambda) \text{ ve } g(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t), \lambda) .$$

$p(t) \geq \alpha > 0$  ve  $|g(t)| \leq C$  olduğundan (3.42) ve (3.43)'den  $v(t)$  için

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t g(s) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t a(\eta) d\eta} ds$$

$$|v(t)| \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}} ds$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + C(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}})$$

yazılabilir. Bu da (3.39)'un doğruluğunu gösterir.

### 3.2.2. (1.4)-(1.6) Problemi için fark şemasının kurulması

Bu kısımda (1.4)-(1.6) problem için parçalı düzgün şebekede fark şeması kurulacaktır.

$[0, T]$  üzerinde yer alan düzgün şebeke,

$$\omega_h = \{t_i : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T, h_i = t_i - t_{i-1}\} \text{ ve } \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{t = 0\}$$

olsun.

İlk olarak (1.4) denkleminin  $(t_{i-1}, t_i)$  aralığında integrali alınırsa,:

$$h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu\varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

özdeşliği elde edilir, Burada,  $\varphi_i(t)$  fonksiyonu

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t_{i-1} < t < t_i \\ 0 & , \quad t \notin (t_{i-1}, t_i) \end{cases} \quad (3.50)$$

şeklinde baz fonksiyonu olup  $(t_{i-1}, t_i)$  aralığının karakteristik fonksiyonudur.

(3.49) özdeşliği daha açık bir biçimde yazılırsa,

$$h_i^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) \varphi_i(t) dt + h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u, \lambda) \varphi_i(t) dt = 0 \quad (3.51)$$

..olur. Buradan, (3.51)'deki ifadenin sol tarafındaki ilk terimi için,

$$h_i^{-1} \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) dt = \varepsilon u_{t,i} \quad (3.52)$$

olur. (3.51)'deki ifadenin sol tarafındaki ikinci terim için,

$$\begin{aligned} h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u, \lambda) \varphi_i(t) dt &= h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t, u, \lambda) - f(t_i, u_i, \lambda) + f(t_i, u_i, \lambda)] \varphi_i(t) dt \\ &= f(t_i, u_i, \lambda) + h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t, u, \lambda) - f(t_i, u_i, \lambda)] \varphi_i(t) dt \\ &= f(t_i, u_i, \lambda) + R_i \end{aligned} \quad (3.53)$$

yazılır. Burada  $R_i$  kalan terimi

$$\begin{aligned} R_i &= h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t, u, \lambda) - f(t_i, u_i, \lambda)] \varphi_i(t) dt = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\xi \left( \int_{t_i}^t \frac{d}{dt} f(t, u(t), \lambda) dt \right) \\ &= -h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} f(t, u(t), \lambda) dt \end{aligned} \quad (3.54)$$

şeklindedir.

(3.52) ve (3.53)'den (1.4) denklemi için fark şeması  $R_i$  kalan terimi olmak üzere

$$\varepsilon u_{t,i} + f(t_i, u_i, \lambda) + R_i = 0, 1 \leq i \leq N, \quad (3.55)$$

biçiminde yazılır.

Şimdi ise, (1.2) integral sınır şartının fark şemasını belirlemek için birleşik dikdörtgenin sağ kenarı kullanarak

$$u(0) + \int_0^T K(s, u(s)) ds = u_0 + \sum_{i=1}^N h_i K(t_i, u_i) + r$$

eşitliği yazılabilir. Burada  $r$  kalan terim olup

$$r = - \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} (K(t, u(t))) dt. \quad (3.56)$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak, integral şartının fark şeması

$$u_0 + \sum_{i=1}^N h_i K(t_i, u_i) + r = A \quad (3.57)$$

olarak elde edilir. (3.55) ve (3.57) da verilen  $R_i$  ve  $r$  kalan terimleri ihmal edilirse (1.4)-(1.6) problem için

$$\varepsilon u_{x,i}^- + f(t_i, u_i^N, \lambda^N) = 0, 1 \leq i \leq N \quad (3.58)$$

$$u_0^N + \sum_{i=1}^N h_i K(t_i, u_i^N) = A, \quad (3.59)$$

$$u_N^N = B \quad (3.60)$$

şeklindeki yaklaşık fark şeması elde edilir.

### 3.2.3 Şebekenin seçimi ve Bakhvalov şebekesi

(3.58)-(3.60) deki fark şemasının,  $\varepsilon$ -düzgün yakınsaması için uygun bir  $\varpi_N$  şebekesi üzerinde Bakhvalov şebekeyi kullanacağız. Bu şebeke sınır katı civarında yoğunlaşan özel düzgün olmayan bir şebekedir. (3.47)' de verilen eşitsizliğe göre  $u(t)$ ,  $t=0$ 'da  $\alpha^{-1}\varepsilon|\ln \varepsilon|$  genişliğinde sınır katına sahiptir.

$$\sigma = \min \left\{ \frac{T}{2}, \alpha^{-1}\varepsilon|\ln \varepsilon| \right\} \quad (3.61)$$

olmak üzere,  $[0, T]$  aralığı,  $[0, \sigma]$  ve  $[\sigma, T]$  şeklinde iki alt aralığa bölünerek  $[0, T]$  aralığında uygun  $\varpi$  şebekesi elde edilmiştir.

$[0, \sigma]$  aralığı sınır katı içerisindedir ve burada sık adımlı bir şebeke kullanılacaktır.

$[\sigma, T]$  aralığı ise çözümün düzgün kısmını içermektedir. Bu aralıkta kaba bir şebeke kullanılmıştır. Şebekeye karşılık gelen  $t_i$  noktaları;

$$t_i \in [0, \sigma]: \begin{cases} \sigma < T/2 \text{ ise, } t_i = -\alpha^{-1}\varepsilon \ln[1 - (1-\varepsilon)\frac{2i}{N}], i = 0, \dots, N/2 \\ \sigma = T/2 \text{ ise, } t_i = -\alpha^{-1}\varepsilon \ln[1 - (1 - \exp(-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}))\frac{2i}{N}], i = 0, \dots, N/2 \end{cases} \quad (3.62)$$

$$t_i \in [\sigma, T]: t_i = \sigma + (i - N/2)h, i = N/2 + 1, \dots, N, h = 2(T - \sigma)/N \quad (3.63)$$

biçimindedir (Bakhvalov, 1969).

Burada, genelliği bozmadan  $N$  çift kabul edilmiştir. (3.62)-(3.63) ile verilen  $\omega$  özel şebekesi  $\varpi$  olarak tanımlanmıştır.

### 3.2.4. Hata değeriendirilmesi

Metodun yakınsaklığını incelemek için  $z_i^N = u_i^N - u_i$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $\mu^N = \lambda^N - \lambda$  hata fonksiyonları olsun. O zaman fark probleminin çözümü

$$\varepsilon z_{i,i}^N + f(t_i, u_i^N, \lambda^N) - f(t_i, u_i, \lambda) = R_i, 1 \leq i \leq N, \quad (3.64)$$

$$z_0^N + \sum_{i=1}^N h_i K(t_i, u_i + \gamma z_i^N) - r = 0, \quad (3.65)$$

$$z_N^N = 0, \quad (3.66)$$

şeklinde yazılır. Burada  $R_i$  ve  $r$  (3.55) ve (3.56) de verilen kesin hatalarıdır.

Yaklaşık çözümün hatası değeriendirilmeden önce birinci mertebeden

$$y_i = q_i y_{i-1} + \varphi_i, 1 \leq i \leq N$$

şeklindeki fark denklemini aşağıdaki formlarda ifade edilebilir:

$$y_i = y_0 Q_i + \sum_{k=1}^i \varphi_k Q_{i-k} \quad (3.67)$$

ve

$$y_i = y_N Q_{N-i}^{-1} - \sum_{k=i+1}^N \varphi_k Q_{k-i}^{-1}, \quad (3.68)$$

burada,

$$Q_{i-k} = \begin{cases} 1, k = i \\ \prod_{\ell=k+1}^i q_\ell, 1 \leq k \leq i-1 \end{cases}$$

(3.67) ve (3.68) bağıntıları  $i$ ' ye göre indüksiyonla kolayca doğrulanabilir.

**Lemma 3.5:** (3.64)-(3.66) probleminin çözümü için aşağıdaki değeriendirmeler sağlanır:

$$|\mu^N| \leq C|r|, \quad (3.69)$$

$$|z_0^N| \leq |r| + \|c\|_\infty TB_N (|\mu^N| M_1 + \|R\|_\infty) \quad (3.70)$$

$$|z_i^N| \leq |z_0^N| + \alpha^{-1} (M_1 |\mu^N| + \|R\|_\infty), 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.71)$$

burada

$$B_N = \sum_{\ell=1}^N \frac{h_\ell}{\varepsilon + a_\ell h_\ell} \mathbb{Q}_{N-\ell},$$

$$\mathbb{Q}_{N-\ell} = \begin{cases} 1, \ell = N \\ \prod_{s=\ell+1}^N \frac{\varepsilon}{\varepsilon + a_s h_s}, 1 \leq \ell \leq N-1. \end{cases}$$

**İspat:** (3.64) denkleminde,

$$\varepsilon z_{i,i}^N + a_i z_i^N = b_i \mu^N + R_i, 1 \leq i \leq N-1 \quad (3.72)$$

denklemini yazılabilir. Burada

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, u_i + \gamma z_i^N, \lambda + \gamma \mu^N),$$

$$b_i = -\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t_i, u_i + \gamma z_i^N, \lambda + \gamma \mu^N), 0 < \gamma < 1.$$

(3.72) 'den

$$z_i^N = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + a_i h_i} z_{i-1}^N + \mu^N \frac{h_i b_i}{\varepsilon + a_i h_i} + \frac{h_i R_i}{\varepsilon + a_i h_i}.$$

şeklinde birinci mertebeden fark denklemini elde edilir.

Bu denklem (3.68) un kullanılması ve (3.66) sınır şartının yerine yazılmasıyla  $z_i^N$  e göre

$$z_i^N = -\mu^N \sum_{k=i+1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_{k-1}^{-1} + \sum_{k=i+1}^N \frac{h_k R_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_{k-i}^{-1} \quad (3.73)$$

denklemini elde edilir.

(3.65) integral sınır şartı (3.73) da yerine yazılırsa

$$\mu^N = \frac{r}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s b_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}}$$

$$+ \frac{\sum_{k=1}^N \frac{h_k R_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s R_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s b_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}} \quad (3.74)$$

olur.

Şimdi (3.74)'ün sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı değerlendirelim. İlk terim için

$$\left| \frac{r}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s b_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}} \right| \leq \frac{|r|}{m_1 \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1}} \leq \frac{a^* |r|}{m_1 p_* \sum_{k=1}^N (1 + p_*)^{k-1}} = \frac{a^* |r|}{m_1 [(1 + p_*)^N - 1]}$$

olur. Burada  $p_k = a_k h_k / \varepsilon$  ve  $p_* = \min p_k$  olduğundan

$$\left| \frac{r}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s b_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}} \right| \leq C |r|. \quad (3.75)$$

olduğunu göstermek zor değildir.

İkinci terim içinse

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^N \frac{h_k R_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s R_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}}{\sum_{k=1}^N \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_k^{-1} + \sum_{k=1}^N h_k K_k \sum_{s=k+1}^N \frac{h_s b_s}{\varepsilon + a_s h_s} \mathbb{Q}_{s-k}^{-1}} \right| \leq m_1^{-1} \|R\|_{\infty} \quad (3.76)$$

olduğu açıktır.

(3.75) ve (3.76) eşitsizlikleri (3.74)' de dikkate alındığında (3.69) elde edilir. Şimdi  $z_0$  değerlendirmesini yapalım. (3.67)'nin (3.73) de yerine kullanılmasıyla

$$z_i^N = z_0^N \mathbb{Q}_i + \mu^N \sum_{k=1}^i \frac{h_k b_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_{i-k} + \sum_{k=1}^i \frac{h_k R_k}{\varepsilon + a_k h_k} \mathbb{Q}_{i-k}$$

yazılır. Buradan (3.58)'in kullanılmasıyla da

$$z_0^N = \frac{r - \sum_{k=1}^N h_k K_k \left( \mu^N \sum_{\ell=1}^k \frac{h_\ell b_\ell}{\varepsilon + a_\ell h_\ell} \mathbb{Q}_{k-\ell} + \sum_{\ell=1}^k \frac{h_\ell R_\ell}{\varepsilon + a_\ell h_\ell} \mathbb{Q}_{k-\ell} \right)}{1 + \sum_{k=1}^N h_k c_k \mathbb{Q}_k}.$$

Böylece

$$\begin{aligned}
|z_0^N| &\leq |r| + \|c\|_\infty T \left\{ |\mu^N| \sum_{\ell=1}^N \frac{h_\ell |b_\ell|}{\varepsilon + a_\ell h_\ell} \mathbb{Q}_{N-\ell} + \sum_{\ell=1}^N \frac{h_\ell |R_\ell|}{\varepsilon + a_\ell h_\ell} \mathbb{Q}_{k-\ell} \right\} \\
&\leq |r| + \|c\|_\infty T \left\{ M_1 |\mu^N| + \|R\|_\infty \right\} \sum_{\ell=1}^N \frac{h_\ell}{\varepsilon + a_\ell h_\ell} \mathbb{Q}_{N-\ell},
\end{aligned}$$

(3.70)'in doğruluğu açıktır.

Son olarak,  $L^N z_i^N := \varepsilon z_{i,i}^N + a_i z_i^N, 1 \leq i \leq N$  fark operatörü için maksimum prensibi uygulanır ve (3.72)'e göre (3.71) 'nın doğruluğu gösterilmiş olur.

**Lemma 3.6.**  $R$  ve  $r$  hata fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq CN^{-1}, \quad (3.77)$$

$$|r| \leq CN^{-1} \quad (3.78)$$

**İspat:** İlk önce (3.77) eşitsizliğini ispatlayalım.  $R_i$  için  $t_i - t_{i-1} = h_i$ ,  $|\partial f / \partial t| \leq C$  ve  $|\partial f / \partial u| \leq C$  olmak üzere, (3.55) ifadesinin açık ifadesinden

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t), \lambda) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t), \lambda) u'(t) \right| dt \\
&\leq Ch_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) dt + Ch_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) |u'(t)| dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik (3.39) ile birlikte

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i^{-1} + h_i^{-1} \varepsilon^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) e^{-\alpha t / \varepsilon} dt \right\}, 1 \leq i \leq N \quad (3.79)$$

yazılabilir.

Şimdi (3.79) şeklinde yeniden düzenlenen  $R_i$  kalan terimini  $[0, \sigma], [\sigma, T]$  aralıkları üzerinde ayrı ayrı değerlendirelim:

Önce  $\sigma < \frac{T}{2}$  durumu dikkate alındığında  $\sigma = \alpha^{-1} \varepsilon |\ln \varepsilon|$  olur. Sınır katının dışında ise

$[\sigma, T]$  aralığında (3.39)'a göre  $|u'(t)| \leq C$  (veya  $\varepsilon^{-1} e^{-\alpha x/\varepsilon} \leq 1$ ) ve ayrıca  $h_i = h$  olur.

Böylece (3.79) dan

$$|R_i| \leq 2C(T - \sigma)N^{-1}, i = N/2 + 1, \dots, N. \quad (3.80)$$

yazılır.

Diğer yandan (3.39) ile  $[0, \sigma]$  sınır katlı bölgesinde (3.79) eşitsizliği

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + \alpha^{-1} \left( e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha t_i}{\varepsilon}} \right) \right\}, i = 1, \dots, N/2. \quad (3.81)$$

eşitsizliğine dönüşür.

$$\begin{aligned} h_i = t_i - t_{i-1} &= \alpha^{-1} \varepsilon \left\{ -\ln \left[ 1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right] + \ln \left[ 1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right] \right\} \\ &\leq 2\alpha^{-1} (1 - \varepsilon) N^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha t_i}{\varepsilon}} = 2(1 - \varepsilon) N^{-1}$$

olduğundan

$$|R_i| \leq 4\alpha^{-1} CN^{-1}, i = 1, \dots, N/2. \quad (3.82)$$

elde edilir.

Şimdi ise  $\sigma = T/2$  durumu göz önüne alındığında  $\frac{T}{2} = -\sigma \alpha^{-1} \varepsilon |\ln \varepsilon|$  olur. Bundan

dolayı  $x_i \in [0, \sigma]$  için yukarıdaki sık adımlı şebeke bölgesindeki gibi ele alınacaktır.

$t_i \in [\sigma, T]$  için  $h = \frac{2(t - \sigma)}{N} = \frac{T}{N}$  olduğundan

$$\max_{N/2 < i \leq N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \leq h \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha T}{2\varepsilon}} \leq \frac{2e^{-1}}{\alpha T} h = 2e^{-1} \alpha^{-1} CN^{-1},$$

yazılır.

(3.79) ifadesinden ,

$$|R_i| \leq C \left( T + \frac{2}{e\alpha} \right) N^{-1}, i = N/2 + 1, \dots, N, \quad (3.83)$$



olur ve (3.83) ile birlikte

$$|R_i| \leq CN^{-1}$$

elde edilir. (3.80), (3.81) ve (3.82) eşitsizlikleri ile birlikte (3.77)'nin ispatı tamamlanmış olur. Şimdi (3.56)'da verilen  $r$  kalan terimini değerlendirelim.

$t_i - t_{i-1} = h_i$ ,  $\left| \frac{\partial K^*}{\partial u} \right| \leq |K^*| \leq C$  ve  $\left| \frac{\partial K}{\partial t} \right| \leq C$  olmak üzere ve (3.56)'nın açık ifadesinden

$$|r| \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |t - t_{i-1}| \left( \left| \frac{\partial K}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial K}{\partial u} \right| |u'(t)| \right) dt$$

yazılır. Bu eşitsizlik (3.10) ile birlikte

$$\leq c \sum_{i=1}^N h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) dt \quad (3.84)$$

eşitsizliğine dönüşür. (3.84)'den (3.78)'in sağlandığı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} |r| &\leq C \sum_{i=1}^{N/2} h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) dt + C \sum_{i=N/2+1}^N h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) dt \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) dt \right\} \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{N/2} h_i \left( e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha t_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq C \left( N^{-1} + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \right) \leq CN^{-1} \end{aligned}$$

**Teorem 3.2:** Sırayla  $\{u(t), \lambda\}$  ve  $\{u^N, \lambda^N\}$ ,  $\varpi_N$  şebekesi üzerinde kesin ve ayrık çözümleri olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda^N| &\leq CN^{-1}, \\ \|u - u^N\|_{\infty, \varpi_N} &\leq CN^{-1} \end{aligned}$$

**İspat:** Bu teoremin ispatı önceki lemaların birleşimi ile elde edilir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, üçüncü bölümde (1.1)-(1.2) ve (1.4)-(1.6) problemleri için verilen teorik sonuçları doğrulayan bir nümerik çözüm algoritması ve teorik sonuçlarının doğruluğunu test etmek için somut örnekler verilip sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Şimdi de sunduğumuz metodu açıklama niteliğinde birkaç nümerik sonuç verelim.

### 4.1. (1.1)-(1.2) Problemi için Çözüm Algoritması ve Nümerik Sonuçlar

a)(3.21)- (3.22) problemini aşağıdaki kuazilinearizasyon tekniğini kullanarak çözeriz:

$$\varepsilon \theta_i u_{x_i}^{(n)} + a_i u_i^{(n)} = f(x_i, \lambda^{(n-1)}), \quad 1 \leq i < N, \quad (4.1)$$

$$u_0^{(n)} = A, \quad (4.2)$$

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} - \frac{f(l, \lambda^{(n-1)}) - \theta_N \rho^{-1}(B - u_{N-1}^{(n)}) - a_N B}{(\partial f / \partial \lambda)(l, \lambda^{(n-1)})}, \quad (4.3)$$

$\lambda^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  için verilmiş başlangıç değerlerdir(basit olması için  $u_i$  ve  $\lambda$  üzerindeki  $h$  ihmal edilmiştir.).  $\lambda^{(0)}$  başlangıç değeri (3.1) şartına bağlı olarak seçilmiştir.

$$a) \quad \varepsilon u'(x) + \frac{1}{1+x^2} u(x) = 2\lambda + \sin \frac{\lambda x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.4)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (4.5)$$

problemini alalım.

(4.1)-(4.2)'de başlangıç değer olarak  $\lambda^{(0)} = 0,00039$  alınmış ve durdurma kriteri

$$\max_i |u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| \leq 10^{-5}; \quad |\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}| \leq 10^{-5}$$

şeklinde belirlenmiştir.

Ele alınan problemin kesin çözümü mevcut değildir. Bu nedenle, hataları değerlendirmek ve hesaplanmış çözümdeki nümerik yakınsama hızını belirlemek için çift şebeke yöntemi kullanılmıştır. Yani hesaplanmış çözüm ile iki defa daha sıkı olan şebekedeki çözüm karşılaştırılır. Bu yolla elde edilen hatalar ve yakınsama hızları;

$u_i^h$  için

$$e_u^{\varepsilon,h} = \max_i |u_i^h - u_{2i}^{h/2}|, p_u^{\varepsilon,h} = \ln(e_u^{\varepsilon,h}/e_u^{\varepsilon,h/2})/\ln 2$$

ve  $\lambda^h$  için

$$e_\lambda^{\varepsilon,h} = |\lambda^h - \lambda^{h/2}|, p_\lambda^{\varepsilon,h} = \ln(e_\lambda^{\varepsilon,h}/e_\lambda^{\varepsilon,h/2})/\ln 2$$

şeklindedir.

**Tablo 4.1.** (4.4)-(4.5) probleminin çözümünden elde edilen  $e_u^{\varepsilon,h}$  maksimum hata ve  $p_u^{\varepsilon,h}$  yakınsama hızları

$\varepsilon$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$
$10^{-3}$	0.00002235	0.00001069	0.00000566
	1.064	1.064	1.028
$10^{-4}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-5}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-6}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-7}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-8}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-9}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-10}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-11}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$10^{-12}$	0.00002235	0.00001069	0.00000571
	1.064	1.064	1.014
$e_u^{\varepsilon,h}$	<b>0.00002235</b>	<b>0.00001069</b>	<b>0.00000571</b>
$p_u^{\varepsilon,h}$	<b>1.064</b>	<b>1.064</b>	<b>1.014</b>

**Tablo 4.2.** (4.4)-(4.5) probleminin çözümünden elde edilen  $e_{\lambda}^{\varepsilon,h}$  maksimum hata ve  $p_{\lambda}^{\varepsilon,h}$  yakınsama hızı

$\varepsilon$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$
$10^{-3}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.028	1.028	1.028
$10^{-4}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-5}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-6}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-7}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-8}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-9}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-10}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-11}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$10^{-12}$	0.00000506	0.00000248	0.00000123
	1.027	1.027	1.014
$e_{\lambda}^{\varepsilon,h}$	<b>0.00000506</b>	<b>0.00000248</b>	<b>0.00000123</b>
$p_{\lambda}^{\varepsilon,h}$	<b>1.027</b>	<b>1.027</b>	<b>1.014</b>

Tablo 4.1 ve Tablo4.2; çift şebeke prensibi üzerinde,  $\varepsilon$  ve  $h$  'ın farklı değerleri için bazı nümerik sonuçlar içermektedir. Burada ortaya çıkan sonuç, nümerik çözümün  $\varepsilon$  pertürbasyon parametresine göre birinci dereceden düzgün yakınsak olduğu görülmüştür Bu da Teorem 3.1 ile verilen teorik sonuçlarla uyumludur.

## 4.2. (1.4)-(1.6) Problemi için Çözüm Algoritması ve Nümerik Sonuçlar

a) Lineer olmayan (3.58)-(3.60) problemini çözmek için aşağıdaki iterasyon kuazi-linearizasyon iterasyon metodu kullanılmıştır:

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} - \frac{(B - u_{N-1}^{(n-1)})\rho_N^{-1} + f(T, B, \lambda^{(n-1)})}{\partial f / \partial \lambda(T, B, \lambda^{(n-1)})}, \quad (4.6)$$

$$u_0^{(n)} = A - K(t_N, u_N^{(n-1)})h_N B - \sum_{i=1}^{N-1} h_i K(t_i, u_i^{(n-1)}), \quad (4.7)$$

$$u_i^{(n)} = u_i^{(n-1)} - \frac{(u_i^{(n-1)} - u_{i-1}^{(n)})\rho_i^{-1} + f(x_i, u_i^{(n-1)}, \lambda^{(n)})}{\partial f / \partial u(x_i, u_i^{(n-1)}, \lambda^{(n)}) + \rho_i^{-1}}, \quad (4.8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Burada  $p_i = h_i / \varepsilon$ ;  $\lambda^{(0)}$  ve  $u_i^{(0)}$  ( $1 \leq i \leq N-1$ ) başlangıç iterasyon verileridir ( $u_0^{(0)} = A$ ).

$$a) \quad \varepsilon u'(x) + 2u - e^{-u} + x^2 + \lambda + \tanh(\lambda + x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (4.9)$$

$$u(0) + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-s} u(s) ds = 1, \quad (4.10)$$

$$u(1) = 0 \quad (4.11)$$

problemini ele alalım. Burada, (4.6) (4.8) iterasyon sürecinin hesaplanması için  $\alpha = 2$  alınmış ve  $\lambda^{(0)} = -0.5$ ,  $u_i^{(0)} = 1 - t_i^2$  başlangıç değerler olmak üzere, durdurma kriteri ise

$$\max_i |u_i^{(n)} - u_i^{(n-1)}| \leq 10^{-5}; \quad |\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}| \leq 10^{-5}$$

şeklinde belirlenmiştir.

Ele alınan problemin kesin çözümü mevcut değildir. Bu nedenle, hataları değerlendirmek ve hesaplanmış çözümdeki deneysel yakınsama hızını belirlemek için çift şebeke yöntemini kullanırız. Yani hesaplanmış çözüm ile iki defa daha sıkı olan şebekedeki çözüm karşılaştırılır. Bu yolla elde edilen hatalar ve yakınsama hızları;  $u_i^N$  için

$$e_u^{\varepsilon, N} = \max_i |u_i^{\varepsilon, N} - \tilde{u}_{2i}^{\varepsilon, 2N}|, \quad p_u^{\varepsilon, N} = \ln(e_u^{\varepsilon, N} / e_u^{\varepsilon, 2N}) / \ln 2$$

ve  $\lambda^N$  için ise,

$$e_{\lambda}^{\varepsilon,N} = |\lambda^{\varepsilon,N} - \tilde{\lambda}^{\varepsilon,2N}|, \quad p_{\lambda}^{\varepsilon,N} = \ln(e_{\lambda}^{\varepsilon,N} / e_{\lambda}^{\varepsilon,2N}) / \ln 2$$

şeklindedir.

**Tablo 4.3.** (4.9)-(4.11) probleminin çözümünden elde edilen ve  $\omega_N$  Bakhvalov şebekesi üzerinde  $e_u^{\varepsilon,N}$  maksimum hata ve  $p_u^{\varepsilon,N}$  yakınsama hızları

$\varepsilon$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$2^0$	0.00464342	0.00249526	0.00128984	0.00065893	0.00033245
	0.896	0.952	0.969	0.987	
$2^{-4}$	0.00692191	0.00372224	0.00192142	0.00065782	0.00033143
	0.895	0.954	0.974	0.989	
$2^{-8}$	0.00460314	0.00247876	0.00128398	0.00065412	0.00032979
	0.893	0.949	0.973	0.988	
$2^{-12}$	0.00460181	0.00247290	0.00128183	0.00065348	0.00032947
	0.896	0.948	0.972	0.988	
$2^{-16}$	0.00460557	0.00247492	0.00128110	0.00065175	0.00032837
	0.896	0.950	0.975	0.989	
$e_u^{\varepsilon,N}$	<b>0.00464342</b>	<b>0.00372224</b>	<b>0.00128984</b>	<b>0.00065893</b>	<b>0.00033245</b>
$\rho_u^{\varepsilon,N}$	<b>0.895</b>	<b>0.954</b>	<b>0.969</b>	<b>0.987</b>	

**Tablo 4.4 .** (4.9)-(4.11) probleminin çözümünden elde edilen ve  $\omega_N$  Bakhvalov şebekesi üzerinde  $e_{\lambda}^{\varepsilon,N}$  maksimum hata ve  $\rho_{\lambda}^{\varepsilon,N}$  yakınsama hızları

$\varepsilon$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$2^0$	0.00749478	0.00402193	0.00204612	0.00102448	0.00051242
	0.898	0.975	0.998	1.000	
$2^{-4}$	0.00742715	0.00399393	0.00203893	0.00102159	0.00051114
	0.895	0.970	0.997	0.999	
$2^{-8}$	0.00723501	0.00391767	0.00202090	0.00101748	0.00051051
	0.885	0.955	0.990	0.995	
$2^{-12}$	0.0070768	0.00385598	0.00200291	0.00102333	0.00051019
	0.876	0.945	0.983	0.990	
$2^{-16}$	0.00692575	0.00379203	0.00198065	0.00100764	0.00050909
	0.869	0.937	0.975	0.985	
$e_{\lambda}^{\varepsilon,N}$	<b>0.00749478</b>	<b>0.00402193</b>	<b>0.00204612</b>	<b>0.00102448</b>	<b>0.00051242</b>
$\rho_{\lambda}^{\varepsilon,N}$	<b>0.898</b>	<b>0.975</b>	<b>0.998</b>	<b>1.000</b>	

Tablo 4.3 ve Tablo 4.4; çift şebeke prensibi üzerinde,  $\varepsilon$  ve  $N$  'nın farklı değerleri için bazı nümerik sonuçlar içermektedir. Burada ortaya çıkan sonuç, nümerik çözümün  $\varepsilon$  pertürbasyon parametresine göre birinci dereceden düzgün yakınsak olduğu görülmüştür. Bu da Teorem 3.2 ile verilen teorik sonuçlarla uyumludur.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında uygulamalı (fizik, kimya, biyoloji, tıp, mühendislik vb. gibi) bilimlerde geçen bazı fiziksel olaylarda ortaya çıkan parametreye bağlı singüler perturbe olmuş çözüm fonksiyonuna göre lineer ve integral sınır şartı içeren lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümleri incelemektir. Bu problemler için asimptotik açılımlar yoluyla yaklaşık çözümlerin incelenmesi, belirli kesinliğe sahip fark şemalarının kurulması, hatalarının değerlendirilip  $\varepsilon$  'a göre düzgün yakınsaklığının belirlenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, bu fark problemlerinin gerçekleştirilmesi için uygun birer iterasyon süreci de incelenmiştir.

Bu tezde önce, (1.1)-(1.2) probleminin, fark şemasının hatasının değerlendirilmesinde ve yakınsaklığının incelenmesinde gerekli olan,  $u(x)$  çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şeması ise, üstel baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonları içeren integral kuadratur formüllerinden yararlanılarak kurulmuş ve fark şemasının ayrık maksimum normda birinci dereceden  $\varepsilon$  -düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Bu metod, Surla (1988), Miller ve Carrol (1990), Selvakumar (1994), Amiraliyev ve Memedov (1995) ve Amiraliyev ve vd (2004)'de kullanılan metoda benzerdir. Ayrıca, sunulan metodun etkinliğini görmek için alınan teorik sonuçlar bir örnek üzerinde test edilmiş ve elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçları ispatlar niteliktedir. Bu sonuçlar  $u$  için Tablo 4.1'de  $\lambda$  için Tablo 4.2'de  $\varepsilon$  parametresinin  $\varepsilon = 10^{-i}$ ,  $i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$  ve  $h$ 'ın  $h = 1/8, 1/16, 1/32$  değerleri için sırayla  $u$  için Tablo 4.1'de  $\lambda$  için Tablo 4.2'de verilmiştir.

Daha sonra, (1.4)-(1.6) problemlerinin fark şemasının hatasının değerlendirilmesinde ve yakınsaklığının incelenmesinde gerekli olan, problemin  $u(x)$  çözümü bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra fark şeması ise, Bakhvalov şebekesi üzerinde parçalı sabit baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuş ve fark şemasının ayrık maksimum prensibine göre  $O(N^{-1})$  kesinlikli düzgün yakınsaklığa sahip olduğu incelenmiştir. Buna benzer teknikler Amiraliyev (1988), Bakhvalov (1969), Amiraliyev vd. (2006) ve Kudu,



(2018)'de kullanılmıştır. Ayrıca, sunulan metodun etkinliğini görmek için alınan teorik sonuçlar bir örnek üzerinde test edilmiş ve elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçları ispatlar niteliktedir. Bu sonuçlar  $u$  için Tablo 4.3'de  $\lambda$  için Tablo 4.4'de  $\varepsilon$  parametresinin  $\varepsilon = 2^{-i}$ ,  $i = 0, 4, 8, 12, 16$ ; ve  $N$ 'ın  $N = 64, 128, 256, 512, 1024$  değerleri için verilmiştir.

Bu çalışmada sunulan nümerik çözümlerin, incelenen problemlerle ilgili daha ileri çalışmalara alt yapı oluşturacağı beklenmektedir.



## KAYNAKLAR

- Abd-Elateef Kamar, A. R.,(1999). “Monotone iterative technique for degenerate singular perturbation problem”, *İCNPA*, **1**, 1-8.
- Abd-Elateef Kamar and A.R.,(1999). “Monotone iterative technique for singular perturbation problem”, *Applied Mathematics and Computations*, **131**,559-571.
- Ahmad, B., Khan, R.A. and Sivasundaram, S. ,(2005). “Generalized quasilinearization method for a first order differential equation with integral boundary condition, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*”, *Series at Mathematical Analysis*, **12**: 289-296.
- Amirali, G. and Amirali, İ.,(2018). Nümerik Analiz, *Seçkin Yayıncılık*, Ankara, Türkiye, 496s.
- Amiraliyev, G. M.,(1988) “On the numerical solution of the system of Boussinesque with boundary layers”. *USSR Modelling in Mechanics(Russia)*, **3**, No. 3, 3-14.
- Amiraliyeva, I.G. and Amiraliyev, G.M.,(2009). “Uniform difference method for perturbed delay differential equations”, *Numerical Algorithms* **52**,509- 521
- Amiraliyev, G.M. and Duru, H., (2005). “A note on a parameterized singular perturbation Problem”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **182**: 233–2 242.
- Amiraliyev, G.M., Kudu, M. and Duru, H.,(2004).“Finite-difference method for singularly perturbed problem”, *Journal of Applied Mathematics*, **3(2004)**, 191-199.
- Amiraliyev, G.M., Amiraliyeva, I.G. and Kudu, M.,(2007). “A numerical treatment for singularly perturbed differential equations with integral boundary condition”, *Applied Mathematics and Computations*, **185**:574-582.
- Amiraliyev, G.M., Kudu,M. and Duru, H.,(2006). “Uniform difference method for a parameterized singular perturbation problem”. *Applied Mathematics and Computations*, .175,89-100.
- Amiraliyev, G. M. and Mamedov, Y.D.,(1995).” Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed peseud-parabolic equation”. *Turkish Journal Of Mathematics*, **9**, 207-222.
- Bakhvalov, N.S.,(1969) “On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer”, *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki İ Matmematicheskoi Fiziki***9(4)**, 139-166.
- Cannon,J.R.,(1963) “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”,*Quarterly of Applied Mathematics* **21(2)**,155-160.

- Cen,Z.,(2008) “A second order difference scheme for a parameterized singular perturbation problem”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 221,174-182.
- Çakir, M.,(2016) “A numerical study on the difference solution of singularly perturbed semilinear problem with integral boundary condition”, *Mathematical Modelling and Analysis* 21(5), 644–658.
- Çakir, M. and Amiraliev, G.M.,(2007) “Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem”, *International Journal of Applied Mathematics*. 84(10), 1465–1481.
- Das, P. (2015) “Comparison of a priori and a posteriori meshes for singularly perturbed nonlinear parameterized problems”, *Journal of Computational Applied Mathematics* 290, 16–25.
- Feckan, M.,(1994) “Parametrized singularly perturbed boundary value problems”, *Journal Mathematics Analysis and Applications*, 188, No. 2, 426-435.
- Farrel,P.A.,Hegarty,A.F.,Miller,J.J.H.,O’Riordan,E.,Shishkin, G.I. and Robu, (2000) “Computational Techniques for Boundary”*Layers.Chapman Hall/CRC*,New York.
- Gülle, A. and Duru, H., (1998) “Convergence of the iterative process to the solution of the boundary problem with the parameter”, *Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, 18, No. 3-4, 34-40.
- Jankowski, T., (1990).“One-step methods for ordinary differential equations with parameters”., *Aplikace Matematiky* 35(1), 67–83.
- Jankowski,T., (1993) “Existence, uniqueness and approximate solutions of problems with a parameter”., *Zeszyty Navkowe Politechnika Gdanska* 16, 3-167.
- Jankowski,T. and Lakshmikantham, S., (1997) “Monotone iterations for differential equations with a parameter”, *International Journal of Stochastic Analysis*, 10, No. 3, 273-278.
- Jankowski, T., (2002) “Application of the numerical-analytical method to systems of differential equations with a parameter”, *Ukrainian Mathematical Journal* 54(4), 671–683.
- Jankowski, T.,(2003) “Existences of quasilinearization method for differential equations with integral boundary conditions”, *Mathematical and Computer Modelling*, 37(2003),155-165.
- Kadalbajoo, M. K. and Gupta, V.,(2010) “A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 3641-3716.

- Kadalbajoo, M. K., Reddy and Y. N.,(1989) “Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems”, A survey. *Applied Mathematics and Computation*, 30, 223-259.
- Kadalbajoo, M., Patidar and K.C.,(2002) “A survey numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations”. *Applied Mathematics and Computation*, 130, 457-510.
- Kassoy, D.R.,(1982) “A note asymptotic methods for jump phenomena”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 42, 926-932 .
- Kevorkian J, and Cole J.D , (1996) “Multiple scale and singular perturbation methods”, *Springer*, New York, 320s.
- Kudu, M. and Amiraliyev, G.M., “Finite difference method for a singularly perturbed differential equations with integral boundary condition”. *International Journal of Mathematics and Computation* 24(3), 72–79, (2015).
- Kudu , M.,(2018) “A parameter uniform difference scheme for the parameterized singularly perturbed problem with integral boundary condition”, *Advanced and Differences Equations*, 2018, Article ID(2018).
- Kudu, M., Amıralı, I. and Amıraliyev, G. M.,(2018) “Uniform Numerical proximation for Parameter Dependent Singularly Perturbed Problem with Integral Boundary Condition”, *Miskolc Mathematical Notes* ,19(1), 337–353.
- Kumar, S. and Kumar, M., (2017) “A second order uniformly convergent numerical scheme for parameterized singularly perturbed delay differential problems”, *Numerical Algorithms* 76(2), 349–360.
- Kumar, M., Singh, P. and Mishra, H. K.,(2007) “A recent survey on computational techniques for solving singularly perturbed boundary value problems”, *International Journal of Computer Mathematics*, 84(10), 1439-1463.
- Linß, T., (2010) “Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems”. *Lecture Notes in Mathematics 1985*, Springer-Verlag, Berlin.
- Liu, X. and Mcare F.A., (2001) “A Monotone iterative methods for boundary value problems of parameteric differential equation”, *14*:183-187.
- Miller, J. J. and Carrol, J.,(1990) “Completely exponentially fitted finite difference schemes for some singular perturbation problems”, *Siam Journal Numerical Analysis* , 25, 225-230.
- Miller, J. J. H., O’Riordan, E and Shishkin, G. I.,(2012) “Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems”, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 191s.
- Na, T.Y.,(1979) “Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems”, *Academic Press*,New York.

- Nayfeh, A. H.,(1993) “Introduction to Perturbation Techniques”, **Wiley**, New York, 520s.
- O’Malley, R. E. Jr., (1991) “ Singular Perturbations Method for Ordinary Differential Equations”, **Springer-Verlag**, New York. 236s.
- O’Riorden, E. and Stynes, M.,(1987) “A uniform finite element method for conservative singularly perturbed problem”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 18 , 163-174.
- Pomientale, T. A.,(1976) “ Constructive theorem of existence and uniqueness for the problem  $y' = f(x, y, \lambda)$ ,  $y(a) = \alpha$ ,  $y(b) = \beta$ .”, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**. 56:387-388.
- Prandtl, L.,(1905) “Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung,” *in Verhandlung des Dritten Inter Nationalen Mathematiker-Kongresses*, Tübner, Leipzig, Germany, pp. 484–491.
- Robert, S. M.,(1982) “A boundary value technique for singular perturbation problems”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 87, 489-508.
- Roos, H.G., Stynes, M. and Tobiska, L.,(2008) “**Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations**”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 598s.
- Schmisser, C. and Weiss, R.,(1986) “Asymptotic analysis of singularly perturbed boundary value problems”, **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 17, 560-579.
- Selvakumar, K.,(1994) “A computational method for solving singular perturbation problems using exponentially fitted finite difference schemes”, **Applied Mathematics and Computation**, 66, 277-292.
- Sigamani, V., Miller, J.J.H., Narasimhan, R., Mathiazhagan, P. and Victor, F., (2015)“**Differential Equations and Numerical Analysis**”, Springer, New Delhi, India, 172s.
- Shishkin, G.I and Shishkina, L.P., (2009) “**Difference methods for singular perturbation Problems**”, CRC Press, Boca Raton, Florida.

## ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. Yüksek öğrenime 2010 yılında Diyarbakır Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde başladı ve 2015 yılında mezun oldu. 2016 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimine halen devam etmektedir.

