

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE
ÖZELLİKLİ PROBLEMLER İÇİN ASİMPOTİK VE NÜMERİK
ÇÖZÜMLER

Pınar KURNAZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

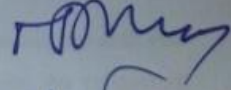
ERZİNCAN
2019

Her Hakkı Saklıdır.

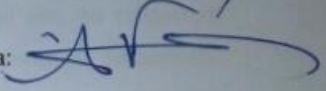
Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU danışmanlığında, Pınar KURNAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 24/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

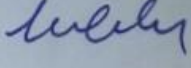
Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

İmza: 

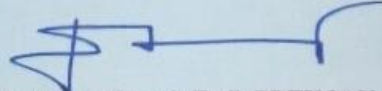
Üye : Prof. Dr. Yılmaz ALTUN

İmza: 

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

İmza: 

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 08/07/2019 tarih ve 26/2..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.




Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

“Birinci ve İkinci Mertebeden Singüler Pertürbe Özellikli Problemler İçin Asimptotik ve Nümerik Çözümler” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımda intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 24/05/2019



Pınar KURNAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ PROBLEMLER İÇİN ASİMPOTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Pınar KURNAZ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

Bu çalışmada, singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden başlangıç değer problemi için $O(\varepsilon)$ ve $O(\varepsilon^2)$ tipi ve ikinci mertebeden sınır değer problemi için $O(\sqrt{\varepsilon})$ ve $O(\varepsilon)$ tipi asimptotik açılımlar ele alınmıştır. Bu açılımlar iç ve dış sınır kat fonksiyonları içermektedir. Maksimum prensibi kullanılarak açılımların kalan terimlerinin yakınsama hızları değerlendirilmiştir. Ayrıca çalışmada ikinci mertebeden self adjoint sınır değer problemi için ε -düzgün yakınsak fark şeması kurulmuş ve kesin çözüme yakınsama hızı değerlendirilmiştir. Bunun öncesinde fark şemasının kurulmasında ve incelenmesinde yararlanılan asimptotik eşitsizlikler belirlenmiştir. Bölüm sonlarında teoriyi destekleyici nümerik örnekler verilmiştir.

2019, 69 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik açılım, başlangıç değer problemi, başlangıç katı, sınır değer problemi, sınır katı, singüler pertürbe problem

ABSTRACT

Master Thesis

ASIMPTOTIC AND NUMERICAL SOLUTIONS FOR FIRST AND SECOND ORDER SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS

Pınar KURNAZ

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa KUDU

In this study, $O(\varepsilon)$ and $O(\varepsilon^2)$ type asymptotic expansions for the first order singularly perturbed initial value problem and $O(\sqrt{\varepsilon})$ and $O(\varepsilon)$ type asymptotic expansions for second order singularly perturbed boundary value problem have been considered. These expansions contain inner and outer layer functions. The convergence rates of the remainder terms of the expansions were evaluated using the maximum principle. In addition, in the study, the ε -uniform convergent difference scheme and its rate of convergence for the second order self adjoint boundary value problem was analyzed. The asymptotic estimates used in establishing and analyzing the difference scheme were determined before this. At the end of each section, numerical examples supporting the theory are given.

2019, 69 Pages

Keywords: Asymptotic expansion, boundary value problem, boundary layer, initial value problem, initial layer, singularly perturbed problem

TEŐEKKÖR

Bu tez çalıőmasında, gösterdiği her türlü destek ve yardımlarından dolayı danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU' ya, ayrıca çalıőmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen Prof. Dr. Gabil AMİRALİ' ye Őükranlarımı sunarım. Bana uygun çalışma ortamı sağlayan ve sabır gösteren tüm aileme teőekkr ederim.

Pınar KURNAZ

Mayıs, 2019



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Temel Tanım ve Teoremler	5
2.1.1. Regüler ve singüler pertürbe (başlangıç / sınır katı) problemi	5
2.1.2. Nümerik integralleme formülleri	9
2.1.3. Diferansiyelleme formülü	11
2.1.4. Düzgün şebeke ve şebeke fonksiyonu	11
2.1.5. Sürekli ve düzgün şebeke normlarının fark benzeri	11
2.1.6. Düzgün şebekede birinci ve ikinci mertebeden nümerik türevler	12
2.1.7. Gauss eliminasyon yöntemi	12
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	14
3.1. Singüler Pertürbe Özellikli Birinci Mertebeden Başlangıç Değer Problemi	14
3.1.1. Perturbasyon parametresine göre asimptotik açılımlar.....	14
3.1.2. (3.1)-(3.2) Probleminin fark şemasının oluşturulması.....	22
3.1.3. Yakınsaklık ve hata değerlendirmesi.....	25
3.2. Singüler Pertürbe Özellikli İkinci Mertebeden Lineer Sınır Değer Problemi	30
3.2.1. Perturbasyon parametresine göre asimptotik açılımlar.....	31
3.2.2. (3.69)-(3.70) Probleminin fark şemasının kurulması	43
3.2.3. Yakınsaklık ve hata değerlendirmesi.....	46
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	55
4.1. (3.1)-(3.2) Probleminin $O(\varepsilon)$ ve $O(\varepsilon^2)$ Asimptotik Çözümleri İçin Örnek...55	55
4.2. (3.1)-(3.2) Probleminin Nümerik Çözümü İçin Örnek.....	59
4.3. (3.69)-(3.70) Probleminin $O(\sqrt{\varepsilon})$ Asimptotik Çözümü İçin Örnek	60
4.4. (3.69)-(3.70) Probleminin Nümerik Çözümü İçin Örnek.....	63

5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	65
KAYNAKLAR	66
EKLER.....	69
EK-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	69
ÖZGEÇMİŞ	70



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. Örnek 2.1.2'deki problemin çözümünün ε 'na göre değişimi.....	7
Şekil 2.2. Örnek 2.1.3.'deki problemde $\varepsilon = 0,03$ için $y(x, \varepsilon)$ çözümü.....	9



TABLULAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 4.1. (4.1)-(4.2) probleminin asimptotik çözümünden elde edilen değerler	58
Tablo 4.2. (4.1)-(4.2) probleminin asimptotik çözümünden elde edilen değerler	59
Tablo 4.3. (4.1)-(4.2) probleminin nümerik çözümünden elde edilen değerler.....	60
Tablo 4.4. (4.7)- (4.8) probleminin asimptotik çözümünden elde edilen değerler.....	63



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\varphi_i(x)$	Baz Fonksiyonu
$O(\varepsilon)$	Birinci Mertebeden Asimptotik Açılım
u_a	Diferansiyel Denklemin Asimptotik Çözümü
u	Diferansiyel Denklemin Kesin Çözümü
y	Diferansiyel Denklemin Yaklaşık Çözümü
L	Diferansiyel Operatör
C	ε ve h 'tan Bağımsız Sabit
ε	Pertürbasyon Parametresi
h	Şebeke Adım Uzunluğu
N	Şebeke Elemanlarının Sayısı
$O(h)$	Yakınsaklık Hızı

1. GİRİŞ

Reel dünyadaki pek çok önemli doğa olayının değişik parametrelere ani değişiklikler gösteren olayların matematik modeli, diferansiyel problemlerin değişik tipleri ile irtibatlı olan pertürbe özellikli problemlerle formüle edilir. Perturbasyon (Regüler ve Singüler Perturbasyon) teorisinin, matematikte ve uygulamalı bilimlerde önemli bir yeri vardır. Örneğin, bu tip problemler, yüksek Reynold sayılı sıvı akışı süreçlerinde, kimyasal reaktör teorisi, hareketli ortamlarda elektromanyetik alan problemi, elektroanalitik kimyada, nehir şebekelerinde su kalitesi problemleri, büyük Peclet sayılı konvektif ısı taşıma problemi, iletken cihaz modellemesinde difüzyon denklemi, opsiyon fiyatlamasının finansal modellenmesi, yeraltı rezervuarlarından petrol çıkarımı simülasyonu, plaka ve kabuk teorisi, atmosferik kirlilik, yeraltı suyu taşımacılığı vb. gibi değişik fiziksel olayların matematik modeli olarak ortaya çıkmaktadır. Bu modeller, perturbasyon parametresi olarak bilinen küçük bir parametre içerir. En yüksek mertebeden türevlerin katsayılarının küçük parametrelili olan matematiksel modele singüler pertube problemi denir. Bu problemlerin çözümlerinin özelliği; perturbasyon parametresi olarak adlandırılan ε 'un çok küçük değerleri için tanım bölgesinin bazı bölümlerinde düzensiz davranışlar göstermesidir. Yani çözümlerin tanım bölgesinin başlangıç ve sınır katları denilen ince geçiş bölgelerinde çok hızlı ve oldukça düzensiz değişirken, diğer bölgelerde ise yavaş ve düzenli değişir. Bu düzensizlik singüler pertürbe problemlerin çözümünün incelenmesinde ciddi zorlukların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Yani, bu alanlarda çözümün türevleri sınırsız olur. Çok küçük parametre değerleri için çözümün ani ve çok hızlı değişiklik gösterdiği bölgeye sınır katı bölgesi denir (Doolan vd., 1980; Amirali vd., 2018).

Kısaca, "singüler pertürbe" olmuş problemler için, asimptotik ve nümerik metotların sistematik biçimde incelenmesinin başlangıcı, çok da uzak olmayan geçmişe dayanır ve şu an için pek çok orijinal araştırma makalesi ve araştırma kitabı bulunmaktadır (Bellman, R., 1964; Bender vd., 1978; Doolan vd., 1980; Kadalbajoo vd., 1989; Kadalbajoo vd., 2002; Kumar vd., 2007; Kadalbajoo vd., 2010 ve Gupta vd., 2012; O' Malley, 1991; Nayfeh, 1993; Kevorkian vd., 1996; Farrel vd., 2000; Roos vd., 2008; Linß, 2009; Miller vd., 2012; Sigamani vd., 2015; Amirali ve Amiraliyeva, 2018).

Başlangıç-değer problemlerin çözümü için pek çok araştırmacı tarafından değişik nümerik metotlar sunulmuştur. Düzgün şebekede üzerinde, üstel katsayılı fark şemalarının yakınsaklığı Doolan vd. (1980), Sigamani, V. vd. (2015) tarafından incelenmiştir. Shishkina ve Shishkin (2018)' de Cauchy problemi için parçalı düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şemasının düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

Singular perturbe özellikli sınır-değer problemlerinin çözümü için geliştirilen başlangıç-değer teknikleri yardımıyla analitik-yaklaşık çözümlerinin bazı özelliklerinin incelenmesi Bellman (1964), Robert (1982), O' Malley (1991) ve Nayfeh (1993) ve çözümlerinin varlık-teklik, asimptotik ve analitik-yaklaşık durumlarının incelenmesi ise, Kassooy (1982), Schmisser ve Wiess (1986), Kadalbajoo ve Reddy (1989), O' Malley (1991) tarafından yapılmıştır.

Literatürde sınır katı içeren sınır-değer problemlerinin ε perturbasyon parametresine göre düzgün yakınsak olan pek çok değişik nümerik yöntem geliştirilmiştir (Ascher vd.,1988; Farrel vd., 2000; Bawa, 2007; Roos vd., 2008; Clavero vd., 2009; Shishkin ve Shishkina, 2009; Linß, 2009; Bawa ve Clavero, 2010; Miller vd., 2012; Khuri ve Sayfy, 2014; Sigamani vd., 2015; Ali vd., 2018).

Genel olarak, sınır katı içeren sınır-değer problemlerinin nümerik çözümü için üç temel yaklaşım vardır. Bunlar; sonlu fark yöntemleri, sonlu elemanlar yöntemleri ve spline collacasyon yöntemleridir.

Sonlu farklar metodu ile ilgili çalışmalar (Amiraliyev,1988; Miller ve Carrol, 1990; Selvakumar, 1994; Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amirali ve Amiraliyeva, 2018) tarafından, sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili çalışmalar (O'Riorden ve Stynes, 1987; Roos vd., 2008; Lubuma ve Patidar, 2009; Linß, 2009; Miller vd., 2012) tarafından yapılmıştır. Ve spline collacasyon yöntemleri kullanılarak oluşturulan fark şemaları ve onların düzgün yakınsaklıkları ile ilgili bazı özellikleri (Surla, 1988; Kadalbajoo ve Aggarwal, 2005; Natesan ve Bawa, 2007; Rao ve Kumar, 2010; Linß ve Radojev, 2016; Lodhi ve Mishra, 2017) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş ve literatür bildirişleri bölümüdür.

İkinci bölümde gerekli ön bilgiler ve notasyonlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde önce, birinci mertebeden lineer singular perturbe özellikli

$$\begin{aligned} Lu \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) &= f(x), 0 \leq x \leq l, \\ u(0) &= A, \end{aligned}$$

başlangıç-değer problemi üç alt başlıkta incelenmiştir.

Burada ε küçük pozitif parametre, $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve A verilmiş sabittir. Düzgünlük derecesi yeri geldiğince somutlaştırılacaktır ve her durumda (3.1)-(3.2) probleminin bir tek çözüme sahip olduğu kabul edilecektir. Problemin $u(x)$ çözümü genel olarak, $x=0$ noktası civarında $O(\varepsilon)$ genişliğinde bir başlangıç katına sahiptir (O' Malley,1991; Sigamani, V. vd. 2015; Amirali, G. vd., 2018).

Birinci alt başlıkta, problemin önce, $u(x)$ çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiş ve $O(\varepsilon)$ ve $O(\varepsilon^2)$ tipi asimptotik açılımlar yoluyla yaklaşık problemin çözümü incelenmiştir. İkinci alt başlıkta, problemin sonlu fark şeması kurulmuş, üçüncü alt başlıkta problemin yaklaşım hatası değerlendirilmiş ve yaklaşım hızının $O(h)$ olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü alt bölümde ikinci mertebeden singular perturbe özellikli

$$\begin{aligned} Lu \equiv -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) &= f(x), 0 \leq x \leq l, \\ u(0) &= A, \quad u(l) = B, \end{aligned}$$

self-adjoint sınır-değer problemi üç alt başlıkta incelenmiştir. Burada, $0 < \varepsilon \ll 1$ küçük parametredir. $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır. A, B verilmiş sabitlerdir. (3.69)-(3.70) probleminin çözümü genel olarak, $x=0$ ve $x=l$ noktaları

civarında olmak üzere $O(\sqrt{\varepsilon})$ genişliğinde iki sınır katına sahiptir (O' Malley, 1991; Sigamani, V. vd. 2015; Amirali, G. vd., 2018).

İlk olarak, problemin $u(x)$ çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiş ve problemin $O(\varepsilon)$ ve $O(\sqrt{\varepsilon})$ tipi asimptotik açılımlar yoluyla yaklaşık çözümü incelenmiştir. İkinci olarak, problemin sonlu fark şeması kurulmuş, üçüncü olarak problemin yaklaşım hatası değerlendirilmiş ve yaklaşım hızının sırayla $O(h)$ ve $O(h^2)$ olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde asimptotik ve nümerik çözümler için örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1. Regüler ve singüler pertürbe (başlangıç / sınır katı) problemi

P_ε problemi, küçük $\varepsilon > 0$ perturbasyon parametresine bağlı bir problem olsun. Bu problemin $u_\varepsilon(x)$ çözümünün $L(u, \varepsilon) = 0$ denklemi ile belirlendiği kabul edilsin. Bu tür problemlere pertürbe olmuş problem denir. $\varepsilon = 0$ durumundaki, P_0 probleminin çözümü, diğer bir ifadeyle $L(u_0, 0) = 0$ bağıntısı ile tanımlanan problemin çözümü u_0 olsun. P_0 problemine; P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir.

Şimdi bazı kabuller altında P_0 ve P_ε problemlerinin çözümlerinin bazı özelliklerini inceleyelim. P_ε problemi, başlangıç-değer veya sınır-değerler ile beraber

$$P_\varepsilon : \frac{du}{dx} = f(x, u, \varepsilon), \text{ başlangıç, sınır veya karışık koşullar}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Eğer, P_0 problemi ile P_ε problemi aynı tip ve mertebeye sahipse, ayrıca, her iki problemin de bir tek çözümü varsa, P_ε problemine **Regüler Pertürbe Problem** denir. Aksi durumda ise, **Singüler Pertürbe Problem** denir.

Kısaca, Regüler Pertürbe Problem; tanım bölgesindeki tüm x 'ler için, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken, $u_\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$ olacaktır. Eğer, tanım bölgesindeki tüm x 'ler için değilde sadece bazıları için $u_\varepsilon(x) \rightarrow u_0(x)$ oluyorsa, böyle problemler singüler pertürbe problemlerdir. Böyle problemlerin çözümleri, ε ' göre seriye açılmaz, ancak başlangıç veya sınır katı denilen fonksiyonların bileşimi olarak yazılabilir.

Bu durumları aşağıda verilen örneklerle açıklayalım.

Örnek 2.1.1. Kesin çözümü,

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} \quad (2.1)$$

şeklinde olan perturbe olmuş problem

$$P_\varepsilon : \frac{du}{dx} + \varepsilon u = 0, u_\varepsilon(0) = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.2)$$

ile verilmiş olsun. $\varepsilon = 0$ için

$$P_0 : \frac{du}{dx} = 0, u_0(0) = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.3)$$

indirgenmiş problemi elde edilir. Buradan açıktır ki, (2.1) ile (2.3) problemleri aynı mertebededir ve $u_0(0) = 1$ başlangıç şartını sağlayan, P_0 probleminin bir tek çözümü,

$$u_0(x) = 1$$

biçiminde olduğundan (2.2) problemi regüler perturbe problemidir. Yani başlangıç şartı gereksiz olmadı.

Örnek 2.1.2. Kesin çözümü,

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad (2.4)$$

şeklinde olan perturbe olmuş problem

$$P_\varepsilon : \varepsilon \frac{du}{dx} + u = 0, u_\varepsilon(0) = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.5)$$

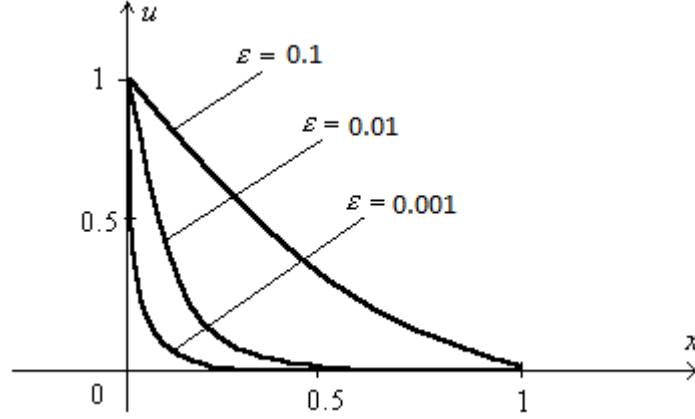
ile verilsin. $\varepsilon = 0$ için

$$P_0 : u_0(x) = 0, u_0(0) = 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (2.6)$$

indirgenmiş problemi elde edilir. Buradan açıktır ki, (2.5) ile (2.6) problemleri aynı mertebeden olmadığından ve $u_0(0) = 1$ başlangıç şartını sağlayan, P_0 probleminin bir tek $u_0(x) = 0$ çözümü var olmadığından, (2.5) problemi singular perturbe problemidir.

Yani $u_\varepsilon(0)=1$ başlangıç şartı gereksiz oldu. $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ fonksiyonu başlangıç kat fonksiyonudur. $x=0$ noktası civarında da başlangıç katı vardır.

ε parametresinin çok küçük değerleri için $x=0$ noktası civarında çözümün hızlı bir şekilde değiştiği aşağıdaki grafikten görülmektedir.



Şekil 2.1. Örnek 2.1.2'deki problemin çözümünün ε 'un bazı değerleri için grafik

Şimdi, ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli sınır değer problemine bir örnek verelim.

Örnek 2.1.3. Kesin çözümü

$$u(x) = 1 + \frac{\sinh\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} = 1 + u_1(x) + u_2(x) \quad (2.7)$$

şeklinde olan pertürbe olmuş problem

$$P_\varepsilon \begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - u + 1 = 0, x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, u(1) = 2. \end{cases} \quad (2.8)$$

ile verilmiş olsun. $\varepsilon = 0$ için

$$P_0 \begin{cases} u_0(x) = 1, x \in [0,1] \\ u_0(0) = 0, u_0(1) = 2 \end{cases} \quad (2.9)$$

şeklindeki indirgenmiş problemi elde edilir. Buradan açıktır ki, (2.8) problemi ile (2.9) probleminin mertebesi P_ε farklı olduğundan $u_\varepsilon(0) = 0, u_\varepsilon(1) = 2$ sınır şartları gereksiz hale gelmiştir. Yani, (2.9)'un çözümü,

$$u_0(x) = 1 \quad (2.10)$$

olur.

$\varepsilon \rightarrow 0$ iken, $[\delta, 1-\delta]$ aralığında $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ (2.8) çözümü (2.10) çözümüne düzgün yakınsar fakat $[0,1]$ aralığında (2.10) çözümüne düzgün yakınsamaz. $x=0$ ve $x=1$ uç noktalarında düzgün olmayan yakınsama meydana gelir (Şekil 2.2).

(2.8)'de $u_1(x)$ çözümün sol taraf sınır katı davranışını, $u_2(x)$ de sağ taraf sınır katı davranışını ifade eder. Türev alınırsa,

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\cosh\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\cosh\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} = u'_1(x) + u'_2(x)$$

elde edilir. $u'_1(x)$

$$u'_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\cosh\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\left(e^{\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)}{e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{2-x}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}}}$$

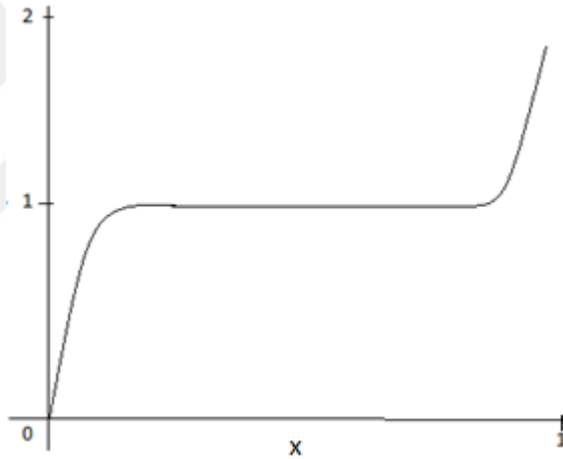
eşitliği ile ifade edilirse, $u'_1(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ sınır katındadır ve sınır katı dışında düzgün sınırlıdır. Örneğin x yerine 1 alınırsa,

$$u_1'(1) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{2e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{\frac{-2}{\sqrt{\varepsilon}}}} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ için})$$

elde edilir, $x=0$ civarı hariç ($e^{\frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}}}$ çok hızlı sıfıra gidiyor). Verdiğimiz bu örnek birincisi $x=0$ noktası, diğeri ise, $x=1$ noktası civarında olmak üzere, $O(\sqrt{\varepsilon})$ genişliğinde iki sınır katına sahiptir. Sınır katları içinde çözüm sınırlı, fakat çözümün türevleri sınırsızdır ($\varepsilon \rightarrow 0$ için). Örneğin, $u_1'(x)$ 'de x yerine $\sqrt{\varepsilon}$ yazarsak

$$-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{e^{\frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{\sqrt{\varepsilon}-2}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{\frac{-2}{\sqrt{\varepsilon}}}}$$

elde ederiz. Bu ifade $x=0$ civarında sınırsızdır.



Şekil 2.2. Örnek 2.1.3.'deki problemde $\varepsilon = 0,03$ için $u(x, \varepsilon)$ çözümü

Yukardaki örneklerden ve grafiklerden de açıktır ki, ε 'un küçük değerlerinde tanım bölgesinin bazı kısımlarında çözüm çok hızlı değişim göstermektedir. Çözümün ani ve çok hızlı değiştiği herhangi bir başlangıç ve sınır noktasının herhangi bir komşuluğuna **başlangıç veya sınır katı** denir (Amirali ve Amirali, 2018).

2.1.2. Nümerik integralleme formülleri

Düzgün şebeke üzerinde fark şeması kurmak için gelecek bölümlerde ihtiyaç duyulan Nümerik İntegralleme formülleri ve notasyonlar verilecektir (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev, 1998).

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1-\sigma)f(a) \} + f(a;b) \int_a^b (x-x^{(\sigma)})p(x)dx + R(f) \quad (2.11)$$

$p(x) \in C[a,b]$ potansiyel fonksiyon ve σ -reel parametre olmak üzere,

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \quad f \in C^n, n=1 \text{ veya } 2$$

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \quad s=0,1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, \quad f(a;b) = (f(b)-f(a))/(b-a)$$

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \lambda^s/s!, & \lambda \geq 0 \\ T_s(\lambda) = 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Bazı durumlarda, (2.11)'deki ikinci terim kalan terime dahil edilerek kullanılır.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = f(a;b) \int_a^b p(x)dx + R(f) \quad (2.12)$$

$$R(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \quad f \in C^n, n=1 \text{ veya } 2$$

(2.11) ve (2.12) formlarında kullanılan aynı $K_s(x,\xi)$ fonksiyonun bazı özellikleri

$$K_0(a,\xi) = K_0(b,\xi) = 0,$$

$$K_1(a,\xi) = K_1(b,\xi) = K_1(x,a) = K_1(x,b) = 0,$$

$$K_1(x,\xi) = K_1(\xi,x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x,\xi) = -K_0(x,\xi), \quad \frac{\partial}{\partial x} K_1(x,\xi) = -K_0(\xi,x)$$

şeklindedir.

2.1.3. Diferansiyelleme formülü

Asimptotik değerlendirmelerde çoğu zaman aşağıdaki diferansiyelleme formülünden yararlanılır:

$$g'(x) = g(\alpha_0, \alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi, \quad g \in C^2, \quad \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1 \quad (2.13)$$

burada

$$K_0(\xi, x) = \begin{cases} \frac{\alpha_1 - \xi}{\alpha_1 - \alpha_0}, & \xi \geq x \\ \frac{\alpha_0 - \xi}{\alpha_1 - \alpha_0}, & \xi < x \end{cases}$$
$$K_0(\xi, x) \leq 1.$$

2.1.4. Düzgün şebeke ve şebeke fonksiyonu

$[0, l]$ kapalı aralığında tanımlı

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \text{ ve } h = \frac{l}{N} \right\}$$

ayrık noktalar kümesine $[0, l]$ aralığında *düzgün şebeke* denir. x_i noktalarına ise şebeke noktaları veya düğümleri denir. Burada $x_i \in \omega_h$ elemanları, şebekenin düğüm noktalarını; h ise şebekenin adımını göstermektedir. Düzgün veya düzgün olmayan şebekede tanımlanmış $s_i = s(x_i)$ fonksiyonuna x_i düğüm noktalarındaki şebeke fonksiyonu denir (Samarskii, 2001).

2.1.5. Sürekli ve düzgün şebeke normlarının fark benzeri

$[0, l]$ aralığında tanımlı $s(x)$ fonksiyonu için maksimum norm

$$\|s\|_{\infty} \equiv \|s\|_{\infty, C[0, l]} \equiv \|s\|_{C[0, l]} = \max_{0 \leq x \leq l} |s|$$

şeklinde tanımlanır.

a) Düzgün şebeke üzerinde tanımlı maksimum norm

$$\|s\|_{\infty, \omega_h} = \max_{0 \leq i \leq N} |s_i|$$

b) Düzgün şebeke üzerinde tanımlı L_1 normu

$$\|s\|_{1, \omega_h} = h \sum_{i=1}^{N-1} |s_i|.$$

şeklinde tanımlanır(Samarskii, 2001).

2.1.6. Düzgün şebekede birinci ve ikinci mertebeden nümerik türevler

$[0, l]$ aralığındaki $s(x_i)$ şebeke fonksiyonunun türevleri için nümerik türevler (Samarskii, 2001):

a) Birinci mertebeden sağ nümerik türev, $s_{x,i} = \frac{s_{i+1} - s_i}{h},$

b) Birinci mertebeden sol nümerik türev, $s_{x,i} = \frac{s_i - s_{i-1}}{h},$

c) Birinci mertebeden merkezi nümerik türev, $s_{x,i} = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2h},$

d) İkinci mertebeden nümerik türev, $s_{x,x,i} = \frac{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}}{h^2}$

şeklinde tanımlanır.

2.1.7. Gauss eliminasyon yöntemi

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= k_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = k_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{aligned}$$

(2.14)

Üç noktalı fark şeması üç köşegenli bir sistemdir. Sınır koşullarını kullanarak aşağıda ifade edilen Gauss Eliminasyon metodu ile bu sistemi çözmek mümkündür.

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0$$

$$y_N = \frac{k_2\beta_N}{1-k_2\alpha_N}, (1-k_2\alpha_N \neq 0)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\beta_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\alpha_1 = k_1, \quad \beta_1 = \mu_1 (C_1 - \alpha_1 A_1 \neq 0)$$

şeklindedir. $i = 1, 2, \dots, N-1$ için

$$A_i > 0, B_i > 0, D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0$$

şartları altında algoritması kararlıdır.

Yine bu şartlar ile

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \mu_1, & y_N = \mu_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

probleminin keyfi F_i, μ_1, μ_2 için çözümü vardır ve tektir (Amirali ve Amirali, 2018).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Singüler Pertürbe Özellikli Birinci Mertebeden Başlangıç Değer Problemi

Bu bölümde, ilk önce aşağıda (3.1)-(3.2) ile verilen singüler pertürbe özellikli Cauchy probleminin $u(x)$ çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiş ve problemin $O(\varepsilon)$ ve $O(\varepsilon^2)$ tipi asimptotik açılımlar yardımıyla yaklaşık çözümü incelenmiş ve fark şeması oluşturulmuştur. Bu fark şeması oluşturulurken kalan terimi integral şeklinde olan ve baz fonksiyonu içeren nümerik integralleme formülleri kullanılmıştır. Yaklaşık fark çözümünün kesin çözüme $O(h)$ hızıyla yakınsak olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışmada, singüler pertürbe olmuş

$$Lu \equiv \varepsilon u' + a(x)u = f(x), 0 < x \leq l, \quad (3.1)$$

$$u(0) = A. \quad (3.2)$$

Cauchy problemi incelenmiştir.

Burada ε küçük pozitif parametre, $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar ve A verilmiş sabittir. Düzgünlük derecesi yeri geldikçe somutlaştırılacaktır ve her durumda (3.1)-(3.2) probleminin bir tek çözüme sahip olduğu kabul edilecektir. $u(x)$ çözümünün genel olarak, $x=0$ noktası civarında bir sınır katı vardır (O' Malley,1991; Sigamani, V. vd., 2015; Amirali, G. vd., 2018).

3.1.1. Perturbasyon parametresine göre asimptotik açılımlar

Bu kısımda, (3.1)-(3.2) probleminin çözümü için asimptotik açılım ve eşitsizliğinin değerlendirmesinde kullanılan aşağıdaki lemmaları ispatsız verelim. Bu lemmaların ispatları (O' Malley,1991; Sigamani, V. vd., 2015; Amirali, G. vd., 2018) 'deki ispatlarla benzerdir.

Lemma 3.1.1 (Maksimum Prensibi). $v(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu,

$Lv(x) \geq 0, (0 \leq x \leq l), v(0) \geq 0$ şartlarını sağlasın. O zaman $v(x) \geq 0, (0 \leq x \leq l)$ olur (Amirali vd., 2018; Doolan vd., 1980; Sigamani, V. vd., 2015).

Lemma 3.1.2. Her hangi bir $v(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu için

$$|v(x)| \leq |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.3)$$

değerlendirmesi doğrudur (Amirali vd., 2018; Doolan vd., 1980; Sigamani, V. vd., 2015).

Lemma 3.1.3. Eğer $a(x), f(x) \in C^2[0, l]$ ise, o zaman (3.1)-(3.2) probleminin çözümü için

$$|u(x)| \leq C, \quad 0 \leq x \leq l; \quad a(x), f(x) \in C[0, l] \quad \text{ise} \quad (3.4)$$

$$|u^{(k)}(x)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^k} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right), \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{ise} \quad (3.5)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: Önce (3.4)'ün doğruluğunu gösterelim. (3.1)-(3.2)'ye Lemma 3.1.2'yi uygularsak,

$$|u(x)| \leq |A| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |f(s)|$$

olur. Bu da (3.4) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

Şimdi (3.5)'in ispatını verelim. $k = 0$ ve $k = 1$ için Lemma 3 (Amirali vd., 2018, s.286-287), Teorem 2.1 (Doolan vd., 1980, s.7-8) ve Lemma 1.5 (Sigamani, V. vd., 2015, s.8) de ispatlanmıştır. (3.5)'in $k = 2$ için doğruluğunu gösterelim.

(3.1)'in ikinci türevi alınırsa

$$\varepsilon w' + a(x)w = \phi(x) \quad (3.6)$$

burada $w = u''$, $\phi(x) = f''(x) - 2a'(x)u'(x) - a''(x)u(x)$.

$$\varepsilon u'' + a(x)u' + a'(x)u = f'(x)$$

bağıntısından

$$|u''(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \quad (3.7)$$

olduğu görülür. Ayrıca $\phi(x)$ ifadesinden (3.5)'in $k=1$ durumu dikkate alındığında,

$$|\phi(x)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) \quad (3.8)$$

yazılır. (3.6)'dan (3.7) ve (3.8) dikkate alınır,

$$\begin{aligned} |u''(x)| &\leq |u''(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x |\phi(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(s) ds} d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^x \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} \right) e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C\alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) + \frac{Cx}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (3.5)'in $k=2$ için doğruluğu görülür.

Lemma 3.1.3'de ele alınan asimptotik eşitsizlikler, ε ' na göre iyileştirilemez olup, uygun sayısal yöntemlerin kurulması ve yakınsaklık özelliklerinin incelenmesinde kullanılabilir. Asimptotik eşitsizliklerin elde edilmesinde uygulanan yöntem lineer olmayan problemlere de uygulanabilir.

3.1.1.1. $O(\varepsilon)$ Tipi asimptotik açılım

Teorem 3.1.4. $a, f \in C^1[0, l]$ ise (3.1)-(3.2) probleminin çözümü için aşağıdaki açılım doğrudur.

$$u(x) = u_0(x) + v_0(x) + R_\varepsilon(x), \quad (3.9)$$

burada, $a(x)u_0(x) = f(x)$ indirgenmiş problemin çözümü, $v_0(x)$ fonksiyonu

$$\varepsilon v_0' + a(0)v_0 = 0 \quad (3.10)$$

$$v_0(0) = A - u_0(0) \quad (3.11)$$

başlangıç değer probleminin çözümü, R_ε ise (3.9) açılımının kalan terimi olup

$$|R_\varepsilon| \leq C\varepsilon \quad (3.12)$$

şeklindedir.

İspat: (3.9) açılımı, (3.1) denkleminde yerine yazılır ve (3.10) dikkate alınır

$$\varepsilon u_0' + a(x)u_0 + LR_\varepsilon(x) = f(x)$$

olur. Buradan $u_0(x)$ indirgenmiş problemin çözümü olduğundan

$$LR_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x) \quad (3.13)$$

yazılır. Burada

$$\psi_\varepsilon(x) = -\varepsilon u_0'(x) + [a(0) - a(x)]v_0 \quad (3.14)$$

(3.2), (3.9) ve (3.11)'den $R_\varepsilon(x)$ için başlangıç şartının

$$R_\varepsilon(0) = 0 \quad (3.15)$$

olması gerektiği görülür. (3.10)-(3.11)'den $v_0(x)$ 'in açık ifadesi

$$v_0(x) = (A - u_0(0))e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} \quad (3.16)$$

şeklindedir. Ayrıca ortalama değer teoremine göre

$$a(0) - a(x) = xa'(\xi), \quad (0 < \xi < x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon(x)| &\leq \varepsilon |u_0'(x)| + |a'(\xi)|x|A - u_0(0)|e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} \\ &\leq C \left(\varepsilon + xe^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, $te^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$ ($t > 0$) eşitsizliği $t = \frac{a(0)x}{\varepsilon}$ için kullanılırsa,

$$|\psi_\varepsilon(x)| \leq C \left(\varepsilon + \varepsilon a^{-1}(0) e^{-\frac{a(0)x}{2\varepsilon}} \right) = O(\varepsilon) \quad (3.18)$$

olur. Buradan ve

$$\|R_\varepsilon\|_\infty \leq \alpha^{-1} \|\psi\|_\infty \quad (3.19)$$

eşitsizliğinden (3.12)'nin doğruluğu açıktır.

3.1.1.2 $O(\varepsilon^2)$ Tipi asimptotik açılım

Teorem 3.1.5. $a, f \in C^2[0, l]$ ise (3.1)-(3.2) probleminin çözümü için aşağıdaki açılım doğrudur.

$$u(x) = u_0(x) + v_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1(x) + R_\varepsilon(x) \quad (3.20)$$

burada $u_0(x), v_0(x), u_1(x), v_1(x)$ sırasıyla aşağıdaki şekilde belirlenen fonksiyonlardır.

$$a(x)u_0(x) = f(x) \text{ (indirgenmiş problem)} \quad (3.21)$$

$$a(x)u_1(x) = -u_0'(x), \quad (3.22)$$

$$\varepsilon v_0'(x) + a(x)v_0(x) = 0, \quad (3.23)$$

$$v_0(0) = A - u_0(0), \quad (3.24)$$

$$\varepsilon v_1'(x) + a(x)v_1(x) = 0, \quad (3.25)$$

$$v_1(0) = -u_1(0). \quad (3.26)$$

$R_\varepsilon(x)$ ise, (3.20) açılımının kalan terimi olup

$$|R_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^2 \quad (3.27)$$

şeklindedir.

İspat: (3.20) açılımının sağ tarafı (3.1)'de yerine yazılırsa,

$$\varepsilon u_0' + a(x)u_0 + \varepsilon v_0' + a(x)v_0 + \varepsilon^2 u_1' + \varepsilon a(x)u_1 + \varepsilon^2 v_1' + \varepsilon a(x)v_1 + LR_\varepsilon(x) = f(x)$$

olur. Bu eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$[a(x)u_0 - f(x)] + [\varepsilon v_0' + a(x)v_0] + \varepsilon [u_0' + a(x)u_1] + \varepsilon [\varepsilon v_1' + a(x)v_1] + \varepsilon^2 u_1' + LR_\varepsilon(x) = 0$$

yazılır ve (3.20), (3.21), (3.22) ve (3.23)'e göre kare parantez içindeki ifadelerin tümünün sıfıra eşit oldukları görülür. Ayrıca buradan ve (3.2), (3.20), (3.24) ve (3.26) eşitliklerinden $R_\varepsilon(x)$ kalan teriminin

$$LR_\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 u_1', \quad (3.28)$$

$$R_\varepsilon(0) = 0 \quad (3.29)$$

başlangıç-değer probleminin çözümü olduğu açıktır.

O halde maksimum prensibine göre (3.28)-(3.29)'dan

$$|R_\varepsilon(x)| \leq \alpha^{-1} \varepsilon^2 \|u_1'\|_\infty \quad (3.30)$$

eşitsizliği yazılır. Teoremin düzgünlük şartları dahilinde $|u_1'| \leq C$ olduğundan

$R_\varepsilon(x)$ için (3.27) eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 3.1.6. $a, f \in C^2[0, l]$ ise (3.1)-(3.2) probleminin çözümü için aşağıdaki açılım doğrudur.

$$u(x) = u_0(x) + v_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon v_1(x) + R_\varepsilon(x) \quad (3.31)$$

burada $u_0(x), v_0(x), u_1(x), v_1(x)$ sırasıyla aşağıdaki şekilde belirlenen fonksiyonlardır.

$$a(x)u_0(x) = f(x) \text{ (indirgenmiş problem)} \quad (3.32)$$

$$a(x)u_1(x) = -u_0'(x), \quad (3.33)$$

$$\varepsilon v_0'(x) + a(0)v_0(x) = 0, \quad (3.34)$$

$$v_0(0) = A - u_0(0), \quad (3.35)$$

$$\varepsilon v_1'(x) + a(0)v_1(x) = -x\varepsilon^{-1}a'(0)v_0(x), \quad (3.36)$$

$$v_1(0) = -u_1(0). \quad (3.37)$$

$R_\varepsilon(x)$ ise, (3.31) açılımının kalan terimi olup

$$|R_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^2 \quad (3.38)$$

şeklindedir.

İspat: (3.31) açılımının sağ tarafı (3.1)'de yerine yazılırsa,

$$\varepsilon u_0' + a(x)u_0 + \varepsilon v_0' + a(x)v_0 + \varepsilon^2 u_1' + \varepsilon a(x)u_1 + \varepsilon^2 v_1' + \varepsilon a(x)v_1 + LR_\varepsilon(x) = f(x)$$

olur. Bu eşitlik $a(x) = a(0) + xa'(0) + \frac{x^2}{2}a''(\xi)$ şeklindeki Taylor formülü kullanılarak yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} [a(x)u_0 - f(x)] + [\varepsilon v_0' + a(0)v_0] + \varepsilon [u_0' + a(x)u_1] + \varepsilon [\varepsilon v_1' + a(0)v_1 + x\varepsilon^{-1}a'(0)v_0] + \psi_\varepsilon(x) \\ + LR_\varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 u_1' + \frac{x^2}{2} a''(\xi) v_0 + \varepsilon [a(x) - a(0)] v_1. \quad (3.39)$$

Ayrıca buradan ve (3.2), (3.31), (3.35) ve (3.37) eşitliklerinden $R_\varepsilon(x)$ kalan teriminin

$$LR_\varepsilon(x) = -\psi_\varepsilon(x), \quad (3.40)$$

$$R_\varepsilon(0) = 0 \quad (3.41)$$

başlangıç-değer probleminin çözümü olduğu açıktır.

O halde maksimum prensibine göre

$$|R_\varepsilon(x)| \leq \alpha^{-1} \|\psi_\varepsilon\|_\infty \quad (3.42)$$

eşitsizliği yazılır. Teoremin düzgünlük şartları dahilinde

$$\|\psi_\varepsilon\|_\infty \leq C\varepsilon^2 \quad (3.43)$$

olduğu aşağıdaki eşitsizliklerden kolayca görülür:

$$|u_1'| \leq \left| \left(\frac{u_0(x)}{a(x)} \right)' \right| = \left| \left(\frac{f(x)}{a^2(x)} \right)' \right| \leq C,$$

$$\left| \frac{x^2}{2} a''(\xi) v_0 \right| = \left| \frac{x^2}{2} a''(\xi) (A - u_0(0)) e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} \right| \leq C x^2 e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} \leq C \varepsilon^2 a^{-2}(0) e^{-\frac{\theta a(0)x}{\varepsilon}}, 0 < \theta < 1.$$

($t^k e^{-t} \leq e^{-\theta t}$, $0 < \theta < 1, k > 0$ eşitsizliği $k = 2$ ve $t = \frac{a(0)x}{\varepsilon}$ için kullanıldı)

$$\begin{aligned} |\varepsilon[a(x) - a(0)]v_1| &\leq \left| \varepsilon x a'(\xi) (-u_1(0)) e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} - \frac{a'(0)}{\varepsilon} \int_0^x \xi v_0(\xi) e^{-\frac{a(0)(x-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \right| \\ &\leq |a'(\xi) u_1(0)| \varepsilon x e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} + |a'(\xi) a'(0) (A - u_0(0))| x \int_0^x \xi e^{-\frac{a(0)\xi}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq |a'(\xi) u_1(0)| \varepsilon x e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} + |a'(\xi) a'(0) (A - u_0(0))| \frac{x^3}{2} e^{-\frac{a(0)x}{\varepsilon}} \\ &\leq C \varepsilon^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.40) ve (3.42)'den (3.38)'in doğruluğu gösterilmiş olur.

3.1.2. (3.1)-(3.2) Probleminin fark şemasının oluşturulması

$[0, l]$ aralığında $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = l/N\}$, $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, l\}$ düzgün şebekesi verilsin ve

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x) \phi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.44)$$

özdeşliğini ele alalım. Burada,

$$\phi_i(x) = e^{-\frac{a_i(x_i-x)}{\varepsilon}}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x) dx = \frac{1 - e^{-a_i \rho}}{a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

şeklindedir. $\phi_i(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} -\varepsilon \phi'(x) + a_i \phi(x) &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \phi(x_i) &= 1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

probleminin çözümüdür. (3.44) özdeşliği daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x) u(x) \phi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i(x) dx$$

olur. Bu son ifade gerekli düzenlemelerden sonra;

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x_i) u(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx \\ = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \phi_i(x) dx \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \phi_i(x) dx + a_i \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \phi_i(x) dx = f_i - R_i, \quad (3.46)$$

elde edilir. Burada

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i) - f(x)] \phi_i(x) dx. \quad (3.47)$$

(3.46)'deki birinci terime (2.12) formülü, ikinci terime (2.11) formülü, (x_{i-1}, x_i) aralığında $p(x) = \phi_i(x)$, $f(x) = u(x)$ ve $\sigma = 1$ alınarak ve (3.45) bağıntısı göz önünde bulundurularak uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\phi_i(x)dx &= \chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \left[\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)dx + R^* \right] \\ &= \varepsilon u_{x,i}^- + \chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon R^*\end{aligned}$$

burada

$$R^* = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\phi_i'(x) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}a_i\chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x)\phi_i(x)dx &= a_i\chi_i^{-1}h^{-1} \left[\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)dx \right) u(x_i) + \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)\phi_i(x)dx + R^{**} \right] \\ &= a_i u_i + a_i\chi_i^{-1}h^{-1}u_{x,i}^- \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)\phi_i(x)dx + a_i\chi_i^{-1}h^{-1}R^{**}\end{aligned}$$

Burada

$$R^{**} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\phi_i(x) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi$$

şeklindedir. Buradan (3.45) denkleminde göre integral özdeşliklerinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned}\chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon R^* + a_i\chi_i^{-1}h^{-1}R^{**} &= -\chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\phi_i'(x) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi \\ &\quad + \chi_i^{-1}a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\phi_i(x) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi \\ &= \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-\varepsilon\phi_i'(x) + a_i\phi_i(x)]dx = 0\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \phi_i(x) dx + a_i \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \phi_i(x) dx \\
& = \varepsilon \left\{ 1 + \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \phi_i(x) dx \right\} u_{\bar{x},i} + a_i u_i
\end{aligned} \tag{3.48}$$

bulunur. Burada θ_i basit işlemler sonucunda,

$$\theta_i = 1 + \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \phi_i(x) dx = \frac{\rho a_i}{1 - e^{-\rho a_i}} e^{-\rho a_i}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

olduğu görülebilir. (3.46) ve (3.48)'den

$$\ell u_i \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i = f_i - R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{3.49}$$

$$u_0 = A \tag{3.50}$$

olur. (3.49)'daki R_i ihmal edilirse, (3.1)-(3.2) problemi için,

$$\ell y_i \equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{3.51}$$

$$y_0 = A \tag{3.52}$$

fark şeması sunulabilir.

3.1.3. Yakınsaklık ve hata değerlendirilmesi

Bu kısımda, (3.51)-(3.52) fark şemasının ε parametresinden bağımsız olarak $O(h)$ yakınsak olduğu gösterilmiştir.

Yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesi için $z = u - y$ hata fonksiyonu olsun. Bu durumda, (3.49)-(3.50) ve (3.51)-(3.52)'den

$$\ell z_i \equiv \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i} + a_i z_i = -R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{3.53}$$

$$z_i = 0 \tag{3.54}$$

olur.

Lemma 3.1.7.(Ayrık Maksimum Prensibi): Belli bir şebekede tanımlı $z(x_i)$ fonksiyonu, $z(0) \geq 0$ ve $1 \leq i \leq N$ için $\ell_h z(x_i) \geq 0$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, her $i(1 \leq i \leq N)$ için $z(x_i) \geq 0$ eşitsizliği elde edilir.

İspat: Aksini varsayarak lemmanın doğru olmadığını kabul edelim. Yani, her $i^*(1 \leq i \leq N)$ için $z(x_{i^*}) = \min_i z(x_i)$ olsun.. Bu durumda, $z(x_{i^*}) < 0$ olur ki, varsayımdan hareketle $i^* \neq 0$ ve $z(x_{i^*}) - z(x_{i^*-1}) \leq 0$ eşitsizliğine ulaşılır. Böylece,

$$\ell_h z_{i^*} = \frac{z(x_{i^*}) - z(x_{i^*-1})}{h_{i^*}} + a(x_{i^*})z(x_{i^*}) \leq a(x_{i^*})z(x_{i^*}) < 0$$

elde edilir. Bu ise Lemmanın varsayımı ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak, varsayımımız yanlış olup Lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.8. (3.51) – (3.52) fark şemasının çözümü için

$$|y| \leq |y(0)| + \alpha^{-1} \max_{[0,l]} |f(x)| \quad (3.55)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: (3.51) aşağıdaki formda yazılırsa

$$\ell_h y_i \equiv \varepsilon \theta_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + a_i y_i = \left[\frac{\theta_i}{\rho} + a_i \right] y_i - \frac{\theta_i}{\rho} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

buradan y_i çözümü çekilirse,

$$y_i = \frac{\rho}{\theta_i + a_i \rho} \ell_h y_i + \frac{\theta_i}{\theta_i + a_i \rho} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir. Keyfi i 'ler için, $\frac{\theta_i}{\theta_i + a_i \rho} \geq 0$ olduğundan, $\ell_h y_i$ operatörü için Lemma

3.1.7'nin doğruluğunu gösterir.

(3.55) eşitsizliğini göstermek için aşağıdaki yardımcı fonksiyonu ele alalım;

$$\psi_i^\pm = \pm|y| + |y(0)| + \alpha^{-1} \max_{[0,t]} |f(x)|.$$

Bu fonksiyon için

$$\psi_0^\pm = \pm y_0 + |y(0)| + \alpha^{-1} \max_{[0,t]} |f(x)| \geq 0,$$

$$\ell_h \psi_i^\pm = \pm f_i + \left(\frac{\theta_i}{\rho} + a_i - \frac{\theta_i}{\rho} \right) |y(0)| + \left(\frac{\theta_i}{\rho} + a_i - \frac{\theta_i}{\rho} \right) \alpha^{-1} \max_{[0,t]} |f(x)| \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

şartları sağlanır. O halde

$$\psi_i^\pm \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

olur. Buradan keyfi i 'ler için sağlandığından (3.55) eşitsizliği

$$0 \leq \pm y_i + |y(0)| + \alpha^{-1} \max_{[0,t]} |f(x)|$$

$$\pm y_i \leq |y(0)| + \alpha^{-1} \max_{[0,t]} |f(x)|$$

$$|y_i| \leq |y(0)| + \alpha^{-1} \max_{[0,t]} |f(x)|$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.1.9. (3.47)'deki R_i kalan terimi için

$$|R_i| \leq Ch, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.56)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: (3.47)'deki kalan terim $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ şeklinde ifade edilebilir. $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$ sırayla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx \quad (3.57)$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i) - f(x)] \phi_i(x) dx. \quad (3.58)$$

Şimdi sırayla (3.57) ve (3.58) 'in

$$|R_i^{(1)}| \leq C_1 h \text{ ve } |R_i^{(2)}| \leq C_2 h$$

olduğunu gösterelim. (3.57)'den,

$$|R_i^{(1)}| \leq \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |a(x) - a(x_i)| |u(x)| \phi_i(x) dx$$

yazılabilir. Türevler için ortalama değer teoreminden ve $\max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \leq h$ ve $\max_{[0, l]} |a'(x_i)| \leq C_1$ olduğu dikkate alınır,

$$|a(x) - a(x_i)| = |a'(\eta_i)| |x - x_i|$$

$$|a(x) - a(x_i)| \leq \max_{[0, l]} |a'(x_i)| \max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i|$$

$$|a(x) - a(x_i)| \leq C_1 h, \quad x_{i-1} < \eta_i < x_i \quad (3.59)$$

bulunur. Lemma 3.1.3'den $|u(x)| \leq C_0$ yazılabileceğinden ve $\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x) dx = 1$ olduğundan,

$$|R_i^{(1)}| \leq C_0 C_1 h \quad (3.60)$$

olur. Son olarak, (3.58)'den,

$$|R_i^{(2)}| \leq \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_i) - f(x)| \phi_i(x) dx.$$

Türevler için ortalama değer teoreminden ve $\max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \leq h$ ve $\max_{[0, l]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) \right| \leq C_2$ olduğu dikkate alınırsa,

$$|f(x_i) - f(x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\eta_i) \right| |x_i - x|$$

$$|f(x_i) - f(x)| \leq \max_{[0, l]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right| \max_{[x_{i-1}, x_i]} |x_i - x|$$

$$|f(x_i) - f(x)| \leq C_2 h, \quad x_{i-1} < \eta < x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.61)$$

bulunur. (3.58) ve (3.61)'den ve ayrıca, $\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x) dx = 1$ olduğundan,

$$|R_i^{(2)}| \leq C_2 h \quad (3.62)$$

yazılır. Böylece, (3.60) ve (3.62)'den ise,

$$|R_i| \leq |R_i^{(1)}| + |R_i^{(2)}| \leq C_0 C_1 h + C_2 h \leq Ch \quad (3.63)$$

elde edilir. Bu da Lemma 3.1.9'un ispatıdır.

Yukarıdaki Lemmalardan çıkan esas sonuç aşağıdaki Teorem 3.1.10 ile ifade edilir.

Teorem 3.1.10. $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ ise, (3.51)- (3.52) probleminin çözümü düğüm noktalarında (3.1)-(3.2) probleminin çözümüne ε 'a göre düzgün yakınsaktır ve yakınsama hızı $O(h)$ biçimindedir:

$$\max_{1 \leq i \leq N} |y_i - u(x_i)| \leq Ch. \quad (3.64)$$

İspat. Kolayca görülebilir ki, ℓv_i fark operatörü, maksimum prensibini sağlar: $\ell v_i \geq 0$ ($1 < i \leq N$) ve $v_0 \geq 0$ ise, $v_i \geq 0$ ($0 \leq i \leq N$) olur. Dolayısıyla, (3.3)'e benzer bir eşitsizlik sağlanacaktır. Bu da,

$$|v_i| \leq |v_0| + \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} |\ell v_i|, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.65)$$

şeklindedir. $z_i = y_i - u(x_i)$ hatası,

$$\ell z_i = R_i, \quad 0 < i \leq N, \quad z_0 = 0 \quad (3.66)$$

fark problemini sağlar. Burada R_i yaklaşım hatası (3.47) bağıntısıyla belirlenmiştir. (3.65) eşitsizliğini (3.66)'ya uygularsak,

$$\max_{0 \leq i \leq N} |z_i| \leq \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|. \quad (3.67)$$

Ayrıca, (3.4)'e göre $|u(x)| \leq C$ ve dolayısıyla

$$\max_{1 \leq i \leq N} |R_i| \leq Ch \quad (3.68)$$

olduğu da açıktır. (3.67) ve (3.68) eşitsizliklerinden (3.64)'ün doğruluğu gösterilmiş olur.

3.2. Singüler Pertürbe Özellikli İkinci Mertebeden Lineer Sınır Değer Problemi

Bu kısımda,

$$Lu(x) \equiv -\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < l \quad (3.69)$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B \quad (3.70)$$

iki noktalı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemini ele alalım. Burada, $0 < \varepsilon \ll 1$ küçük parametredir. $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır. A, B verilmiş sabitlerdir. (3.69)-(3.70) problemi genel olarak, $x=0$ ve $x=l$ noktaları civarında olmak üzere $O(\sqrt{\varepsilon})$ genişliğinde iki sınır katına sahiptir (Malley, 1991; Amirali, G. vd., 2018).

(3.69)-(3.70) problemi için ilk önce, $u(x)$ çözümü için bazı asimptotik eşitsizlikler verilmiş ve problemin $O(\varepsilon)$ ve $O(\sqrt{\varepsilon})$ tipi asimptotik açılımlar yoluyla yaklaşık çözümü incelenmiş ve fark şeması oluşturulmuştur. Bu fark şeması oluşturulurken kalan terimi integral şeklinde olan ve baz fonksiyonu içeren nümerik integralleme formülleri kullanılmıştır. Yaklaşık fark çözümünün kesin çözüme $O(h)$ hızıyla yakınsak olduğu tespit edilmiştir

3.2.1. Perturbasyon parametresine göre asimptotik açılımlar

Bu kısımda, (3.69)-(3.70) probleminin çözümünde kullanılan asimptotik eşitsizlikler için aşağıdaki Lemmaları verelim.

Lemma 3.2.1 (Maximum prensibi). Varsayalım ki $v(x), v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$,

$Lv(x) \geq 0$ ($0 < x < l$), $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ eşitsizliklerini sağlayan fonksiyondur. Bu durumda $v(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq l$) olur.

İspat: Öyle bir x_0 ve x_1 noktaları vardır ki $v(x_0) = 0$, $v(x_1) = 0$, $v(x) < 0$ ($x_0 < x < x_1$) olur. Bu takdirde öyle bir $\xi \in (x_0, x_1)$ noktası bulunur ki,

$$v''(\xi) = \frac{v(x_1) - 2v((x_0 + x_1)/2) + v(x_0)}{((x_1 - x_0)/2)^2} > 0$$

olur. Buradan ve $v(\xi) < 0$ olduğundan $Lv(\xi) < 0$ olur. Bu ise Lemma'nın hipotezi ile çelişir.

Lemma 3.2.2. Herhangi, $v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, fonksiyonu için

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.71)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat: Bu eşitsizliğin gösterimi için

$$\psi^\pm(x) = \max\{|v(0)|, |v(l)|\} + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \pm v(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

bariyer fonksiyonu denilen yardımcı fonksiyonu alınsın.

$x = 0$ için, $\max \{|v(0)|, |v(l)|\} \geq v(0)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \psi^\pm(0) &= \max \{|v(0)|, |v(l)|\} + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \pm v(0), \\ &\geq \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

$x = l$ için, $\max \{|v(0)|, |v(l)|\} \geq v(l)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \psi^\pm(l) &= \max \{|v(0)|, |v(l)|\} + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \pm v(l), \\ &\geq \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Buradan (3.69)-(3.70) problemine L operatörü uygulandığında;

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \psi^\pm(x) &= -\varepsilon (\psi^\pm(x))'' + a\psi(x), \\ &= \pm \varepsilon v_\varepsilon''(x) + \frac{a}{\alpha} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| + a \max \{|v(0)|, |v(l)|\} \pm v(x), \\ &= \pm Lv(x) + \frac{a}{\alpha} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| + a \max \{|v(0)|, |v(l)|\} \end{aligned}$$

yazılır. Burada $\frac{a}{\alpha} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \geq Lv(x)$ olduğundan

$$\geq a \max \{|v(0)|, |v(l)|\} \geq 0$$

olur. O halde Maksimum Prensibine göre $\psi^\pm(x) \geq 0$ elde edilir. Bu da (3.71)'in doğruluğunu gösterir.

Lemma 3.2.3. (3.69)-(3.70) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler sağlanır.

$$|u(x)| \leq C, \quad 0 \leq x \leq l; \quad a(x), f(x) \in C[0, l], \quad \text{ise}; \quad (3.72)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}, \quad 0 \leq x \leq l; \quad a(x), f(x) \in C^1[0, l], \quad \text{ise}. \quad (3.73)$$

İspat: Önce, (3.72)'nin doğruluğunu gösterelim. (3.69)-(3.70)'e Lemma 3.2.2'yi uygularsak,

$$|u(x)| \leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |f(s)|$$

olur. Bu da (3.72)'nin sağlanması demektir.

Şimdi, (3.73)'ün doğruluğunu gösterelim. (3.69) denkleminde $u''(x)$ 'ü çekilirse,

$$u''(x) = -\frac{1}{\varepsilon} [f(x) - a(x)u(x)] \quad 0 \leq x \leq l$$

yazılır. Buradan,

$$|u''(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} |f(x) - a(x)u(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (3.74)$$

elde edilir.

(3.69) denkleminde türev alınır ve $u'(x) = v_0(x)$ denilirse aşağıdaki problem elde edilir:

$$-\varepsilon v_0''(x) + a(x)v_0(x) = \phi(x) = f'(x) - a'(x)u(x) \quad (3.75)$$

$$u'(0) = v_0(0) = 0, \quad u'(l) = v_0(l) \quad (3.76)$$

burada $\phi(x)$ için

$$\phi(x) = f'(x) - a'(x)u(x) \leq C_1 \quad (3.77)$$

değerlendirmesi elde edilir.

Şimdi, $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ sayılarını sırasıyla değerlendirelim. Bunun için (2.13) formülünde,

$$g(x) = u(x), x = 0, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon}$$

değerlerini kullanıp (3.72) ve (3.74)'ü dikkate alırsak $|u'(0)|$ için,

$$|u'(0)| \leq \left| \frac{u(\sqrt{\varepsilon}) - u(0)}{\sqrt{\varepsilon}} \right| + \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |u''(\xi)| d\xi \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (3.78)$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.13) formülünde,

$$g(x) = u(x), x = l, \alpha_0 = l - \sqrt{\varepsilon}, \alpha_1 = l$$

alınırsa, $|u'(l)|$ için,

$$|u'(l)| \leq \left| \frac{u(l) - u(l - \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}} \right| + \int_{l - \sqrt{\varepsilon}}^l |u''(\xi)| d\xi \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.79)$$

elde edilir.

Bu değerlendirmelerden sonra (3.75)-(3.76) lineer probleminin çözümünü

$$v_0(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

şeklinde arayalım.

Burada sırasıyla $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonları,

$$-\varepsilon v_1''(x) + a(x)v_1(x) = \phi(x) \quad (3.80)$$

$$v_1(0) = v_1(l) = 0 \quad (3.81)$$

$$-\varepsilon v_2''(x) + a(x)v_2(x) = 0 \quad (3.82)$$

$$v_2(0) = |v_0(0)|, \quad v_2(l) = |v_0(l)| \quad (3.83)$$

problemlerinin çözümleridir. Maksimum prensibine göre (3.80)-(3.81) probleminin $v_1(x)$ çözümü için,

$$|v_1(x)| \leq C$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.82)-(3.83) probleminin $v_2(x)$ çözümüne maksimum prensibi uygulanırsa,

$$|v_2(x)| \leq \theta(x)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\theta(x)$, $a(x) \geq \alpha > 0$ olmak üzere,

$$-\varepsilon \theta''(x) + \alpha \theta(x) = 0 \quad (3.84)$$

$$\theta(0) = |v_0(0)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \theta(l) = |v_0(l)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (3.85)$$

sabit katsayılı (3.84)-(3.85) probleminin çözümü

$$\theta(x) = \frac{|v_0(0)| \begin{bmatrix} e^{\frac{\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} & e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \end{bmatrix} + |v_0(l)| \begin{bmatrix} e^{\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} & e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} e^{\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} & e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} \\ -e^{\frac{\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} & e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \end{bmatrix}} \quad (3.86)$$

şeklindedir. Buradan, (3.86)'da yapılan bazı düzenlemelerden sonra

$$\theta(x) \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left[e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} |u'(x)| &= |v_0(x)| \leq |v_1(x)| + |v_2(x)| \\ &\leq C + \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left[e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \\ &\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.73) eşitsizliği ispatlanır. Bu da Lemma (3.2.3)'ün ispatını tamamlar.

3.2.1.1 $O(\sqrt{\varepsilon})$ Tipi asimptotik açılım

Teorem 3.2.4. $a, f \in C^4[0, l]$ ise (3.69)-(3.70) probleminin çözümü için aşağıdaki açılım doğrudur.

$$u(x) = u_0(x) + v_0(x) + w_0(x) + R_\varepsilon(x) \quad (3.87)$$

burada $u_0(x), v_0(x)$ ve $w_0(x)$ aşağıdaki şekilde belirlenen fonksiyonlardır.

$$a(x)u_0(x) = f(x), \quad (3.88)$$

$$-\varepsilon v_0'' + a(0)v_0 = 0, v_0(0) = A - u_0(0), v_0(l) = 0, \quad (3.89)$$

$$-\varepsilon w_0'' + a(l)w_0 = 0, w_0(0) = 0, w_0(l) = B - u_0(l) \quad (3.90)$$

burada $R_\varepsilon(x)$ açılımın kalan terimi olup,

$$|R_\varepsilon(x)| \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (3.91)$$

şeklindedir.

İspat: (3.87) açılımını (3.69)'da yerine yazılırsa,

$$-\varepsilon u_0'' + a(x)u_0 - \varepsilon v_0'' + a(x)v_0 - \varepsilon w_0'' + a(x)w_0 + LR_\varepsilon(x) = f(x)$$

olur. Bu eşitlik (3.88) dikkate alındığında

$$-\varepsilon u_0'' - \varepsilon v_0'' + a(x)v_0 - \varepsilon w_0'' + a(x)w_0 + LR_\varepsilon(x) = 0$$

şeklinde yazılır. Bu bağıntıyı $u(0)$, $u(l)$ sınır değerlerine göre şu şekilde düzenleyelim;

$$-\varepsilon v_0'' + a(0)v_0 - \varepsilon w_0'' + a(l)w_0 + \psi_\varepsilon(x) + LR_\varepsilon(x) = 0 \quad (3.92)$$

burada

$$\psi_\varepsilon(x) = -\varepsilon u_0'' + [a(x) - a(0)]v_0 + [a(x) - a(l)]w_0 \quad (3.93)$$

(3.92)'de (3.89)-(3.90) dikkate alındığında $R_\varepsilon(x)$ kalan terimi

$$LR_\varepsilon(x) = -\psi_\varepsilon(x), \quad 0 < x < l \quad (3.94)$$

$$R_\varepsilon(0) = R_\varepsilon(l) = 0 \quad (3.95)$$

elde edilir. (3.94)-(3.95)'e maksimum prensibinin uygulanması sonucu

$$|R_\varepsilon(x)| \leq \alpha^{-1} \|\psi_\varepsilon\|_\infty$$

elde edilir.

(3.93) açık ifadesinden yararlanarak $\psi_\varepsilon(x)$ 'in asimptotik değerlendirmesini yapalım.

Bunu önce, $[a(x) - a(0)]v_0$ terimi için yapalım. (3.93)'deki üçüncü terim benzer şekilde yapılabilir. (3.89)'dan

$$v_0(x) = (A - u_0(0)) \frac{\sinh \sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}(l-x)}{\sinh \sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}l}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} |[a(x) - a(0)]v_0| &= x|a'(\xi)|v_0 \leq Cx|A - u_0(0)| \frac{\sinh \sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}(l-x)}{\sinh \sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}l} \\ &= Cx|A - u_0(0)| e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}(l-x)}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}l}} \\ &\leq Cx|A - u_0(0)| e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} \leq Cxe^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x}. \end{aligned}$$

Burada, $te^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$ ($t > 0$) eşitsizliği $t = x\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}$ için kullanıldığında

$$|[a(x) - a(0)]v_0| \leq C(a(0))^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

olur.

Ayrıca (3.93)'ün birinci terimi için de $\varepsilon \leq 1$ olduğundan

$$\varepsilon |u_0''| \leq \varepsilon \left| \left(\frac{f(x)}{a(x)} \right)'' \right| \leq C\varepsilon \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

3.2.1.2 $O(\varepsilon)$ Tipi asimptotik açılım

Teorem 3.2.5. $a, f \in C^4[0, l]$ ise (3.69)-(3.70) probleminin çözümü için aşağıdaki açılım doğrudur.

$$u(x) = u_0(x) + \sqrt{\varepsilon}u_1(x) + v_0(x) + w_0(x) + \sqrt{\varepsilon}[v_1(x) + w_1(x)] + R_\varepsilon(x) \quad (3.96)$$

burada $u_i(x), v_i(x)$ ve $w_i(x)$ ($i=1,2$) aşağıdaki şekilde belirlenen fonksiyonlardır;

$$a(x)u_0(x) = f(x), \quad (3.97)$$

$$a(x)u_1(x) = \sqrt{\varepsilon}u_0''(x), \quad (3.98)$$

$$-\varepsilon v_0'' + a(0)v_0 = 0, v_0(0) = A - u_0(0), v_0(l) = 0, \quad (3.99)$$

$$-\varepsilon w_0'' + a(l)w_0 = 0, w_0(0) = 0, w_0(l) = B - u_0(l), \quad (3.100)$$

$$-\varepsilon v_1'' + a(0)v_1 = -x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}a'(0)v_0(x), v_1(0) = -u_1(0), v_1(l) = 0, \quad (3.101)$$

$$-\varepsilon w_1'' + a(l)w_1 = (l-x)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}a'(l)w_0(x), w_1(0) = 0, w_1(l) = -u_1(l). \quad (3.102)$$

$R_\varepsilon(x)$ ise açılımın kalan terimi olup

$$|R_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon \quad (3.103)$$

şeklindedir.

İspat: (3.96)'nın sağ tarafı (3.69)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon u_0'' + a(x)u_0 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}u_1'' + \sqrt{\varepsilon}a(x)u_1 - \varepsilon v_0'' + a(x)v_0 - \varepsilon w_0'' + a(x)w_0 \\ & -\varepsilon\sqrt{\varepsilon}v_1'' + \sqrt{\varepsilon}a(x)v_1 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}w_1'' + \sqrt{\varepsilon}a(x)w_1 + LR_\varepsilon(x) = f(x). \end{aligned}$$

(3.97) ve (3.98) eşitlikleri dikkate alınırsa, bu eşitlik,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon v_0'' + a(x)v_0 - \varepsilon w_0'' + a(x)w_0 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}v_1'' \\ & + \sqrt{\varepsilon}a(x)v_1 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}w_1'' + \sqrt{\varepsilon}a(x)w_1 + LR_\varepsilon(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

eşitliğine dönüşür.

Bu eşitlikteki v_0 ve w_0 'ın katsayıları olan $a(x)$ 'in sırayla $x=0$ ve $x=l$ noktalarında ikinci mertebeden, v_1 ve w_1 'in katsayılarındaki $a(x)$ 'in sırayla $x=0$ ve $x=l$ noktalarında birinci mertebeden

$$a(x) = a(0) + xa'(0) + \frac{x^2}{2} a''(\xi_1)$$

$$a(x) = a(l) + (x-l)a'(l) + \frac{(x-l)^2}{2} a''(\xi_2)$$

$$a(x) = a(0) + xa'(\xi_3)$$

$$a(x) = a(l) + (x-l)a'(\xi_4)$$

şeklindeki Taylor açılımları (3.104)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \left[-\varepsilon v_0'' + a(0)v_0 \right] + \left[-\varepsilon w_0'' + a(l)w_0 \right] + \sqrt{\varepsilon} \left[-\varepsilon v_1'' + a(0)v_1 + x\varepsilon^{\frac{-1}{2}} a'(0)v_0 \right] \\ & + \sqrt{\varepsilon} \left[-\varepsilon w_1'' + a(l)w_1 + (x-l)\varepsilon^{\frac{-1}{2}} a'(l)w_0 \right] + \psi_\varepsilon(x) + LR_\varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Burada,

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} a''(\xi_1)v_0 + \frac{(x-l)^2}{2} a''(\xi_2)w_0 + \sqrt{\varepsilon} xa'(\xi_3)v_1 + \sqrt{\varepsilon} (x-l)a'(\xi_4)w_1 \quad (3.105)$$

şeklinde. (3.99)-(3.102) eşitlikleri dikkate alındığında kare parantez içindeki ifadelerin tümü sıfır olduğundan

$$LR_\varepsilon(x) = -\psi_\varepsilon(x) \quad (3.106)$$

olur. Ayrıca (3.70) ve (3.97)-(3.102)'ye göre

$$R_\varepsilon(0) = R_\varepsilon(l) = 0 \quad (3.107)$$

olduğu açıktır. Maksimum prensibine göre (3.106)-(3.107)'nin çözümü için

$$|R_\varepsilon(x)| \leq \alpha^{-1} \|\psi_\varepsilon\|_\infty \quad (3.108)$$

eşitsizliği doğru olur. v_i ve w_i ($i=1,2$)'lerin açık ifadeleri dikkate alınarak

$$\|\psi_\varepsilon\|_\infty \leq C\varepsilon$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi, (3.105)'in sağındaki terimleri ayrı ayrı değerlendirelim. Önce birinci terimin değerlendirilmesinde $t^k e^{-t} \leq e^{-\theta t}$, $0 < \theta < 1$, $k > 0$ eşitsizliği $k=2$ ve $t = x\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}$ için kullanılırsa,

$$\left| \frac{x^2}{2} a''(\xi) v_0 \right| = \left| \frac{x^2}{2} a''(\xi) (A - u_0(0)) e^{-x\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}} \right| \leq Cx^2 e^{-x\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}} \leq C\varepsilon a^{-1}(0) e^{-\theta x\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}} \leq C\varepsilon \quad (3.109)$$

eşitsizliği yazılır. Benzer değerlendirme ikinci terim için yapılırsa

$$\left| \frac{(x-l)^2}{2} a''(\xi_2) w_0 \right| \leq C\varepsilon \quad (3.110)$$

olduğu kolayca görülür. Üçüncü terimin değerlendirmesine geçmeden önce (3.101) probleminin çözümünün,

$$v_1 = v_1^{(1)} + v_1^{(2)}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada $v_1^{(1)}$ ve $v_1^{(2)}$ sırayla

$$\begin{aligned} -\varepsilon v'' + a(0)v &= 0, \\ v(0) &= -u_1(0), \quad v(l) = 0, \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon v'' + a(0)v_1 &= -x\varepsilon^{\frac{1}{2}} a'(0) v_0(x), \\ v(0) &= v(l) = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

problemlerinin çözümleridir. (3.111)'in açık ifadesi,

$$v_1^{(1)} = -u_1(0)e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}(l-x)}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}l}}$$

şeklindedir. $v_1^{(1)}$ 'e maksimum prensibi uygulanırsa,

$$|v_1^{(1)}| \leq |-u_1(0)|e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}(l-x)}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}l}} \leq |u_1(0)|e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} \quad (3.113)$$

elde edilir. (3.112)'ye maksimum prensibi uygulanırsa, benzer şekilde

$$|v_1^{(2)}| = \left| -x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}a'(0)v_0(x) \right| \leq Cx\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|v_0(x)| \quad (3.114)$$

eşitsizliği yazılır. Üçüncü terimin değerlendirilmesi için

$$|\sqrt{\varepsilon}xa'(\xi_3)v_1| = |\sqrt{\varepsilon}xa'(\xi_3)(v_1^{(1)} + v_1^{(2)})| \leq \sqrt{\varepsilon}x|a'(\xi_3)||v_1^{(1)}| + \sqrt{\varepsilon}x|a'(\xi_3)||v_1^{(2)}|$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikteki $v_1^{(1)}$ için $te^{-t} \leq e^{-t/2}$ ve $v_1^{(2)}$ için, $t^2e^{-t} \leq e^{-\theta t}$ ($0 < \theta < 1$)

eşitsizlikleri $t = x\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}$ için kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |\sqrt{\varepsilon}xa'(\xi_3)v_1| &= |\sqrt{\varepsilon}xa'(\xi_3)(v_1^{(1)} + v_1^{(2)})| \\ &\leq \sqrt{\varepsilon}x|a'(\xi_3)||v_1^{(1)}| + \sqrt{\varepsilon}x|a'(\xi_3)||v_1^{(2)}| \\ &\leq \sqrt{\varepsilon}x|a'(\xi_3)||v_1^{(1)}| + \sqrt{\varepsilon}x|a'(\xi_3)||v_1^{(2)}| \\ &= C\sqrt{\varepsilon}x|u_1(0)|e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} + Cx^2e^{-\sqrt{\frac{a(0)}{\varepsilon}}x} \\ &\leq C\varepsilon a^{-1}(0)|u_1(0)|e^{-\frac{t}{2}} + C\varepsilon a^{-1}(0)e^{-\theta t} \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned} \quad (3.115)$$

olur. Benzer değerlendirmeler dördüncü terim için yapılırsa,

$$|\sqrt{\varepsilon}(x-l)a'(\xi_4)w_1| \leq C\varepsilon \quad (3.116)$$

olduğu kolayca görülür.

Böylece (3.109), (3.110), (3.115) ve (3.116)'dan (3.103)'ün doğruluğu gösterilmiş olur.

3.2.2. (3.69)-(3.70) Probleminin fark şemasının kurulması

$[0, l]$ aralığında, $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1; h = l/N\}$, $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, l\}$ düzgün şebekesini ele alalım. Fark şemasının kurulması süreci için ilk olarak (3.69) denkleminin (x_{i-1}, x_{i+1}) aralığında integralini alarak başlayalım.

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x) \phi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.117)$$

burada,

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx = h^{-1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h} dx \right] = \frac{2 \tanh(\gamma_i h/2)}{\gamma_i h}$$

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}},$$

biçimindedir ve $\phi_i(x)$ aşağıdaki biçimde belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \phi_i^{(1)}(x) \equiv \frac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \phi_i^{(2)}(x) \equiv \frac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & , x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases}$$

Kolayca görülebilir ki, $\phi_i^{(1)}(x)$ ve $\phi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \phi''(x) + a_i \phi(x) &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \phi(x_{i-1}) &= 0, \quad \phi(x_i) = 1 \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \phi''(x) + a_i \phi(x) &= 0, \quad x_i < x < x_{i+1} \\
\phi(x_i) &= 1, \quad \phi(x_{i+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.119}$$

(3.117) bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılırsa:

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -\varepsilon u''(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x) a(x) \phi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{3.120}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
&\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} -\varepsilon u''(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x_i) u(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx \\
&= f(x_i) + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] \phi_i(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki ilk terime kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i'(x) u'(x) dx + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x) \phi_i(x) dx = f_i - R_i, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{3.121}$$

olur. Burada

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \phi_i(x) dx \tag{3.122}$$

şeklindedir. (3.121)'deki integrallerin her biri (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralıkları üzerinde integrallerin toplamı olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)'}(x) u'(x) dx + \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^{(2)'}(x) u'(x) dx \\
&+ \chi_i^{-1} a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)}(x) u(x) dx + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^{(2)}(x) u(x) dx \\
&= f_i - R_i, \quad i = \overline{1, N-1}
\end{aligned} \tag{3.123}$$

elde edilir. Sol taraftaki integrallere sırasıyla birinci ve ikincisine (2.12) formülü, üçüncü ve dördüncüsüne (2.11) formülü (x_{i-1}, x_i) için $\sigma=1$ ve (x_i, x_{i+1}) için $\sigma=0$ alınarak uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} u_{x,i}^- - \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} u_{x,i} + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} u(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)}(x) dx + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} u_{x,i}^- \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i) \phi_i^{(1)}(x) dx \\ & + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} u(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^{(2)}(x) dx + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i) \phi_i^{(2)}(x) dx + R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = f_i - R_i \end{aligned} \quad (3.124)$$

elde edilir. Buradan, $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$ kalan terimlerinde (3.118)- (3.119) denklemleri dikkate alınırsa, $R_i^{(1)} = 0$ ve $R_i^{(2)} = 0$ olduğu aşağıdaki şekilde kolayca görebilir:

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \phi_i''(x) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi) K_0(x, \xi) d\xi \\ &\quad - \chi_i^{-1} a_i h^{-1} \phi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi) K_0(x, \xi) d\xi \\ &= -\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-\varepsilon \phi_i''(x) + a_i \phi_i(x)] dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} &= \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \phi_i''(x) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(\xi) K_0(x, \xi) d\xi \\ &\quad - \chi_i^{-1} a_i h^{-1} \phi_i(x) \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(\xi) K_0(x, \xi) d\xi \\ &= -\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [-\varepsilon \phi_i''(x) + a_i \phi_i(x)] dx = 0. \end{aligned}$$

(3.124)'de gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i'(x) u'(x) dx + \chi_i^{-1} a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x) \phi_i(x) dx \\ &= -\varepsilon \chi_i^{-1} \left\{ 1 + a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)}(x) (x-x_i) dx \right\} u_{\bar{x},i} + a_i \chi_i^{-1} \left\{ h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx \right\} u_i \\ &= -\varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i. \end{aligned} \quad (3.125)$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\theta_i = \chi_i^{-1} \left\{ 1 + a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)}(x)(x-x_i) dx \right\} \equiv \chi_i^{-1} \left\{ 1 - a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^{(2)}(x)(x-x_i) dx \right\}$$

katsayısı basit işlemler sonucu

$$\theta_i = \frac{a_i \rho^2}{4 \sinh^2(\sqrt{a_i} \rho / 2)}, \quad \rho = h / \sqrt{\varepsilon} \quad (3.126)$$

olarak hesaplanır. (3.121)'e geri döner ve (3.125) dikkate alınırsa,

$$\ell u_i \equiv -\varepsilon \theta_i u_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i u_i = f_i - R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.127)$$

şeklinde yazılır.

(3.127)'de R_i kalan terimi ihmal edilirse, (3.69)-(3.70) problemi için,

$$\ell y_i \equiv -\varepsilon \theta_i y_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.128)$$

$$y_o = A, \quad y_N = B \quad (3.129)$$

fark şeması elde edilir. Burada θ_i katsayısı (3.126) formülüyle verilmiştir. (3.128)- (3.129) bağıntıları y_1, y_2, \dots, y_{N-1} 'lere göre lineer cebirsel denklemler sistemi oluşturur.

3.2.3. Yakınsaklık ve hata değerlendirmesi

Bu alt bölümde, (3.128)- (3.129) fark şemasının ε parametresinden bağımsız olarak $O(h)$ ve $O(h^2)$ yakınsak olduğu gösterilmiştir.

Lemma 3.2.6 (Ayrık maksimum prensibi). Belli bir şebekede tanımlı $v(x_i)$ fonksiyonu, $v_i(0) \geq 0$, $v_i(l) \geq 0$ ve her $1 \leq i \leq N-1$ için $\ell_h v(x_i) \geq 0$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, her i , ($1 \leq i \leq N$) için $v(x_i) \geq 0$ eşitsizliği doğrudur.

İspat: Aksini varsayarak lemmanın doğru olmadığını kabul edelim. Yani tüm i^* 'ler için $v(x_{i^*}) = \min_i v(x_i)$ ve $v(x_{i^*}) < 0$ olduğu varsayalım. $i^* \notin \{0, N\}$, $v(x_i) \leq v(x_{i^*+1})$, $v(x_i) \leq v(x_{i^*-1})$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} \ell_h v_{i^*} &= -\varepsilon v_{x,x,i}^- + a_{i^*} v_{i^*}, \\ &= -\varepsilon \frac{v_{i^*+1} - 2v_{i^*} + v_{i^*-1}}{h^2} + a_{i^*} v_{i^*}, \\ &= -\varepsilon \frac{(v_{i^*+1} - v_{i^*}) + (v_{i^*-1} - v_{i^*})}{h^2} + a_{i^*} v_{i^*} < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Lemmanın varsayımı ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak $v(x_{i^*}) \geq 0$ ve tüm i ($1 \leq i \leq N$) 'ler için $v(x_i) \geq 0$ olur.

Lemma 3.2.7. Eğer v_i , $v_0 = v_N = 0$ olacak şekilde bir şebeke fonksiyonu ise, o zaman

$$|v_i| \leq \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |\ell_h v_i|, \quad 0 \leq i \leq N$$

eşitsizliği vardır.

İspat: Bunun doğruluğunu göstermek için, yardımcı fonksiyon olarak,

$$\psi_i^\pm = \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |\ell_h v_i| \pm v_i$$

şeklindeki bariyer fonksiyonu tanımlayalım.

Burada $\psi^\pm(0)$ için

$$\psi^\pm(0) = \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |\ell_h v_i| \pm v(0) \geq \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |\ell_h v_i| \geq 0$$

ve $\psi^\pm(l)$ için

$$\psi^\pm(l) = \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |\ell_h v_i| \pm v(l) \geq \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |\ell_h v_i| \geq 0$$

olur.

Ayrıca,

$$l_h \psi_i^\pm = \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N-1} |l_h v_i| \pm l_h v_i \geq \max_{1 \leq i \leq N-1} |l_h v_i| \pm l_h v_i \geq 0$$

elde edilir.

Lemma 3.2.6 (ayrık maksimum prensibi) 'den $\psi_i^\pm \geq 0$ elde edilir.

Lemma 3.2.8. (3.122)'deki R_i hata terimi için.

$$|R_i| \leq Ch, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.130)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Bu Lemmanın ispatı Lemma 3.1.9 ile benzerdir.

Yukarıdaki Lemmalardan çıkan esas sonuç aşağıdaki Teorem 3.2.9 ile ifade edilir.

Teorem 3.2.9. $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ şartı altında (3.128)- (3.129) fark probleminin çözümü, $\bar{\omega}_h$ 'de (3.69)-(3.70) problemlerinin çözümüne ε 'a göre düzgün yakınsaktır. Hata için,

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch \quad (3.131)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat: $z = y - u$ dersek, (3.127), (3.128)- (3.129)'a göre, hata aşağıdaki sınır-değer problemini sağlar

$$\ell z_i = R_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad z_0 = z_N = 0, \quad (3.132)$$

burada R_i yaklaşım hatası (3.122) formülüyle belirlenmiştir.

Keyfi h ve ε için, ℓv_i fark operatörü için ayırık maksimum prensibinin doğruluğu kolayca gösterilebilir (Lemma 3.2.6). $\ell v_i \geq 0$, $(i=1,2,\dots,N-1)$, $v_0 \geq 0$, $v_N \geq 0$ ise, $v_i \geq 0$, $i=0,1,\dots,N$ olur. Bunu (3.132) problemine uygularsak,

$$\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)} \quad (3.133)$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca R_i için (3.122) formülünden

$$|R_i| \leq Ch, \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (3.134)$$

olduğu açıktır. (3.133) ve (3.134)'den teoremin ispatı tamamlanır.

Not. (3.128)- (3.129) fark problemi bir tek çözüme sahiptir. Gerçekten maksimum prensibine göre uygun, homojen

$$\ell y_i = 0, \quad i=\overline{1, N-1}, \quad y_0 = y_N = 0$$

sisteminin sadece sıfır çözümü olur. Bilindiği gibi bu da lineer denklemler sistemi için, bir tek çözümün varlığının gerekli ve yeter şartıdır.

Teorem 3.2.10. Eğer $a(x), f(x) \in C^2[0, l]$ ve

$$a'(0) = a'(l) = 0 \quad (3.135)$$

ise bu durumda (3.128)- (3.129) fark şemasının yakınsama hızı $O(h^2)$ biçimindedir:

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch^2. \quad (3.136)$$

İspat: Önce (3.122) ile verilen kalan terimi $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ şeklinde ifade edilebilir.

$R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$ sırayla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx,$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \phi_i(x) dx.$$

Şimdi ise, öncelikli olarak $|R_i^{(2)}| \leq Ch^2 = O(h^2)$, $i = \overline{1, N-1}$ olduğunu gösterelim.

Bunun için

$$f(x) - f(x_i) = (x - x_i) f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \phi_i(x) dx = 0 \quad (3.137)$$

eşitliklerini dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} &= -\chi_i^{-1} h^{-1} f'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \phi_i(x) dx - \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''(\xi_i(x)) \phi_i(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''(\xi_i(x)) \phi_i(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$|R_i^{(2)}| \leq \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} h^2 \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f''(x)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x) dx = \frac{h^2}{2} \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f''(x)|$$

olur. Böylece,

$$|R_i^{(2)}| = O(h^2), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.138)$$

olur.

Şimdi ise,

$$|R_i^{(1)}| = O(h^2), \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.139)$$

olduğunu gösterelim.

$$a(x) - a(x_i) = (x - x_i)a'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} a''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x)$$

ve

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)u'(\eta_i), \quad \eta_i \in (x_i, x)$$

bağıntıları $R_i^{(1)}$ 'in ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \phi_i(x) dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u(x) \phi_i(x) dx + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \phi_i(x) dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) u(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \phi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \phi_i(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \phi_i(x) dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \phi_i(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \phi_i(x) dx \end{aligned} \tag{3.140}$$

olur. $\|a''(x)\|_{C[0,l]} \leq C$, $\|u\|_{C[0,l]} \leq C$ ve söz konusu aralıkta $|x - x_i|^2 \leq h^2$ olduğundan, (3.140)'ın sağ tarafındaki ikinci terim,

$$\left| \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \phi_i(x) dx \right| \leq Ch^2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \tag{3.141}$$

eşitsizliğini sağlar. Birinci terimi değerlendirmek için Lemma 3.2.3'den

$$\begin{aligned}
|u'(\eta_i)| &\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\eta_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\eta_i)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right\} \\
&\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right\}, \quad 1 < i < N-1
\end{aligned}$$

eşitsizliğini (3.140)'ın birinci teriminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\left| \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \phi_i(x) dx \right| &\leq C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \phi_i(x) dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \phi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \phi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \quad (3.142)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.142)'nin sağ tarafındaki birinci terimin $O(h^2)$ olduğu kolayca görülebilir. İkinci terimin ise, $a'(0) = 0$ şartından ve $te^{-t} \leq e^{-t/2}$, ($t \geq 0$) eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \phi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a''(\bar{\xi}_i)| x_i e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \phi_i(x) dx \\
&\leq C_1 h^2 \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \leq C_1 h^2 \frac{x_i}{x_{i-1}} \cdot \frac{x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \\
&\leq C_1 h^2 \frac{i}{i-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{2\sqrt{\varepsilon}}} \leq C_2 h^2, \quad i > 1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.142)'nin sağındaki üçüncü terim için $a'(l)=0$ şartından yararlanarak, benzer yolla $O(h^2)$ biçiminde olduğu görülebilir ($i < N-1$ için). Böylece, (3.139) eşitliği $i = 2, 3, \dots, N-2$ için ispatlanmış oldu. $i=1$ için ise ($i = N-1$ durumu benzer yolla ispatlanır).

$$a(x) - a(x_1) = (x - x_1)a'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2} a''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x)$$

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi$$

bağıntılarından yararlanırsak,

$$\begin{aligned} R_1^{(1)} &= \chi_1^{-1} h^{-1} a'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \phi_1(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \chi_1^{-1} h^{-1} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 a''(\xi_1(x)) u(x) \phi_1(x) dx \end{aligned} \quad (3.143)$$

olur. (3.143)'ün sağ tarafındaki ikinci terimin $O(h^2)$ olduğu (3.141)'den görülür. Birinci terimi ise $a'(0)=0$ şartından ve Lemma 3.2.3'ten yararlanırsak, şöyle değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned} & \left| \chi_1^{-1} h^{-1} a'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \phi_1(x) dx \right| \\ & \leq |a'(x_1)| h \int_{x_0}^{x_2} |u'(x)| dx \leq C x_1 h |a''(\bar{\eta}_1)| \int_{x_0}^{x_2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} dx \\ & \leq C_1 h^2 \left\{ h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{x_0}^{x_2} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \right\} \leq C_1 h^2 \left\{ h + (\sqrt{\alpha})^{-1} (1 - e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}h}{\sqrt{\varepsilon}}}) \right\} = O(h^2) \end{aligned}$$

ve böylece

$$|R_1^{(1)}| = O(h^2), \quad |R_{N-1}^{(1)}| = O(h^2)$$

olduğu da ispatlanmış olur. Yani (3.139) sağlanır.

Son olarak,

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$$

eşitliğinde (3.138) ve (3.139) dikkate alınırsa,

$$\|R\|_{C(\omega_h)} \leq Ch^2$$

olduğu gorlr. Bundan ve (3.133)'den Teorem ispatlanmış olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Burada, bir önceki bölümde ele alınan (3.1)-(3.2) ve (3.69)-(3.70) problemleri için elde edilen asimptotik değerlendirmeler ve nümerik çözümlerin teorik sonuçlarının doğruluğunu test etmek için somut örnekler verilip sonuçlar tablo halinde sunulmuştur.

4.1. (3.1)-(3.2) Probleminin $O(\varepsilon)$ ve $O(\varepsilon^2)$ Asimptotik Çözümleri İçin Örnek

$$\varepsilon u' + (1+x)u = -\varepsilon \sin x + (1+x)\cos x, \quad 0 < x \leq 1, \quad (4.1)$$

$$u(0) = 2 \quad (4.2)$$

başlangıç-değer probleminin çözümü,

$$u(x) = e^{\frac{x(x+2)}{2\varepsilon}} + \cos x \quad (4.3)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.4'e göre (4.1)-(4.2) probleminin $O(\varepsilon)$ asimptotik açılımı,

$$u_a^{(1)}(x) = u_0(x) + v_0(x) \quad (4.4)$$

şeklinde verilsin. Burada, $a(x) = 1+x$, $f(x) = -\varepsilon \sin x + (1+x)\cos x$ olmak üzere, $u_0(x)$ indirgenmiş problemin çözümü,

$$u_0(x): u_0(x) = \cos x$$

şeklindedir. $v_0(x)$ sınır katı fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} v_0(x): \varepsilon v' + a(0)v &= 0 \Rightarrow \varepsilon v' + v = 0 \\ v(0) = A - u_0(0) &\Rightarrow v(0) = 1 \end{aligned}$$

probleminin çözümü,

$$v_0(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

şeklindedir. $u_0(x), v_0(x)$ (4.4)'de yerine yazılırsa,

$$u_a^{(1)}(x) = \cos x + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

asimptotik çözümü elde edilir.

Teorem 3.1.5'e göre (4.1)-(4.2) problemi için $O(\varepsilon^2)$ asimptotik açılımı,

$$u_a^{(2)}(x) = u_0(x) + v_0(x) + \varepsilon[u_1(x) + v_1(x)] \quad (4.5)$$

şeklinde verilsin. Burada, $a(x) = 1+x$, $f(x) = -\varepsilon \sin x + (1+x)\cos x$ olmak üzere,

$$v_0(x): \varepsilon v' + (1+x)v = 0$$

$$v(0) = A - u_0(0) = 1$$

probleminin çözümü

$$v_0(x) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x+x^2/2)}$$

şeklindedir. Ayrıca $u_1(x)$,

$$u_1(x): u_1(x) = \frac{-u_0'(x)}{a(x)} = \frac{\sin x}{1+x}$$

şeklinde bulunur.

$$v_1(x): \varepsilon v' + (1+x)v = 0$$

$$v(0) = -u_1(0) = 0$$

probleminin çözümü

$$v_1(x) = 0$$

olarak bulunur. $u_0(x)$, $v_0(x)$, $u_1(x)$ ve $v_1(x)$ (4.5)'de yerine yazılırsa,

$$u_a^{(2)}(x) = \cos x + e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x+x^2/2)} + \frac{\varepsilon \sin x}{1+x}$$

asimptotik çözümü elde edilir.

Teorem 3.1.6'ya göre (4.1)-(4.2) problemi için $O(\varepsilon^2)$ asimptotik açılımı,

$$u_a^{(3)}(x) = u_0(x) + v_0(x) + \varepsilon[u_1(x) + v_1(x)] \quad (4.6)$$

şeklinde verilsin. Burada, $a(x) = 1+x$, $f(x) = -\varepsilon \sin x + (1+x) \cos x$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} v_0(x) : \varepsilon v' + a(0)v &= 0 \Rightarrow \varepsilon v' + v = 0 \\ v(0) = A - u_0(0) &\Rightarrow v(0) = 1 \end{aligned}$$

probleminin çözümü

$$v_0(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

olur. Ayrıca $u_1(x)$,

$$u_1(x) : u_1(x) = \frac{-u_0'(x)}{a(x)} = \frac{\sin x}{1+x}$$

şeklinde hesaplanır.

$$\begin{aligned} v_1(x) : \varepsilon v'(x) + a(0)v(x) &= -x\varepsilon^{-1}a'(0)v_0(x) \Rightarrow \varepsilon v'(x) + v(x) = -\frac{x}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \\ v(0) = -u_1(0) &\Rightarrow v(0) = 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümü

$$v_1(x) = -\frac{x^2}{2\varepsilon^2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

olur. $u_0(x)$, $v_0(x)$, $u_1(x)$ ve $v_1(x)$ (4.6)'da yerine yazılırsa,

$$u_a^{(3)}(x) = \cos x + e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x+x^2/2)} + \frac{\varepsilon \sin x}{1+x} - \frac{x^2}{2\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

asimptotik çözümü elde edilir.

(4.1)-(4.2) probleminin bazı değerler için asimptotik ve uygun mutlak hata değerleri Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.1. (4.1)-(4.2) Probleminin Asimptotik Çözümünden Elde Edilen Değerler

x	$\varepsilon = 10^{-2}$						
	u	$u_a^{(1)}$	$ u - u_a^{(1)} $	$u_a^{(2)}$	$ u - u_a^{(2)} $	$u_a^{(3)}$	$ u - u_a^{(3)} $
0.1	1.0000260	1.0000439	1.7910^{-5}	1.0000419	1.5910^{-5}	1.0000192	0.6810^{-5}
0.2	0.9999939	0.9999939	0	1.0000230	2.9110^{-5}	1.0000230	2.9110^{-5}
0.3	0.9999863	0.9999863	0	1.0000266	4.0310^{-5}	1.0000266	4.0310^{-5}
0.4	0.9999756	0.9999756	0	1.0000255	4.9910^{-5}	1.0000255	4.9910^{-5}
0.5	0.9999619	0.9999619	0	1.0000201	5.8210^{-5}	1.0000201	5.8210^{-5}
0.6	0.9999452	0.9999452	0	1.0000106	6.5410^{-5}	1.0000106	6.5410^{-5}
0.7	0.9999254	0.9999254	0	0.9999972	7.1810^{-5}	0.9999972	7.1810^{-5}
0.8	0.9999025	0.9999025	0	0.9999801	7.7610^{-5}	0.9999801	7.7610^{-5}
0.9	0.9998766	0.9998766	0	0.9999593	8.2710^{-5}	0.9999593	8.2710^{-5}
1	0.9998477	0.9998477	0	0.9999350	8.7310^{-5}	0.9999350	8.7310^{-5}

Tablo 4.2. (4.1)-(4.2) Probleminin Asimptotik Çözümünden Elde Edilen Değerler

x	$\varepsilon = 10^{-3}$						
	u	$u_a^{(1)}$	$ u - u_a^{(1)} $	$u_a^{(2)}$	$ u - u_a^{(2)} $	$u_a^{(3)}$	$ u - u_a^{(3)} $
0.1	0.9999985	1.0000439	4.5410^{-5}	1.0000001	$1.6 \cdot 10^{-6}$	1.0000001	$1.6 \cdot 10^{-6}$
0.2	0.9999939	0.9999939	0	0.9999968	$2.9 \cdot 10^{-6}$	1.0000230	$2.9 \cdot 10^{-6}$
0.3	0.9999863	0.9999863	0	0.9999903	$4. \cdot 10^{-6}$	1.0000266	$4. \cdot 10^{-6}$
0.4	0.9999756	0.9999756	0	0.9999806	$5. \cdot 10^{-6}$	1.0000255	$5. \cdot 10^{-6}$
0.5	0.9999619	0.9999619	0	0.9999677	$5.8 \cdot 10^{-6}$	1.0000201	$5.8 \cdot 10^{-6}$
0.6	0.9999452	0.9999452	0	0.9999517	$6.5 \cdot 10^{-6}$	1.0000106	$6.5 \cdot 10^{-6}$
0.7	0.9999254	0.9999254	0	0.9999326	$7.2 \cdot 10^{-6}$	0.9999972	$7.2 \cdot 10^{-6}$
0.8	0.9999025	0.9999025	0	0.9999103	$7.8 \cdot 10^{-6}$	0.9999801	$7.8 \cdot 10^{-6}$
0.9	0.9998766	0.9998766	0	0.9998849	$8.3 \cdot 10^{-6}$	0.9999593	$8.3 \cdot 10^{-6}$
1	0.9998477	0.9998477	0	0.9998564	8.7310^{-6}	0.9999350	8.7310^{-6}

Sonuç olarak, birinci mertebeden lineer singüler pertürbe özellikli başlangıç değer probleminin sınır kat fonksiyonuna göre birinci ve ikinci dereceden asimptotik açılımları incelendi. ε parametresinin küçük değerleri için bu açılımlar analitik yaklaşık çözümler olarak da kullanılabilir. Bu anlamda eğer $a(x)$ integrallenebilir bir fonksiyon ise, Teorem 3.1.5'deki $u_a^{(2)}$ açılımı, Teorem 3.1.6'daki $u_a^{(3)}$ 'e göre daha iyi sonuç vermektedir. Aksi takdirde Teorem 3.1.6 pratik yönden daha kullanışlıdır.

4.2. (3.1)-(3.2) Probleminin Nümerik Çözümü İçin Örnek

(4.1)-(4.2) probleminde;

$$a_i = 1 + x_i, \quad f_i = -\varepsilon \sin x_i + (1 + x_i) \cos x_i, \quad \theta_i = \frac{\rho(1 + x_i)}{1 - e^{-\rho(1 + x_i)}} e^{-\rho(1 + x_i)}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon} \text{ olmak üzere,}$$

(4.1)-(4.2) probleminin fark şeması,

$$\ell y_i \equiv \varepsilon \theta_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1 + x_i) y_i = -\varepsilon \sin x_i + (1 + x_i) \cos x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$y_0 = 2$$

şeklindedir.

(4.1)-(4.2) probleminin bazı değerler için y_i yaklaşık çözümleri ve uygun mutlak hata değerleri Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3. (4.1)-(4.2) probleminin nümerik çözümünden elde edilen değerler

x	$(\varepsilon = 10^{-2})$		$(\varepsilon = 10^{-3})$		$(\varepsilon = 10^{-4})$	
	y_i	$ u - y_i $	y_i	$ u - y_i $	y_i	$ u - y_i $
0.1	0.9999931	$3.29 \cdot 10^{-5}$	0.9999968	$1.7 \cdot 10^{-6}$	0.9999983	$2 \cdot 10^{-7}$
0.2	0.9999648	$2.91 \cdot 10^{-5}$	0.9999909	$3.0 \cdot 10^{-6}$	0.9999936	$3 \cdot 10^{-7}$
0.3	0.9999460	$4.03 \cdot 10^{-5}$	0.9999822	$4.1 \cdot 10^{-6}$	0.9999859	$4 \cdot 10^{-7}$
0.4	0.9999257	$4.49 \cdot 10^{-5}$	0.9999706	$5.0 \cdot 10^{-6}$	0.9999751	$5 \cdot 10^{-7}$
0.5	0.9999037	$5.82 \cdot 10^{-5}$	0.9999561	$5.8 \cdot 10^{-6}$	0.9999613	$6 \cdot 10^{-7}$
0.6	0.9998797	$6.55 \cdot 10^{-5}$	0.9999386	$6.6 \cdot 10^{-6}$	0.9999445	$7 \cdot 10^{-7}$
0.7	0.9998535	$7.19 \cdot 10^{-5}$	0.9999181	$7.3 \cdot 10^{-6}$	0.9999247	$7 \cdot 10^{-7}$
0.8	0.9998249	$7.76 \cdot 10^{-5}$	0.9998947	$7.8 \cdot 10^{-6}$	0.9999017	$8 \cdot 10^{-7}$
0.9	0.9997939	$8.27 \cdot 10^{-5}$	0.9998683	$8.3 \cdot 10^{-6}$	0.9998758	$8 \cdot 10^{-7}$
1	0.9997604	$8.73 \cdot 10^{-5}$	0.9998389	$8.8 \cdot 10^{-6}$	0.9998468	$9 \cdot 10^{-7}$

Sonuç olarak, ε 'nin değerleri küçüldükçe kesin çözüm ile yaklaşık çözümün birbirine yaklaştığı, x değerleri 1'e yaklaştığında ise $|u - y_i|$ farkının büyüdüğü görülmektedir.

4.3. (3.69)-(3.70) Probleminin $O(\sqrt{\varepsilon})$ Asimptotik Çözümü İçin Örnek

Bu kısımda, (3.69)-(3.70) probleminin çözümü için Teorem 3.2.4'de verilen asimptotik açılım için teorik sonuçların doğruluğunu gösteren aşağıdaki örneği verelim;

$$-\varepsilon u'' + u = -\cos^2(\pi x) - 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.7)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (4.8)$$

probleminin çözümü,

$$u(x) = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 + e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}} - \cos^2(\pi x)$$

şeklindedir.

(4.7)-(4.8) problemi için

$$u_a(x) = u_0(x) + v_0(x) + w_0(x) \quad (4.9)$$

asimptotik açılımı verilsin. Burada

$$\begin{aligned} a(x) &= 1, \\ f(x) &= -\cos^2(\pi x) - 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x), \\ A &= 0, B = 0 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u_0(x) : u_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)} = -\cos^2(\pi x) - 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x)$$

$$\begin{aligned} v_0(x) : -\varepsilon v_0'' + a(0)v_0 &= 0, & \Rightarrow -\varepsilon v_0'' + v_0 &= 0, \\ v_0(0) = A - u_0(0), v_0(l) &= 0 & \Rightarrow v_0(0) = -(1 + 2\varepsilon\pi^2), v_0(1) &= 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümü

$$v_0(x) = (1 + 2\varepsilon\pi^2) \left(\frac{\sinh\left(\frac{(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \right)$$

olur.

$$\begin{aligned} w_0(x) : -\varepsilon w_0'' + a(l)w_0 &= 0, & \Rightarrow -\varepsilon w_0'' + w_0 &= 0, \\ w_0(0) = 0, w_0(l) = B - u_0(l) & & \Rightarrow w_0(0) = 0, w_0(1) &= -(1 + 2\varepsilon\pi^2) \end{aligned}$$

probleminin çözümü

$$w_0(x) = (1 + 2\varepsilon\pi^2) \left(\frac{\sinh \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{\sinh \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \right)$$

olur.

$u_0(x)$, $v_0(x)$ ve $w_0(x)$ (4.9)'da yerine yazılırsa,

$$u_a(x) = -\cos^2(\pi x) - 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x) + (1 + 2\varepsilon\pi^2) \left(\frac{\sinh \frac{(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}} + \sinh \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}{\sinh \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \right)$$

yaklaşık asimptotik çözümü elde edilir.

(4.7)-(4.8) probleminin bazı değerler için asimptotik ve uygun mutlak hata değerleri Tablo 4.4'de verilmiştir.

Tablo 4.4. (4.7)- (4.8) Probleminin Asimptotik Çözümünden Elde Edilen Değerler

ε	x	u	u_a	$ u - u_a $
10^{-2}	0.1	-0.5365223	-0.6235783	$8.70560 \cdot 10^{-2}$
	0.2	-0.5188439	-0.5530623	$3.42184 \cdot 10^{-2}$
	0.3	-0.2947948	-0.2237902	$7.10045 \cdot 10^{-2}$
	0.4	-0.0746980	-0.0890999	$1.44019 \cdot 10^{-2}$
	0.5	0.0134752	0.2135272	$2.00052 \cdot 10^{-1}$
10^{-3}	0.1	-0.8621793	-0.8772147	$1.50354 \cdot 10^{-2}$
	0.2	-0.6527167	-0.6587911	$6.07439 \cdot 10^{-3}$
	0.3	-0.3454157	-0.3393146	$6.10109 \cdot 10^{-3}$
	0.4	-0.0954883	-0.0795188	$1.59695 \cdot 10^{-2}$
	0.5	$0.271 \cdot 10^{-7}$	0.0197395	$1.97392 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	0.1	-0.9044631	-0.9060599	$1.596845 \cdot 10^{-3}$
	0.2	-0.6545085	-0.6551185	$6.099729 \cdot 10^{-4}$
	0.3	-0.3454915	-0.3448815	$6.099751 \cdot 10^{-4}$
	0.4	-0.0954915	-0.0938946	$1.596933 \cdot 10^{-3}$
	0.5	$0.385 \cdot 10^{-22}$	$0.197 \cdot 10^{-3}$	$1.97392 \cdot 10^{-3}$

Sonuç olarak , ε 'nun değerleri küçüldükçe kesin çözüm ile asimptotik çözümün birbirine yaklaştığı, $|u - u_a|$ farkının küçüldüğü görülmektedir.

4.4. (3.69)-(3.70) Probleminin Nümerik Çözümü İçin Örnek

(4.7)-(4.8) probleminde;

$$a_i = 1, f_i = -\cos^2(\pi x_i) - 2\varepsilon\pi^2 \cos(2\pi x_i) \quad \theta_i = \frac{a_i \rho^2}{4 \sinh^2(\sqrt{a_i} \rho / 2)}, \quad \rho = h / \sqrt{\varepsilon} \quad \text{olmak}$$

üzere, (4.7)-(4.8) problemi için oluşturulan fark şeması,

$$\ell y_i \equiv -\varepsilon \theta_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = -\cos^2(\pi x_i) - 2\varepsilon \pi^2 \cos(2\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0 = y_N = 0$$

şeklindedir. Buradan

$$\ell y_i \equiv \frac{\varepsilon \theta_i}{h^2} y_{i+1} - \left(\frac{2\varepsilon \theta_i}{h^2} + 1 \right) y_i + \frac{\varepsilon \theta_i}{h^2} y_{i-1} = \cos^2(\pi x_i) + 2\varepsilon \pi^2 \cos(2\pi x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0 = y_N = 0$$

yazılabilir. Burada

$$A_i = B_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{h^2}, \quad C_i = \left(\frac{2\varepsilon \theta_i}{h^2} + 1 \right), \quad F_i = -\cos^2(\pi x_i) - 2\varepsilon \pi^2 \cos(2\pi x_i),$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 0$$

şeklindedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Singüler pertürbe özellikli problemler giriş ve literatür bildirilişlerde bahsedildiği gibi reel hayattaki pek çok doğa olayını modellemek üzere incelenmiştir.

Bu çalışmada, singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden başlangıç değer problemi için $O(\varepsilon)$ ve $O(\varepsilon^2)$ tipi ve ikinci mertebeden sınır değer problemi için $O(\sqrt{\varepsilon})$ ve $O(\varepsilon)$ tipi asimptotik açılımlar yoluyla yaklaşık çözümü incelenmiştir. Bu açılımlar iç ve dış sınır kat fonksiyonları içermektedir. Ayrıca, nümerik integralleme formülleri yardımıyla ε -düzgün yakınsak fark şeması kurulmuş ve yaklaşım hataları değerlendirilmiştir. Maksimum prensibi kullanılarak açılımların kalan terimlerinin yakınsama hızlarının (3.1)-(3.2) problemi için $O(h)$ olduğu ve (3.69)-(3.70) problemi için sırayla $O(h)$ ve $O(h^2)$ olduğu gösterilmiştir. Bunun öncesinde fark şemasının kurulmasında ve incelenmesinde yararlanılan asimptotik eşitsizlikler belirlenmiştir. Daha sonra teoriyi destekleyici nümerik örnekler verilmiştir.

(3.1)-(3.2) problemi için verilen örneklerle asimptotik çözümlerden elde edilen sonuçlar Tablo 4.1. ve Tablo 4.2.'de, nümerik çözümden elde edilen sonuçlar Tablo 4.3.'de verilmiş ve teorik sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada ayrıca (3.69)-(3.70) problemi için verilen örnekle asimptotik çözümden elde edilen sonuçlar Tablo 4.4.'de verilmiş ve teorik sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada sunulan asimptotik ve nümerik metod incelenen problemlerle ilgili daha karmaşık ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilecek bir alt yapı oluşturacağı umulmaktadır.

KAYNAKLAR

- Ali, K. K., Hadhoud, A. R. and Shaalan, M. A. (2018) “Numerical study of self-adjoint singularly perturbed two-point boundary value problems using collocation method with error estimation”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 3(3), 237-243.
- Amirali, G. ve Amirali, İ. (2018) Nümerik Analiz, *Seçkin Yayıncılık*, Ankara, Türkiye, 496s.
- Amiraliyev, G. M. (1988) “On the numerical solution of the system of Boussinesque with boundary layers”, *USSR Modelling in Mechanics(Russia)*, 3, No. 3, 3-14.
- Amiraliyev, G. M. and Mamedov, Y.D. (1995) “Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseud-parabolic equation”, *Turkish Journal of Mathematics*, 9, 207-222.
- Ascher, U. M., Mattheij, R. M. M. and Russell, R. D. (1988) Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, *New Jersey*, 595s.
- Bawa, R. K. (2007) “A parallel approach for self-adjoint singular perturbation problems using Numerov's scheme”, *International Journal of Computer Mathematics*, 84(3), 317-323.
- Bawa, R. K. and Clavero, C. (2010) “Higher order global solution and normalized flux for singularly perturbed reaction–diffusion problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 216(7), 2058-2068.
- Bellman, R. (1964) “Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering”, Holt, Rinehart, *Winston*, New York. 345s.
- Bender, C.M. and Orszag, S.A. (1978) “Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers”, *McGraw-Hill*, New York, 303s.
- Doolan, E. P., Miller, J. J. and Schilders, W. H. A. (1980) Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layer, Boole, *Press*, Dublin, 324s.
- Farrel, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O’Riordan, E. and Shishkin, G. I (2000) “Robust Computational Techniques for Boundary Layer” *Chapman Hall/CRC*, New York.
- Gupta, Y. and Kumar, M. (2012) “Anthology of spline based numerical techniques for singularly perturbed boundary value problems”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 74 (4), 2012, 437-453.

- Kadalbajoo, M. K. and Aggarwal, V. K. (2005) “Fitted mesh B-spline collocation method for solving self-adjoint singularly perturbed boundary value problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 161(3), 973-987.
- Kadalbajoo, M. K. and Gupta, V. (2010) “A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 3641-3716.
- Kadalbajoo, M. K. and Reddy, Y. N. (1989) “Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems a survey”, *Applied Mathematics and Computation*, 30, 223-259.
- Kadalbajoo, M. and Patidar, K. C. (2002) “A survey numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations”, *Applied Mathematics and Computation.*, 130, 457-510.
- Kassoy, D. R. (1982) “A note asymptotic methods for jump phenomena”, *Siam Journal On Applied Mathematics*, 42, 926-932.
- Kevorkian J. and Cole J.D. (1996) “Multiple scale and singular perturbation methods”, *Springer*, New York, 320s.
- Kumar, M., Singh, P. and Mishra, H. K. (2007) “A recent survey on computational techniques for solving singularly perturbed boundary value problems”, *International Journal of Computer Mathematics*, 84(10), 1439-1463.
- Khuri, S. A. and Sayfy, A. (2014) “Self-adjoint singularly perturbed second-order two-point boundary value problems: A patching approach”, *Applied Mathematical Modelling*, 38(11-12), 2901-2914.
- Linß, T. (2009) *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems*, *Springer*.
- Linß, T. and Radojev, G. (2016) “Robust a posteriori error bounds for spline collocation applied to singularly perturbed reaction-diffusion problems”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 45, 342-353.
- Lodhi, R. K. and Mishra, H. K. (2017) “Septic B-spline method for second order self-adjoint singularly perturbed boundary-value problems”, *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4), 2153-2161.
- Lubuma, J. M. S. and Patidar, K. C. (2009) “Reliable finite element methods for self-adjoint singular perturbation problems”, *Quaestiones Mathematicae*, 32(3), 397-413.
- Miller, J. J. and Carrol, J. (1990) “Completely exponentially fitted finite difference schemes for some singular perturbation problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25, 225-230.

- Miller, J. J. H., O’Riordan, E. and Shishkin, G. I. (2012) Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 191s.
- Nayfeh, A. H. (1993) Introduction to Perturbation Techniques, *Wiley*, New York, 520s.
- Natesan, S. and Bawa, R. K. (2007) “Second-order numerical scheme for singularly perturbed reaction-diffusion Robin problems”, *Journal Numerical Analysis Ind. Applied Mathematics*, 2(3-4), 177-192.
- O’Malley, R. E. Jr. (1991) Singular Perturbations Method for Ordinary Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York. 236s.
- O’Riordan, E. and Stynes, M. (1987) “A uniform finite element method for conservative singularly perturbed problem”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 18, 163-174.
- Rao, S. C. S. and Kumar, M. (2010) “A uniformly convergent exponential spline difference scheme for singularly perturbed reaction-diffusion problems”, *Neural, Parallel & Scientific Computations*, 18(2), 121-136.
- Robert, S. M. (1982) “A boundary value technique for singular perturbation problems”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 87, 489-508.
- Roos, H.G., Stynes, M. and Tobiska, L. (2008) “Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations”, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 598s.
- Schmisser, C. and Weiss, R. (1986) “Asymptotic analysis of singularly perturbed boundary value problems”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 17, 560-579.
- Selvakumar, K. (1994) “A computational method for solving singular perturbation problems using exponentially fitted finite difference schemes”, *Applied Mathematics And Computation*, 66, 277-292.
- Sigamani, V., Miller, J.J.H., Narasimhan, R., Mathiazhagan, P. and Victor, F. (2015) Differential Equations and Numerical Analysis, *Springer*, New Delhi, India, 172.
- Shishkin, G.I. and Shishkina, L.P. (2009) Difference Methods for Singular Perturbation Problems, *CRC Press*, Boca Raton, Florida.
- Shishkina, L. P. and Shishkin, G. I. (2018) “Robust difference scheme for the cauchy problem for a singularly perturbed ordinary differential equation” , *Mathematical Modelling and Analysis*, 23(4), 527–537,
- Surla, K. (1988) “A uniformly convergent spline difference scheme for a singularly perturbed self -adjoint problem on non-uniform mesh”, *ZAMM.*, 68, 420-422.

EKLER

EK-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

- Kudu, M., **Kurnaz, P.** ve Amiralı, G. (2018) “Sınır katına sahip başlangıç değer probleminin çözümünün asimptotik davranışları”, *IV. Uluslar Arası Mesleki ve Teknik Bilimler Kongresi*, Erzurum, 1306-1314.



ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Bayburt'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 2003 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2008 yılında bölümünden ikincilikle mezun oldu. 2009 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2011 yılında MEB'de öğretmen olarak mesleğe başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.

