

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ PROBLEMLERİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ İÇİN KESİN FARK ŞEMALARI YÖNTEMİ

Ali ENES

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019

Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında, Ali ENES tarafından hazırlanan bu çalışma 23/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği/oy çokluğu (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

İmza:

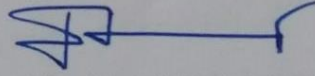
Üye : Prof. Dr. Musa ÇAKIR

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa KUDU

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 14 / 06 / 2019 tarih ve 21 / ... 2 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

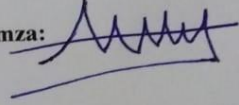
Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

“Singüler Pertürbe Olmuş Problemlerin Nümerik Çözümleri için Kesin Fark Şemaları Yöntemi” isimli “Yüksek Lisans” tezimin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 23/05/2019

Adı Soyadı: Ali ENES

İmza:



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN KESİN FARK ŞEMALARI YÖNTEMİ

Ali ENES

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Bu çalışmada singüler pertürbe olmuş integral sınır şartı ve periyodik sınır şartı içeren ikinci mertebeden diferansiyel problemler için sonlu fark yöntemleri ve bu nümerik metodların yakınsaklığının incelenmesi ele alınmıştır. Bu tür problemler için öncelikle fark şemaları kuruldu, düzgün hata değerlendirmeleri yapıldı. Daha sonra yakınsama hızları incelendi ve örnekler üzerinde nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterildi.

2019, 33 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzgün Yakınsaklık, Fark Şemaları, Singüler Pertürbasyon

ABSTRACT

Master Thesis

METHOD OF EXACT DIFFERENCE SCHEMES FOR NUMERICAL SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS

Ali ENES

Erzincan Binali Yildirim University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALI

This study deals with the difference methods and its convergence properties for second order singularly perturbed differential problems with integral and periodic conditions. First, the difference schemes for these problems are constructed and orders of uniform convergence are established. Further, experimental rates of convergence are obtained and compared with the theoretical results.

2019, 33 Pages

Keywords: Difference Scheme, Singular Perturbation, Uniform Convergence

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu alıŐma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıŐtır.

ÇalıŐmalarım esnasında bana gösterdiği yakın ilgi ve her türlü yardımlarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALI'ye, bana uygun çalışma ortamı sağlayan aileme ve bu çalışmada emeği geçen herkese teŐekkürlerimi sunarım.

Ali ENES

Mayıs, 2019



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR	v
1.GİRİŞ ve LİTERATÜR BİLDİRİLERİ	1
2.TEMEL BİLGİLER	3
2.1. Regüler ve Singüler Pertürbe Olmuş Problem.....	3
2.2. Bazı İnterpolasyon Kuadratür Formülleri	3
2.3. Kesin Fark Şemaları	4
3. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	10
3.1. Singüler Pertürbe İntegral Sınır Şartlı Problem İçin Sonlu Fark Yöntemi.....	10
3.1.1. Sürekli Problem	10
3.1.2. Fark Şemasının Kurulması.....	13
3.1.3. Düzgün Hata Değerlendirmesi.....	17
3.1.4. Nümerik Sonuçlar	19
3.2. Singüler Pertürbe Sınır Değer Problemi İçin Nümerik Metodun Yakınsaklığı ..	21
3.2.1. İkinci Mertebeden Kuazilineer Diferansiyel Problem	21
3.2.2. Kesin Çözümün Özellikleri.....	21
3.2.3. Diskritizasyon ve Yakınsama	23
3.2.4. Algoritma ve Nümerik Sonuçlar	29
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGELER ve KISALTMALAR

Semboller

ε	Singüler pertürbasyon parametresi
x, t	Bağımsız değişkenler
$u(x), u(t)$	Sürekli problemin çözümü
$u_0(x)$	İndirgenmiş problemin çözümü
L	Diferansiyel operatör
ℓ	Fark operatörü
$c, c_i; C, C_i (i = 0, 1, \dots)$	ε 'dan bağımsız pozitif sabitler
g_i	$g(x)$ fonksiyonun x_i düğümündeki değeri
h	Şebeke adımı
i, j	Şebeke nokta indisleri
x_i, t_j	Düğüm noktaları
$y(x), y(t)$	Fark probleminin çözümü
$O(h^k)$	Yakınsama hızı
$\ f\ _{\infty, [0, l]} = \max_{[0, l]} f(x) $	$[0, l]$ kümesindeki sürekli norm
$\ y\ _{\infty, \varpi_h} = \max_{0 \leq i \leq N} y_i $	ϖ_h şebekesindeki ayrık norm

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR BİLDİRİLERİ

Singüler pertürbe özellikli problemler uygulamalı matematiğin ve matematiksel fiziğin pek çok değişik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin; akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, plazma dinamik, aerodinamik, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, kütle hareketi, plastik, kimyasal-reaktör teori, oşinografi, meteoroloji, yayma teorisi, reaksiyon-difüzyon süreçleri, ışık yayan dalgalar, plazmadaki elektron plazma dalgaları, iletişim hatları, elektrik akımı, iyon akustik dalgaları ve diğer fiziksel modellendirilmesinde karşılaşmıştır (Kadalbajoo ve Patidar, 2002; Lins, 2010; O'Malley, 1991; Nayfeh, 1973).

Matematiksel olarak bu tip problemler, en yüksek mertebeden türevler içeren terimlerinin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemlerdir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişim göstermektedir. Yani çözüm, problemin türüne göre başlangıç veya sınır katları olarak bilinen ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değişir. Hızlı değişimin olduğu katlarda ise çözümün türevleri sınırsız olur. Klasik nümerik metotlarda, çözümün türevi sonsuz olabileceği için, klasik fark şemalarının düzgün şebekelerdeki nümerik çözümleri kesin çözüme genelde yakınsamaz. Bu yüzden söz konusu metotların kararsız ya da ıraksak olmaları nedeniyle uygulanması genelde mümkün olmamaktadır. Dolayısıyla kararlı ve küçük parametreye göre düzgün yakınsaklık özelliğini taşıyan nümerik metotların kurulması önem taşır (Cai, 2001; Doolan vd., 1980; Farrel vd., 2000; Miller vd., 2012; Roos vd., 2008).

Bu tezde uygulamalı bilim dallarının birçok değişik alanında kullanılan singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler için integral sınır şartlı ve periyodik sınır-değer problemleri ele alınmıştır.

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve kaynak özetleri verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan genel bilgiler yer almaktadır. Çalışmanın üçüncü bölümünde singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı problem ele alınmış ve uygun fark problemi için yakınsama hızı incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise singüler pertürbe olmuş periyodik sınır-değer problemi için nümerik metodun yakınsaklık

özelliği araştırılmıştır. Beřinci bölüm ise incelenen problemlere ait sonuç ve öneriler içermektedir.



2. TEMEL BİLGİLER

Singüler pertürbe özellikli problemlere ilgi, yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar ilk aşamada asimptotik açılımlar üzerine yoğunlaşmıştır (O'Malley, 1991; Nayfeh, 1973). 1960'lı yıllardan sonraki dönemlerde ise nümerik yöntemler üzerine çalışmalar başlamış olup halen yoğun şekilde devam etmektedir (Amirali vd., 2018; Farrel vd., 2000; Miller vd., 2012).

2.1. Regüler ve Singüler Pertürbe Olmuş Problem

P_ε , $\varepsilon > 0$ küçük parametresine bağlı herhangi bir problem olsun. $\varepsilon = 0$ durumunda P_0 problemine, P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir. Eğer P_0 indirgenmiş problem ile P_ε problemi aynı tipten, aynı mertebeden ve her ikisi de bir tek çözüme sahip iseler söz konusu P_ε problemine regüler pertürbe olmuş problem denir. Aksi halde buna singüler pertürbe olmuş problem denir (Amirali vd., 2018; Farrel vd., 2000; Miller vd., 2012).

2.2. Bazı İnterpolasyon Kuadratür Formülleri

Fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıda belirtilen bazı kuadratür formülleri kullanılacaktır (Amiraliyev vd., 1995, 2002, 2003; Çakır vd., 2007, 2010; Kudu vd., 2016).

Aşağıdaki interpolasyon kuadratür formülleri doğrudur:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \left\{ \sigma f(b) + (1-\sigma)f(a) \right\} + f[a,b] \int_a^b (x-x^{(\sigma)})p(x)dx + R_n(f) \quad (2.2.1)$$

burada σ - reel parametre, $p(x) \in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonu, f belirli fonksiyon ve

$$R_n(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, n = 1 \text{ veya } 2$$

kalan terimdir, burada

$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \quad s = 0,1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad f[a, b] = (f(b) - f(a))/(b - a),$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s / s!, \quad \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0.$$

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f[a, b] \int_a^b p(x) dx + R_n^*(f) \quad (2.2.2)$$

burada $p \in C^1[a, b]$ ve

$$R_n^*(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n=1 \text{ veya } 2.$$

(2.2.1) ve (2.2.2) formüllerinde aynı $K_s(x, \xi)$ fonksiyonunun bulunduğunu belirtelim.

Ayrıca,

$$K_0(a, \xi) = K_0(b, \xi) = 0,$$

$$K_1(a, \xi) = K_1(b, \xi) = K_1(x, a) = K_1(x, b) = 0,$$

$$K_1(x, \xi) = K_1(\xi, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} K_1(x, \xi) = -K_0(x, \xi), \quad \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, \xi) = -K_0(\xi, x)$$

ve $f(x) \in C^2[a, b]$ için

$$R_n^*(f) = - \int_a^b dx p(x) \int_a^b \frac{\partial K_1}{\partial x}(x, \xi) f''(\xi) d\xi = - \int_a^b dx p(x) \int_a^b K_0(\xi, x) f''(\xi) d\xi$$

olur.

2.3. Kesin Fark Şemaları

Bu kısımda birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için düzgün şebekede kesin fark şemaları verilmektedir (Amirali vd., 2018; Samarskii, 2001).

Kesin fark şemaları yöntemi, verilerin düşük düzgünlükte olması veya diferansiyel denklemin çözümünün kötü davranışlı olması durumunda yakınsak fark şemalarının kurulmasına imkan sağlayan bir yaklaşımdır. Bu yöntemin, bu kısımdaki

diferansiyel operatörlerin ve bu kısımda olmayan diferansiyel operatörlerin singüler pertürbe olmuş durumlarına yönelik uygulamaları ileriki kısımlarda ele alınacaktır.

Tanım. Eğer verilmiş şebekenin düğüm noktalarında fark şemasının çözümü uygun diferansiyel problemin çözüm değerleri ile çakışıyorsa, bu fark şemasına *kesin fark şeması* denir.

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklem için

$$\begin{aligned} Lu &:= u' + a(x)u = f(x), \quad x > 0, \\ u(0) &= \mu \end{aligned}$$

başlangıç-değer problemi verilmiş olsun, burada $a(x)$ ve $f(x)$ sürekli fonksiyonlardır. $x_i = ih, i = 0, 1, \dots$ düğümleri kullanılarak kurulan uygun kesin fark şeması aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} B_i u_{x,i} + A_i u_i &= F_i, \quad i = 1, 2, \dots \\ u_0 &= \mu, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

burada

$$B_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) a(x) \varphi_i(x) dx,$$

$$A_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x) \varphi_i(x) dx,$$

$$F_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx,$$

$\varphi_i(x)$ fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} -\varphi' + a(x)\varphi &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi(x_i) &= 1 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

başlangıç-değer probleminin çözümü olup, açık ifadesi

$$\varphi_i(x) = e^{-\int_x^{x_i} a(\eta) d\eta}$$

şeklinde de yazılabilir.

(2.3.1)'in doğruluğunu göstermek için

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x)\varphi_i(x)dx = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx$$

özdeşliğinden ele alınır. (2.2.2) formülünü $n = 1$, $p(x) = \varphi_i(x)$ için kullanırsak

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i(x)dx = u_{\bar{x},i} \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx \right) + R_i^{(1)},$$

(2.2.1) formülünü de $\sigma = 1$, $n = 1$ ve $p(x) = \varphi_i(x)$ için kullanırsak

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)u(x)\varphi_i(x)dx = \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\varphi_i(x)dx \right) u_i + u_{\bar{x},i} \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)(x - x_i)\varphi_i(x)dx \right) + R_i^{(2)}$$

eşitliğini yazabiliriz. $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$ kalan terimlerinin ifadeleri aşağıdaki şekildedir:

$$R_i^{(1)} = -h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\varphi_i'(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi) [T_0(x - \xi) - h^{-1}(x - x_{i-1})] d\xi,$$

$$R_i^{(2)} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx a(x)\varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi) [T_0(x - \xi) - h^{-1}(x - x_{i-1})] d\xi.$$

$\varphi_i(x)$ 'in (2.3.2)'nin çözümü olduğunu dikkate aldığımızda $R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = 0$ ifadesinin doğruluğunu, dolayısıyla (2.3.1) kesin şemasının doğruluğunu tespit etmiş oluruz.

Özellikler:

$$a) \quad h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx = \varphi_i(x_{i-1}) + h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)\varphi_i'(x)dx$$

bağıntısı ve (2.3.2) dikkate alınırsa, B_i katsayısının

$$B_i = \varphi_i(x_{i-1})$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür.

b) $a, f = sbt$ durumunda

$$\varphi_i(x) = e^{-a(x_i-x)}, B_i = e^{-ah}, A_i = a \frac{1-e^{-ah}}{ah}, F_i = f \frac{1-e^{-ah}}{ah}$$

olur. Fark şemasının her iki tarafı $\left(\frac{1-e^{-ah}}{ah}\right)$ ifadesine bölündükten sonra

$$\theta u_{\bar{x},i} + au_i = f, i \geq 1$$

elde edilir. Burada

$$\theta = \frac{ah}{1-e^{-ah}} e^{-ah}$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklem için

$$Lu := -(a(x)u')' + c(x)u = f(x), \quad 0 < x < l$$

$$u(0) = \mu_0, \quad u(l) = \mu_1$$

sınır-değer problemi verilsin ve $a(x) > 0, c(x) \geq 0$ olsun.

$\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1, h = l/N\}$ şebekesinde uygun kesin fark şeması aşağıdaki şekildedir:

$$-(A_i u_{\bar{x}})_{x,i} + C_i u_i = F_i, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$u_0 = \mu_0, \quad u_N = \mu_1,$$

burada

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)(x_i - x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx$$

$$\equiv \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{a(x)} \right)^{-1} \left[1 - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{a(x)} \int_{x_{i-1}}^x c(\xi) \varphi_i^{(1)'}(\xi) d\xi \right],$$

$$C_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c(x) \varphi_i(x) dx,$$

$$F_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx,$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1} \end{cases}$$

ve $\varphi_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(2)}$ baz fonksiyonları ise sırasıyla aşağıdaki sınır-değer problemlerinin çözümleridir:

$$\begin{aligned} -(a(x)\varphi')' + c(x)\varphi &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad \varphi(x_{i-1})=0, \quad \varphi(x_i)=1 \\ -(a(x)\varphi')' + c(x)\varphi &= 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad \varphi(x_i)=1, \quad \varphi(x_{i+1})=0. \end{aligned}$$

Bu fark şemasının doğruluğu

$$h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\phi_i(x) dx = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

özdeşliğinden yola çıkılarak (2.2.1) ve (2.2.2) formüllerinin (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1})

alt aralıklarında uygun şekilde kullanılmasıyla ispatlanabilir.

Özellikler:

a) $a \in C[0, l]$ ise A_i katsayısı

$$A_i = ha(x_{i-1})\phi_i^{(1)'}(x_{i-1}) = -ha(x_i)\phi_{i-1}^{(2)'}(x_i)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca, $a_{i-1}\phi_i^{(1)'}(x_{i-1}) = a_i\phi_i^{(2)'}(x_i)$ eşitliğinin doğruluğu da

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_i^{(1)}(x)L\varphi_{i-1}^{(2)}(x) - \varphi_{i-1}^{(2)}(x)L\varphi_i^{(1)}(x)] dx = 0$$

özdeşliğinden yola çıkılarak kanıtlanabilir.

b) $a, c, f = sbt$ durumunda

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \frac{\sinh v(x - x_{i-1})}{\sinh(vh)}, \quad \varphi_i^{(2)}(x) = \frac{\sinh v(x_{i+1} - x)}{\sinh(vh)}, \quad (v = \sqrt{c/a})$$

$$A_i = a \frac{vh}{\sinh(vh)}, \quad C_i = c \frac{2}{vh} \tanh\left(\frac{vh}{2}\right), \quad F_i = f \frac{2}{vh} \tanh\left(\frac{vh}{2}\right)$$

olur. Fark şemasının her iki tarafı $\frac{2}{vh} \tanh\left(\frac{vh}{2}\right)$ ifadesine bölünürse

$$-\theta u_{xx,i} + cu_i = f_i$$

elde edilir, burada

$$\theta = \frac{vh^2}{4 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{vh}}{2}\right)}.$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Singüler Pertürbe İntegral Sınır Şartlı Problem İçin Sonlu Fark Yöntemi

Bu bölüm, aşağıdaki integral sınır şartlı singüler pertürbe olmuş sınır-değer probleminin sonlu fark yöntemi ile çözümünü içermektedir.

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x)u' - b(x)u = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3.1.1)$$

$$u(0) = \mu_0, \quad (3.1.2)$$

$$L_1 u \equiv u(l) - \int_{l_0}^{l_1} g(x)u(x)dx = \mu_1, \quad 0 \leq l_0 < l_1 \leq l. \quad (3.1.3)$$

Burada ε küçük parametre, μ_0 ve μ_1 verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$, $g(x)$ ve $f(x)$, $[0,1]$ aralığında yeteri kadar düzgün fonksiyonlardır. (3.1) - (3.3) probleminin çözümü $u(x)$, ε 0'a yaklaşırken $x=0$ 'da ve $x=l$ 'de iki sınır katı içermektedir.

3.1.1. Sürekli Problem

Burada, (3.1.1) - (3.1.3) probleminin nümerik çözümünün incelenmesi için sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulan asimptotik değerlendirmeler ele alınmıştır.

Lemma 3.1.1.1. $u(x)$, (3.1.1) - (3.1.3) probleminin çözümü ve $a, b, f, g \in C^1[0, l]$ olsun. Ayrıca

$$1 - \int_{l_0}^{l_1} g(x)u_1(x)dx \neq 0, \quad (3.1.1.1)$$

olsun. Burada $u_1(x)$ aşağıdaki iki noktalı sınır-değer probleminin çözümüdür:

$$Lu_1 = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.1.1.2)$$

$$u_1(0) = 0, u_1(l) = 1. \quad (3.1.1.3)$$

Bu durumda

$$\|u\|_{\infty,[0,l]} \leq C, \quad (3.1.1.4)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{c_0 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{c_1(l-x)}{\varepsilon}} \right) \right\} \quad (3.1.1.5)$$

olur, burada

$$c_0 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2(0) + 4b(0)} + a(0) \right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2(l) + 4b(l)} - a(l) \right]$$

dir.

İspat. $u(l) = \lambda$ olsun. O halde $u(x)$ fonksiyonu

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) \quad (3.1.1.6)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $u_0(x)$ aşağıdaki iki noktalı sınır-değer probleminin çözümüdür:

$$Lu_0 = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3.1.1.7)$$

$$u_0(0) = \mu_0, \quad u_0(l) = 0. \quad (3.1.1.8)$$

Bu durumda (3.1.3) ve (3.1.6)'dan

$$\lambda = \frac{\mu_1 + \int_{l_0}^{l_1} g(x)u_0(x)dx}{1 - \int_{l_0}^{l_1} g(x)u_1(x)dx} \quad (3.1.1.9)$$

bulunur.

İlk önce, (3.1.1.4)'ün doğruluğu gösterilir. Bunun için aşağıdaki şekilde ifade edilen maximum prensibi kullanılır: Herhangi bir

$v(x) \in C^2[0, l]$ için $Lv(x) \leq 0$, $0 < x < l$ ve $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ olsun. Bu durumda $v(x) \geq 0$, $0 < x < l$ olur.

Maximum prensibi kullanılarak $u(x)$ fonksiyonunun ε 'a göre sınırlı olduğu elde edilir:

$$\|u_0\|_{\infty, [0, l]} \leq \beta^{-1} \|f\|_{\infty, [0, l]} + |\mu_0| \leq C.$$

Benzer şekilde, maximum prensibi kullanılarak

$$\|u_1\|_{\infty, [0, l]} \leq 1$$

olduğu gösterilebilir. O zaman (3.1.1.4) sonucu hemen görülür:

$$\|u\|_{\infty, [0, l]} \leq \|u_0\|_{\infty, [0, l]} + |\lambda| \|u_1\|_{\infty, [0, l]}.$$

Böylece (3.1.1.4) değerlendirmesinin doğruluğu ispatlanmış olur.

Ayrıca $|u(l)|$ 'nin ε 'da düzgün sınırlılığı kanıtlandığından, (3.1.1.5) değerlendirmesi birinci tip sınır-değer problemine benzer şekilde elde edilebilir.

Not 1. (3.1.1.1)'in sağlanması için gerekli koşul

$$1 - \int_{l_0}^{l_1} |g(x)| dx > 0.$$

3.1.2. Fark Şemasının Kurulması

$[0, l]$ üzerindeki düzgün şebeke ω_h olarak gösterilsin:

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N-1; Nh = l\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, l\}.$$

Fark şeması

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_0^l Lu\varphi_i(x)dx = \chi^{-1} h^{-1} \int_0^l f(x)\varphi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.1.2.1)$$

özdeşliğinden aşağıdaki gibi oluşturulur.

Burada $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \frac{e^{\lambda_{1,i}(x-x_{i-1})} - e^{\lambda_{2,i}(x-x_{i-1})}}{e^{\lambda_{1,i}h} - e^{\lambda_{2,i}h}}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)}(x) \equiv \frac{e^{-\lambda_{2,i}(x_{i+1}-x)} - e^{\lambda_{1,i}(x_{i+1}-x)}}{e^{-\lambda_{2,i}h} - e^{\lambda_{1,i}h}}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

formülü ile verilen baz fonksiyonudur,

$$\lambda_{1,i} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_i + \sqrt{a_i^2 + 4b_i} \right], \quad \lambda_{2,i} = 0.5\varepsilon^{-1} \left[a_i - \sqrt{a_i^2 + 4b_i} \right],$$

$$x_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \frac{2h^{-1}(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})}{\lambda_{1,i}\lambda_{2,i} \sinh \frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})h}{2}} \sinh\left(\frac{\lambda_{1,i}h}{2}\right) \sinh\left(\frac{\lambda_{2,i}h}{2}\right).$$

Ayrıca $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleri olduğunu belirtelim.

$$\varepsilon^2 \varphi_i'' - a_i \varepsilon \varphi_i' - b_i \varphi_i = 0 \quad (x_{i-1} < x < x_i), \quad \varphi_i(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi_i(x_i) = 1, \quad (3.1.2.2)$$

$$\varepsilon^2 \varphi_i'' - a_i \varepsilon \varphi_i' - b_i \varphi_i = 0 \quad (x_i < x < x_{i+1}), \quad \varphi_i(x_i) = 1, \quad \varphi_i(x_{i+1}) = 0. \quad (3.1.2.3)$$

(3.1.2.1) bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$x_i^{-1} \left[-\varepsilon^2 h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) u'(x) dx + \varepsilon a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) u'(x) dx - b_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) u(x) dx \right] = f_i - R_i \quad (3.1.2.4)$$

elde edilir. Burada

$$R_i = x_i^{-1} \varepsilon h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] \varphi_i(x) u'(x) dx + x_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x_i) - b(x)] \varphi_i(x) u(x) dx + x_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] \varphi_i(x) u(x) dx \quad (3.1.2.5)$$

biçimindedir. Her bir (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralıkları üzerinde (3.1.1.1) ve (3.1.1.2) formülleri kullanılır ve (3.1.2.2) - (3.1.2.3) de dikkate alınıp

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(x) \varphi_i(x) dx + \varepsilon a_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u'(x) dx - b_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx \\ &= \varepsilon^2 u_{\bar{x},i} + \varepsilon a_i (\chi_{1,i} u_{\bar{x},i} + \chi_{2,i} u_{x,i}) - b_i \chi_i u_i - b_i \mu_{1,i} u_{\bar{x},i} - b_i \mu_{2,i} u_{x,i} \\ &= \varepsilon^2 \{1 + 0.5h\varepsilon^{-1} a_i (\chi_{2,i} - \chi_{1,i}) - 0.5h\varepsilon^{-2} b_i (\mu_{2,i} - \mu_{1,i})\} u_{\bar{x},i} + \varepsilon a_i (\chi_i - \varepsilon^{-1} a_i^{-1} b_i \mu_i) u_{x,i} - b_i \chi_i u_i \end{aligned}$$

şeklindeki kesin bağıntıya ulaşılır. Burada

$$\chi_{1,i} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx, \quad \chi_{2,i} = h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx,$$

$$\mu_{1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx, \quad \mu_{2,i} = h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx,$$

$$\mu_i = \mu_{i,1} + \mu_{i,2}, \quad u_i = u(x_i),$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

$$u_{x,i}^{\circ} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad u_{xx,i}^{-} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

şeklindedir.

Basit bir hesaplamayla

$$1 + 0.5h\varepsilon^{-1}a_i(\chi_{2,i} - \chi_{1,i}) - 0.5h\varepsilon^{-2}b_i(\mu_{2,i} - \mu_{1,i}) = 0.5h(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \frac{\cosh\left(\frac{(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})h}{2}\right)},$$

$$\chi_i - \varepsilon^{-1}a_i^{-1}b_i\mu_i = \frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})\sinh((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h/2)}{(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})\sinh((\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i})h/2)}$$

olduğu görülür.

O halde (3.1.2.4)'e geri döndüğümüzde

$$lu_i \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,i} u_{xx,i} + \varepsilon a_i \theta_{2,i} u_{x,i} - b_i u_i = f_i - R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.1.2.6)$$

özdeşliğini elde ederiz. Burada

$$\theta_{1,i} = \frac{h^2 \lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \cosh((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h/2)}{4 \sinh(\lambda_{1,i}h/2) \sinh(\lambda_{2,i}h/2)} \quad (3.1.2.7)$$

$$\equiv -\frac{b_i h^2}{4\varepsilon^2} [1 + \coth(\lambda_{1,i}h/2) \coth(\lambda_{2,i}h/2)],$$

$$\theta_{2,i} = \frac{h \lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \sinh((\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})h/2)}{2(\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}) \sinh(\lambda_{1,i}h/2) \sinh(\lambda_{2,i}h/2)}, \quad (3.1.2.8)$$

$$\equiv -\frac{b_i h}{2a_i \varepsilon} [\coth(\lambda_{1,i}h/2) \coth(\lambda_{2,i}h/2)]$$

şeklindedir. Şimdi (3.1.1.3) sınır şartı için geriye bir yaklaşım belirlemek kalır.

x_{N_0} ve x_{N_1} , sırasıyla l_0 ve l_1 'e en yakın şebeke noktaları olsun. Bunun için

$$\int_{l_0}^{l_1} g(x)u(x)dx = \int_{l_0}^{x_{N_0}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{N_0}}^{x_{N_1}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{N_1}}^{l_1} g(x)u(x)dx$$

ve

$$\int_{x_{N_0}}^{x_{N_1}} g(x)u(x)dx = \sum_{i=N_0}^{N_1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \right) \left\{ \frac{1}{2} (u(x_i) + u(x_{i-1})) \right\} + \bar{r}_i, \equiv S(u) + \bar{r}_i \quad (3.1.2.9)$$

bağıntılarıyla başlanır. Burada

$$S(u) = \sum_{i=N_0}^{N_1} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx \right) \left\{ \frac{u(x_i) + u(x_{i-1}))}{2} \right\}, \quad (3.1.2.10)$$

$$r_i = \sum_{i=N_0}^{N_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx g(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi) \left[T_0(x - \xi) - \frac{1}{2} \right] d\xi,$$

$$T_0(s) = 1, \quad s \geq 0; \quad T_0(s) = 0, \quad s < 0$$

şeklindedir. Sonuç olarak,

$$l_1 u = u(l) - S(u) = \mu_1 + r, \quad (3.1.2.11)$$

olur. Burada

$$r_i = \int_{l_0}^{x_{N_0}} g(x)u(x)dx + \int_{x_{N_1}}^{l_1} g(x)u(x)dx + \bar{r}_i \quad (3.1.2.12)$$

şeklindedir.

(3.2.12) ve (3.2.5)'de r ve R_i ihmal edilirse (3.1) ve (3.3) yaklaşımı için aşağıdaki fark şeması sunulabilir:

$$l y_i \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,i} y_{\bar{x},i} + \varepsilon a_i \theta_{2,i} y_{x,i} - b_i y_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.1.2.13)$$

$$y(0) = \mu_0, \quad (3.1.2.14)$$

$$l_1 y_N \equiv y_N - S(y) = \mu_1 \quad (3.1.2.15)$$

burada $\theta_{1,i}$, $\theta_{2,i}$ ve $S(y)$ sırasıyla (3.1.2.7), (3.1.2.8) ve (3.1.2.9)'da verilmiştir.

3.1.3. Düzgün Hata Değerlendirmesi

Şimdi, (3.1.2.13) - (3.1.2.15) fark problemlerine dönelim ve $z_i = y_i - u_i$ olsun. Burada y_i , (3.1.2.13) - (3.1.2.15)'in çözümü ve u_i , x_i şebeke noktasında (3.1.1) - (3.1.3)'ün çözümüdür. O zaman z_i hatası için (3.1.2.6) ve (3.1.2.12) dikkate alınarak

$$lz_i = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad z_0 = 0, \quad l_1 z_N = r, \quad (3.1.3.1)$$

elde edilir. Burada R_i ve r kesme hataları (3.2.5) ve (3.2.12)'de tanımlanmıştır. Burada z_i 'nin

$$z_i = z_{0i} + \bar{\lambda} z_{1i}, \quad (3.1.3.2)$$

olarak ayrıştırılabildiğini görmek kolaydır. Burada z_{0i} ve z_{1i} , ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) sırasıyla

$$lz_{0i} = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad z_{0,0} = 0, \quad z_{0,N} = 0, \quad (3.1.3.3)$$

$$lz_{1i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad z_{1,0} = 0, \quad z_{1,N} = 1, \quad (3.1.3.4)$$

problemlerinin çözümleridir ve

$$\bar{\lambda} = \frac{r + S(z_0)}{1 - S(z_1)} \quad (3.1.3.5)$$

şeklindedir.

Burada

$$1 - S(z_1) \neq 0$$

olduğu varsayılır.

Teorem. Lemma 3.1.1.1'in düzgünlük koşulları ve (3.1.3.6) koşulu sağlansın. u , (3.1.1) - (3.1.3)'ün çözümü ve y , (3.1.2.13) - (3.1.2.15)'in çözümü olsun. Lemma 3.1.1'in aynı koşulları altında ε -düzgün hata değerlendirmesi aşağıdaki gibi olur:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq Ch. \quad (3.1.3.7)$$

İspat. Öncelikle (3.1.1)'in çözümü için

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq C(\beta^{-1}\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_h} + |r|) \quad (3.1.3.8)$$

değerlendirmesinin olduğunu gösterelim.

(3.1.3.2) bağıntısı

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq \|z^{(0)}\|_{\infty, \bar{\omega}_h} + |\bar{\lambda}| \|z^{(1)}\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \quad (3.1.3.9)$$

eşitsizliğini verir.

$\|z^{(0)}\|_{\infty, \bar{\omega}_h}$ 'ı değerlendirmek için maximum prensibine göre

$$\|z^{(0)}\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq \beta^{-1}\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \quad (3.1.3.10)$$

eşitsizliği kullanılır.

Ayrıca R_i için açık ifadesinden Lemma 3.1.1.1 kullanılarak

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq Ch$$

(3.1.3.11)

olduğu görülür.

(3.1.3.5) ve (3.1.3.6)'dan dolayı $\bar{\lambda}$ ifadesi ε 'da düzgün sınırlı olacaktır. r hatası ile ilgili (3.1.2.11)'den

$$\begin{aligned}
|r| &\leq \sum_{i=N_0}^{N_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx |g(x)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(\xi)| T_0(x-\xi) - \frac{1}{2} d\xi \right| \\
&+ \int_{I_0}^{x_{N_0}} |g(x)| |u(x)| dx + \int_{x_{N_1}}^I |g(x)| |u(x)| dx \leq h \max |g(x)| \\
&\times \sum_{i=N_0}^{N_1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(\xi)| T_0(x-\xi) - \frac{1}{2} d\xi + O(h) \leq \frac{h}{2} \\
&\times \max |g(x)| \int_0^I |u'(x)| dx + O(h) \leq Ch
\end{aligned} \tag{3.1.3.12}$$

elde edilir.

(3.1.3.8) değerlendirmesi (3.1.3.11) ve (3.1.3.12) ile birlikte ispatı sonuçlandırır.

3.1.4. Nümerik Sonuçlar

Aşağıdaki problemin yaklaşık çözümünün hesaplanması için (3.1.2.13) - (3.1.2.15) şeması uygulanmıştır:

$$\varepsilon^2 u'' + 2\varepsilon(x+1)u' - (-x^2 - 2x + 4)u = -(e^x + e^{x^2}),$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) - \int_0^1 \cos xu(x) dx = 0.$$

Tablo 1. $N = 16$ ve $N = 32$ için ϖ_h 'de maximum hata değerleri ve p yakınsama hızı

ε	E_∞		p
	$N = 16$	$N = 32$	
10^{-1}	0,058045	0,023538	1,03
10^{-3}	0,015304	0,007810	0,97
10^{-5}	0,015304	0,007881	0,96
10^{-7}	0,015304	0,007881	0,96

E_∞ , ω_h şebekesindeki maximum hata değeridir: $E_\infty = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i - u_i|$.

Aşağıdaki gibi p deneysel düzgün yakınsama hızı hesaplanır:

$$p = \ln(r^h / r^{h/2}) / \ln 2,$$

burada

$$r^h = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i^h - y_{2i}^{h/2}|$$

dir.

Bu sonuçlar, sunulan şemanın deneysel yakınsama hızının önemli derecede teorik analizlerle uyumlu olduğunu gösterir.

3.2 Singüler Pertürbe Sınır Değer Problemi İçin Nümerik Metodun Yakınsaklığı

Bu kısım ikinci mertebeden kuazilineer diferansiyel denklem için periyodik singüler pertürbe sınır-değer problemi ile ilgilidir. Bu nümerik metot, ayrı maksimum normda birinci dereceden düzgün yakınsaklık veren parçalı düzgün Shishkin tip şebeke üzerine kuruldu. Teoriye destekleyen nümerik sonuçlar sunuldu.

3.2.1. İkinci Mertebeden Kuazilineer Diferansiyel Problem

Bu bölümde

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x)u' - f(x, u) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.2.1)$$

$$u(0) - u(l) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$L_0 u \equiv \varepsilon(u'(l) - u'(0)) = A, \quad (3.2.3)$$

lineer olmayan ikinci mertebeden singüler pertürbe periyodik sınır-değer problemi ele alınmıştır. Burada $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi ve A verilmiş sabittir. $a(x) \geq 0$ ve $f(x, u)$ $[0, l]$ ve $[0, l] \times R$ 'de yeterince düzenli fonksiyonlar, ayrıca $a(0) = a(l)$, $f(0, u(0)) = f(l, u(l))$ ve

$$0 < \beta \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq \beta^* < \infty$$

olsun.

(3.2.1) ve (3.2.3)'ün u çözümü genel olarak $x = 0$ ve $x = l$ yakınında bir sınır katına sahiptir.

3.2.2. Kesin Çözümün Özellikleri

Burada sonraki kısımlarda ihtiyaç duyulan (3.2.1) - (3.2.3) probleminin kesin çözümünün asimptotik değerlendirmelerini vereceğiz.

Lemma 3.2.2.1. $a, f \in C^1[0, l]$ olsun. O zaman (3.2.1) - (3.2.3) probleminin $u(x)$ çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\|u\| \leq \beta^{-1} \|F\| + \bar{\beta} |A|, \quad (3.2.2.1)$$

burada

$$\|u\| = \|u(x)\|_{\infty}, \quad \bar{\beta} = c_0 \coth(c_0 l / 4), \quad c_0 = a^* + \sqrt{(a^*)^2 + 4\beta},$$

$$a^* = \max_{[0, l]} a(x), \quad F(x) = f(x, 0);$$

$$|u'(x)| \leq C \{1 + \varepsilon^{-1} (e^{\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{\frac{\mu_2 (l-x)}{\varepsilon}})\}, \quad 0 < x < l, \quad (3.2.2.2)$$

burada

$$\mu_1 = 0.5 \left(\sqrt{a^2(0) + 4\beta} + a(0) \right), \quad \mu_2 = 0.5 \left(\sqrt{a^2(l) + 4\beta} + a(l) \right),$$

ve

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$, $x \in [0, l]$ ve $|u| \leq C$ için sınırlıdır.

İspat. (3.2.1) denklemini

$$\begin{aligned} L_* u &\equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x) u' - b(x) u \\ &= F(x), \quad 0 < x < l \end{aligned} \quad (3.2.2.3)$$

formunda yeniden yazılabilir. Burada $b(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, \xi u)$, $0 < \xi < 1$ şeklindedir.

Maximum prensibi kullanılırsa: L_* ve L_0 ; (3.2.2.3) ve (3.2.2) - (3.2.3)'de diferansiyel operatörler olsun. Ayrıca $v(x) \in C^2[0, l]$ olsun. Eğer $L_0 v \leq 0$, $L_* v \leq 0$ $0 < x < l$ ve $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ olursa, bu durumda $v(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq l$ olur.

3.2.3. Diskritizasyon ve Yakınsama

ω_N , $[0, l]$ üzerinde herhangi düzgün olmayan şebeke olsun:

$$\omega_N = \{0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < l, h_i = x_i - x_{i-1}\}$$

ve $\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$ olsun. Notasyonu basitleştirmek için x_i 'de $u(x)$ in bir yakınsaması y_i olurken, herhangi $v(x)$ fonksiyonu için $v_i = v_i(x)$ denir. Herhangi şebeke fonksiyonu $\{v_i\}$ için $\bar{\omega}_N$ üzerinde aşağıdaki gösterimler kullanılır:

$$v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}},$$

$$v_{x,i} = \frac{v_{\bar{x},i} - v_{x,i}}{2}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\bar{h}},$$

$$v_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{v_{x,i} - v_{\bar{x},i}}{\bar{h}}, \quad \hat{h}_i = \frac{h_i - h_{i+1}}{2},$$

$$\|v\|_{\infty} \equiv \|v\|_{\infty, \bar{\omega}_N} := \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|.$$

Fark metodu oluşturmak için

$$\chi_i^{-1} \bar{h}_i^{-1} \int_0^l Lu \varphi_i(x) dx = 0, i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.3.1)$$

integral özdeşliği kullanılır.

$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$ üstel baz fonksiyonları

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i, \\ \varphi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

şeklinde olup buradaki $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ sırasıyla aşağıda verilen problemlerin çözümüdür:

$$\varepsilon\varphi'' - a_i\varphi' = 0, x_{i-1} < x < x_i,$$

$$\varphi(x_{i-1}) = 0, \varphi(x_i) = 1,$$

$$\varepsilon\varphi'' - a_i\varphi' = 0, x_i < x < x_{i+1},$$

$$\varphi(x_i) = 1, \varphi(x_{i+1}) = 0.$$

$\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları açık bir şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \frac{e^{a_i(x-x_{i-1})/\varepsilon} - 1}{e^{a_i h_i/\varepsilon} - 1}, a_i \neq 0, \text{ için}$$

$$\varphi_i^{(2)}(x) = \frac{1 - e^{-a_i(x_{i+1}-x)/\varepsilon}}{1 - e^{-a_i h_{i+1}/\varepsilon}}, a_i \neq 0, \text{ için}$$

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, a_i \neq 0, \text{ için}$$

$$\varphi_i^{(2)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, a_i \neq 0, \text{ için}$$

ve

$$\chi_i = \tilde{h}_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx$$

$$= \begin{cases} \tilde{h}_i^{-1} \left(\frac{h_i}{1 - e^{a_i h_i/\varepsilon}} + \frac{h_{i+1}}{1 - e^{-a_i h_{i+1}/\varepsilon}} \right), a_i \neq 0 \\ 1, a_i = 0 \end{cases} .$$

$[x_{i-1}, x_{i+1}]$ alt aralığında ağırlık fonksiyonu içeren ve kalan terimi integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur formülleri (Amirali vd., 2018) kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\ell u_i + R_i \equiv \varepsilon^2 \theta_i u_{\bar{x}\bar{x},i} + \varepsilon a_i u_{x,i} - f(x_i, u_i) + R_i = 0, i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.3.2)$$

burada

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{a_i h_i}{2\varepsilon} \left(\frac{h_{i+1} \left(e^{\frac{a_i h_i}{\varepsilon}} - 1 \right) + h_i \left(1 - e^{-\frac{a_i h_{i+1}}{\varepsilon}} \right)}{h_{i+1} \left(e^{\frac{a_i h_i}{\varepsilon}} - 1 \right) - h_i \left(1 - e^{-\frac{a_i h_{i+1}}{\varepsilon}} \right)} \right), & a_i \neq 0 \\ 1, & a_i = 0 \end{cases} \quad (3.2.3.3)$$

ve lokal kesme hatası

$$\begin{aligned} R_i &= -\ell u_i \\ &= \varepsilon \chi_i^{-1} \bar{h}_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u' \varphi_i(x) dx - \chi_i^{-1} \bar{h}_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \\ &\quad \times \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} f(\xi, u(\xi)) K_{0,i}^*(x, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.2.3.4)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} K_{0,i}^*(x, \xi) &= T_0(x, \xi) - T_0(x_i - \xi), \\ 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

$$T_0(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

(3.2.3) sınır şartında bir yaklaşım tanımlamak için

$$\int_0^\ell Lu\varphi_0(x) dx = 0$$

integral özdeşliği kullanılır. Burada $\varphi_0(x)$ üstel baz fonksiyonu

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi_0^{(2)}(x), & x \in (x_0, x_1), \\ \varphi_N^{(1)}(x), & x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0, & \text{aksi halde,} \end{cases}$$

formuna sahiptir. Burada $\varphi_0^{(2)}(x)$ ve $\varphi_N^{(1)}(x)$ sırasıyla aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$\varepsilon\varphi_0'' - a_0\varphi_0' = 0, \quad x_0 < x < x_1,$$

$$\varphi_0(x_0) = 1, \quad \varphi_0(x_1) = 0,$$

$$\varepsilon\varphi_N'' - a_N\varphi_N' = 0, \quad x_{N-1} < x < x_N,$$

$$\varphi_N(x_{N-1}) = 0, \quad \varphi_N(x_N) = 1.$$

Yukarıdaki gibi benzer şekilde aşağıdaki fark bağıntısı yazılabilir:

$$\ell_0 u_0 \equiv \varepsilon^2 (\theta_0^{(N)} u_{\bar{x},N} - \theta_0^{(0)} u_{x,0}) + \kappa_0 f(0, u_0) = \varepsilon A - r. \quad (3.2.3.5)$$

Burada

$$\theta_0^{(0)}(x) = \begin{cases} \frac{a_0 h_1 / \varepsilon}{1 - e^{-a_0 h_1 / \varepsilon}} a_0 \neq 0 \\ 1, a_0 = 0 \end{cases}, \quad (3.2.3.6)$$

$$\theta_0^{(N)}(x) = \begin{cases} \frac{a_N h_3 / \varepsilon}{e^{a_N h_3 / \varepsilon} - 1} a_N \neq 0 \\ 1, a_N = 0 \end{cases}, \quad (3.2.3.7)$$

$$\kappa_0 = \frac{h_1}{1 - e^{-a_0 h_1 / \varepsilon}} - \frac{h_3}{e^{a_N h_3 / \varepsilon} - 1} \quad (3.2.3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} r &= \varepsilon A - \ell_0 u_0 \\ &= \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} [a_0 - a(x)] u'(x) \varphi_0^{(2)}(x) dx - \varepsilon \int_{x_{N-1}}^{x_N} [a_N - a(x)] u'(x) \varphi_N^{(1)}(x) dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} [f(x, u) - f(0, u_0)] \varphi_0^{(2)}(x) dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} [f(x, u) - f(x_N, u_N)] \varphi_N^{(1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.2.3.9)$$

(3.2.3.2) ve (3.2.3.5)'de r ve R_i ihmal edilirse, (3.2.1) - (3.2.3) yaklaşımı için aşağıdaki fark şeması elde edilir.

$$\ell y_i \equiv \varepsilon^2 \theta_i y_{\bar{x}\bar{x},i} + \varepsilon a_i y_{x,i} - f(x_i, y_i) = 0, \quad (3.2.3.10)$$

$$y_0 - y_N = 0, \quad (3.2.3.11)$$

$$\ell_0 y_0 \equiv \varepsilon^2 (\theta_0^N y_{\bar{x},N} - \theta_0^{(0)} y_{x,0}) + \kappa_0 f(0, y_0) = \varepsilon A, \quad (3.2.3.12)$$

burada $\theta_i, \theta_0^{(0)}, \theta_0^{(N)}$ ve κ_0 sırasıyla (3.2.3.3), (3.2.3.6), (3.2.3.7) ve (3.2.3.8)'de tanımlanmıştır. ε -düzgün yakınsaklığının olması için (3.2.3.10) - (3.2.3.12) fark şeması için $[0, l]$ üzerinde Shishkin şebeke kullanılmıştır. N , 4'e bölünen bir tamsayı olmak üzere $[0, \sigma_1]$ ve $[l - \sigma_2, l]$ alt aralıklarının her birinde $N/4$ sayıda ve $[0, \sigma_1]$ $[\sigma_1, l - \sigma_2]$ alt aralığında ise $N/2$ sayıda eşit aralıklı düğüm noktaları oluşturulur. Burada şebekenin ince ve kalın kısımlarını ayıran geçiş noktaları σ_1 ve σ_2 'yi

$$\sigma_1 = \min \left\{ \frac{l}{4}, \mu_1^{-1} \varepsilon \ln N \right\}, \quad \sigma_2 = \min \left\{ \frac{l}{4}, \mu_2^{-1} \varepsilon \ln N \right\},$$

olarak oluşturulur. Burada μ_1 ve μ_2 Lemma 3.2.2.1'de verilmiştir. Pratikte genellikle $\sigma_1 \ll l (i=1,2)$ şeklindedir. Bu yüzden şebeke $[l - \sigma_2, l]$ ve $[0, \sigma_1]$ üzerinde ince, $[\sigma_1, l - \sigma_2]$ üzerinde kalındır. Bu yüzden $[0, \sigma_1]$, $[\sigma_1, l - \sigma_2]$ ve $[l - \sigma_2, l]$ ayrı ayrı $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ ve $h^{(3)}$ adım boyu ile gösterilirse,

$$h^{(1)} = \frac{4\sigma_1}{N}, \quad h^{(2)} = \frac{2(l - \sigma_2 - \sigma_1)}{N}, \quad h^{(3)} = \frac{4\sigma_2}{N},$$

$$\frac{(h^{(1)} + h^{(3)})}{2} = \frac{2l}{N}, \quad h^{(k)} \leq lN^{-1}, \quad k=1,3,$$

$$lN^{-1} \leq h^{(2)} < 2lN^{-1},$$

yazılabilir. Böylece

$$\bar{\omega}_N = \begin{cases} x_i = ih^{(1)}, & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}; \\ x_i = \sigma_1 + (i - \frac{N}{4})h^{(2)}, & i = \frac{N}{4} + 1, \dots, N; \\ x_i = l - \sigma_2 + (i - \frac{3N}{4})h^{(3)}, & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N; \\ h^{(1)} = \frac{4\sigma_1}{N}, h^{(2)} = \frac{2(l - \sigma_2 - \sigma_1)}{N}, & h^{(3)} = \frac{4\sigma_2}{N} \end{cases}$$

olur. Öncelikle

$$\varepsilon^2 \theta_i z_{\bar{x}\bar{x},i} + \varepsilon \alpha_i z_{x,i} - \tilde{b}_i z_i = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.2.3.13)$$

$$z_0 - z_N = 0, \quad (3.2.3.14)$$

$$\varepsilon^2 (\theta_0^{(N)} z_{\bar{x},N} - \theta_0^{(0)} z_{x,0}) + \bar{b}_0 \kappa_0 z_0 = r, \quad (3.2.3.15)$$

fark şemasına karşılık gelen $z_i = y_i - u_i$ yaklaşık çözüm hatası değerlendirilir.

Burada

$$\bar{b}_i = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, \tilde{y}_i), \quad \bar{b}_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0, \bar{y}_0),$$

şeklindedir. Ortalama değer teoremi ile R_i kesme hatası ve r için isimlendirilen \tilde{y}_i, \bar{y}_0 noktalar sırasıyla (3.2.3.4) ve (3.2.3.9)'da tanımlanmıştır. Ayırık maximum prensibi kullanılarak

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq \beta^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + (\beta \kappa_0)^{-1} |r| \quad (3.2.3.16)$$

eşitsizliği kolayca elde edilebilir.

Ayrıca, R_i hata fonksiyonu ve r için ilk kısmın varsayımları altında aşağıdaki değerlendirmenin doğru olduğu görülür:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq CN^{-1} \ln N, \quad (3.2.3.17)$$

$$(\kappa_0)^{-1} |r| \leq CN^{-1} \ln N. \quad (3.2.3.18)$$

(3.2.3.17)'nin ispatı 'Çakır vd., 2010' çalışmalarıyla benzerdir. Şimdi r kalan terimi değerlendirilirse, Lemma 3.2.2.1'in düzgünlük şartları altında (3.2.3.9) açık ifadesinden, (3.2.3.18) 'in sol tarafı için

$$\begin{aligned} (\kappa_0)^{-1}|r| &\leq C \left\{ h_1 + h_3 + \int_{x_0}^{x_1} |u'| dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} |u'| dx \right\} \\ &\leq C \left\{ h_1 + h_3 + \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{\mu x}{\varepsilon}} dx + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varepsilon^{-1} e^{-\frac{\mu x}{\varepsilon}} dx \right\} \\ &\leq C \{ h_1 + h_3 + h_1 / \varepsilon + h_3 / \varepsilon \}, \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki temel yakınsaklık sonucu verilebilir:

Teorem 3.2.3.1. (3.2.1) - (3.2.3)'ün çözümü $u(x)$ ve (3.2.3.10) - (3.2.3.12)'nin çözümü y olsun. O zaman aşağıdaki hata değerlendirmesi doğrudur:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-1} \ln N.$$

3.2.4. Algoritma ve Nümerik Sonuçlar

a) (3.2.3.10) - (3.2.3.12) lineer olmayan problemi çözmek için, sırasıyla aşağıdaki iterasyon tekniği kullanılır.

$$\varepsilon^2 \theta_i y_{\bar{x},i}^{(n)} + \varepsilon a_i y_{x,i}^{(n)} - f(x_i, y_i^{(n-1)}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(n-1)}) (y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}) = 0, \quad (3.2.4.1)$$

$$y_0^{(n)} - y_N^{(n)} = 0, \quad (3.2.4.2)$$

$$\varepsilon^2 (\theta_0^{(N)} y_{\bar{x},N}^{(n)} - \theta_0^{(0)} y_{x,0}^{(n)}) + \kappa_0 \left(f(0, y_0^{(n-1)}) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0^{(n-1)}) (y_0^n - y_0^{(n-1)}) \right) = \varepsilon A, \quad (3.2.4.3)$$

$$n = 1, 2, \dots; y_i^{(0)} \quad \text{ve} \quad 1 \leq i \leq N-1$$

verilir.

b) $A = 1, \quad a(x) = 1 - \frac{x}{2},$

$$f(x,u) = 1 + x^2 + u + \tanh u, \quad 0 < x < 1.$$

Özel problemi ele alınırsa, (3.2.4.1) - (3.2.4.3) algoritması her bir n değeri için periyodik faktörizasyon süreci ile çözülmüştür. Başlangıç değerler $y_i^{(0)} = x_i - x_i^2$ ve durma kriteri

$$\max_i |y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}| < 10^{-5}$$

şeklindedir.

Kesin çözüm bilinmemektedir. Hesaplanan çözümümüzde hataları ve deneysel yakınsaklık hızlarını elde etmek için çift şebeke tekniği kullanılmıştır. Yani n sayıda nokta için elde edilen yaklaşık çözüm $2n$ sayıda olan şebekedeki çözüm ile ortak noktalarda karşılaştırılır. İlk adımda

$$e_\varepsilon^N = \max_{\tilde{\omega}_N} |y^{\varepsilon,N} - \tilde{y}^{\varepsilon,2N}|,$$

hataları hesaplanır. Burada $\tilde{y}^{\varepsilon,2N}$,

$$\tilde{\omega}_{2N} = \{x_{i/2} = 0, 1, \dots, 2N\}$$

şebekesi üzerinde aynı metodun çözümüdür ve

$$x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2, \quad i = 0, \dots, N-1$$

şeklindedir. Daha sonra deneysel yakınsama hızı

$$P_\varepsilon^N = \ln(e_\varepsilon^N / e_\varepsilon^{2N}) / \ln 2$$

şeklinde bulunur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada fen bilimlerinde, mühendislikte, akışkanlar mekaniğinde ve diğer birçok alanda karşılaşılan bazı süreçlerde singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler için sınır-değer problemlerinin sonlu fark metoduyla yaklaşık nümerik sonuçları incelendi. Singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler, yüksek türevler karşısında küçük bir pozitif parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu problemlerin çözümü için, belirli kesinliğe sahip fark şemasının kurulması, bu fark şemasının hatasının değerlendirilmesi, ε 'a göre düzgün yakınsaklığının p_ε^N ile yakınsaklık hızının belirlenmesi ve kararlılığının incelenmesi temel amaçtır. Öncelikle pozitif küçük bir parametreye bağlı singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı problem ele alınarak problemin çözümü için fark şeması kuruldu. Daha sonra bu problemin asimptotik ve yaklaşık çözümleri incelendi ve üstel katsayılı fark şeması kurularak çözüm algoritması araştırıldı. Ele alınan singüler pertürbe olmuş periyodik sınır-değer problemi için ise asimptotik değerlendirmeler yapıldı, benzer metotlarda üstel fark şeması kuruldu. Kurulan şema için hata değerlendirmesi ve yakınsama özellikleri ele alındı. Somut bir örnek üzerinde ε 'un farklı değerleri için elde edilen sonuçlar tablo halinde verildi ve önerilen şemanın doğruluğu gösterildi.

KAYNAKLAR

- Amiraliyev G. M. and Çakır M. (2002) “Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition”, *Applied Mathematics Mechanics (English Edition)*, 23 (7), 755–764.
- Amirali G. ve Amirali I. (2018) “Nümerik Analiz”, *Seçkin Yayıncılık* 1, 1-495.
- Amiraliyev G. M. and Duru H. (2003) “A uniformly convergent difference method for the periodical boundary value problem”, *Computational Mathematics Applied*, 46, 695-703.
- Amiraliyev G. M and Mamedov Y. D. (1995) “Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations”, *Turkish Journal of Mathematics*, 19 , 207-222.
- Cai X. (2001) “A conservative difference scheme for conservative differential equation with periodic boundary”, *Applied Mathematics Mechanics (English Edition)*, 22, 1210-1215.
- Çakır M. and Amiraliyev G. M. (2007) “Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem”, *International Journal of Computational Mathematics*, 10, 1465–1481.
- Çakır M. and Amiraliyev G. M. (2010) “A numerical method for a singularly perturbed three-point boundary value problem”, *Journal Applied Mathematics*, 10, 1-17.
- Doolan E. P., Miller J. J. H. and Schilders W. H. A. (1980), “Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers”, *Boole Press*, Dublin.
- Farrell P. A., Hegarty A. F., Miller J. J. H., O’Riordan E. and Shishkin G. I. (2000) “Robust computational techniques for boundary layers”, *Chapman & Hall/CRC*, Boca Raton.
- Kadalbajoo M. K. and Patidar K.C. (2002) “A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations”, *Applied Mathematics Computational*, 130, 457–510.

- Kudu M. and Amiraliyev G. M. (2016) “A finite-difference method for a singularly perturbed differential equations with integral boundary condition”, *International Journal of Mathematics Computer*, 26(3), 71-79.
- Lin T. (2010), “Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems”, *Springer-Verlag*, Berlin.
- Miller J.J.H, Riordan E. O. and Shishkin G. I. (1996) “Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems”, *World Scientific*, Singapore.
- Miller J. J. H., O’Riordan E. and Shishkin G. I. (2012) “Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems” *Revolution Edition World Scientific*.
- Nayfeh A. H., (1973), “Perturbation methods”, *Wiley-Interscience (John Wiley & Sons)*, New York.
- O’Malley R. E. (1991) “Singular perturbation methods for ordinary differential equations”, *Springer-Verlag*, New York.
- Roos H. G., Stynes M. and Tobiska L. (2008) “Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations” *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg.
- Samarskii A. A. (2001) “Theory of difference schemes”, *Marcel Dekker Incorporation*, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Ali ENES 1994 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2016 yılında mezun oldu. 2016 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda lisansüstü öğrenimine başladı ve halen öğrenimine devam etmektedir.

