T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

p^2 MERTEBEDEN BAZI HALKALARIN PELL POLİNOMLARI VE PERİYOTLARI

Devran ÇİFÇİ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2018

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Devran ÇİFÇİ tarafından hazırlanan bu çalışma 16/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği (3/3) ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI	İmza:
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi İsrafil OKUMUŞ	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 21 / 06 / 2019 tarih ve 22/9 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"p^2 Mertebeden Bazı Halkaların Pell Polinomları ve Periyotları" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 16/07/2018

Devran ÇİFÇİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

p^2 MERTEBEDEN BAZI HALKALARIN PELL POLİNOMLAR VE PERİYOTLARI

Devran ÇİFÇİ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada, $x^2 = 2x + 1$ olmak üzere m modülüne göre Pell polinomlarının dizileri oluşturulmuştur ve birçok özellik verilmiştir. Bu dizilerin periyodik olduğu gösterilmiştir ve periyotları hesaplanmıştır. Pell polinomları kompleks sayılar halkasında tanımlanmıştır. Ayrıca R, 2 gerenli bir halka ve (α, β) ise bu R halkasının geren bir çifti olmak üzere Pell polinom tipli orbitler $P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ tanımlanmıştır. p^2 mertebeden 2 gerenli sonlu halkaların Pell polinom tipli orbitleri oluşturulmuştur ve periyotları hesaplanmıştır.

2018, 82 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Halka, Pell dizileri, Pell polinomları, Periyot

ABSTRACT

Master Thesis

PELL POLYNOMIALS OF SOME RINGS OF ORDER p^2 AND THEIR PERIODS

Devran ÇİFÇİ

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this paper, the sequences of the Pell polynomials are obtained according to modulo m where $x^2 = 2x + 1$ and various properties of these sequences are introduced. It is shown that these sequences are periodic and their periods are obtained. It is defined the Pell polynomials to the ring of complex numbers. Also, the Pell Polynomial-type orbits $P^R_{(\alpha,\beta)}(x) = \{x_i\}$ are defined where R be a 2-generator ring and (α, β) is a generating pair of the ring R. The Pell Polynomial-type orbits $P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ in finite 2-generator rings of order p^2 are obtained and their periods are introduced.

2018, 82 Pages

Keywords: Ring, Pell sequences, Pell polynomials, Period

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye, değerli öğretim üyeleri başta Sayın Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya olmak üzere Sayın Dr. Öğr. Üyesi İsrafil OKUMUŞ'a ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca kendilerinde görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve arkadaşım Mesut COŞKUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Devran ÇİFÇİ

Temmuz, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

A, B	Halkanın keyfi elemanları
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
f_n	n. Fibonacci sayısı
$\{f_n\}$	Fibonacci dizisi
F	Cisim
$f_n(x)$	n. Fibonacci polinomu
$\{f_n(x)\}$	Fibonacci polinomlarının dizisi
$f_n^{(k)}$	k-adım Fibonacci dizisinin n. Terimi
$f(k, m)$	m Modülüne göre k-adım Fibonacci dizileri
F_n	Halkalarda n. Fibonacci sayısı
$\{F_n\}$	Halkalarda Fibonacci dizisi
$\gcd(a, b)$	a ile b sayılarının en büyük ortak böleni
G	Grup
$\lvert G\rvert$	Grubun mertebesi
$h_k(m)$	$f(k, m)$ nin periyodu
$h^{P(x)}(m)$	Halkalarda Pell polinomunun m modülüne göre periyodu
j_n	n. Jacobsthal-Lucas sayısı
$\{j_n\}$	Jacobsthal-Lucas dizisi
$j_n(x)$	n. Jacobsthal-Lucas polinomu
$\{j_n(x)\}$	Jacobsthal-Lucas polinomlarının dizisi
J_n	n. Jacobsthal sayısı
$\{J_n\}$	Jacobsthal dizisi
$J_n(x)$	n. Jacobsthal polinomu
$\{J_n(x)\}$	Jacobsthal polinomlarının dizisi
$Kar(R)$	R Halkasının karakteristiği
$k(n)$	Wall sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
$L_n(x)$	n. Lucas polinomu
$\{L_n(x)\}$	Lucas polinomlarının dizisi
$\mathrm{lcm}(a, b)$	a ile b sayılarının en küçük ortak katı

M	Pell dizilerinin üreteç matrisi
N	$\{\tilde{P}_n\}$ nin üreteç matrisi
P	Pell polinomunun üreteç matrisi
P_n	n. Pell sayısı
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$P_n(x)$	n. Pell polinomu
$\{P_n(x)\}$	Pell polinomlarının dizisi
$\widetilde{P}_n$	Kompleks sayılar kümesindeki n. Pell polinomu
$\{\tilde{P}_n\}$	Kompleks sayılar kümesindeki Pell polinomlarının dizisi
$P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$	(α,β) gerenli R halkasının Pell polinom tipli orbiti
$PP^R_{(\alpha,\beta)}(x)$	$P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbitinin periyodu
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas dizileri
R	Halka
$\{x_n\}$	$P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbitin n. Terimi

1.GİRİŞ

Birçok farklı disiplinlerden bilim insanlarının ve düşünürlerin birbirlerinden binlerce kilometre uzakta, onlarca asır ötede olsalar bile ortaklaşa yaptıkları çalışmalar, insanoğluna neyin güzel göründüğünü göstermek amacıyla bazı formüller üzerine olmuştur. Bu formüllerin en etkili olanlarından birinin kökü olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısına "Altın Oran" denir. Bu oran antik çağdan beri matematikçilerin, fizikçilerin, filozofların, sanatçıların ve hatta müzisyenlerin ilgilendiği bir konu olmuştur. Genellikle Yunanca'da kesmek anlamına gelen kelimenin baş harfi olan τ karakteri ile gösterilen ve değeri 1,61803… olan bu sayı altın ortalama, altın bölüm, altın kesit, ilahi (kutsal) orantı, Fibonacci sayısı ve Phidias ortalaması şeklinde de adlandırılır. Bu oran, bazen özelliklerini inceleyen matematikçi Phidias'ın adının ilk harfi olan ϕ ile gösterilse de daha yaygın olarak τ ile belirtilir. Altın oran ve Fibonacci sayılarını, dünyanın yedi harikasından biri olarak kabul edilen Piramitlerde, Antik Yunan sanatçılarının ortaya koymuş olduğu eserlerinde, Rönesans sanatçılarının tuvallerinde, bitkilerin büyümeleri ve bazı belli katıların kristalografik yapılarından veri tabanlarında arama yapmak için yazılan bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesine kadar çok geniş uygulama alanlarında rastlanır.

Fibonacci ismi ile tanınan Leonardo Pisa 13. yüzyılda yaşamış İtalyan matematikçidir. Fibonacci tarafından yazılan Liber Abaci adlı eserde Edward Lucas gördüğü bir problemdeki $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ dizisinin her bir terimine Fibonacci sayısı ve diziye Fibonacci dizisi adını verdi.

Fibonacci sayılarının özellikleri uzun yıllardır incelenmektedir. Bu sayılar $n \geq 2$ olmak üzere $f_0 = 0, f_1 = 1$ için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

rekürens bağıntısı ile tanımlandı (Vorobyov, 1976 ve Vajda, 1989).

Silvester $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini kullanarak, Fibonacci dizisinin matris gösterimini ve Fibonacci dizisinin önemli özelliklerini elde etmiştir (Silvester, 1979).

Fibonacci dizisi ve onun bağlantılı olduğu yüksek mertebeli diziler (tribonacci, quatranacci, k-nacci) genellikle tamsayılar dizisi olarak gösterilir.

Fibonacci dizileri gibi rekürans bağıntı ile tanımlanabilen Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin özellikleri ve uygulamaları ile ilgili birçok çalışma vardır (Koshy, 2001).

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarını tanımlanmış ve bu sayıların önemini, birbirleri arasındaki ilişkiyi vermiştir. Ayrıca, bu dizilerin bazı özellikleri de elde edilmiştir (Koshy, 2001).

Horadam, 1965 yılında yaptığı çalışmasında Horadam dizisini tanımlamış ve tanımlanan dizinin genel özelliklerini incelemiştir (Horadam, 1965). Daha sonra Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerini tanımlamış ve sırasıyla bu dizinin terimlerine Pell sayıları, Pell Lucas sayıları adını vermiştir. Pell sayılarının genel formülünü ve karekteristik köklerini sunmuştur. Ayrıca $n \geq 2$ için $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

rekürens bağıntısı ile tanımlan Pell sayılarının $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ üreteç matrisini kullanarak, Pell dizisinin matris gösterimini ve Pell dizisinin önemli özelliklerini elde etmiştir (Horadam, 1971).

Melham, Pell ve Pell-Lucas sayılarının sağladığı bazı eşitlikleri vermiş, Fibonacci ve Pell sayılarını içeren toplam formülleri elde etmiştir (Melham, 1999).

Kalman ve Mena, çalışmalarında ikinci dereceden rekürans dizileri üzerinde belli şartlar altında Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarını tanımlamışlar ve bu sayıların Binet formülleri ve matris temsilleri ile ilgili inceleme yapmışlardır (Kalman ve Mena, 2003).

Kılıç ve Altınkaynak genelleştirilmiş k-mertebeli Pell sayılarının k-dizileri üzerinde çalışmışlar ve bu dizilerin terimlerinin toplamını veren bir algoritma geliştirmişlerdir (Kılıç ve Altınkaynak, 2006).

Cerin ve Gianella Pell sayılarının çift ve tek çarpımlarının toplamları, çift ve tek kareleri toplamları, çift, tek ve ardışık toplamlar için açık formüller vermişlerdir (Cerin ve Gianella, 2007).

Falcon ve Plaza Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak k-Fibonacci sayı dizisini tanımlamışlar ve bu tanımlanan dizinin, klasik Fibonacci ve Pell sayılarının genelleştirilmesi olduğunu göstermişlerdir (Falcon ve Plaza, 2007).

Lee ve Cho Pascal matrisinin, Fibonacci matrisinin ve Pell matrisinin genelleştirmelerinden bahsetmişlerdir (Lee ve Cho, 2008).

Fibonacci ve diğer diziler üzerine çalışmalar sunulduktan sonra sayı dizileri diğer matematikçiler tarafından farklı yönlerde geliştirildi (Lü ve Wang, 2007).

Sayı dizilerinde olduğu gibi polinom dizileri üzerinde de birçok çalışma vardır. İlk olarak Fibonacci polinomları 1883 yılında Belçikalı matematikçi Charles Catalan ve Alman matematikçi Jacobsthal tarafından çalışıldı. Catalan tarafından çalışılan Fibonacci polinomları daha sonra 1966 yılında Swamy tarafından geliştirildi (Koshy, 2001). Ayrıca 1963 yılında Bryd tarafından Fibonacci tipi polinomların bir yenisi literature eklendi. Bryd tarafından tanımlanan polinom bugün Pell polinomu olarak adlandırılmaktadır (Bryd, 1963). Fibonacci polinomu olarak kabul edilen polinom ise Catalan tarafından tanımlanmış olan polinomdur. Daha sonra tüm bu farklı tanımlamalar Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar olarak adlandırıldı.

Horadam ve Mahon Pell, Pell-Lucas polinomlarını tanımlamış, Pell, Pell-Lucas polinomlarının genel formülünü ve karekteristik köklerini vermiştir. Pell ve Pell-Lucas polinomlarının üreteç matrisi ve açık for formlarını tanımlamıştır. Ayrıca Pell ve Pell-Lucas polinomları arasındaki bazı eşitlikler vermiştir (Horadam ve Mahon, 1985).

Fibonacci dizileri ile ilgili yapılan çalışmaların çoğu gruplar üzerinedir. Fibonacci dizileri gruplarda ilk olarak 1960 yılında Wall tarafından devirli gruplarda çalışıldı (Wall,1960). Knox ise dihedral gruplardaki k-nacci Fibonacci dizisinin periyodunun $2k + 2$ ye eşit olduğunu gösterdi (Knox, 1992).

Halkalarda Fibonacci dizileri ilk olarak 1970 da Decarli tarafından çalışıldı. Keyfi bir halka üzerinden genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin tanımı verildi (Decarli, 1970). R, özdeş elemanlı bir halka olmak üzere R nin elemanlarından oluşan dizi $\{M_n\}$ olduğunda $M_0, M_1, A_0,$ ve A_1 R nin keyfi elemanları olmak üzere $\{M_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$M_{n+2} = A_1 M_{n+1} + A_0 M_n \qquad n \geq 0 \qquad (1.1)$$

ile tanımlandı (Decarli, 1970). R halkası tamsayılar kümesi olmak üzere (1.1)'in özel durumları ele alındı (Buschman 1963; Horadam 1961; Vorobyov 1963). Wyler ise birimli, değişmeli özel bir halka üzerinde (1.1) dizisini çalıştı (Wyler, 1965).

Mertebesi p^2 olan birimli halkaların ve cisimlerin Fibonacci dizileri oluşturuldu ve periyotları hesaplandı (Taşyurdu ve Gültekin, 2013).

Birimli keyfi bir halka üzerindeki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin periyotları hesaplandı ve Tridiagonal matrisi verildi (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

Sunulan bu tezde Pell polinomlarının dizileri $x^2 = 2x + 1$ olmak üzere m modülüne göre oluşturuldu ve periyodu elde edildi. Kompleks sayılar halkasında Pell polinomları tanımlandı. Ayrıca (α, β) bir R halkasının geren bir çifti olmak üzere $P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbitler tanımlandı. p^2 mertebeden bazı halkaların Pell polinom tipli orbitleri, özellikleri ve birçok sonuç elde edildi (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018). Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verildi.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerine ait bazı ön bilgiler verildi. Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, polinomları detaylı bir şeklide verildi ve bilinen indirgeme bağıntıları göz önüne alınarak bu polinomların Binet formülleri, üreteç fonksiyonları verildi. Daha sonra bu polinomlara ait bazı teoremlerden ve sonuçlardan bahsedildi. p asal sayı olmak üzere Fine tarafından çalışılmış mertebesi p^2 olan bütün sonlu halkaların sınıflandırılması verildi. Halkalarda Fibonacci ve Pell sayı dizileri ile ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar verildi.

Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak $x^2 = 2x + 1$ olmak üzere m modülüne göre Pell polinomlarının dizisi oluşturuldu ve özellikleri incelendi. Bu dizinin periyodik olduğu gösterildi ve periyodu hesaplandı. Periyodun kolay bir şekilde hesaplanmasına olanak sağlayan sonuçlar teoremlerle verildi. Daha sonra Pell polinomları kompleks sayılar halkasında tanımlandı, üreteç matrisi ve özellikleri teoremlerle verildi. (α, β) bir R halkasının geren çifti ve R de 2 gerenli bir halka olmak üzere $P^{R}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbitler tanımlandı. p^2 mertebeden 2 gerenli bazı halkaların Pell polinom tipli orbitleri oluşturuldu ve periyotları hesaplandı.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız süresince kullandığımız bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1: Küme, ayırt edilebileceğini düşündüğünüz belirli nesnelerin topluluğudur (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.2: $A \times B$ nin boş olmayan her alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.3: f, A dan B ye bir bağıntı olsun. $\forall\ a \in A$ için a ya f ile bağlı B de bir ve yalnız bir eleman bulunabilirse, f ye A dan B içine bir fonksiyon veya (dönüşüm) denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.4: $A \times A$ dan A ya bir fonksiyona A da bir ikili işlem denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.5: Üzerinde ikili işlemin tanımlandığı kümeye cebirsel yapı adı verilir ve genellikle (G, o) ile gösterilir. Tanımdan anlaşılacağı gibi (G, o) cebirsel yapı ise G, o işlemine göre kapalıdır. Yani her $a, b \epsilon G$ için $aob \epsilon G$ dir (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.6: G boş olmayan bir küme ve $*, G$ de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

i. $*, G$ de bir ikili işlemdir.

ii. $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall a, b, c \in G$ için, $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

iii. $*$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani, $\forall a \in G$ için, $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

iv. $*$ işleminin göre G deki her elemanın tersi vardır. Yani, $\forall a \in G$ için, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.7: $(G,*)$ bir grup ve$\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya abelyen grubu denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.8: G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna sonlu grup denir ve eleman sayısına da grubun mertebesi denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.9: $(G,\cdot)$ bir grup olmak üzere H , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G deki grup işlemine göre H kümesi bir grup teşkil ediyorsa H ye G nin altgrubu denir ve $(H,\cdot) \leq (G,\cdot)$ veya $H \leq G$ ile ifade edilir (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.10: G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in \mathrm{Z}\}$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zamansa G grubuna devirli grup denir. Böylece a elemanına G nin üreteci denir ve $G = \langle a \rangle$ şeklide gösterilir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.11: G bir grup, $H \leq G$ ve $a \in G$ olmak üzere

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

kümesine H' nın G'deki a' yı kapsayan sol yan kümesi ve

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

kümesinede H' nin G'deki sağ yan kümesi denir. Burada hemen belirtelim ki G grubunun a elemanına aH ve Ha yan kümelerinin temsilci elemanı denir (Taşçı, 2007).

Teorem 2.12: N, G grubunun bir alt kümesi ise aşağıdakı önermeler birbirine denktir.

- **i.** Her $g \in G$, her $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.
- **ii.** Her $g \in G$ için $gNg \subset N$ dir.
- **iii.** Her $g \in G$ için $gNg = N$ dir.
- **iv.** Her $g \in G$ için $gN = Ng$ dır (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.13: Teorem 2.12 de denk koşullarından birini sağlayan G nin bir N alt grubuna normal alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.14: $(G,\cdot)$ bir grup ve S de G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun S yi ihtiva eden G nin bütün normal alt gruplarının ara kesitine S nin normal kapanışı denir ve $\bar{S}$ ile gösterilir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.15: $N \lhd G$ olsun. G nin N ye göre sağ (veya sol) denklik sınıfları kümesi G/N ile gösterilir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.16: $(G,.)$ ve $(H,*)$ iki grup $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a\,, b \in G$ için $f(x.y) = f(x) * f(y)$ ise f ye G den H ye bir homomorfizma denir (Çallıalp, 2001).

Tamım 2.17: (G, o) ve (G', o') iki grup ve $\Phi: G \to G'$ birebir ve üzerine bir dönüşüm olsun. Her $a\,, b \in G$ için

$$\Phi(\mathrm{a}ob) = \Phi(\mathrm{a})o'\,\Phi(\mathrm{b})$$

oluyorsa bu Φ dönüşümüne izomorfizm (eşyapı dönüşümü) denir. $G = G'$ olması halinde $\Phi: G \to G$ izomorfizmine ise G nin otomorfizmi adı verilir.

Şayet $\Phi: G \to G'$ bir izomorfizm ise G ve G' ye izomorf denir ve $G \cong G'$ ile ifade edilir (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.18: $R \neq \emptyset$ üzerinde tanımlı iki ikili işlem $" + "$ ve $" \cdot "$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +.\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(R, +)$, bir değişmeli gruptur.

ii. $" \cdot "$ işleminin R de birleşme özelliği vardır.

iii. $" \cdot "$ işlemini $" + "$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır: $\forall a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.19: $(R, +,\cdot)$ bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa bu özelliği sağlayan en küçük pozitif n tamsayına halkanın karakteristiği denir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa R halkanın karakteristiği sıfırdır denir. Halkanın karakteristiği kısaca $Kar(R)$ ile gösterilir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.20: $(R, +,\cdot)$ bir halka olsun.

i. R halkasındaki çarpma işleminin özdeş elemanı varsa yani $\forall\ a \in R$ için $1_R . a = a . 1_R = a$ olacak şekilde R de 1_R ile gösterilen bir eleman varsa $(R, +,\cdot)$ ye birim elemanlı halka denir.

ii. $(R,+,\cdot)$ halkası halkası çarpma işlemine göre değişmeli ise yani her $a,b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa $(R,+,\cdot)$ ye değişmeli halka denir.

iii. $(R,+,\cdot)$ halkasının " $+$ " işlemine göre özdeş elemanını 0 ile (bu elemana halkanın sıfır elemanıda) denir (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.21: $(R,+,\cdot)$ bir halka ve $x \in R$ olsun. x in R de çarpma işlemine göre tersi varsa x e R de aritmetik birim denir. Aksi halde x e R de aritmetik birim değildir denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.22: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. R deki işlemlere göre S alt kümesi kendi başına bir halka ise S ye R halkasının bir alt halkası denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.22: $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Katsayıları R de olan tüm $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir ve $R[x]$ kümesi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halkaya R halkası üzerinde polinomlar halkası denir.

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \, , f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ olmak üzere $f(x), g(x) \in R[x]$ için

i. $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{max\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i$

ii. $f(x).g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i \;,\; c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$

dir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.23: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya bir cisim denir ve genel olarak F ile gösterilir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.24: F bir cisim ve $S \subset F$ olsun. S kendi başına F cismindeki işlemlere göre bir cisim ise S ye F nin bir alt cismi denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.25: $(G,\cdot)$ bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesi G grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır (Dummit ve Foote, 2004).

Tanım 2.26: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir (Dummit ve Foote, 2004).

Tanım 2.27: F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindeki bri diktörtgen tabloya matris denir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.28: $n \times n$ tipindeki tridiagonal matris

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Koshy , 2001).

Teorem 2.29:

$$A(n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi tridiagonal matrislerinin bir ailesi olmak üzere $A(n)$ matrislerinin determinantları

$\det\big(A(1)\big) = a_{11}$

$\det\big(A(2)\big) = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}$

...

$\det\big(A(n)\big) = a_{nn}\det\big(A(n-1)\big) - a_{n(n-1)}a_{(n-1)n}\det\big(A(n-2)\big)$

dir (Cahill vd., 2002).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerine ait bazı ön bilgiler verilmiştir. Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomları detaylı bir şeklide sunulmuştur ve bilinen indirgeme bağıntıları göz önüne alınarak bu polinomların Binet formülleri, geren fonksiyonları ve bazı özellikleri verilmiştir.

3.1. Pell Sayıları ve Dizileri

Sayı dizilerini tanımlamanın yollarından biri rekürans bağıntıları kullanmaktır. Rekürans bağıntılar dizinin her bir teriminin kendisinden önceki terimlere bağlı olarak ifade edilmesiyle oluşan bağıntılardır.

Tanım 3.1: $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ ve $a_r \neq 0$ olsun. Her $n \geq r$

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_r u_{n-r} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya sabit katsayılı lineer homojen rekürans bağıntı denir. $u_0, u_1, \dots, u_{r-1}$ başlangıç koşulları ile bu homojen lineer rekürans bağıntısını sağlayan $\{u_n\}$ dizisine ise lineer rekürans dizisi denir (Everest vd., 2003).

Özel olarak Tanım 3.1 de $r = 2$ alınırsa u_0 ve u_1 başlangıç koşulları için

$$u_n = a_1 u_0 + a_2 u_1$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{u_n\}$ lineer rekürans dizisinin özel durumu olan Pell dizisi $\{P_n\}$ şöyle tanımlanır.

Tanım 3.2: P_n, Pell dizinin n. terimi, $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ başlangıç şartları için Pell dizisi

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad n \geq 2 \tag{3.2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Horadam, 1965).

Benzer düşünce ile Tanım 3.1 in bazı özel durumları olan Fibonacci $\{f_n\}$, Lucas $\{L_n\}$, Pell-Lucas $\{Q_n\}$, Jacobsthal $\{J_n\}$ ve Jacobsthal-Lucas $\{j_n\}$ sayı dizileri aşağıdaki gibi tanımlanır (Koshy, 2001 ve Horadam, 1971).

i. $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ ve $a_1 = a_2 = 1$ olarak alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Fibonacci sayı dizisine dönüşür ve $\{f_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin her bir terimine de Fibonacci sayısı denir.

ii. $u_0 = 2,\ u_1 = 1$ ve $a_1 = a_2 = 1$ olarak alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Lucas sayı dizisine dönüşür ve $\{L_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin her bir terimine de Lucas sayısı denir.

iii. $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ ve $a_1 = 2,\ a_2 = 1$ olarak alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Pell sayı dizisine dönüşür ve $\{P_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin her bir terimine de Pell sayısı denir.

iv. $u_0 = 2,\ u_1 = 2$ ve $a_1 = 2,\ a_2 = 1$ olarak alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Pell-Lucas sayı dizisine dönüşür ve $\{Q_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin her bir terimine de Pell-Lucas sayısı denir.

v. $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ ve $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ olarak alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Jacobsthal sayı dizisine dönüşür ve $\{J_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin her bir terimine de Jacobsthal sayısı denir.

vi. $u_0 = 2,\ u_1 = 1$ ve $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ olarak alınırsa $\{u_n\}$ dizisi Jacobsthal-Lucas sayı dizisine dönüşür ve $\{j_n\}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin her bir terimine de Jacobsthal-Lucas sayısı denir.

Tablo 3.1. Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin ilk terimleri

$\boldsymbol{n}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	...
$\boldsymbol{f_n}$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
$\boldsymbol{L_n}$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...
$\boldsymbol{P_n}$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	...
$\boldsymbol{J_n}$	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	...
$\boldsymbol{j_n}$	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	2047	...

f_n, n Fibonacci sayısını; P_n, n Pell sayısını; L_n, n Lucas sayısını; Q_n, n Pell-Lucas sayısını; J_n Jacobsthal sayısını ve j_n, Jacobsthal-Lucas sayısını göstermek üzere bu sayılar arasında bazı ilişkiler

- $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$
- $L_n = f_{n+2} - f_{n-2}$
- $f_{2n} = f_n L_n$
- $f_{n+r} = L_r f_n + (-1)^n f_{n-r}$
- $L_n^2 - 5f_n^2 = 4(-1)^n$
- $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$
- $Q_n = \frac{P_{n+1}+P_{n-1}}{2}$
- $Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n$
- $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$
- $j_n J_n = J_{2n}$

şeklindedir (Renault, 1996; Koshy, 2001).

Bir sayı dizisinin terimleri, rekürans bağıntısını kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü bir dizinin herhangi bir terimini, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunmasına olanak sağlar. Örneğin, Pell dizisinin 100. terimini hesaplamak için dizinin rekürans bağıntı kullanılırsa, kendisinden önce ilk 99 terimini hesaplamak gerekmektedir. Ancak dizinin rekürans bağıntısı yerine Binet formülü kullanılırsa bu dizinin 100. terimi için ilk 99 terimi hesaplamaya ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu formülü elde etmek, dizinin rekürans bağıntısnı çözmeye dayanmaktadır.

Şimdi Pell dizisinin Binet formülleri verilecektir. Tanım 3.1 in özel durumu olan Pell dizisinin

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

rekürans bağıntısında $P_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \Longrightarrow x^n = 2x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$\Longrightarrow x^2 = 2x + 1$$

elde edilir. Bulunan

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

denklemine Pell dizisinin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin kökleri α ve β olarak alınırsa

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \beta = 1 - \sqrt{2}$$

olarak bulunur. Bu kökler arasında

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\alpha\beta = -1$$

$$\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$$

eşitlikleri vardır. α ve β, $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denklemin kökleri ve A, B sabit katsayılar olmak üzere

$$P_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklindedir. Buradan $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$P_0 = 0 = A + B$$

$$P_1 = 1 = A\alpha + B\beta$$

olup lineer denklem sisteminin çözümünden $A = \frac{1}{\alpha-\beta}$ ve $B = -\frac{1}{\alpha-\beta}$ olarak bulunur.

Bulunan A ve B değerleri

$$P_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

formülü elde edilir. Bu formüle Pell dizisinin Binet formülü denir (Horadam, 1971).

Benzer şekilde Fibonacci $\{f_n\}$, Lucas $\{L_n\}$, Pell-Lucas $\{Q_n\}$, Jacobsthal $\{J_n\}$ ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri dizilerinin Binet formülleri ve karakteristik kökler sırasıyla

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}; \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n; \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n; \quad \alpha = 1+\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \beta = 1-\sqrt{2}$$

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}; \quad \alpha = 2 \quad \text{ve} \quad \beta = -1$$

$$j_n = \alpha^n + \beta^n; \quad \alpha = 2 \quad \text{ve} \quad \beta = -1$$

şeklinde elde edilir (Koshy, 2001 ve Horadam, 1971).

Üreteç foksiyonları lineer homojen rekürans bağıntıları çözmek için en önemli yöntemlerden biridir.

Tanım 3.3: $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ bir reel sayı dizisi olsun. $n \geq 0$ olmak üzere

$$g(t) = a_0 + \ a_1 t + a_2 t^2 \dots \tag{3.3}$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Koshy, 2001).

Şimdi Pell dizisinin üreteç fonksiyonu verilecektir.

Teorem 3.4: $n \geq 0$ için P_n, Pell dizinin n. terimi olmak üzere Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklindedir (Horadam, 1971).

İspat: Eşitlik (3.3) den

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$$

yazabiliriz. Buradan

$$g(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \cdots + P_n x^n + \cdots \tag{3.4}$$

$$-2g(x)x = -2P_0 x - 2P_1 x^2 - 2P_2 x^3 - \cdots - 2P_n x^{n+1} - \cdots \tag{3.5}$$

$$-g(x)x^2 = -P_0 x^2 - P_1 x^3 - P_2 x^4 - \cdots - P_n x^{n+2} - \cdots - \cdots \tag{3.6}$$

(3.4), (3.5) ve (3.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$g(x)(1 - 2x - x^2) = P_0 + P_1 x - 2P_0 x$$

elde edilir. $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ başlangıç şartları için eşitlik (3.2) yani $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ bağıntısı kullanılırsa Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Benzer şekilde sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

i. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$

ii. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$

iii. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$

iv. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n x^{n-1} = (1 - x - 2x^2)^{-1}$

v. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n x^{n-1} = (1 + 4x)(1 - x - 2x^2)^{-1}$

Pell dizilerinin terimlerini elde etmenin bir başka yolu üreteç matrisini kullanmaktır. Pell dizilerinin terimlerinin yani Pell sayılarının üreteç matrisi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.5: $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Ercolano, 1979).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım. Yani her n doğal sayısı için

$$M^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $n = 1$ için

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup eşitliğin doğru olduğu görülür. $n = k$ için eşitliğin doğru yani

$$M^k = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

Buradan

$$\boldsymbol{MM^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_{k+1} + P_k & 2P_n + P_{k-1} \\ P_{k+1} & P_k \end{pmatrix} = M^{k+1}}$$

bulunur ki bu da $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. İspat tamamlanır.

Sayı dizilerinin birçok genelleştirmeleri elde edilmiş ve elde edilen bu dizilerin özellikleri incelenmiştir. Bu özelliklerden biri, sayı dizilerinin periyodudur.

Tanım 3.6: Belli bir noktadan sonra grup elemanlarının dizisi sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyorsa grup elemanlarının dizisine periyodik denir (Knox, 1992).

Tanım 3.7: Periyodik dizide tekrarlanan alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir (Knox, 1992).

Örneğin;

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

dizisi başlangıç elemanı olan a elemanından sonra periyodiktir ve periyodu 5 tür.

Tanım 3.8: Diziyi, ilk k elemanı tekrarlanan bir alt dizi oluşturuyorsa diziye k periyotlu basit periyodik dizi denir.

Örneğin;

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$$

dizisi 7 periyodu ile basit periyodiktir (Knox, 1990).

f_n, Fibonacci dizisinin n. terimi ve $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere Fibonacci dizisinin

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad , \qquad n \geq 1$$

bağıntısı kullanılarak her bir f_n sayısı m modülüne göre indirgenip periyodu elde edilmiştir. Bu periyot Wall sayısı olarak adlandırılır ve $k = k(m)$ ile gösterilir (Wall, 1960).

Örnek 3.9: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ için $\{f_n\}$ dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

olarak yazılır. $\{f_n\}$ dizisinin her bir elemanı $m$modülüne göre indirgenirse,

i. $m = 3$ ise Wall sayısı 8 dir ve $k(3) = 8$ olarak yazılır. Aşağıdaki gibi görülebilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$f_n\ mod\ 3$	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	…

ii. $m = 4$ ise Wall sayısı 6 dir ve k(4)=6 olarak yazılır. Aşağıdaki gibi görülebilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$f_n\ mod\ 4$	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	…

iii. $m = 5$ ise Wall sayısı 20 dir ve k(5)=20 olarak yazılır. Aşağıdaki gibi görülebilir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f_n\ mod\ 5$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4	1	0	1	1	2	…

Şimdi $k(m)$ nin bilinen bazı özellikleri aşağıdaki teoremler ile verildi.

Teorem 3.10: $m \geq 3$ için $k(m)$ çifttir (Wall, 1960).

Örnek 3.11: $m = 2$ için

$$0, 1, 1, 0, 1, \ldots$$

olup Wall sayısı $k(2) = 3$ olup tek sayıdır. $m = 3$ için

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, \ldots$$

olup Wall sayısı $k(3) = 8$ olup çift sayıdır. Benzer şekilde devam edilerek $k(5) = 20$, $k(6) = 24$ olduğu görülür.

Teorem 3.12: $\{f_n\}$ dizileri basit periyodiktir (Wall, 1960).

İspat: $\{f_n\}$ dizileri sonlu sayıda m^2 çiftlerinden oluştuğundan elemanları tekrar eder. Buradan Fibonacci dizisinin tanımını kullanırsa

$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$$

dir.

Bu bağıntı ile

$$f_{t+1} \equiv f_{s+1}$$
$$f_t \equiv f_s (mod m)$$

olup

$$f_{t+1} - f_t \equiv f_{s+1} - f_s$$
$$f_{t-1} \equiv f_{s-1}$$

elde edilir. Buradan aynı oranda indisleri arttırarak veya azaltarak elde edilen dizinin elemanlarının aynı olduğu görülür. Dolayısıyla

$$f_{t-1-s+2} \equiv f_{s-1-s+2}$$

$$f_{t-s+1} \equiv f_1$$

ve

$$f_{t-1-s+1} \equiv f_{s-1-s+1}$$

$$f_{t-s} \equiv f_0$$

dır. Buradan

$$f_{t-1} \equiv f_{s-1}\,,\ \ f_{t-2} \equiv f_{s-2}, \dots, f_{t-s+1} \equiv f_1\,, f_{t-s} \equiv f_0$$

olur. Böylece diziler periyodiktir ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.13: $n > k$ olmak üzere k-adım Fibonacci dizisinin n. terimi $f_n^{(k)}$ ile gösterilir ve

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \qquad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Burada $1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ dır. Diğer taraftan

$$f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} (mod\ m)$$

olmak üzere bu diziyi m modülüne indirgeyerek

$$f(k,m) = (f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_n^{(k,m)}, \dots)$$

şeklinde tekrar eden bir dizi elde edilebilir. Buradan

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_k^{(k,m)}\right) = (0,0, \dots ,1)$$

elde edilir. Bu ise (3.7) bağıntısı ile aynıdır (Lü ve Wang, 2007).

Teorem 3.14: $f(k,m)$ periyodik bir dizidir (Lü ve Wang, 2007).

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : 0 \leq a_i \leq m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur. Yani

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \geq 0$ için $v \geq u$ sayısı vardır.

Tanım 3.13 den

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

olup

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir.

Buradan

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve

$$f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

dir. Bu ise $f(k,m)$ dizisinin periyodik bir dizi olduğunu gösterir. (Lü ve Wang, 2007).

Örnek 3.15: $k = 4$ adım için

$$s(4,3) = (0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\dots)$$

dizisi ele alınırsa her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar eder. Dolayısıyla $h_4(3) = 26$ dır.

Sonuç 3.16: Fibonacci dizileri arasında

$$F_{k(n)} \equiv 0(modn)$$

$$F_{k(n)-1} \equiv F_{k(n)+1} \equiv F_{k(n)+1} \equiv 1(modn)$$

denklemleri mevcuttur (Renault, 1996).

3.2. Pell Polinomları ve Dizileri

Polinomlardan oluşan dizilerde sayı dizilerinde olduğu gibi rekürans bağıntılar kullanılarak tanımlanabilir.

Tanım 3.17: $P_n(x)$, n. Pell polinomunu ve $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$ başlangıç şartları olmak üzere Pell polinomları

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x), \qquad n \geq 2 \tag{3.8}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Horadam ve Mahom, 1985).

(3.8) eşitiliği kullanılarak oluşturulan Pell polinomlarının ilk birkaç terimi

$P_0(x) = 0$

$P_1(x) = 1$

$P_2(x) = 2x$

$P_3(x) = 4x^2 + 1$

$P_4(x) = 8x^3 + 4x$

$P_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1$

$P_6(x) = 32x^5 + 32x^3 + 6x$

$\vdots$

şeklindedir.

Pell polinomlar dizisinin negatif indisli terimleri ise

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1} P_n(x) \tag{3.9}$$

eşitliği ile elde edilebilir (Kalman,1982). (3.9) eşitliği kullanılarak oluşturulan Pell polinomlar dizisinin negatif indisli terimlerinin ilk birkaç terimi

$n = 1$ için $P_{-1}(x) = (-1)^{1+1} P_1(x) = 1$

$n = 2$ için $P_{-2}(x) = (-1)^{2+1} P_2(x) = -2x$

$n = 3$ için $P_{-3}(x) = (-1)^{3+1} P_3(x) = 4x^2 + 1$

$n = 4$ için $P_{-4}(x) = (-1)^{4+1} P_4(x) = -8x^3 - 4x$

$n = 5$ için $P_{-5}(x) = (-1)^{5+1} P_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1$

$\vdots$

şeklindedir.

Benzer düşünce ile Fibonacci polinomları $\{f_n(x)\}$, Lucas polinomları $\{L_n(x)\}$, Pell-Lucas polinomları $\{Q_n(x)\}$, Jacobsthal polinomları $\{J_n(x)\}$ ve Jacobsthal-Lucas polinomları $\{j_n(x)\}$ polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $f_n(x)$, n. Fibonacci polinomu $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = 1$ için başlangıç şartları olmak üzere Fibonacci polinomları

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Koshy, 2001).

ii. $L_n(x)$, n. Lucas polinomunu $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ başlangıç şartları olmak üzere Lucas polinomları

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Koshy, 2001).

iii. $Q_n(x)$, n. Pell-Lucas polinomunu $Q_0(x) = 2$ ve $Q_1(x) = 2x$ başlangıç şartları olmak üzere Pell-Lucas polinomları

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Bryd, 1963).

iv. $J_n(x)$, n. Jacobsthal polinomunu $J_0(x) = 0$ ve $J_1(x) = 1$ başlangıç şartları olmak üzere Jacobsthal polinomları

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + xJ_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Koshy, 2001).

v. $j_n(x)$, n. Jacobsthal-Lucas polinomunu $j_0(x) = 2$ ve $j_1(x) = 1$ başlangıç şartları olmak üzere Jacobsthal-Lucas polinomları

$$j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Koshy, 2001).

$f_n(x)$, n Fibonacci polinomunu; $P_n(x)$, n Pell polinomunu; $L_n(x)$, n Lucas polinomunu; $Q_n(x)$, n Pell-Lucas polinomunu ve f_n, n Fibonacci sayısını; P_n, n Pell sayısını; L_n, n Lucas sayısını ve Q_n, n Pell-Lucas sayısını göstermek üzere bu polinomlar ve sayılar arasında bazı ilişkiler

- $P_n(1) = P_n$
- $Q_n(1) = Q_n$
- $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = f_n$
- $Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = L_n$
- $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = f_n$

şeklindedir (Koshy, 2001; Horadam ve Mahon, 1985).

Teorem 3.18: Pell polinomunun açık formu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-i-1}{i} (2x)^{n-2i-1}, \quad n \geq 1 \tag{3.10}$$

şeklindedir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi kullanarak yapabiliriz. $n = 1$ ve $n = 2$ için (3.10) eşitliğinin sağladığı açık olarak görülür. $n = k$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğu gösterelim. Tümevarım prensibinden ve Tanım 3.17 den

$$P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) + P_{k-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-i-1}{i} (2x)^{k-2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} \binom{k-i-2}{i} (2x)^{k-2i-2}$$

elde edilir. İspatın devamı için k nın tek ve çift sayı olma durumları ayrı ayrı düşünülmelidir.

İlk olarak k yı çift sayı olarak alalım. $k = 2t$ olmak üzere $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$ Pascal formulünden

$$P_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{t-1} \binom{2t-i-1}{i} (2x)^{2t-2i} + \sum_{i=0}^{t-1} \binom{2t-i-2}{i} (2x)^{2t-2i-2}$$

$$= \binom{2t-1}{0}(2x)^{2t} + \binom{2t-2}{1}(2x)^{2t-2} + \binom{2t-3}{2}(2x)^{2t-4} \ldots + \binom{t}{t-1}(2x)^2$$
$$+ \binom{2t-2}{0}(2x)^{2t-2}\binom{2t-3}{1}(2x)^{2t-4} + \cdots + \binom{t-1}{t-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{t} \binom{2t-i}{i} (2x)^{2t-2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor (k)/2 \rfloor} \binom{k-i}{i} (2x)^{k-2i}$$

elde edilir. Dolayısıyla k çift sayısı için ispat tamamlanır. Benzer ispat k ın tek sayı durumları için de yapılabilir. Sonuç olarak k nın hem tek hem de çift sayı olma durumları için sağlandığından ispat tamamlanır.

Örneğin, Teorem 3.18 nin bir uygulaması olarak $n \geq 5$ için

$$P_5(x) = \sum_{0}^{2} \binom{4-i}{i} (2x)^{4-2i}$$
$$= \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{3}{1}(2x)^2 + \binom{2}{0}(2x)^0$$
$$= 16x^4 + 12x^2 + 1$$

olup diğer yandan

$$P_5(x) = 2xP_4(x) + P_3(x)$$
$$= 2x(8x^3 + 4x) + 4x^2 + 1$$
$$= 16x^4 + 8x^2 + 4x^2 + 1$$
$$= 16x^4 + 12x^2 + 1$$

olur.

Dolayısıyla

$$P_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1 = \sum_{0}^{2} \binom{4-i}{i} (2x)^{4-2i}$$

olup Teorem 3.18 nin sağlandığı görülür.

Pell polinomlarının terimleri tanımı kullanmadan, genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü, polinom dizisinin herhangi bir terimini bulurken kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan bulmamıza olanak sağlar.

Teorem 3.19: $n \geq 0$ olmak üzere $\{P_n(x)\}$ Pell polinomlar dizisinin n. terimi

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

şeklindedir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: $P_n(x) = t^n$ yineleme bağıntısı Tanım 3.17 deki Pell polinomlarının

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

rekürans bağıntısında kullanılırsa

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x) \Longrightarrow t^{n+2} = 2xt^{n+1} + t^n$$

$$\Longrightarrow t^n(t^2) = t^n(2xt + 1)$$

$$\Longrightarrow t^2 = 2xt + 1$$

elde edilir. Bulunan Pell polinomlarının $x^2 - 2tx - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ olarak alınırsa

$$\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \; ve \; \beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

dir.

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, $x^2 - 2tx - 1 = 0$ karakteristik denklemin kökleri ve A, B sabit katsayılar olmak üzere bu karakteristik denklemin genel çözümü

$$P_n(x) = A\alpha^n(x) + B\beta^n(x)$$

şeklindedir. Buradan $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$P_0(x) = 0 = A + B$$

$$P_1(x) = 1 = A\alpha(x) + B\beta(x)$$

olup lineer denklem sisteminin çözümünden $A = \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}$ ve $B = -\frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}$ olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$P_n(x) = A\alpha^n(x) + B\beta^n(x)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

formülü elde edilir. Bu formüle Pell polinomlarının Binet formülü denir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Denklemin kökleri arasında

$$\alpha(x) + \beta(x) = 2x$$

$$\alpha(x) - \beta(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\alpha(x)\beta(x) = -1$$

eşitlikleri vardır.

Benzer şekilde sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomlarının Binet formülleri ve karakteristik kökleri

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}; \quad \alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$L_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n; \quad \alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$Q_n(x) = \alpha^n(x) + \beta(x)^n; \quad \alpha(x) = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

$$J_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{1+8x}}; \quad \alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2}$$

$$j_n(x) = \alpha(x)^n + \beta(x)^n; \quad \alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{1+8x}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta(x) = \frac{1 - \sqrt{1+8x}}{2}$$

şekilde elde edilebilir (Koshy, 2001; Horadam ve Mahon, 1985).

Şimdi Pell polinom dizilerinin üreteç fonksiyonu verilecektir.

Teorem 3.20: $n \geq 0$ için $P_n(x)$, Pell polinomlar dizinin n. terimi olmak üzere Pell polinomlar dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{t}{1 - 2xt - t^2}$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

İspat: Eşitlik (3.3) den

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

olup aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$g(t) = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \cdots + P_n(x)t^n + \cdots \tag{3.11}$$

$$-2xg(t)t = -2xP_0(x)t - 2xP_1(x)t^2 - 2xP_2(x)t^3 - \cdots - 2P_n t^{n+1} - \cdots \tag{3.12}$$

$$-g(t)t^2 = -P_0(x)t^2 - P_1(x)t^3 - P_2(x)t^4 - \cdots - P_n(x)t^{n+2} - \cdots - \cdots \tag{3.13}$$

(3.11), (3.12) ve (3.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$g(t)(1-2xt-t^2) = P_0(x) + P_1(x)t - 2xP_0(x)t$$

elde edilir. $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = 1$ başlangıç şartları için eşitlik (3.8) yani $P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$ bağıntısı kullanılırsa Pell polinomlarının dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{t}{1-2xt-t^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Pell polinomunun üreteç fonksiyonunda $x = \frac{1}{2}$ alınırsa Fibonacci polinomunun üreteç fonksiyonunu elde edilir.

Pell polinomlar dizisinin negatif indisli terimleri, eşitlik (3.9) kullanılmadan Pell polinomlarının Binet formülü kullanılarak da elde edilebilir. Pell polinomlarının Binet formülünden

$$P_{-n}(x) = \frac{\alpha^{-n}(x) - \beta^{-n}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

dir. Ayrıca $\alpha(x)\beta(x) = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} P_{-n}(x) &= \frac{(-\beta)^n(x) - (-\alpha^n)(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \\ &= (-1)^{n+1}P_n(x) \end{aligned}$$

olup

$$P_{-n}(x) = (-1)^{n+1}P_n(x)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür (Horadam ve Mahon, 1985).

Aşağıdaki teorem Pell polinomlarının dizilerinin terimlerininin matris yardımıyla gösterimini ifade etmektedir.

Teorem 3.21: $P = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $n \geq 0$ olmak üzere

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

dir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım. Yani her n doğal sayısı için

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $n = 1$ için

$$P = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2(x) & P_1(x) \\ P_1(x) & P_0(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup eşitliğin doğru olduğu görülür. $n = k$ için eşitliğin doğru yani

$$P^k = \begin{pmatrix} P_{k+1}(x) & P_k(x) \\ P_k(x) & P_{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Buradan

$$\boldsymbol{PP^k} = \begin{pmatrix} \mathbf{2x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P_{k+1}(x)} & \boldsymbol{P_k(x)} \\ \boldsymbol{P_k(x)} & \boldsymbol{P_{k-1}(x)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{2xP_{k+1}(x) + P_k(x)} & \boldsymbol{2xP_k(x) + P_{k-1}(x)} \\ \boldsymbol{P_{k+1}(x)} & \boldsymbol{P_k(x)} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{P^{k+1}}$$

bulunur. Bu ise $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.21 den

$$P^{m+n} = P^m P^n \tag{3.14}$$

elde edilir. Her m, n doğal sayısı için m yi sabit tutup n ye göre tümevarım yöntemi ile eşitliğinin sağlandığı görülebilir. Gerçekten Teorem 3.21 den

$$P^m = \begin{pmatrix} P_{m+1}(x) & P_m(x) \\ P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{pmatrix}$$

dir. $n = 1$ için eşitliğin doğru olduğunu yani

$$P^{m+1} = P^m P^1$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için

$$P^m P^1 = \begin{pmatrix} P_{m+1}(x) & P_m(x) \\ P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2(x) & P_1(x) \\ P_1(x) & P_0(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{m+1}(x) & P_m(x) \\ P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{m+1}(x) + P_m(x) & P_{m+1}(x) \\ P_m(x) + P_{m-1}(x) & P_m(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{m+2}(x) & P_{m+1}(x) \\ P_{m+1}(x) & P_m(x) \end{pmatrix}$$

$$= P^{m+1}$$

şeklinde olup eşitliğin doğru olduğu görülür. Eşitliğin $n = k$ için doğru yani

$$P^m P^k = \begin{pmatrix} P_{m+k+1}(x) & P_{m+k}(x) \\ P_{m+k}(x) & P_{m+k-1}(x) \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Buradan

$$P^{m+k+1} = \begin{pmatrix} P_{m+1}(x) & P_m(x) \\ P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k+2}(x) & P_{k+1}(x) \\ P_{k+1}(x) & P_k(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{m+k+2}(x) & P_{m+k+1(x)} \\ P_{m+k+1}(x) & P_{m+k-1}(x) \end{pmatrix}$$

eşitlik $n = k + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.22: $n \geq 1$ için

$$P_{\ n-1}(x)P_{n+1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n$$

dir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: Teorem 3.21 den $P = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

olup $\det P = -1$ dir. Buradan

$$(-1)^n = (\det P)^n = \det(P^n) = \begin{vmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n$$

bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.23: $m \geq 1\ , n \geq 1$ için

$$P_{n+m}(x) = P_{n-1}(x)P_m(x) + P_n(x)P_{m+1}(x)$$

dir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: Teorem 3.21 den

$$P^{n+m} = \begin{pmatrix} P_{n+m+1}(x) & P_{n+m}(x) \\ P_{n+m}(x) & P_{n+m-1}(x) \end{pmatrix}$$

ve

$$P^n P^m = \begin{pmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{m+1}(x) & P_m(x) \\ P_m(x) & P_{m-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{n+1}(x)P_{m+1}(x) + P_n(x)P_m(x) & P_{n+1}(x)P_m(x) + P_n(x)P_{m-1}(x) \\ P_n(x)P_{m+1}(x) + P_{n-1}(x)P_m(x) & P_n(x)P_m(x) + P_{n-1}(x)P_{m-1}(x) \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Eşitlik (3.14) den $P^{n+m} = P^n P^m$ olup elde edilen iki matrisin eşitliğinden

$$P_{n+m}(x) = P_{n-1}(x)P_m(x) + P_n(x)P_{m+1}(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.24: $2xP_{2n}(x) = P_{n+1}^2(x) - P_{n-1}^2$ dir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: Teorem 3.23 de $n = m$ alınırsa

$$2xP_{2n}(x) = 2xP_{n+n}(x)$$

$$= 2x\big(P_{n-1}(x)P_n(x) + P_n(x)P_{n+1}(x)\big)$$

$$= 2xP_n(x)\big(P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x)\big)$$

$$= \big(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\big)\big(P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x)\big)$$

$$= P_{n+1}^2(x) - P_{n-1}^2(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.25: $P_{2n+1}(x) = P_{n+1}^2(x) + P_n^2(x)$ dir (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: Teorem 3.23 de $m = n + 1$ alınırsa

$$P_{n+n+1}(x) = P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + P_n(x)P_{n+2}(x)$$

elde edilir.

Tanım 3.17 den

$$P_{n-1}(x) = P_{n+1}(x) - 2xP_n(x)$$

olup

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) &= P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + P_n(x)P_{n+2}(x) \\ &= \big(P_{n+1}(x) - 2xP_n(x)\big)P_{n+1}(x) + P_n(x)(P_n(x) + 2xP_{n+1}(x)) \\ &= P_{n+1}^2(x) - 2xP_n(x)P_{n+1}(x) + P_n^2(x) + 2xP_n(x)P_{n+1}(x) \\ &= P_{n+1}^2(x) + P_n^2\ (x) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

$\{P_n(x)\}$ Pell polinomlarının dizisinin terimleri Tridiagonal matrisinin determinantı kullanılarakta elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.26: $n \geq 0$ için A, $n \times n$ tipindeki $\{P_n(x)\}$ Pell polinomunun tridiagonal matrisi olsun. Bu matrisin i. satır ve j. sütunundaki girdisi a_{ij} şeklide olmak üzere A matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 2x, & i = j \\ 1, & j = i+1 \\ -1, & j = i-1 \\ 0, & Aksi\ halde \end{cases}$$

için

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & 1 & & & & \\ 0 & -1 & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & -1 & 2x & 1 \\ 0 & & & & 0 & -1 & 2x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olup $\det(A)$, $\Delta_n(x)$ şeklini göstermek üzere

$$\det A = P_{n+1}(x)$$

dir. (Horadam ve Mahon, 1985).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım metodu kullanılarak yapılabilir. Yani her n doğal sayısı için

$$\det(A) = \Delta_n(x) = P_{n+1}(x)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $n = 1$ için

$$A = [2x] \text{ ve } \Delta_n(x) = 2x$$

olup $P_2(x) = 2x$ olduğundan eşitlik doğrudur. $n = k$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n = k + 1$ için sağlandığını gösterelim. Yani

$$\Delta_k(x) = P_{k+1}(x)$$

olup

$$\Delta_{k+1}(x) = P_{k+,}(x)$$

olduğunu gösterelim. Minörler ile determinantların hesaplanması yöntemi birinci satıra göre açılırsa

$$\Delta_{k+1}(x) = 2x\Delta_k(x) + \Delta_{k-1}(x)$$

elde edilir. Buradan Tanım 3.16 dan kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1}(x) &= 2x\Delta_k(x) + \Delta_{k-1}(x) \\ &= 2xP_{k+1}(x) + P_k(x) \\ &= P_{k+2}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.3. Halkalar

3.3.1. Halkaların temsilleri

Bu bölümde B. Fine tarafından çalışılmış p^2 mertebeden ve p asal olmak şartı ile bütün sonlu halkaların sınıflandırılması verilmiştir.

Tanım 3.25: $(R, +,\cdot)$ sonlu bir halka olmak üzere $(R, +)$ değişmeli sonlu toplam grubu devirli grupların direk çarpımıdır. Bu devirli gruplar sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_k$ ıncı mertebeden $x_1, x_2, \dots, x_k$ gerenlere sahip olduğunda halkanın yapısı $c_{ij}^t \in \mathbb{Z}_{m_t}$ olmak üzere

$$x_i x_j = \sum_{t=1}^{k} c_{ij}^t x_t$$

dir. Burada $x_i x_j$ çarpımlarının sayısı k^2 tane ve c_{ij}^t sabitlerinin sayısı ise k^3 tanedir (Fine, 1993).

Sonlu bir halkanın yapısını, grup teorisi kullanılarak sunulmuştur. Sonlu bir R halkasının temsili, bağıntılar ile R toplamsal grubunun $x_1, x_2, \dots, x_k$ gerenlerinden oluşur. Bu bağıntılar $i = 1,2, \dots, k$, $j = 1,2, \dots, k$, $t = 1,2, \dots, k$ ve $c_{ij}^t \in \mathbb{Z}_2$ olmak üzere iki tiptir;

i. $m_i x_i = 0$

ii. $x_i x_j = \sum_{t=1}^{k} c_{ij}^t x_t$

dir.

R halkası yukarıdaki bağıntıları sağlıyorsa temsili

$$R = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \mid m_i x_i = 0, x_i x_j = \sum_{t=1}^{k} c_{ij}^t x_t \, , i = 1,2, \dots, k \rangle$$

şeklindedir (Fine, 1993).

Örneğin 4. merteben sonlu $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ halkası için

$$\langle x_1, x_2 \mid 2x_1 = 2x_2 = 0, {x_1}^2 = 0, {x_2}^2 = x_2, x_1x_2 = x_2x_1 = x_1 \rangle$$

yazılır (Fine, 1993). Gerçekten $(\mathbb{Z}_4, +) \cong \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ olup

$$o(x_1) = m_1 = 2$$

$$o(x_2) = m_2 = 2$$

dir. Dolayısıyla $i = 1,2$ için

$$2x_1 = 0$$

$$2x_2 = 0$$

dır. $k = 2$ olmak üzere $i = 1,2$, $j = 1,2$, $t = 1,2$ için c_{ij}^t Z_2 olup

$$x_1x_1 = \sum_{t=1}^{1} c_{11}^t x_t = c_{11}^1 x_1$$

$$x_1\, x_2 = \sum_{t=1}^{1} c_{12}^t x_t = c_{12}^1 x_1$$

$$x_2x_1 = \sum_{t=1}^{2} c_{21}^t x_t = c_{21}^1 x_1 + c_{21}^2 x_2$$

$$x_2x_2 = \sum_{t=1}^{2} c_{22}^t x_t = c_{22}^1 x_1 + c_{22}^2 x_2$$

yazılır.

$(R, +, \cdot)$ bir halka ve $(R, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere grup olma şartları dikkate alınarak $x_1x_2 = x_1$ için

$$x_2x_1 = x_1$$

$$x_2x_2 = x_2$$

$$x_1x_1 = x_1$$

elde edilir.

Dolayısıyla $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ halkasının temsili

$$\langle x_1, x_2 \mid 2x_1 = 2x_2 = 0, {x_1}^2 = 0, {x_2}^2 = x_2, x_1x_2 = x_2x_1 = x_1\rangle$$

şeklinde olduğu görüldü.

Teorem 3.26: İzomorfizm farkıyla, C_m devirli toplamsal grubu ile $(R,+,\cdot)$ halkalarının sayısı m nin bölenlerinin sayısı ile verilir. Özellikle m nin her bir d böleni için g, C_m nin toplamsal bir gereni olmak üzere R_d halkası

$$R_d = \langle g \mid mg = 0, g^2 = dg\rangle$$

olur. Farklı d değerleri için bu halkalar izomorf değildir (Fine, 1993).

Aşağıdaki teoremde Fibonacci dizisinin uygulamasının yapılacağı p^2 mertebeden 11 tane halkanın temsili verilmiştir.

Teorem 3.27: p asal sayı olmak üzere mertebesi p^2 olan izomorfizm farkıyla 11 tane halka vardır. Bunlar aşağıdaki temsillerle verilir.

i. Birimli halkalar

$A = \langle \alpha \mid p^2\alpha = 0, \alpha^2 = \alpha\rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$

$B = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta\alpha = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p$

$C = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = 0, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \alpha, \beta\alpha = \alpha\rangle$

$D,\ p^2$ mertebeden sonlu cisim olmak üzere

$$D = GF(p^2) = \begin{cases} \langle \alpha, \beta \mid \ p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = j\alpha, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \beta\rangle \\ \qquad\qquad p \neq 2 \text{ için} j\ ,\ \ \mathrm{Z_P}\ de\ kare\ değil \\ \langle \alpha, b \mid 2\alpha = 2\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta + \beta, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \beta\rangle \\ \qquad\qquad p = 2 \end{cases}$$

dir.

ii. Birimli olmayan halkalar

$E = \langle \alpha \mid p^2\alpha = 0, \alpha^2 = p\alpha \rangle$
$F = \langle \alpha \mid p^2\alpha = 0, \alpha^2 = 0 \rangle \cong C_{p^2}(0)$
$G = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \alpha, \beta\alpha = \beta \rangle$
$H = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \alpha \rangle$
$I = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = 0, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta\alpha = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_\mathrm{p} + C_p(0)$
$J = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \beta, \alpha\beta = 0 \rangle$
$K = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 =, \beta^2 = 0 \rangle \cong C_p \times C_p(0)$

dir (Fine, 1993).

$G(0)$, değişmeli G grubu için toplamsal G gruplu ve aşikar çarpımlı halkayı göstermektedir.

3.3.2. Halkalarda sayı dizileri

Bu bölümde halkalarda Fibonacci ve Pell sayı dizileri ile ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.28: R birim elemanlı bir halka olmak üzere $\{M_n\}$, R nin elemanlarının dizisi olsun. M_0, M_1, A ve B ise R nin keyfi elemanları olmak üzere $\{M_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$M_{n+2} = BM_{n+1} + AM_n \ , n \geq 0 \tag{3.15}$$

bağıntısı ile tanımlanır (Decarli, 1970).

Tanım 3.29: $\{F_n\}$ dizisi (3.15) bağıntısının özel hali olsun. $F_0 = 0$ (halkanın sıfırı), $F_1 = 1$ (halkanın birim elemanı), A ve B ise R halkasınn keyfi elemanları olmak üzere $\{F_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n \ , n \geq 0$$

bağıntısı ile tanımlanır (Decarli, 1970).

Teorem 3.30:

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

ise

$$F_{n+2} = F_{n+1}B + F_nA$$

dir (Decarli, 1970).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım. $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

ise

$$F_{n+2} = F_{n+1}B + F_nA$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak $n = 0$ için

$$F_2 = BF_1 + AF_0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} F_2 &= BF_1 + AF_0 \\ &= B1 + A0 \\ &= 1B + 0A \\ &= F_1B + F_0A \end{aligned}$$

olur. Yani

$$F_2 = F_1B + F_0A$$

dir.

$n = k$ için doğru yani,

$$F_{k+2} = BF_{k+1} + AF_k$$

ise

$$F_{k+2} = F_{k+1}B + F_kA$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$F_{k+1+2} = BF_{k+1+1} + AF_{k+1}$$

$$F_{k+3} = BF_{k+2} + AF_{k+1}$$

için

$$F_{k+3} = F_{k+2}B + F_{k+1}A$$

olduğunu göstermeliyiz. Kabulümüzden

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= BF_{k+2} + AF_{k+1} \\
&= B(F_{k+1}B + F_kA\ ) + A(BF_k + AF_{k-1}) \\
&= B(F_{k+1}B + F_kB) + A(F_kB + F_{k-1}A) \\
&= B(F_{k+1}B) + B(F_kA) + A(F_kB) + A(F_{k-1}A) \\
&= (BF_{k+1})B + (BF_k)A + (AF_k)B + (AF_{k-1})A \\
&= (BF_{k+1})B + (AF_k)B + (BF_k)A + (AF_{k-1})A \\
&= (BF_{k+1} + AF_k)B + (BF_k + AF_{k-1})A \\
&= F_{k+2}B + F_{k+1}A
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolaysıyla

$$F_{k+3} = BF_{k+2} + AF_{k+1} \text{ ise } F_{k+3} = F_{k+2}B + F_{k+1}A$$

olup ispat tamamlanır.

Tanım 3.28 den F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4} ve F_{n+5} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

$$F_{n+3} = BF_{n+2} + AF_{n+1}$$

$$= B(BF_{n+1} + AF_n) + AF_{n+1}$$

$$= B^2F_{n+1} + BAF_n + AF_{n+1}$$

$$F_{n+4} = BF_{n+3} + AF_{n+2}$$

$$= B(B^2F_{n+1} + BAF_n + AF_{n+1}) + A(BF_{n+1} + AF_n)$$

$$= B^3F_{n+1} + B^2AF_n + A_1AF_{n+1} + ABF_{n+1} + A^3F_n$$

$$F_{n+5} = BF_{n+4} + AF_{n+3}$$

$$= B(B^3F_{n+1} + B^2AF_n + BAF_{n+1} + ABF_{n+1} + A^3F_n) + A(B^2F_{n+1} + BAF_n + AF_{n+1})$$

$$= B^4F_{n+1} + B^3AF_n + B^2AF_{n+1} + BABF_{n+1} + BA^3F_n + AB^2F_{n+1} + ABAF_n + A^2F_{n+1}$$

$$\vdots$$

yazılabilir. Benzer şekilde $k \geq 6$ için F_{n+k}, F_n ve F_{n+1}'e bağlı olarak ifade edilebilir.

Örnek 3.31: p asal sayı olmak üzere α ve β elemanları ile gerilen 9. mertebeden birimli halka

$$G = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \alpha, \beta\alpha = \beta \rangle$$

olsun (Fine, 1993).

Şimdi Tanım 3.29 u kullanarak Örnek 3.31 de verilen 9. mertebeden halkanın Fibonacci dizisi oluşturalım.

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A = a$ ve $B = b$ için

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + A_0F_n$$

bağıntısı kullanılırsa halkanın Fibonacci dizisi

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= \beta 1 + \alpha 0\\
&= \beta,\\
F_3 &= \beta\beta + \alpha 1\\
&= \beta^2 + \alpha = \beta + \alpha\\
F_4 &= \beta(\beta + \alpha) + \alpha\beta\\
&= \beta^2 + \beta\alpha + \alpha\beta\\
&= \beta + \alpha + \alpha\\
&= \beta + 2\alpha\\
F_5 &= \beta(\beta + 2\alpha) + \alpha(\beta + \alpha)\\
&= \beta(\beta + \alpha + \alpha) + \alpha\beta + \alpha^2\\
&= \beta^2 + \beta\alpha + \beta\alpha + \alpha + 0\\
&= \beta + \alpha + \alpha + a\alpha\\
&= \beta + 3\alpha\\
&= \beta\\
F_6 &= \beta\beta + \alpha(\beta + 2\alpha)\\
&= \beta^2 + \alpha(\beta + \alpha + \alpha)\\
&= \beta + \alpha\beta + \alpha^2 + \alpha^2\\
&= \beta + \alpha + 0 + 0\\
&= \beta + \alpha\\
&\dots
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$0, 1, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots$$

şeklindedir.

Dolayısıyla

$$\{F_n\} = \{0, 1, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots\}$$

dir.

Sonuç 3.32:

i. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = F_{n-1}AF_{n-1} - F_nAF_{n-2}$

ii. $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}AF_{n-1} - F_{n-2}AF_n \qquad n \geq 1$

(Decarli, 1970).

İspat: i. Teorem 3.30 dan

$$F_n = BF_{n-1} + AF_{n-2}$$

$$F_{n+1} = F_nB + F_{n-1}A$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_nB + F_{n-1}A)F_{n-1} - F_n(BF_{n-1} + AF_{n-2}) \\ &= F_nBF_{n-1} + F_{n-1}AF_{n-1} - F_nBF_{n-1} - F_nAF_{n-2} \\ &= F_{n-1}AF_{n-1} - F_nAF_{n-2} \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

ii. Teorem 3.30 dan

$$F_{n+1} = BF_n + AF_{n-1}$$
$$F_n = F_{n-1}B + F_{n-2}A$$

dir.

Buradan

$$
\begin{aligned}
F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= F_{n-1}(BF_n + AF_{n-1}) - (F_{n-1}B + F_{n-2}A)F_n \\
&= F_{n-1}BF_n + F_{n-1}AF_{n-1} - F_{n-1}BF_n - F_{n-2}AF_n \\
&= F_{n-1}AF_{n-1} - F_{n-2}AF_n
\end{aligned}
$$

olup istenilen elde edilir.

Aşağıdaki teoremde $\{M_n\}$ dizisi ve bu dizinin özel hali olan $\{F_n\}$ dizisi arasındaki ilişkileri verilmiştir.

Teorem 3.33:

$$M_{n+r} = F_r A M_{n-1} + F_{r+1} M_n \qquad n \geq 1, \qquad r \geq 0$$

(Decarli, 1970).

Sonuç 3.34:

$$M_n = F_n M_1 + F_{n-1} A M_0 \qquad , n \geq 1$$

(Decarli, 1970).

İspat: Teorem 3.33 den $n \geq 1, r \geq 0$ olmak üzere

$$M_{n+r} = F_r A M_{n-1} + F_{r+1} M_n$$

dir. Burada n ile r yer değiştirirse

$$M_{r+n} = F_n A M_{r-1} + F_{n+1} M_r$$

elde edilir. n yerine $n-1$ alınıp $r = 1$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
M_{r+n-1} &= F_{n-1} A M_{r-1} + F_{n-1+1} M_r \\
M_{1+n-1} &= F_{n-1} A M_{1-1} + F_n M_1 \\
M_n &= F_{n-1} A M_0 + F_n M_1 \\
M_n &= F_n M_1 + F_{n-1} A M_0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.33 den $\{F_n\}$ dizisi

$$F_{n+r} = F_r A F_{n-1} + F_{r+1} F_n \quad , n \geq 1 \tag{3.16}$$

dir. (3.16) bağıntısında n yerine $n+1$ ve r yerine n alınırsa

$$F_{n+1+r} = F_n A F_{n+1-1} + F_{r+1} F_{n+1}$$

$$F_{n+1+n} = F_n A F_n + F_{n+1} F_{n+1}$$

$$F_{2n+1} = F_n A F_n + F_{n+1}^2$$

elde edilir.

Teorem 3.35:

$$F_n F_{n+r} - F_{n+r} F_n = F_n F_r A F_{n-1} - F_{n-1} A F_r F_n \qquad n \geq 1, r \geq 1$$

(Decarli, 1970).

İspat: (3.16) bağıntısından $n \geq 1$ için

$$F_{n+r} = F_r A F_{n-1} + F_{r+1} F_n$$

olduğunu biliyoruz. Burada n yerine $r+1$ ve r yerine $n-1$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_{n+r} &= F_r A F_{n-1} + F_{r+1} F_n \\ &= F_{n-1} A F_{r+1-1} + F_{n-1+1} F_{r+1} \\ &= F_{n-1} A F_r + F_n F_{r+1} \end{aligned}$$

olup

$$F_{n+r} = F_{n-1} A F_r + F_n F_{r+1} \tag{3.17}$$

elde edilir.

Halkanın çarpma işleminin birleşme özelliği, (3.16) ve (3.17) bağıntıları kullanılırsa

$$F_n(F_{r+1}F_n) = (F_nF_{r+1})F_n$$

$$F_n(F_{r+1}F_n + F_rAF_{n-1} - F_rAF_{n-1}) = (F_nF_{r+1} + F_{n-1}AF_r - F_{n-1}AF_r)F_n$$

$$F_n\left(\underbrace{F_rAF_{n-1} - F_{r+1}F_n}_{F_{n+r}} - F_rAF_{n-1}\right) = \left(\underbrace{F_nF_{r+1} + F_{n-1}AF_r}_{F_{n+r}} - F_{n-1}AF_r\right)F_n$$

$$F_n(F_{n+r} - F_rAF_{n-1}) = (F_{n+r} - F_{n-1}AF_r)F_n$$

$$F_nF_{n+r} - F_nF_rAF_{n-1} = F_{n+r}F_n - F_{n-1}AF_rF_n$$

$$F_nF_{n+r} - F_{n+r}F_n = F_nF_rAF_{n-1} - F_{n-1}AF_rF_n$$

olup istenilen elde edilir.

3.3.3. p^2 Mertebeden birimli, sonlu halkaların Fibonacci dizileri ve periyotları

Bu bölümde Fine'ın sınıflandırmış olduğu p^2 mertebeden birimli olan halkalardan aşağıdaki gibi

$$A = \langle \alpha \mid p^2\alpha = 0, \alpha^2 = \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$$

$$B = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta\alpha = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p$$

$$C = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = 0, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \alpha, \beta\alpha = \alpha \rangle$$

temsillere sahip olan halkaların Fibonacci dizilerinin periyotları verilmiştir. Burada ve A, B birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için DeCarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

bağıntısı kullanılarak A, B ve C halkalarının Fibonacci dizileri oluşturulmuştur.

A halkasının periyodu $h_2(p^2)$, B halkasının periyodu 2 ve C halkasının periyodu ise keyfi elemanlarına bağlı olarak p ya da $2p$ dir (Taşyurdu and Gültekin, 2013).

Teorem 3.36: Herhangi p asal sayısı için α elemanı ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$A = \langle \alpha \mid p^2\alpha = 0, \alpha^2 = \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{p}^2}$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $h_2(p^2)$ dir. Yani $P(A; \alpha, \alpha) = h_2(p^2)$ dir (Taşyurdu and Gültekin 2013).

İspat: Tanım 3.29 dan $F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere $A = \alpha$, $B = \alpha$ için

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

bağıntısı kullanılırsa A halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= \alpha 1 + \alpha 0\\
&= \alpha,\\
F_3 &= \alpha\alpha + \alpha 1\\
&= \alpha^2 + \alpha\\
&= \alpha + \alpha\\
&= 2\alpha,\\
F_4 &= \alpha(2\alpha) + \alpha\alpha\\
&= \alpha(\alpha + \alpha) + \alpha^2\\
&= \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\\
&= 3\alpha^2\\
&= 3\alpha,\\
F_5 &= \alpha(3\alpha) + \alpha(2\alpha)\\
&= \alpha(\alpha + \alpha + \alpha) + \alpha(\alpha + \alpha)\\
&= \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\\
&= 5\alpha^2\\
&= 5\alpha,\\
&\vdots\\
F_n &= \alpha f_n^{(2)},\\
F_{n+1} &= \alpha f_{n+1}^{(2)},
\end{aligned}$$

$$F_{n+2} = \alpha\left(f_{n+1}^{(2)}\alpha\right) + \alpha\left(f_n^{(2)}\right)$$

$$= \alpha\left(\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{f_{n+1}^{(2)}}\right) + \alpha\left(\underbrace{\alpha + \alpha + .. + \alpha}_{f_n^{(2)}}\right)$$

$$= f_{n+1}^{(2)}\alpha^2 + f_n^{(2)}\alpha^2$$

$$= f_{n+1}^{(2)}\alpha + f_n^{(2)}\alpha$$

$$= \left(f_{n+1}^{(2)} + f_n^{(2)}\right)\alpha$$

$$= f_{n+2}^{(2)}\alpha\ ,$$

$$\vdots$$

olup

$$0,1,\alpha,2\alpha,3\alpha,5\alpha,8\alpha,13\alpha,21\alpha,34\alpha,\ldots,f_n^{(2)}\alpha,f_{n+1}^{(2)}\alpha,f_{n+2}^{(2)}\alpha,\ldots$$

dizisi elde edilir. $n \geq 2$ için $f_n^{(2)}$, 2-adım Fibonacci dizisinin n. sayısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere oluşan bu dizinin her bir F_n elemanı $f_n^{(2)}\alpha$ şeklindedir. Yani her bir F_n elemanının katsayısı $f_n^{(2)}$ dir. Buradan bu F_n elemanının katsayıları arasında $n \geq 2$ için $f_0^{(2)} = 0$, $f_1^{(2)} = 1$ olmak üzere

$$f_n^{(2)} = f_{n-1}^{(2)} + f_{n-2}^{(2)}$$

bağıntısı vardır. Dizinin periyodu F_n elemanının katsayısı olan $f_n^{(2)}$ sayısı yani p asal sayısına göre belirlenir. Şimdi p asal sayısına göre dizinin periyodunu belirleyelim. $p \geq 2$ için $f_n^{(2,p^2)} = f_n^{(2)}(mod p^2)$ olmak üzere $n \geq 2$ için bu dizinin her bir F_n elemanı $f_n^{(2,p^2)}\alpha$ şeklindedir. Oluşan bu dizinin elemanlarının katsayıları arasında $n \geq 2$ için $f_0^{(2,p^2)} = 0$, $f_1^{(2,p^2)} = 1$ olmak üzere

$$f_n^{(2,p^2)} = f_{n-1}^{(2,p^2)} + f_{n-2}^{(2,p^2)}$$

bağıntısı vardır. Yani katsayılar $f(2,p^2)$ dizisinin elemanlarıdır. Teorem 3.14 den $f(2,p^2)$ dizisinin periyodu $h_2(p^2)$ olduğundan bu dizinin periyodu $h_2(p^2)$ dir. Yani $P(A;\alpha,\alpha) = h_2(p^2)$ dir.

Teorem 3.37: Herhangi p asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$B = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta\alpha = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_\mathrm{p} + \mathbb{Z}_\mathrm{p}$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu 2 dir. Yani $P(B; \alpha, \beta) = P(B; \beta, \alpha) = 2$ dir (Taşyurdu and Gültekin, 2013).

İspat: Tanım 3.29 dan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A = \alpha$, $B = \beta$ için

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

bağıntısı kullanılırsa B halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= \beta 1 + \alpha 0 \\
&= \beta, \\
F_3 &= \beta\beta + \alpha 1 \\
&= \beta^2 + \alpha \\
&= \alpha + \beta, \\
F_4 &= \beta(\alpha + \beta) + \alpha\beta \\
&= \beta\alpha + \beta^2 + \alpha\beta \\
&= 0 + \beta + 0 \\
&= \beta, \\
F_5 &= \beta\beta + \alpha(\alpha + \beta) \\
&= \beta^2 + \beta^2 + \alpha\beta \\
&= \beta + \alpha + 0 \\
&= \alpha + \beta, \\
F_6 &= \beta(\alpha + \beta) + \alpha\beta \\
&= \beta\alpha + \beta^2 + \alpha\beta \\
&= 0 + \beta + 0 \\
&= \beta,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_7 &= \beta\beta + \alpha(\alpha+\beta) \\
&= \beta^2 + \beta^2 + \alpha\beta \\
&= \beta + \alpha + 0 \\
&= \alpha + \beta, \\
&\vdots \\
F_n &= \beta, \\
F_{n+1} &= \alpha + \beta\ , \\
F_{n+2} &= \beta(\alpha+\beta) + \alpha\beta \\
&= \beta\alpha + \beta^2 + \alpha\beta \\
&= 0 + \beta + 0 \\
&= \beta, \\
F_{n+3} &= \beta\beta + \alpha(\alpha+\beta) \\
&= \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta \\
&= \beta + \alpha + 0 \\
&= \alpha + \beta, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,\beta,\alpha+\beta,\beta,\alpha+\beta,\dots,\beta,\alpha+\beta,\dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyor. Dolayısıyla B halkasının Fibonacci dizisi periyodiktir. Tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 2 olduğundan bu halkanın periyodu 2 dir. Yani $P(B;\alpha,\beta) = 2$ dir.

Benzer olarak Tanım 3.29 dan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A = b$, $B = \alpha$ için

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

bağıntısı kullanılırsa B halkasının temsilinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= \alpha 1 + \beta 0 \\
&= \alpha,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3 &= \alpha\alpha + \beta 1 \\
&= \alpha^2 + \beta \\
&= \alpha + \beta, \\
F_4 &= \alpha(\alpha + \beta) + \beta\alpha \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha \\
&= \alpha + 0 + 0 = \alpha, \\
F_5 &= \alpha\alpha + \beta(\alpha + \beta) \\
&= \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 \\
&= \alpha + 0 + \beta \\
&= \alpha + \beta, \\
F_6 &= \alpha(\alpha + \beta) + \beta\alpha \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha \\
&= \alpha + 0 + 0 \\
&= \alpha, \\
F_7 &= \alpha\alpha + \beta(\alpha + \beta) \\
&= \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 \\
&= \alpha + 0 + \beta \\
&= \alpha + \beta, \\
&\vdots \\
F_n &= \alpha, \\
F_{n+1} &= \alpha + \beta\ , \\
F_{n+2} &= \alpha(\alpha + \beta) + \beta\alpha \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha \\
&= \alpha + 0 + 0 \\
&= \alpha, \\
F_{n+3} &= \alpha\alpha + \beta(\alpha + \beta) \\
&= \alpha^2 + \beta\alpha + \beta^2 \\
&= \alpha + 0 + \beta \\
&= \alpha + \beta, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1, \alpha, \alpha + \beta, \alpha, \alpha + \beta, \dots, \alpha, \alpha + \beta, \dots$$

dizisi elde edilir.

Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarından oluşmaktadır. Dolayısıyla B halkasının Fibonacci dizisi periyodiktir. Tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 2 olduğundan bu halkanın periyodu 2 olarak bulunur. Yani $P(B;\beta,\alpha)=2$ dir. Sonuç olarak $P(B;\alpha,b)=P(B;\beta,\alpha)=2$ dir.

Teorem 3.38: Herhangi p asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$C=\langle\alpha,\beta \mid p\alpha=p\beta=0,\alpha^2=0,\beta^2=b,\alpha\beta=\alpha,\beta\alpha=\alpha\ \rangle$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu p ya da $2p$ dir. Yani $P(C;\alpha,\beta)=p$ ve $P(C;\beta,\alpha)=2p$ dir (Taşyurdu and Gültekin, 2013).

İspat: Tanım 3.29 dan $F_0=0$, $F_1=1$ olmak üzere $A=\alpha$, $B=\beta$ için

$$F_{n+2}=BF_{n+1}+AF_n$$

bağıntısı kullanılırsa C halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= \beta1+\alpha0\\
&= \beta,\\
F_3 &= \beta\beta+\alpha1\\
&= \beta^2+\alpha\\
&= \beta+\alpha,\\
F_4 &= \beta(\beta+\alpha)+\alpha\beta\\
&= \beta\alpha+\beta^2+\alpha\beta\\
&= \alpha+\beta+\alpha\\
&= \beta+2\alpha,\\
F_5 &= \beta(\beta+2\alpha)+\alpha(\beta+\alpha)\\
&= \beta^2+2\beta\alpha+\alpha\beta+\alpha^2\\
&= \beta+2\alpha+\alpha+0\\
&= \beta+3\alpha,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_6 &= \beta(\beta + 3\alpha) + \alpha(\beta + 2\alpha) \\
&= \beta(\beta + \alpha + \alpha + \alpha) + \alpha(\beta + \alpha + \alpha) \\
&= \beta^2 + \beta\alpha + \beta\alpha + \beta\alpha + \alpha\beta + \alpha^2 + \alpha^2 \\
&= \beta + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + 0 + 0 \\
&= \beta + 4\alpha, \\
&\ \vdots \\
F_{n-2} &= \beta + (n-4)\alpha\ , \\
F_{n-1} &= \beta + (n-3)\alpha\ , \\
F_n &= \beta(\beta + (n-3)\alpha) + \alpha(\beta + (n-4)\alpha) \\
&= \beta^2 + \beta\big((n-3)\alpha\big) + \alpha\beta + \alpha((n-4)\alpha) \\
&= \beta + \beta\Bigg(\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-3}\Bigg) + \alpha + \alpha\Bigg(\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-4}\Bigg) \\
&= \beta + \beta a + \beta a + \cdots + \beta a + a + a^2 + a^2 + \cdots + a^2, \\
&= \beta + \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-2} + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= b + (n-2)\alpha\ , \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,\beta,\beta+\alpha,\beta+2\alpha,\beta+3\alpha,\ldots,\beta+(n-4)\alpha,\beta+(n-3)\alpha,\beta+(n-2)\alpha,\ldots$$

dizisi elde edilimiş. Bu dizinin her bir $(n+2)$. elemanı $n \in \mathbb{N}$ için $\beta + na$ şeklindedir. Bu elemanın α teriminin katsayıları ardışık doğal sayılar ve β teriminin katsayısı 1 dir. Dizinin periyodu α teriminin katsayısı olan temsildeki p asal sayısına göre belirlenir. Şimdi p asal sayısını ele alarak dizinin periyodunu belirleyelim. Halkanın temsilindeki bağıntılar kullanılırsa dizinin her bir elemanı $p \geq 2$ için

$$\beta + na = \begin{cases} \beta & , \quad n = p \\ \beta + t\alpha & , \quad n = t(mod\, p) \end{cases}$$

olur. Oluşan bu dizide $p \geq 2$ için kalan sınıfında p tane eleman olduğundan dizinin periyodu p dir. Dolayısıyla C halkasının Fibonacci dizisinin periyodu p dir. Yani $P(C:\alpha,\beta) = p$ dir.

Benzer olarak Tanım 3.29 dan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A = \beta$, $B = \alpha$ için

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

bağıntısı kullanılırsa C halkasının temsilinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= \alpha 1 + \beta 0 \\
&= \alpha, \\
F_3 &= \alpha\alpha + \beta 1 \\
&= \alpha^2 + \beta \\
&= \beta, \\
F_4 &= \alpha\beta + \beta\alpha \\
&= \alpha + \alpha \\
&= 2\alpha\ , \\
F_5 &= \alpha(2\alpha) + \beta\beta \\
&= \alpha(\alpha + \alpha) + \beta^2 \\
&= 2\alpha^2 + \beta^2 \\
&= 0 + \beta, \\
&= \beta, \\
F_6 &= \alpha\beta + \beta(2\alpha) \\
&= \alpha + \beta(\alpha + \alpha) \\
&= \alpha + \beta\alpha + \beta\alpha \\
&= \alpha + \alpha + \alpha \\
&= 3\alpha, \\
&\ \vdots \\
F_{2n} &= n\alpha\ , \\
F_{2n+1} &= \beta\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{2n+2} &= \alpha\beta + \beta(n\alpha) \\
&= \alpha + \beta\left(\underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n}\right) \\
&= \alpha + \beta\alpha + \beta\alpha + \cdots + \beta\alpha \\
&= \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n+1} \\
&= (n+1)\alpha \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,\alpha,\beta,2\alpha,\beta,\dots,n\alpha,\beta,(n+1)\alpha,\dots$$

dizisi elde edilir. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $m \in \mathbb{Z}^+$ için bu dizinin her bir n. elemanı

$$F_n = \begin{cases} m\alpha & , \quad n = 2m \\ \beta & , \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

şeklindedir. Halkanın dizisini

$$0,1,\underbrace{\alpha}_{A_0},\underbrace{\beta}_{B_0},\underbrace{2\alpha}_{A_1},\underbrace{\beta}_{B_1},\underbrace{3\alpha}_{A_2},\underbrace{\beta}_{B_2},\dots,\underbrace{n\alpha}_{A_n},\underbrace{\beta}_{B_n},\underbrace{(n+1)\alpha}_{A_{n+1}},\underbrace{\beta}_{B_{n+1}},\dots$$

olarak alalım. Yani A_n ve B_n gibi iki diziye ayıralım.p asal sayısına göre dizinin periyodunu belirleyelim. A_n dizisinde $p \geq 2$ için kalan sınıfında p tane eleman vardır. B_n dizisinde ise β elemanı p tane olup C halkasının Fibonacci dizisinin periyodu $2p$ dir. Yani $P(C;\beta,\alpha) = 2p$ dir. Sonuç olarak $P(C;\alpha,\beta) = p$ ve $P(C;\beta,\alpha) = 2p$ dir.

3.3.4. p^2 Mertebeden sonlu cismin Fibonacci dizisi ve periyodu

Bu bölümde Fine'ın sınıflandırmış olduğu 11 tane p^2 mertebeden halkalardan

$$F(p^2) = \begin{cases} \langle \alpha, \beta\ ;\ \ p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = j\alpha, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \beta \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p \neq 2\ için\ j\ ,\ \ \mathbb{Z}_p\ de\ kare\ değil \\ \langle \alpha, \beta\ ; 2\alpha = 2\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \alpha + \beta, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \beta \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p = 2 \end{cases}$$

temsiline sahip olan cismin Fibonacci periyodu verilmiştir. Burada ve A, B birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için DeCarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = BF_{n+1} + AF_n$$

bağıntısı kullanılarak periyodun temsilde verilen j sayısına göre değişmiştir.

Teorem 3.39: Herhangi p asal sayısı için α ve β elemanları ile geren p^2 mertebeden cisim

$$GF(p^2) = \begin{cases} \langle \alpha, \beta\ ;\ \ p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = j\alpha, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \beta \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p \neq 2\ için\ j\ ,\ \ \mathbb{Z}_p\ de\ kare\ değil \\ \langle \alpha, \beta\ ; 2\alpha = 2\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \alpha + \beta, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \beta \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p = 2 \end{cases}$$

olsun. Tanım 3.29 dan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = \alpha$, $A_1 = \beta$ için

$$F_{n+2} = A_1F_{n+1} + A_0F_n$$

bağıntısı kullanılırsa $GF(p^2)$ cisminin Fibonacci dizisi;

i. $j = p - 1$ için

$$0,\alpha,\beta,0,\beta,j\alpha,0,j\alpha,j\beta,0,j\beta,\alpha,0,\alpha,\beta,0,\ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 12,

ii. $j = p - 2$ için

$$0,\alpha,b,(j+1)\alpha,0,(j+1)\alpha,(j+1)b,\alpha,0,\alpha,b,(j+1)\alpha,\ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 8,

iii. $j = p - 3$ için

$$0,\alpha,\beta,(j+1)\alpha,(j+2)\beta,\alpha,0,\alpha,\beta,(j+1)\alpha,\ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 6,

iv. $j = p - 4$ ise

$$\underbrace{0,\alpha,\beta,(j+1)\alpha,(j+2)\beta,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta,}_{k=1}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=2},\ldots,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=r}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=r},\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta}_{k=r+1},(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\ldots,}_{A_1}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=s}}_{A_1}\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=s},\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=s+1}}_{A_2}$$

$$\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\ldots,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)b}_{k=t}}_{A_2},0,1,\beta,(j+1)\alpha,\ldots$$

olup periyodiktir ve periyodu $4p$ dir (Taşyurdu ve Gültekin, 2016).

İspat: Tanım 3.29 dan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = \alpha$, $A_1 = \beta$ için , $n \geq 0$

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılır.

i. $mod(p)$ periyodu göre aşağıda gösterildiği gibi $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots$, sonlu alt dizilerini kabul edelim. $\alpha = 1$:

$$\underbrace{0, \alpha, \beta}_{A_0}, \underbrace{0, \beta, j\alpha}_{A_1}, \underbrace{0, j\alpha, j\beta}_{A_2}, \underbrace{0, j\beta, \alpha}_{A_3}, 0, \alpha, \beta, 0, \ldots$$

olup

$$j\alpha = \beta^2, j\alpha\beta = \beta^2\beta \Rightarrow j\beta = \beta^3$$

olduğu kullanılırsa

$$\underbrace{0, \alpha, \beta,}_{A_0} \underbrace{0, \beta, \beta^2,}_{A_1} \underbrace{0, \beta^2, \beta^3,}_{A_2} \underbrace{0, \beta^3, \alpha}_{A_3}, 0, \alpha, \beta$$

elde edilir. Her bir A_i alt dizisi $\alpha = 3$ terim içerir ve sadece bir tane sıfır vardır. $i \geq 1$ için her bir A_i alt dizisi A_0 ın bir çarpanıdır ve p modülüne aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \beta A_0 \\
A_2 &= \beta^2 A_0 \\
A_3 &= \beta^3 A_0 \\
&\vdots \\
A_{n-1} &= \beta^{n-1} A_0 \\
A_n &= \beta^n A_0
\end{aligned}$$

Burada A_{n-1} deki son terim β^n, A_0 ın içindeki son terim β, A_3 son terim $\beta^4 = \alpha = 1$ yani β nin mertebesi 4 tür. A_i dizilerinin sayısı $\beta = 4$ olup Fibonacci dizisi basit periyodiktir ve periyodu $\alpha.\beta = 3.4 = 12$ dir.

ii. $mod(p)$ periyodu göre aşağıda gösterildiği gibi $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots$, sonlu alt dizilerini kabul edelim. $\alpha = 1$:

$$0, \alpha, b, (j+1)\alpha, 0, (j+1)\alpha, (j+1)b, \alpha, 0, \alpha, b, (j+1)\alpha, \ldots$$

olup

$$j\alpha = \beta^2, j\alpha\beta = \beta^2\beta \Rightarrow j\beta = \beta^3, j\beta^2 = 4\alpha = \beta^4, 4\alpha\beta = 4\beta = \beta^5, \ldots (j+1)\beta = \beta^p$$

alınırsa

$$\underbrace{0, \alpha, \beta, \beta^{p-1}}_{A_0}, \underbrace{0, \beta^{p-1}, \beta^p, \beta^{2p-2} = \alpha}_{A_1}, 0, \alpha, \beta, \ldots$$

elde edilir. Her bir A_1 alt dizisi $\alpha = 4$ terim içerir ve sadece bir tane sıfır vardır. Her bir A_i alt dizisi A_0 ın bir çarpanıdır ve p modülüne aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$A_1 \;\; = \beta^{n-1} A_0$$

Burada A_0 daki son terim β^{p-1}, A_1 deki son terim $\beta^{2p-2} = \alpha = 1$ yani β nin sırası $2p-2$ dir. A_i dizilerinin sayısı $\beta = 2$ olup periyod $\alpha.\beta$ olur. Dolayısyla Fibonacci dizisi basit periyodiktir ve periyodu $\alpha.\beta = 3.4 = 12$ olur.

iii. $j = p - 3$ için

$$\underbrace{0, \alpha, \beta, (j+1)\alpha, (j+2)\beta, \alpha,}_{A_0} 0, \alpha, \beta, \ldots$$

A_0 alt dizisi sadece $\alpha = 6$ terim içerir ve sadece bir tane sıfır vardır. Dolayısıyla Fibonacci dizisi basit periyodiktir ve periyodu $\alpha.\beta = 1.6 = 6$ olur.

iv. $mod(p)$ periyodu göre aşağıda gösterildiği gibi $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots$, sonlu alt dizilerini kabul. $\alpha = 1$:

$$0, \alpha, \beta, (j+1)\alpha, (j+2)\beta, \underbrace{(4k+1)\alpha, (2k+1)\beta, \big(j-(4k-1)\big)\alpha, \big(j-(2k-2)\big)\beta,}_{k=1}$$

$$\underbrace{(4k+1)\alpha, (2k+1)\beta, \big(j-(4k-1)\big)\alpha, \big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=2}, \ldots, 0, \alpha, \beta, \ldots$$

ve

$$\underbrace{0,\alpha,\beta,(j+1)\alpha,(j+2)\beta,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta,}_{k=1}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=2},\dots,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=r}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=r},\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta}_{k=r+1},(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\dots,}_{A_1}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=s}}_{A_1}\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=s},\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=s+1}}_{A_2}$$

$$\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\dots,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)b,}_{k=t}}_{A_2}$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)\alpha,\big(j-(2k-2)\big)\beta}_{k=t},\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,}_{k=t+1}}_{A_3}$$

$$\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)\beta,\dots,\underbrace{(4k+1)\alpha,(2k+1)b}_{k=u}}_{A_3}$$

$0,\alpha,\dots$

Her bir A_i alt dizisi p terim içerir ve sadece bir tane sıfır vardır. $1 \le n \le 3$ için $j = 4k-1$, $F_{pn} = 0$, $F_{pn+1} = \big(j-(2k-2)\big)\beta$ alınırsa

$$F_{4p} = 0, F_{4p+1} = \alpha, F_{4p+2} = \beta, \dots$$

elde edilir. Bu yüzden Fibonacci dizisi basit periyodiktir ve periyodu $4p$ dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. m Modülüne göre Pell Polinomları

Bu bölümde $P_0(x) = 0$ ve $P_1(x) = 1$ olmak üzere Pell polinomlarının

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x) \qquad n \geq 0$$

rekürans bağıntısı $x^2 = 2x + 1$ olacak şekilde m modülüne göre indirgenerek elde edilen Pell polinomlarının

$$\{P_n(x)(mod\ m)\} = \{P_0(x)(mod\ m), P_1(x)(mod\ m), \dots P_i(x)(mod\ m), \dots\}$$

dizisi oluşturuldu. Bu dizinin periyodik olduğu gösterildi ve periyodu belirtildi. Ayrıca p_i'ler farklı asal sayıları için $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$, $(t \geq 1)$ olmak üzere $\{P_n(x)(mod\ m)\}$ dizisinin periyodunu kolay bir şekilde hesaplayabilmemize olanak sağlayan toremler elde edildi.

Bu çalışmada $\{P_n(x)(mod\ m)\}$ dizisinin periyodu $h^{P(x)}(m)$ ile gösterildi.

Teorem 4.1: $\{P_n(x)(mod\ m)\}$ dizisi basit periyodiktir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: $S = \{\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 x + \beta_2 |\ 0 \leq\ \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq m - 1\}$ olsun. Buradan $|S| = m^4$ tür. $\{P_n(x)(mod\ m)\}$ dizisinde birbirini takip eden ve oluşabilecek farklı çiftlerin sayısı m^4 tanedir. Bu ise $\{P_n(x)(mod\ m)\}$ dizinin periyodik olduğunu gösterir. Dizi periyodik ise $i > j$ olacak şekilde i ve j doğal sayıları mevcut olup

$$P_{i+1}(x)(mod\ m) = P_{j+1}(x)(mod\ m)$$

$$P_{i+2}(x)(mod\ m) = P_{j+2}(x)(mod\ m)$$

dir. Tanım 3.17 den

$$P_{n-2}(x) = P_n(x) - 2xP_{n-1}(x)$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan

$$P_i(x)(mod\ m) = P_j(x)(mod\ m),$$

olup buradan

$$P_{i-1}(x)(mod\ m) = P_{j-1}(x)(mod\ m),$$
$$P_{i-2}(x)(mod\ m) = P_{j-2}(x)(mod\ m),$$
$$P_{i-j+1}(x)(mod\ m) = P_1(x)(mod\ m),$$
$$P_{i-j}(x)(mod\ m) = P_0(x)(mod\ m).$$

dir. Böylece dizinin periyodik olduğu ispatlanmış olur.

Örneğin, $\{P_n(x)(mod\ 3)\}$ dizisi

$$\{0,\ 1,\ 2x,\ 2x+2,\ 2x+1,\ 0,\ 2x+1,\ x+1,\ 2x,\ 2,\ 0,\ 2,\ x,\ x+1,\ x+2,\ 0,$$
$$x+2, 2x+2, x, 1, 0, 1, \ldots\}$$

şeklinde olup periyodu 20 dir. Yani $h^{P(x)}(3) = 20$ dir.

P_{ij} girdileri Pell polinomları olmak üzere $A = [P_{ij}]$ matrisi verilsin. $A(mod\ m)$ ise A matrisinin her girdisinin m modülüne göre indirgenmesi olmak üzere

$$A(mod\ m) = (P_{ij}(mod\ m))$$

olarak yazılabilir. $\langle A\rangle_m = \{(A)^n(mod\ m) |\ n \geq 0\}$ olsun. $\gcd(\det A, m) = 1$ ise $\langle A\rangle_m$ bir devirli gruptur.

$\langle P\rangle_m$ kümesinin mertebesi $|\langle P\rangle_m|$ olmak üzere Teorem 3.21 den $detP = -1$ olduğundan her pozitif m tamsayısı için bu küme devirli bir gruptur. $x^2 = 2x + 1$ olarak alınırsa her p asal sayısı için $h^{P(x)}(p) = |\langle P\rangle_p|$ olduğu görülür.

Teorem 4.2: p_i'ler farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^{t} {p_i}^{e_i}$, $(t \geq 1)$ ise $h^{P(x)}(m)$=lcm$\left[h^{P(x)}({p_1}^{e_1}), h^{P(x)}({p_2}^{e_2}), \ldots, h^{P(x)}({p_t}^{e_t})\right]$ dir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: $h^{P(x)}({p_i}^{e_i})$, $\{P_n(x)(mod\, {p_i}^{e_i})\}$ dizisinin periyodunun uzunluğu olduğundan $\{P_n(x)(mod\, {p_i}^{e_i})\}$ dizisi $k.h^{P(x)}({p_i}^{e_i})$, $(k \in \mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar eder. Ayrıca $h^{P(x)}(m)$, $\{P_n(x)(mod\, m)\}$ dizisinin periyodu olduğundan her i değeri için $\{P_n(x)(mod\, {p_i}^{e_i})\}$ dizisi $h^{P(x)}(m)$ uzunluğunda tekrar eder. Bu ise $h^{P(x)}(m)$ değerinin $k.h^{P(x)}({p_i}^{e_i})$ lerden oluştuğunu gösterir. Dolayısıyla $h^{P(x)}(m)$, $h^{P(x)}({p_i}^{e_i})l_p^j(u_i^{e_i})$ lerin en küçük ortak katına eşittir. Böylece ispat tamamlanır.

Örneğin, $\{P_n(x)(mod\, 2)\}$ ve $\{P_n(x)(mod\, 6)\}$ dizileri sırasıyla

$$\{0,1,0,1,\dots\}$$

ve

$$\{0, 1, 2x, 2x + 5, 2x + 4, 3, 2x + 4, 4x + 1, 2x, 5, 0, 5, 4x, 4x + 1, 4x + 2, 3, 4x + 2,$$
$$2x + 5, 4x, 1,0,1, \dots\}$$

şeklindedir. Böylece $h^{P(x)}(2) = 2$ ve $h^{P(x)}(6) = 20$ elde edilir. Ayrıca $h^{P(x)}(3) = 20$ olup $h^{P(x)}(6)$ =lcm$\left[h^{P(x)}(2), h^{P(x)}3\right]$ olduğu görülür.

Teorem 4.3: $h^{P(x)}(p) = h^{P(x)}(p^u)$ olacak şekilde p bir asal sayı, u ise en büyük tamsayı olsun. Buradan her $v \geq u$ sayısı için $h^{P(x)}(p^v) = p^{v-u}h^{P(x)}(p)$. Özel olarak $h^{P(x)}(p) \neq h^{P(x)}(p^2)$ ise her $v \geq 2$ için $h^{P(x)}(p^v) = p^{v-1}h^{P(x)}(p)$ olur (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: k pozitif bir tamsayı ve I ise 2×2 tipinde bir birim matris olsun. $(P)^{h^{P(x)}(p^{k+1})} \equiv I(mod\, p^{k+1})$ ise $(P)^{h^{P(x)}(p^{k+1})} \equiv I(mod\, p^k)$ dır. Bu ise $h^{P(x)}(p^k)$ nın $h^{P(x)}(p^{k+1})$ böldüğünü gösterir. Ayrıca $(P)^{h^{P(x)}(p^k)} = I + (q_{i,j}^{(k)}.p^k)$ olmak üzere yazıldığında binom genişleme ile

$$(P)^{h^{P(x)}(p^k).p} = \left(I + \left(q_{i,j}^{(k)}.p^k\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(q_{i,j}^{(k)}.p^k\right)^i \equiv I(mod\, p^{k+1})$$

elde edilir. Bu ise $h^{P(x)}(p^{k+1})$ in $h^{P(x)}(p^k).p$ böldüğünü gösterir.

Ayrıca $h^{P(x)}(p^{k+1}) = h^{P(x)}(p^k)$ yada $h^{P(x)}(p^{k+1}) = h^{P(x)}(p^k).p$ olabilmesi için gerek ve yeter şart p ile bölünmeyen bir $q_{i,j}^{(k)}$ nın mevcut olmasıdır. $h^{P(x)}(p^u) \neq h^{P(x)}(p^{u+1})$ olduğunda p ile bölünmeyen bir $q_{i,j}^{(u+1)}$ vardır. Böylece $h^{P(x)}(p^{u+1}) \neq h^{P(x)}(p^{u+2})$ elde edilir. u üzerinden tümevarım metodunu kullanılarak ispat tamamlanır.

Örneğin, $\{P_n(x)(mod\ 4)\} = \{0, 1, 2x, 1, 0, 1, \ldots\}$ olduğundan $h^{P(x)}(4) = 4$ tür. Ayrıca $h^{P(x)}(2) = 2$ olup $h^{P(x)}(4) = 2.h^{P(x)}(2)$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

4.2. Kompleks Sayılarda Pell Polinomları

Tanım 4.4: Kompleks sayılar kümesinde Pell polinomlarının dizisi

$$\tilde{P}_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ 2(i+1)\tilde{P}_{n-1} + \tilde{P}_{n-2} & n \geq 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

$N = \begin{pmatrix} 2(i+1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $n \geq 1$ için Teorem 3.21 den

$$N^n = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{n+1} & \tilde{P}_n \\ \tilde{\tilde{P}}_n & \tilde{P}_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.8) de $x = 2(i+1)$ olarak seçilirse (4.1) deki dizinin elde edildiği açıktır. Kompleks sayılar kümesindeki Pell polinomlarının dizisi m modülüne göre indirgenirse tekrar eden

$$\{\tilde{P}_n(mod\ m)\} = \{\tilde{P}_0(mod\ m), \tilde{P}_1(mod\ m), \ldots, \widetilde{P_i}(mod\ m), \ldots\}$$

dizisi oluşur. $h^{\mathbb{C}}(m)$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde Pell polinomlarının dizisini m modülüne göre indirgeyerek elde edilen $\{\tilde{P}_n(mod\ m)\}$ dizisinin periyodunu ve $|\langle N \rangle_m|$ ise m modülüne göre matrisi ile indirgenmiş $\langle N \rangle_m$ devirli grubun mertebesini gösterir.

Buradan, $h^{\mathbb{C}}(m)$ periyodu ve $\langle N\rangle_m$ devirli grubu için sonuçlar bir önceki bölümde elde edilmiş sonuçlara benzerdir.

$h^{\mathbb{C}}(m)$ ile $h^{P(x)}(m)$ değerleri her zaman eşit olmayabilir. Örneğin, $\{\tilde{P}_n(mod\ 2)\}$ ve $\{P_n(x)(mod\ 2)\}$ dizileri sırası ile

$$0,1,0,1,0,1,0,\dots$$

$$0,1,0,1,0,1,0,\dots$$

şeklindedir ve buradan $h^{\mathbb{C}}(2)=3$, $h^{P(x)}(2)=3$ eşit iken $\{P_n(x)(mod\ 4\,)\}$ ve $\{\tilde{P}_n(mod\ 4\,)\}$ dizileri sırası ile

$$0,1,2x,1,0,1,\dots$$

$$0,1,2(i+1),1,2(i+1),1,\dots$$

şeklindedir. Buradan $h^{\mathbb{C}}(4)=2$ ve $h^{P(x)}(4)=4$ olup $h^{\mathbb{C}}(4)\neq h^{P(x)}(4)$ olduğu görülür.

4.3. Bazı Sonlu Halkalarda Pell Polinomları

Bu bölümde Fine'ın sınıflandırmış olduğu p^2 mertebeden 11 tane halkadan

$$B=\langle\alpha,\beta\,;p\alpha=p\beta=0,\alpha^2=\alpha,\beta^2=\beta,\alpha\beta=\beta\alpha=0\rangle=\mathbb{Z}_P+\mathbb{Z}_P$$

$$C=\langle\alpha,\beta\mid p\alpha=p\beta=0,\alpha^2=0,\beta^2=\beta,\alpha\beta=\alpha,\beta\alpha=\alpha\,\rangle$$

$$H=\langle\alpha,\beta\mid p\alpha=p\beta=0,\alpha^2=\alpha,\beta^2=\beta,\alpha\beta=\beta,\beta\alpha=\alpha\,\rangle$$

$$I=\langle\alpha,\beta\mid p\alpha=p\beta=0,\alpha^2=0,\beta^2=\beta,\alpha\beta=\beta\alpha=0\,\rangle\cong\mathbb{Z}_P+C_{\ p}(0)$$

$$J=\langle\alpha,\beta\mid p\alpha=p\beta=0,\alpha^2=\beta,\alpha\beta=0\,\rangle$$

temsillerine sahip halkaların Pell polinom tipli orbitlerinin periyotları hesaplandı.

Periyotların hesabında kullanılan tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.5: R, 2-gerenli bir halka ve (α,β) ise R halkasının bir geren çifti olsun. (α,β) nin $P^R_{(a,b)}(x)=\{x_i\}$ Pell polinom tipli orbiti $x_0=\alpha$, $x_1=\beta$ olmak üzere

$$x_{n+1}=2\beta x_n+x_{n-1},\quad n\geq 1$$

olarak tanımlanır. Benzer olarak (β,α) nın $P^R_{(\beta,\alpha)}(x)=\{x_i\}$ Pell polinom tipli orbiti $x_0=\beta$, $x_1=\alpha$ olmak üzere

$$x_{n+1}=2\alpha x_n+x_{n-1},\quad n\geq 1$$

olarak tanımlanır (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

Önerme 4.6: 2-gerenli sonlu bir halkanın bir Pell polinom tipli orbiti periyodiktir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: R, 2-gerenli sonlu bir halka ve n, R nin mertebesi olsun. R nin elemanlarından n^2 tane farklı ikili oluştuğu için ikililerden en az biri Pell polinom tipli orbitte iki defa görülür. Buradan alt diziler ikilileri takip eder. Dizi tekrarlı olduğu için periyodiktir.

Bu çalışmada $PP^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ ile $P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ dizisinin periyodu gösterildi.

Tanım 4.7: R halkası 2-gerenli sonlu bir halka olsun. Eğer R halkasının her elemanı dizide görülecek şekilde R halkasının Pell polinom tipli orbiti varsa o halde bu halka dizilendirilebilir Pell polinom tipli halka olarak adlandırılır (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

Şimdi Teorem 3.27 deki $B,\ C,\ H,\ I$ ve J halkalarının Pell polinom tipli orbitlerinin periyotları verilecektir. Periyotlar hesaplanırken R, 2-gerenli bir halka ve (α,β), R halkasının bir geren çifti olmak üzere Tanım 4.5 de verilen $P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ için $x_0=\alpha,\ x_1=\beta$ olmak üzere

$$x_{n+1}=2\beta x_n+x_{n-1},\quad n\geq 1$$

bağıntı ve $P^R_{(\beta,\alpha)}(x)$ için $x_0=\beta$, $x_1=\alpha$ olmak üzere

$$x_{n+1}=2\alpha x_n+x_{n-1},\quad n\geq 1$$

bağıntısı kullanılarak $B,\ C,\ H,\ I$ ve J halkalarının Pell polinom tipli orbitlerinin dizileri oluşturuldu.

B halkası için $P^B_{(\alpha,\beta)}(x)$ ve $P^B_{(\beta,\alpha)}(x)$ orbitlerinin periyodu $k(p)$, C halkası için $P^C_{(\alpha,\beta)}(x)$, $P^C_{(\beta,\alpha)}(x)$ orbitlerinin periyodu sırasıyla $k(p)$ ve $2p$, H halkası için $P^H_{(\alpha,\beta)}(x)$ ve $P^H_{(\beta,\alpha)}(x)$ orbitlerinin periyodu $k(p)$, I halkası için $P^I_{(\alpha,\beta)}(x)$ ve $P^I_{(\beta,\alpha)}(x)$ orbitlerinin periyodu 2, J halkası için $P^J_{(\beta,\alpha)}(x)$ orbitinin periyodu $2p$ olarak hesaplandı.

Önerme 4.8: $p \neq 2$ asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$B = \langle \alpha, \beta\,; p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta\alpha = 0 \rangle = \mathbb{Z}_P + \mathbb{Z}_P$$

olsun. $P^B_{(\alpha,\beta)}(x)$ ve $P^B_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitlerinin periyodu $k(p)$ dir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: Tanım 4.5 deki $P^B_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitini düşünelim. $P^B_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi

$x_0 = \beta,$

$x_1 = \alpha,$

$x_2 = 2\alpha + \beta,$

$x_3 = 5\alpha,$

$x_4 = 12\alpha + \beta,$

$x_5 = 29\alpha,$

$x_6 = 70\alpha + \beta,$

$x_7 = 169\alpha,$

$\vdots$

$x_{2n} = P_{2n}\alpha + \beta,$

$x_{2n+1} = P_{2n+1}\alpha,$

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= 2\alpha x_{2n+1} + x_{2n} \\ &= 2\alpha(P_{2n+1}\alpha) + \beta + P_{2n}\beta \\ &= 2P_{2n+1}\alpha^2 + \beta + P_{2n}\alpha \\ &= 2P_{2n+1}\alpha + \beta + P_{2n}\alpha \\ &= (2P_{2n+1} + P_{2n})\alpha + \beta \\ &= P_{2n+2}\alpha + \beta, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{2n+3} &= 2\alpha x_{2n+2} + x_{2n+1} \\
&= 2\alpha(\beta + P_{2n+2}\alpha) + P_{2n+1} \\
&= 2\alpha\beta + P_{2n+2}\alpha^2 + P_{2n+1}\alpha \\
&= P_{2n+2}\alpha + P_{2n+1}\alpha \\
&= (P_{2n+2} + P_{2n+1})\alpha \\
&= P_{2n+3}\alpha \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. P_n bilinen 2-adım Pell dizisinin n. terimini göstermek üzere yukarıdaki dizi kullanılarak

$$\{\beta + P_0\alpha, P_1\alpha, \beta + P_2\alpha, P_3\alpha, \dots, \beta + P_{2n}\alpha, P_{2n+1}\alpha, \beta + P_{2n+2}\alpha, P_{2n+3}\alpha, \dots\}$$

dizisi oluşturulur. Şimdi p sayısına göre bu dizinin periyodunu tanımlayalım. Bu dizinin her bir x_n elemanının α teriminin katsayısı bilinen Pell dizisinin terimidir. Böylece dizinin periyodu P_n bilinen 2-adım Pell dizisinin n. terimi olan α teriminin katsayısı ile tanımlanır. $k(p)$ bilinen Pell dizisinin periyodu olmak üzere $PP^B_{(\beta,\alpha)}(x) = k(p)$ olur. Benzer şekilde $P^B_{(\alpha,\beta)}(x)$ nin ispatı da tamamlanır.

Önerme 4.9: $p \neq 2$ asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$H = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \alpha, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta, \beta\alpha = \alpha \rangle$$

olsun. $P^H_{(\alpha,\beta)}$ ve $P^H_{(\beta,\alpha)}$ Pell polinom tipli orbitlerinin periyodu $k(p)$ dir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: Tanım 4.5 deki $P^H_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitini düşünelim. $P^H_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi

$x_0 = \beta,$

$x_1 = \alpha,$

$x_2 = 2\alpha + \beta,$

$x_3 = 5\alpha + 2\beta,$

$x_4 = 12\alpha + 5\beta,$

$x_5 = 29\alpha + 12\beta,$

$x_6 = 70\alpha + 29\beta,$

$x_7 = 169\alpha + 70\beta,$

$x_8 = 408\alpha + 169\beta,$

$\vdots$

$x_n = P_n\alpha + P_{n-1}\beta,$

$x_{n+1} = P_{n+1}\alpha + P_n\beta,$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2\alpha x_{n+1} + x_n \\ &= 2\alpha(P_{n+1}\alpha + P_n\beta) + P_n\alpha + P_{n-1}\beta \\ &= P_n 2\alpha\beta + P_{n+1}2\alpha^2 + P_{n-1}\beta + P_n\alpha \\ &= P_n 2\beta + P_{n+1}2\alpha + P_{n-1}\beta + P_n\alpha \\ &= (2P_n + P_{n-1})\beta + (2P_{n+1} + P_n)\alpha \\ &= P_{n+1}\beta + P_{n+2}\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+3} &= 2\alpha x_{n+2} + x_{n+1} \\ &= 2\alpha(P_{n+1}\beta + P_{n+2}\alpha) + P_n\beta + P_{n+1}\alpha \\ &= P_{n+1}2\alpha\beta + P_{n+2}2\alpha^2 + P_n\beta + P_{n+1}\alpha \\ &= P_{n+1}2\beta + P_{n+2}2\alpha + P_n\beta + P_{n+1}\alpha \\ &= (2P_{n+1} + P_n)\beta + (2P_{n+2} + P_{n+1})\alpha \\ &= P_{n+2}\beta + P_{n+3}\alpha, \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

şeklinde olur. P_n bilinen 2-adım Pell dizisinin n. terimini göstermek üzere yukarıdaki dizi kullanılarak

$$\{P_0\alpha + P_{-1}\beta, P_1\alpha + P_0\beta,\ P_2\alpha + P_1\beta, \dots, P_n\alpha + P_{n-1}\beta, P_{n+1}\alpha + P_n\beta, \dots\}$$

dizisi oluşturulur. Bu dizinin ardışık iki terimi $P_{n-1} + P_n\alpha$ ve $P_n\beta + P_{n+1}\alpha$ dir. Eşitlik 3.7 den $P_{n-1}\beta + P_n\alpha \equiv \beta$ ve $P_n\beta + P_{n+1}\alpha \equiv \alpha$ olmak üzere

$$P_{n-1} \equiv 1 \text{ ve } P_{n+1} \equiv 1$$

yazılır. Buradan $P^H_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi periyodik olup $PP^H_{(\beta,\alpha)}(x) = k(p)$ dir.

Benzer şekilde $P^H_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbitinin ispatı da tamamlanabilir.

Önerme 4.10: p herhangi asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$C = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = 0, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \alpha, \beta\alpha = \alpha \rangle$$

olsun. $P^C_{(\alpha,\beta)}(x)$ ve $P^C_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitlerinin periyotları sırasıyla $k(p)$ ve $2p$ dir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci 2018).

İspat: Tanım 4.5 deki $P^C_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitini düşünelim. $P^C_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi

$$
\begin{aligned}
&x_0 = \beta,\\
&x_1 = \alpha,\\
&x_2 = \beta,\\
&x_3 = 3\alpha,\\
&x_4 = \beta,\\
&x_5 = 5\alpha,\\
&x_6 = \beta,\\
&x_7 = 7\alpha,\\
&x_8 = \beta,\\
&\quad\vdots\\
&x_{2n} = \beta,\\
&x_{2n+1} = (2n+1)\alpha,\\
&x_{2n+2} = 2\alpha x_{2n+1} + x_{2n} = \alpha[(2n+1)\alpha] + \beta = 2(2n+1)\alpha^2 + \beta = \beta,\\
&x_{2n+3} = 2\alpha x_{2n+2} + x_{2n+1} = 2\alpha\beta + (2n+1)\alpha = 2\alpha + (2n+1)\alpha = (2n+3)\alpha,\\
&\qquad\quad\vdots
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. P_n bilinen 2-adım Pell dizisinin n. terimini göstermek üzere yukarıdaki dizi kullanılarak

$$\{\beta, \alpha, \beta, 3\alpha, \beta, 5\alpha, \beta, 7\alpha, \beta, \dots, \beta, (2n+1)\alpha, \beta, (2n+2)\alpha \dots\}$$

dizisi oluşturulur.

Bu dizinin her bir x_n elemanı

$$x_n = \begin{cases} \beta & n = 2m \\ (2m+1)\alpha & n = 2m+1 \end{cases}$$

şeklindedir. Dizisinin periyodunu p asal sayısının belirlediği açıktır. $p \geq 2$ modülüne göre kalan elemanlar p tanedir ve β ise p kez tekrarlanır. Dolayısıyla $P^{C}_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi periyodik olup periyodu $PP^{C}_{(\beta,\alpha)}(x) = 2p$ dir.

$P^{C}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbit tarafından oluşturulan dizi ise $P^{H}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbit tarafından oluşturulan diziye benzediği açıkça görülür. Dolasıyla $P^{C}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbit periyodiktir ve $PP^{C}_{(\alpha,\beta)}(x) = k(p)$ dir.

Önerme 4.11: $p \neq 2$ asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$I = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = 0, \beta^2 = \beta, \alpha\beta = \beta\alpha = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_P + C_{\ p}(0)$$

olsun. $P^{I}_{(\alpha,\beta)}(x)$ ve $P^{I}_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitlerinin periyotları 2 dir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci, 2018).

İspat: Tanım 4.5 deki $P^{I}_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitini düşünelim. $P^{I}_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi

$x_0 = \beta,$

$x_1 = \alpha,$

$x_2 = \beta,$

$x_3 = \alpha,$

$x_4 = \beta,$

$x_5 = \alpha,$

$\vdots$

$x_{2n} = \beta,$

$x_{2n+1} = \alpha,$

$x_{2n+2} = 2\alpha x_{2n+1} + x_{2n} = 2\alpha(\alpha) + \beta = \alpha^2 + \beta = \beta,$

$x_{2n+3} = 2\alpha x_{2n+2} + x_{2n+1} = 2\alpha(\beta) + \alpha = \alpha,$

$\vdots$

şeklinde olur.

P_n bilinen 2-adım Pell dizisinin n. terimini göstermek üzere yukarıdaki dizi kullanılarak

$$\{\beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \dots, \beta, \alpha, \dots\}$$

dizisi oluşturulur. Dolayısıyla $P^{I}_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi periyodik olup $PP^{I}_{(\beta,\alpha)}(x) = 2$ dir.

$P^{I}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbit tarafından oluşturulan dizi ise $P^{B}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbit tarafından oluşturulan diziye benzediği açıkça görülür. Dolayısıyla $P^{I}_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom tipli orbit periyodiktir ve $PP^{I}_{(a,b)}(x) = 2$ dir.

Önerme 4.12: p herhangi asal sayısı için α ve β elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$J = \langle \alpha, \beta \mid p\alpha = p\beta = 0, \alpha^2 = \beta, \alpha\beta = 0 \rangle$$

olsun. $P^{J}_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbit periyodiktir ve periyodu $2p$ dir (Taşyurdu, Çifçi ve Deveci 2018).

İspat: Tanım 4.5 deki $P^{J}_{(\beta,\alpha)}(x)$ Pell polinom tipli orbitini düşünelim. $P^{J}_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi

$$\begin{aligned}
&x_0 = \beta,\\
&x_1 = \alpha,\\
&x_2 = 3\beta,\\
&x_3 = \alpha,\\
&x_4 = 5\beta,\\
&x_5 = \alpha,\\
&x_6 = 7\beta,\\
&\quad\vdots\\
&x_{2n} = (2n+1)\beta,\\
&x_{2n+1} = \alpha,\\
&x_{2n+2} = 2\alpha x_{2n+1} + x_{2n} = 2\alpha(\alpha) + (2n+1)\beta = 2\beta + (2n+1)\beta = (2n+3)\beta,\\
&x_{2n+3} = 2\alpha x_{2n+2} + x_{2n+1} = 2\alpha(2n+2)\beta + \alpha = 2\alpha\beta(2n+2) + \alpha = \alpha,\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

P_n bilinen 2-adım Pell dizisinin n. terimini göstermek üzere yukarıdaki dizi kullanılarak

$$\{\beta, \alpha, 3\beta, \alpha, 5\beta, \alpha, 7\beta, \dots, (2n+1)\beta, \alpha \dots\}$$

dizisi oluşturulur. Bu dizinin her bir x_n elemanı

$$x_n = \begin{cases} (2n+1)m & n = 2m \\ \alpha & n = 2m+1 \end{cases}$$

şeklindedir. Dizisinin periyodunu p asal sayısının belirlediği açıktır. $p \geq 2$ modülüne göre kalan elemanlar p tanedir ve β ise p kez tekrarlanır. Buradan $P^{J}_{(\beta,\alpha)}(x)$ dizisi periyodik olup periyodu $PP^{J}_{(\beta,\alpha)}(x) = 2p$ dir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, halkalarda Pell polinomları ve özellikleri incelendi. Bazı sonlu halkaların Pell polinomları oluşturuldu ve periyotları elde edildi. Ayrıca Pell polinomları $\mathbb{C}$ sayılar kümesine genişletildi. (α, β) bir R halkasının geren bir çifti ve R de 2 gerenli bir halka olmak üzere $P^R_{(\alpha,\beta)}(x)$ Pell polinom orbit tanımlandı. Bazı p^2 mertebeden 2 gerenli halkaların Pell polinom tipli orbitleri oluşturuldu ve periyotları hesaplandı.

Öneri olarak, bu çalışmada elde edilen tüm sonuçlar Lucas polinomları, Pell-Lucas polinomları ve Jacobsthal polinomları gibi ikinci dereceden polinom dizileri için de incelenebilir.

KAYNAKLAR

Bayraktar, M. (2006) “Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi”, ***Gazi Kitabevi***, Ankara, 1-275.

Buschman, R.G. (1963) “Fibonacci Numbers, Chebyshev Polynomials, Generalization sand Difference Equations”, ***Fibonacci Quarterly***, 1(4), 1-7.

Bicknell, M.,(1975) “A Primer on The Pell Sequences and Related Sequences”, ***Fibonacci Quarterly,*** 13, 345-350.

Byrd, P.F. (1963) “Expansion of Analytic Functions in Polynomials Associated with Fibonacci Numbers ” ***The Fibonacci Quarterly 1***. no. 1, 16-24.

Cahill, N.D., D’Errico, J.R., Narayan, D.A. and Narayan, J.Y., (2002) “Fibonacci determinats”, ***College Mathematics Journal***, 3(3), 221-225.

Cerin, Z. and Gianella, G., (2007) “On sums of Pell numbers”, ***Atti Della Accademia Delle Scienze Di Torino,*** 141, 23-31.

Çallıalp, F., (2001) “Örneklerle Soyut Cebir”, ***Birsen Yayınevi***, 300 s, İstanbul.

Decarli, D.J. (1970) “A Generalized Fibonacci Sequence Over An Arbitrary Ring”,

Fibonacci Quarterly, 8(2), 182-184,198.

Dummit, D.S and Foote, R.S. (2004) “Abstract Algebra”, ***Wiley.***, 932 p, USA.

Dunlap, R. A. (2011) “ The Golden Ratio and Fibonacci Numbers”, ***Tübitak Popüler Bilim Kitapları***, Ankara.

Ercolano, J. (1979) “Matrix generator of Pell sequence”, ***Fibonacci Quarterly***, 17(1), 71-77.

Everest, G., Poorten, A., Shparliaski, I. and Ward, T. (2003), “Recurrence Sequences”,

American Mathematical Society, 323 p.

Fine, B. (1993) “Classification of Finite Rings of Order p^2”, ***Mathematics Magazine***, 66, 248-252.

Falcon, S. and Plaza, A. (2007) “On The Fibonacci k-numbers”, ***Chaos Solitions and* Fractals**, 32,1615-1624.

Horadam, A.F. (1961) “A Generalized Fibonacci Sequence”, ***American Mathematics Monthly,*** 68(5), 445-459.

Horadam, A.F.(1965) “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, ***The Fibonacci Quarterly***, 3, 161-176.

Horadam, A.F.(1971) “Pell İdenties”, ***The Fibonacci Quarterly***, 9(3), 245-252.

Horadam, A.F. and Mahon, J.M. (1985) “Pell and Pell-Lucas Polynomials”, ***The Fibonacci Quarterly***, 23.1, 7–20.

Kalman, D. and Mena, R. (2003) “ The Fibonacci Numbers-Exposed”, ***Mathematics Magazine***, 76(3), 167-181.

Kılıç, E., Altınkaynak, B. and Taşçı, D. (2006) “ On the Computing of the Generalized Order- k Pell Numbers”***Applied Mathematics and Computation***, 181,511-515.

Knox, S.W. (1992) “Fibonacci Sequences in Finite Groups,” ***Fibonacci Quarterly,*** 30(2), 116-120.

Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Myron B., Allen III, David, A., Cox., Peter, L. ”, ***A Wiley-Interscience publication*** Canada, 1-489.

Lü, K. and Wang, J. (2007) “k-step Fibonacci sequence modulo m”, ***Utilitas Mathematica***, 71, 169-178.

Lee, G. And Cho S. H. (2008) “The Generalized Pascal Matrix via the Genaralized Fibonacci Matrix and the Pell Matrix”***Journol of the Korean Mathematical Society***, 45(2), 479-491.

Melham , R. (1999) “Sums Involving Fibonacci and Pell Numbers”***Portugaliae Mathematica***, 56(3),309-317.

Renault, M. (1996) “The Fibonacci Sequence Under Various Moduli”, ***Master’s Thesis Wake Forest University***.

Silvester, J. (1979) “Fibonacci properties by matrix methods” ***The Mathematical Gazette,*** 63 (425), 188-191.

Taşçı, D. (2007) “Soyut Cebir”, ***Alp Yayınevi***, 671 s, Ankara.

Taşçı, D. (2011) “Lineer Cebir”, ***Ofset Hazırlık & Baskı, Öziş Matbaacılık***, 585 s, Ankara.

Taşyurdu Y. and Dilmen Z. (2017) “On Period of Generalized Fibonacci Sequence Over Finite Ring and Tridiagonal Matrix“, ***Celal Bayar University Journal of Science***, 13(1), 165-169.

Taşyurdu, Y. and Gültekin, İ. (2013) “On period of Fibonacci sequences in finite rings with identity of order p^2 ”, ***Journal of Mathematics and System Science***, 2013, 349-352.

Taşyurdu, Y. and Gültekin, İ. (2016) “The Period of Fibonacci Sequences Over The Finite Field of Order p^2”, ***New Trends in Mathematical Sciences***, 4, 248-255.

Taşyurdu, Y. , Çifçi, D. and Deveci, Ö (2018) “Applications of Pell Polynomials in Rings”, ***Journal of Mathematics Research***, Vol. 10, No. 3.

Vajda, S. (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood, Chichester***.

Vorobyov, N.N., (1963) “The Fibonacci Numbers”, ***translated from the Russian by Normal D. Whaland, Jr., and Olga A. Tittlebaum, D. C. Heathand Co., Boston***.

Vorobyov, N. (1976) “Elementary Numbers Theory” ***Allyn and Bacon inc, Boston***, 285-299.

Wall, D.D. (1960) “Fibonacci series modulo m”, ***American Mathematics Monthly,*** 67(6), 525-532.

Wyler, O. (1965) “On Second-order Recurrences”, ***American Mathematics Monthly,*** 72(5), 500-506.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Taşyurdu, Y., Çifçi, D. and Deveci, Ö. (2016) "Applications of Pell Polynomials in Rings", ***Antalya Cebir Günleri XVII***, İzmir, TÜRKİYE, 18-22 Mayıs, 2016

Taşyurdu, Y. and Çifçi, D. (2017) "The Jacobsthal Sequence in The Ring Structure", ***International Conference On Mathematics and Engineering***, İstanbul, TÜRKİYE, 10-12 May, 2017

Taşyurdu, Y., Çifçi, D. and Deveci, Ö. (2016) "Applications of Pell Polynomials in Rings", ***Journal of Mathematics Research***; Vol. 10, No. 3, 2018, 35-41

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlkokulun bir kısmını Mersin'de orta ve lise öğrenimini Diyarbakır'da tamamladı. 2010 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında mezun oldu. 2015 yılında Bitlis Eren üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve bahar döneminde Erzincan üniversitesine yatay geçiş yaparak Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.