T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

LEAVITT YOL CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMA HALKALARININ YEREL BİRİMLİLİK KOŞULLARI

ELİF BAŞAK TÜRKOĞLU

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi TUFAN ÖZDİN

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2021**

ÖZET

Yüksek Lisans

LEAVİTT YOL CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMA HALKALARININ YEREL BİRİMLİLİK KOŞULLARI

ELİF BAŞAK TÜRKOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN

E yönlü bir graf, K , herhangi bir cisim $L \coloneqq L_K(E)$ katsayıları K cisminden alınan E grafının Leavitt yol cebirleri, $H \coloneqq End(L_L)$ ise Leavitt yol cebirlerinin sağ modülleri üzerinden oluşturulan birimli endomorfizma halkası olsun. Bu çalışmada sol düzgün yerel birimsel halkanın tanımı verilmiştir. Ayrıca, H sol ve sağ düzgün yerel birimsel halka ise L de düzgün yerel birimsel halka, L morfik ve görüntü-projektif ise H da sol morfik, H sonlu- dik toplanan halka ise L de sonlu dik toplanan halka oldukları ve son olarak da H değişim halkası ise L sonlu- dik toplanan halka ve L sonlu-dik toplanan halka ise L nin değişim halkası olması gerektiği kanıtlanmıştır.

2021, 37 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Birimsel Düzgün Halka, Düzgün halka, Endomorfizma halkası, Leavitt yol cebirleri.

ABSTRACT

Master Thesis

LOCALLY UNIT CONDITIONS OF ENDOMORPHISIM RINGS OF LEAVITT PATH ALGEBRAS

Elif Başak TÜRKOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Tufan ÖZDİN

Let E be a directed graph, K any field, $L \coloneqq L_K(E)$ coefficients are Leavitt path algebras taken from field, K of the graph E and $H \coloneqq End(L_L)$ be the endomorphism ring with units formed over the right modules of the Leavitt path algebras. In this study, the definition of the left locally unit regular ring is given. In addition, if H is a locally unit regular ring, L is a left and right regular local unit ring, if L is morphic and image-projective, H is also a left morphic, if H is a directly finite ring, L is a directly finite ring. Finally, it has been proved that if the H exchange ring is L is a directly finite ring and L is a directly finite ring, L must be an exchange ring.

2021, 37 Pages

Keywords: Endomorhpsim Ring, Leavitt Path Algebras, Regular Ring, Unit Regular Ring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde ilgi ve desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN ’e ve hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Elif Başak TÜRKOĞLU
Ocak, 2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$ann_r(M)$	M nin sağ sıfırlayıcısı (annihilator)
$CP(u)$	u köşesini baz alan kapalı yolların kümesi
$CSP(u)$	u köşesini baz alan bütün kapalı basit yolların kümesi
E	(Yönlü) Graf
E^0	Grafın köşe kümesi
E^1	Grafın kenar kümesi
$L_K(E)$	Katsayıları cisim üzerindeki Leavitt yol cebirleri
$End(L_L)$	Leavitt yol cebirlerinin sağ modülleri üzerinden tanımlı endomorfizma halkası
H	Birimli $End(L_L)$ halkası
I	İdeal
IBN	Değişmez Baz Sayısı
Imf	f fonksiyonunun görüntü kümesi
K	Cisim
$Kerf$	f fonksiyonun çekirdek kümesi
$K[x; x^{-1}]$	Laurent polinom halkası
M	Modül
N	Alt modül
$U(R)$	Birimsel elemanlar kümesi
$\oplus$	Direkt toplam

1. GİRİŞ

R bir halka ve m, n ise tam sayılar olmak üzere R halkasından oluşturulan serbest sol R-modül olarak eğer $R^m \cong R^n$ olduğunda $m = n$ oluyorsa R halkasına Değişmez Baz Sayısı (IBN) özelliğine sahip halka denir. Değişmeli halkalar, bölüm halkaları, zincir koşuluna sahip olan halkalar değişmez baz sayısı özelliğini sağlamasına rağmen keyfi K cismi üzerindeki V vektör uzayı üzerinden oluşturulan $R := End_K(V)$ halkası için $R \cong R \oplus R$ olup $R = End_K(V)$ halkasının değişmez baz sayısı özelliğine sahip olmadığı kanıtlanmıştır. Bunun üzerine 1962 yılında W. G. Leavitt tarafından değişmez baz sayısı özelliğine sahip olmayan halkalar ve modüller incelenmiş ve 'Her $m < n \in \mathbb{N}$ ve bir K cismi için $\bigoplus_{i=1}^{m} R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R$ olacak biçimde bir $L_K(m,n)$ K- cebri vardır' teoremi de ispatlanmıştır. Ayrıca Leavitt tarafından bir K cismi ve $\forall i, j \in \mathbb{N}$ için $x_i y_j = \delta_{ij} 1_R$ ve $\sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i = 1_R$ olmak üzere $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y}_1 \cdots, \mathrm{y}_\mathrm{n}\}$ elemanları tarafından üretilen $L_K(1,n)$ birimli Leavitt $K-$ cebiri de tanımlanmıştır.

Ehrlich' in 1968 yılında yazmış olduğu çalışmasında birimli von Neumann düzgün R halkasının bağımlı halka olduğunu elde etmiştir.

Henriksen, 1973 yılında yazmış olduğu çalışmasında bağımlı halkalarında düzenli halka olabileceğini göstermiştir.

Ehrlich'in 1976 yılında yazdığı çalışmasında ise herhangi bir birimli R halkasının von Neumann düzgün halka olması için gerek ve yeter koşulunun R halkasının sol morfik ve düzenli halka olması gerektiğini ispatlamıştır.

Goodearl' ün 1979 yılında "von Neumann Regular Ring" adlı çalışmasında von Neumann düzgün halkalarının genel özellikleri incelenmiştir.

G. Abrams ve G. Aranda Pino tarafından 2005 yılında sıra sonlu graflar için katsayıları herhangi bir K cismi üzerindeki Leavitt yol cebri tanımı verilmiştir.

Ara, Moreno ve Pardo tarafından 2007 yılında yazılan " Non Stable K-Theory for Graphs" adlı makalesinde ise $L_K(E)$ üzerinden sonlu üretilmiş projektif modüllerinin izomorfizma sınıflarının monoid $V(L_K(E))$ nin ideallerinin latisleri ile $L_K(E)$ nin dereceli ideallerinin latisleri arasında izomorfizmanın var olduğu gösterilmiştir.

Abrams ve Pino' nun 2008 yılında ise yönlü bir E grafı üzerinde katsayıları herhangi bir K cisminden alınan Leavitt yol cebirleri $L_K(E)$ tanımlanmıştır.

G. Aranda Pino ve K. M. Rangaswamy 2010 yılında herhangi bir Leavitt yol cebirlerinin düzenlilik koşullarını inceleyip bu konu hakkında temel tanım ve teoremlere yer vermişlerdir.

Gene Abrams ve Aranda Pino'nun 2010 yılında yazdıkları "Chain Conditions of Leavitt Path Algebras " adlı çalışmasında sıra sonlu graf üzerindeki Leavitt yol cebirlerinin Artinian ve Noetherian olma koşulları incelenmiştir.

Abrams ve Rangaswamy tarafından 2010 yılında ele alınan "Regularity Conditions for Arbitrary Leavitt Path Algebras" adlı çalışmasında devirli olmayan herhangi bir E grafı için $L_K(E)$ nin K cismi üzerindeki sonlu matris halkalarının sonlu dik toplamına izomorf olduğu gösterilmiştir.

M. Tomforde, 2011 yılında katsayıları birimli ve değişmeli keyfi R halkasından alınan sıra-sonlu bir E grafı üzerindeki $L_R(E)$ Leavitt yol cebirlerini incelemiş ve $L_R(E)$ nin basit olabilmesi koşullarını vermiştir.

H. Larki tarafından 2012 yılında $L_R(E)$ Leavitt yol cebirlerini sayılabilir graflara genişletilmiş; ayrıca $L_R(E)$ nin asal ve ilkel halka olması ile asal ve ilkel ideal yapıları karakterize edilmiştir.

G. Aranda Pino, K. M. Rangaswamy ve M. Siles Molina ise 2015 yılında Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkalarını incelemişler; bu halkalarla ilgili genel tanım ve teoremlere yer vermişlerdir.

Bu tezde katsayıları keyfi K cismi üzerinde olan $L := L_K(E)$ olarak gösterdiğimiz Leavitt yol cebri ve Leavitt yol cebirlerinin sağ $L_K(E)$ modülleri üzerinden oluşturulan H olarak adlandırılan endomorfizma halkası için, H düzgün yerel birimsel halka ise L nin de düzenli yerel birimsel halka, L morfik ve görüntüleri projektif ise H nin sol morfik, H halka ise L ve son olarak H değişim halka ise L sonlu- dik toplanan halka ve L sonlu- dik toplanan halka L nin değişim halkası, oldukları gösterilmesi amaçlanmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonraki Kuramsal Temeller bölümünde tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere, Leavitt cebirlerinin ve katsayıları cisim üzerindeki Leavitt yol cebirlerinin temel tanımları verilmiş, özellikleri incelenmiştir. Yöntem bölümünde Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkaları ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Araştırma Bulguları bölümünde ise sol düzgün yerel birimsel halkanın tanımı, H düzgün yerel birimsel halka olması durumunda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Halka ve Modül Teori

Tanım 2.1.1. R boştan farklı bir küme ve " $+$ " ile "$.$" R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(R,+,.)$ cebirsel yapısına halka denir.

i. $(R,+)$ bir komutatif gruptur.

ii. R kümesi, "."işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. $\forall a,b,c \in R$ için;

$$a.(b.c) = (a.b).c \tag{2.1}$$

sağlanır.

iii. R kümesinde "$.$" işleminin " $+$ " işlemi üzerinde soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. $\forall a,b,c \in R$ için;

$$a.(b + c) = (a.b) + (a.c)\ ve\ (a + b).c = (a.c) + (b.c) \tag{2.2}$$

sağlanır.

Bir R halkası üzerinde "$.$" işlemi değişmeli ise $\forall a,b,c \in R$ için $a.b = b.a$ ise R halkasına değişmeli halka denir (Atiyah vd.; 1994).

Eğer her $a \in R$ için, $1_R.a = a.1_R = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka denir. R bir halka $S \subseteq R$ alt kümesi, R halkası üzerindeki ikili işlemlere göre bir halka ise S halkası R halkasının alt halkası olarak adlandırılır. $I \subseteq R$ alt halkası $RI \subseteq I$ koşulu sağlanıyorsa sol ideali, $IR \subseteq I$ şartını sağlıyor ise sağ idealidir. Hem sol hem de sağ ideal olma şartları sağlanıyorsa ideallere iki yanlı ideal denir (Atiyah vd., 1994).

Tanım 2.1.2. Birimli ve değişmeli R halkasının $0 \neq y \in R$ elemanı için $xy = 0$ ise $x \in R$ elemanına R halkasının sıfır bölen elemanı denir ve R halkasının sıfırdan farklı sıfır bölen elemanı yoksa R halkası tamlık bölgesi olarak adlandırılır (Atiyah vd., 1994).

Tanım 2.1.3. Değişmeli R halkasının $x^2 = x$ olacak biçimde $x \in R$ elemanına idempotent eleman denir (Matej, 2014).

Tanım 2.1.4. R bir halka olsun. Eğer her $X = \{x_1 \ldots . x_n\} \subseteq R$ sonlu alt kümesi için, $X \subseteq eRe$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent elemanı varsa, R halkası yerel birimlere sahiptir denir. Yani, her $x_i \in X$ için $x_i e = x_i = e x_i$ olacak şekilde bir $e \in R$ varsa, e elemanına X alt kümesi için birimsel elemanı denir (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.1.5. R halkası ${}_R R = \bigoplus_{e \in E} Re$ olacak şekilde e sıfırdan farklı ortogonal idempotentlerin kümesini içeriyorsa yeterli idempotentlere sahiptir denir (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.1.6. R bir halka ve $\{R_n : n \in \mathbb{Z}\}$, $(R, +)$ toplamsal grubunun bir alt gruplar ailesi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa R halkasına $\mathbb{Z}$-dereceli denir (Abrams vd., 2017).

i) Her $m,\ n \in \mathbb{Z}$ için $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$
ii) Abelyan grup olarak, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ dir

Tanım 2.1.7. R birimli bir halka olmak üzere $r \in R$ için $rs = 1_R = sr$ olacak biçimde $s \in R$ mevcutsa r elemanına R halkasının birimsel elemanı denir ve R halkasının tüm birimsel elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilir (Ehrlich, 1968).

Tanım 2.1.8. R bir halka olsun. $a \in R$ için $a = aba$ olacak biçimde bir $b \in R$ mevcutsa a elemanına düzgün eleman denir. R halkasının her elemanı düzgün ise R halkasına von Neumann düzgün halka denir (Goodearl, 1979).

Tanım 2.1.9. R bir halka olmak üzere her $x \in R$ için $x = xux$ olacak şekilde birimsel $u \in R$ varsa, x elemanına düzgün birimsel eleman denir. R halkasının her elemanı düzgün birimsel eleman ise R halkasına düzgün birimsel halka denir (Ehrlich, 1968).

Tanım 2.1.10. R bir halka ve $a, b \in R$ olmak üzere $ab = 1$ iken $ba = 1$ ise, R ye Dedekind sonlu halka denir (Lam, 2001).

Önerme 2.1.1. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i. $e - x \in R(x - x^2)$ olacak biçimde $e^2 = e \in R$ vardır.

ii. $(1-e)-c(1-x), R$ halkasının Jacobson radikalinin elemanı olacak biçimde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ vardır.

iii. $R = Re + R(1-x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır.

iv. $(1-e) \in R(1-x)$ olacak biçimde $e^2 = e \in Rx$ vardır (Nicholson, 1977).

İspat: (i) ⇒ (ii); Kabul edelim ki; $e-x \in R(x-x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in R$ mevcut olsun. $r \in R$ için $e-x = r(x-x^2)$ olması durumunda $e = x + r(x-x^2) \in Rx$ dir. Böylece $1-e = (1-rx)(1-x)$olup $c = (1-rx) \in R$ için; $(1-e)-c(1-x) = 0$, R halkasının Jacobson radikalinin elemanıdır.

(ii) ⇒ (iii); Kabul edelim ki; $(1-e)-c(1-x) = 0$, R halkasının Jacobson radikalinin elemanı olacak biçimde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ olsun. $(1-e)-c(1-x)$ R halkasının Jacobson radikalinin elemanı $1-\big((1-e)-c(1-x)\big) = e + c(1-x) \in R$ tersinir olup $u \in R$ için $1 = u\big(e+c(1-x)\big) = ue + uc(1-x) \in Re + R(1-x)$ olacağından $R = Re + R(1-x)$ olur.

(iii) ⇒ (iv); Kabul edelim ki; $R = Re + R(1-x)$olacak biçimde $e^2 = e \in Rx$ olsun. $R = Re + R(1-x)$olduğundan $t, s \in R$ için $1 = te + s(1-x) \in R$ olup $f^2 = f \in Rx$ için $f = e + (1-e)te$ olarak alınırsa; $1-f = (1-e)s(1-x) \in R(1-x)$ elde edilir.

(iv) ⇒ (i); $1-e \in R(1-x)$ olacak biçimde $e^2 = e \in Rx$ mevcut olsun. $e^2 = e \in Rx$ için $Rx \leq R$ olduğundan $e^2 = e \in R$ dir. O halde; $e \in Rx$ ve $1-e \in R(1-x)$ için $e-x = e-x+ex+ex = e(1-x)-(1-e)x \in R(x-x^2)$ elde edilir (Nicholson, 1977).

Tanım 2.1.11. R bir halka olsun. Eğer R halkasındaki her halka Önerme 2.1.1. deki denklik şartlarından birini sağlıyor ise R ye sol değişim halkası denir. Ayrıca değişim halkaları sağ ve sol simetrik halkalar olduğundan bu halkalara değişim halkaları denir (Nicholson, 1977).

Teorem 2.1.1. R birimli olması gerekmeyen bir halka olsun. R halkasının değişim halkası olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $e = rx = s + x - sx$ olacak şekilde $r, s \in R$ ve $e^2 = e \in R$ mevcut olmasıdır (Ara, 1997).

Tanım 2.1.12. R *ve* S iki halka ve $f: R \longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için;

i. $f(a+b) = f(a) + f(b)$

ii. $f(ab) = f(a)f(b)$

ise f fonksiyonuna, R den S ye bir halka homomorfizması denir. Eğer $f: R \longrightarrow R$ ise f fonksiyonuna halka endomorfizması denir. R nin tüm endomorfizmalarının kümesi $End(R)$ ile gösterilir ve bu fonksiyonlarının toplama ile birleşme işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya R nin endomorfizma halkası denir. (Lam, 1999).

Tanım 2.1.13. R ve S iki halka ve $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizmi olsun. $Ker(f) := \{r \in R : f(r) = 0_S\}$ kümesine f fonksiyonunun çekirdeği denir (Hungerford, 2000).

Tanım 2.1.14. R ve S iki halka ve $f: R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizmi olsun. $Im(f) := \{f(r) : r \in R\} \subseteq S$ kümesine R halkasının f fonksiyonu altındaki resmi veya f fonksiyonunun görüntüsü denir (Hungerford, 2000).

Tanım 2.1.15. Bir R halkası ve m, n tamsayıları için sol $R-$modül olmak üzere $R^m \cong R^n$ iken $m = n$ oluyorsa R halkasına değişmez baz sayısına sahip halka denir ve IBN olarak gösterilir. (Lam,1999)

Tanım 2.1.16. R bir halka ve $(M, +)$ bir toplamsal grup olsun. $(m, n) \longrightarrow mr$ ile tanımlı $M \times R \rightarrow M$ dönüşümü her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için aşağıdaki şartları sağlarsa, M ye bir sağ R-modül denir ve M_R ile gösterilir.

i. $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$

ii. $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$

iii. $(mr_1)r_2 = m(r_1 r_2)$ (Matej, 2014).

Sol $R-$ modül tanımı da benzer şekilde yapılabilir. R halkası birimli bir halka olmak üzere her $m \in M$ için $m.1_R = m$ şartı sağlanıyorsa M ye birimsel sağ R-modül denir. R halkası toplamsal grup ve R halkası üzerindeki çarpma işlemi modül çarpımı olarak dikkate alındığında, R halkası kendi üzerinde hem sağ hem de sol $R-$ modül olur (Matej, 2014).

Tanım 2.1.17. R bir halka, M bir sağ $R-$ modül ve N, M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. N, M nin toplamsal alt grubu olmak üzere her $r \in R$, her $n \in N$ için $nr \in N$ oluyorsa N ye M modülünün alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir (Matej, 2014).

Tanım 2.1.18. M bir $R-$ modül olsun. $M = \{ra: r \in R\}$ olacak şekilde bir $a \in M$ mevcutsa M R- modülüne devirli $R-$ modül denir (Kasch,1982).

Tanım 2.1.19. M bir sağ $R-$ modül olsun. $m \in M$ için $ann_r(M)$ ile gösterilen $\{r \in R: mr = 0\}$ kümesine M nin sağ sıfırlayıcısı, benzer şekilde $m \in M$ için $ann_r(M)$ ile gösterilen $\{r \in R: rm = 0\}$ kümesine M nin sol sıfırlayıcısı denir (Lam,1999).

Tanım 2.1.20. M_R ve N_R sağ $R-$ modüller için $f: M \longrightarrow N$ dönüşümü

i. Her $m_1, m_2 \in M$ için $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

ii. Her $m \in M$ ve $r \in R$ için $f(mr) = f(m)r$

şartları sağlıyorsa f dönüşümüne R $-$ modül homomorfizması denir (Matej, 2014).

Tanım 2.1.21. A bir halka, R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, A birimsel sağ $R-$ modül ve $\forall a, b \in A, \forall r \in R$ için $(ab)r = a(br) = (ar)b$ ise A halkasına bir R-cebir denir (Matej,2014).

Tanım 2.1.22. R bir halka, M, bir $R-$ modül olsun. $N_{1,}N_2 \cdots, N_r$ M nin R alt modülleri ve $1 \leq i \leq r$ için $N_i \cap (N_1 + \cdots N_{i-1} + N_{i+1} \cdots N_r) = \{0\}$ oluyorsa $N_1 + \cdots + N_r$, $R-$ alt modülüne, N_i , $R-$ alt modüllerinin direkt toplamı denir ve $N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$ ile gösterilir (Lam,1999).

Tanım 2.1.23. R bir halka olsun. $S \subseteq R$ olacak şekilde S halkası verilsin. $R = S \oplus C$, $SC \subseteq C$, $CS \subseteq C$ olacak şekilde toplamsal $C \subseteq R$ alt grubu varsa S halkasına R halkasının köşe halkası denir (Lam, 2006).

Teorem 2.1.2. R bir halka olsun. e idempotent olmak üzere R halkasının köşe halkası , eRe biçimindedir (Lam, 2006).

Tanım 2.1.24. M bir modül olsun. Her $\alpha \epsilon End(M)$ için eğer $Ker(\alpha)$, M nin bir dik toplanan ise M modülüne çekirdek-direkt modül; eğer $\mathrm{Im}(\alpha)$, M nin bir dik toplanan ise M modülüne görüntü-direkt modül denir (Nicholson ve Campos , 2005).

Teorem 2.1.3. Bir morfik modülünün çekirdek-direkt modül olması için gerek ve yeter koşul görüntü-direkt olmasıdır (Nicholson ve Campos , 2005) .

Önerme 2.1.2. M, R halkası üzerinde bir sağ $R-$ modülü olsun. M modülünün her endomorfizmalarının hem görüntüsü hem de çekirdeği M nin dik toplananı ise M nin endomorfizma halkası von Neumann düzgün halkadır (Pino vd., 2015).

İspat: E bir yönlü graf ve p, E grafının içindeki sonlu olmayan bir graf olsun. p bir yol grafı olduğu için her $i \geq 1$ için $s(e_i) = v_i$ ve $r(e_i) = s(e_{i+1})$ olacak şekilde bir $p = e_1 e_2 \dots e_n \dots$ dir. Ayrıca L kendisi üzerinden bir sağ $L-$ modül olduğundan $F = (\bigoplus_{i=1}^{\infty}) v_i L$ dik toplamı şeklinde yazılan $F \leq L$ alt modülünü, $Y \leq L$ alt modülü için $L = F \oplus Y$ dik toplamını ve son olarak da $\{v_i - v_{i+1} e_i^* : i = 1,2, \cdots\}$ kümesi tarafından üretilen $G = \sum_{i=1}^{\infty} (v_i - v_{i+1} e_i^*) L$ olacak şekilde F nin bir alt modülünü alalım. $k \geq 1$, $g_k \in G$ ve $h_k \in H$ için $v_k = g_k + h_k$ olarak yazılırsa $F = G \oplus H$ dır (Pino vd., 2015).

Tanım 2.1.25. R bir halka olsun. Her bir $a; b \in R$ için $sa + tb = 0$ olacak şekilde $s, t \in R$ mevcut ise R halkasına bağımlı halka denir (Henriksen,1973) .

Tanım 2.1.26. R bir halka olsun. Eğer R nin her sonlu S alt kümesi ve e idempotenti için $S \subseteq eRe$ oluyorsa R halkasına yerel birimsellere sahip halka denir (Abrams ve Rangaswamy, 2010).

Tanım 2.1.27. R bir halka olsun. R halkasının her a elemanı için $v \in R$ idempotenti $a \in vRv$ ve u, $u' \in vRv$ elemanları $uu' = v = u'u$ ve $aua = a$ olacak şekilde bir mevcut ise R halkasına birimsel halka denir.

Tanım 2.1.28. R yerel birimlere sahip bir halka olsun. Her $a \in R$, v idempotenti ve u , u'yerel tersleri için $uu' = v = u'u; va = a = av$ ve $aua = a$ oluyorsa R halkasına yerel birimli halka denir (Abrams ve Rangaswamy, 2010).

Tanım 2.1.29. R birimli bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $xy = 1$ olduğunda $yx = 1$ oluyorsa R halkasına sonlu dik toplanan halka denir (Vas, 2015). Bu tanım birimli olmayan fakat yerel birimsel elemanlara sahip R halkası için aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 2.1.30. Yerel birimsellere sahip bir R halkası ve her bir $x, y \in R$ için $xu = x = ux$ ve $yu = y = uy$ olacak biçimde $u \in R$ idempotenti için $xy = u$ olduğunda $yx = u$ oluyorsa R halkasına sonlu-dik toplanan halka denir (Vas, 2015).

Tanım 2.1.31. M sağ $R -$ modül , $S = End_R(M)$ olsun. S nin yalnız tek herhangi bir elemanının M nin içindeki görüntüsü M nin dik toplananı ise M modülüne $d -$Rickart (dual- Rickart) modül denir. (Lee ve Tariq, 2011).

Teorem 2.1.3. R bir halka olsun. R_R modülünün d- Rickart modül olması için gerek ve yeter koşul R halkasının düzgün halka olmasıdır (Lee ve Tariq, 2011).

Tanım 2.1.32. α, M modül endomorfizmasının elemanı olsun. $M/M\alpha \cong Ker(\alpha)$ ve $M\beta = Ker(\alpha)$ ve $Ker(\beta) = M\alpha$ olacak şekilde $\beta \epsilon End(M)$ mevcutsa M nin α , M modül endomorfizmasına morfik denir. Eğer M modülünün her endomorfizması morfik ise M modülüne morfik modül denir. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a: ${}_R R \to {}_R R$ olmak üzere sağ çarpımları morfik endomorfizması ise R halkasına sol morfik denir. Başka bir deyişle, $\frac{R}{Ra} \cong ann_l(a)$ dır. Eğer R halkasının her elemanı sol morfik (${}_R R$ sol morfik modül) ise R halkasına sol morfik halka denir (Nicholson ve Sanchez, 2005).

Tanım 2.1.33. R bir halka olsun. I sonlu kümesi ve $R -$ modül olarak $R \cong M$ izomorfizması için herhangi bir A sol R- modülünün $A = M \oplus N = \oplus_{i \in I} A_i$ dik ayrışımları verildiğinde $A = M \oplus (\oplus_{i \in I} B_i)$ olması durumunda her zaman $B_i \subseteq A_i$ ise R halkasına (sol) değişim halkası denir (Crowley ve J'onnson,1980).

Tanım 2.1.34. Her $f: M \rightarrow K$ $R-$ modül epimorfizması ve her $\gamma: U \rightarrow K$ $R-$ modül homomorfizması için aşağıdaki (Şekil 2.1.) de görülen diyagram değişmeli olacak biçimde $\bar{\gamma}: U \rightarrow M$ $R-$ modül homomorfizması mevcut ise U' ya $M-$ projektif modül denir (Anderson ve Fuller,1992).

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dl, dotted, "\bar{\gamma}"'] & \\ M \arrow[r, "f"'] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1. Projektif modül diyagramı (Anderson ve Fuller,1992)

Tanım 2.1.35. R bir halka olsun. Eğer R halkasının her sağ(sol) esas ideali projektif $R-$ modül ise R halkasına sağ(sol) Rickart halka denir. Bir R halkası hem sağ hem de sol Rickart halka ise R halkasına Rickart halka denir (Maeda,1960).

Teorem 2.1.4. R bir halka olsun. R halkası sağ(sol) Rickart halkadır ancak ve ancak R halkasının her elemanının sağ(sol) sıfırlayanı bir R' nin idempotenti tarafından üretilir (Maeda,1960).

Tanım 2.1.36. R bir halka, M bir sağ $R-$ modül ve $S = End_R(M)$ olsun. Her $f \in S$ için $ann_r^M(f) = ann_r^M(S.f) = eM$ olacak biçimde $e^2 = e \in S$ mevcutsa M modülüne Rickart modülü denir (Agayev vd.; 2012).

2.2. Graf Teori

Tanım 2.2.1. Bir E grafı E^0 ile gösterilen nokta kümeleri ile bu nokta kümelerini birbirine bağlayan ve E^1 ile gösterilen, kenar adı verilen elemanlardan oluşan kümeye denir ve $E = (E^0, E^1)$ ile gösterilir (Raeburn, 2005).

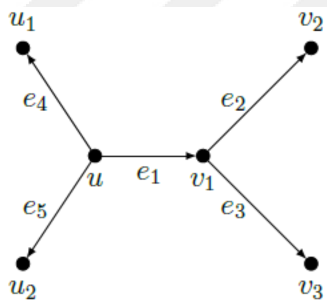
Tanım 2.2.2. $E = (E^0, E^1, r, s)$ yönlü grafı, E_0, E_1 kümeleri ve $r, s: E^1 \rightarrow E^0$ dönüşümlerinden oluşur. E^0 ' ın elemanlarına köşeler E^1 ' in elemanlarına ise kenarlar olarak tanımlanmaktadır. Herhangi bir $e \in E^1$ kenarı için $s(e)$'ye e kenarının kaynağı ve $r(e)$ ye de e kenarının menzili adı verilmektedir (Abrams vd., 2017).

Bir $e \in E^1$ kenarı ve $v, w \in E^0$ köşeleri için $s(e) = v$ ve $r(e) = w$ ise e kenarının yayıcısı v köşesi, e kenarının alıcısı w köşesidir. Herhangi iki $e_1, e_2 \in E^1$ kenarları için $r(e_1) = s(e_2)$ oluyor ise e_1, e_2 kenarlarına komşu kenarlar denir (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.2.3. Bir u köşesi için $s^{-1}(u)$, kaynağı u olan kenarların kümesi ve $r^{-1}(u)$ ise menzili olan kenarların kümesidir. Eğer bir u köşesi herhangi bir kenar yaymıyorsa başka bir ifadeyle $s^{-1}(u) = \emptyset$ ise u köşesine batak, u köşesi hiç kenar almıyor yani $r^{-1}(u) = \emptyset$ durumunda ise u köşesine kaynak denir (Abrams vd ., 2017).

Örnek 2.2.1. Aşağıda verilen E grafında u_1, u_2, v_2 ve v_3 köşeleri birer batak, u köşesi ise kaynaktır (Şekil 2.2.).

E:



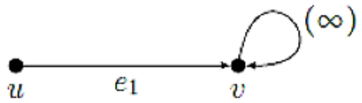
Şekil 2.2. Yönlü graf (Abrams vd., 2017)

Ayrıca, $s(e_1) = u$,$r(e_1) = v_1$, $r(e_1) = v_1 = s(e_2) = s(e_3)$, $s^{-1}(u) = \{e_1, e_4, e_5\}$, $r^{-1}(u) = \emptyset$, $s^{-1}(v_1) = \{e_2, e_3\}$, $r^{-1}(v_1) = \{e_1\}$, $r^{-1}(v_3) = \{e_3\}$, $s^{-1}(v_3) = \emptyset = s^{-1}(v_2)$, $r^{-1}(v_2) = \{e_2\}$, $s^{-1}(u_1) = \emptyset$, $r^{-1}(u) = \{e_4\}$, $s^{-1}(u_2) = \emptyset$, $r^{-1}(u_2) = \{e_5\}$ dir (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.2.4. Bir grafta bir köşe sonsuz kenar yayıyorsa yani bir u köşesi için $|s^{-1}(u)| = \infty$ ise bu u köşesine sonsuz yayıcı denir. Graftaki bir u köşesi batak veya sonsuz yayıcı ise bu köşeye tekil köşe, aksi durumda ise u köşesine düzgün köşe adı verilir. Bir E grafı sonsuz yayıcı içermiyorsa bu grafa sıralı sonlu graf denir (Abrams vd., 2017).

Örnek 2.2.2. (Şekil 2.3.) de verilen E grafı için v köşesine sonsuz kenar geldiğinden v köşesi sonsuz yayıcıdır ve dolayısıyla tekil köşedir. u köşesi ise sonlu kenar yaydığından düzgün köşedir. Bu nedenle E grafı sonlu ve sıra sonlu olmayan bir graftır (Abrams vd., 2017).

E:



Şekil 2.3. Sıra sonlu graf (Abrams vd., 2017)

Tanım 2.2.5. Bir E grafındaki $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E^1$ kenarları için $r(e_i) = s(e_{i+1})$ $(i = 1,2,3, \ldots, n-1)$ olacak şekilde oluşturulan $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ dizisine yol denir. Burada $s(p) = s(e_1)$ ve $r(p) = r(e_n)$ dir. Bir p yolunun içerdiği kenar sayısı p yolunun uzunluğunu verir ve $l(p)$ ile gösterilir. Bir p yolunu oluşturan kenar sayısı sonsuz sayıda ise p yoluna sonsuz uzunluklu yol denir. Bir E grafındaki tüm yolların kümesi $Path(E)$ ile gösterilir. Ayrıca bir graftaki tüm köşeler sıfır uzunluklu bir yoldur. $Path(E)$ kümesinde $m \leq n$ olmak üzere $p = e_1 e_2 \cdots e_n$ ve $q = e_1 e_2 \cdots e_m$ yolları için q yoluna p yolunun başlangıç alt yolu adı verilir (Abrams vd., 2017).

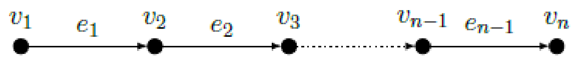
Tanım 2.2.6. n uzunluktaki bir $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ yolu için $s(p) = r(p) = u$ oluyor ise p yolu kapalı yol, u köşesi de kapalı yolun bazı olarak adlandırılır ve u köşesini baz alan kapalı yolların kümesi $CP(u)$ ile gösterilir. Kapalı bir $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ yolu $i > 1$ iken $s^{-1}(e_i) \neq u$ özelliğini sağlıyorsa p yolu u köşesini baz alan kapalı basit yol denir ve u köşesini baz alan bütün kapalı basit yolların kümesi $CSP(u)$ ile gösterilir. Her kapalı basit yol bir kapalı yoldur (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.2.7. $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ yolu için $s(p) = r(p) = u$ ve her bir $i \neq j$ için $s(e_i) \neq s(e_j)$ oluyorsa p yoluna u köşesini baz alan döngü adı verilir. Döngü içermeyen grafa çevirimsiz graf veya diğer adıyla devirli olmayan graf denir . Bir $p = e_1 e_2 \ldots e_n$ yolu için $s(e) = s(e_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ ve $e \neq e_i$ olacak biçimde bir $e \in E^1$ kenarı mevcutsa e kenarına p yolunun çıkışı denir. (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.2.8. Bir E grafında her kapalı basit yol bir çıkış içeriyorsa bu E grafı L koşulunu sağlıyor denir. Eğer E grafındaki tüm köşeler ya hiçbir kapalı basit yolun bazı değil ya da birden fazla kapalı basit yolun bazı ise E grafı K koşulunu sağlar. Bu durumda K koşulunu sağlayan bir graf her zaman L koşulunu da sağlar denir (Abrams vd; 2017).

Örnek 2.2.3. n köşeli sonlu satır graf için genellenirse yani (Şekil 2.4.) de görülen bir M_n grafı için,

M_n:



Şekil 2.4. n köşeli satır sonlu grafı (Abrams vd., 2017)

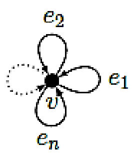
M_n grafının köşe kümesi $M_n{}^0 = \{v_1, \cdots, v_n\}$, kenar kümesi $M_n{}^1 = \{e_1, \cdots, e_n\}$ ve her bir e_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ için $s(e_i) = v_i$ ve $r(e_i) = v_{i+1}$ dir (Abrams vd., 2017).

Örnek 2.2.4. (Şekil 2.5.) de görülen tek düğüm grafına göre $R_1{}^0 = \{v\}$, $R_1{}^1 = \{e\}$ ve $r(e) = v = s(e)$ dir (Abrams vd; 2017).

R_1:

Şekil 2.5. Tek düğüm grafı (Abrams vd., 2017)

Örnek 2.2.5. (Şekil 2.6.) da görülen tek bir v köşesi ve R_n ile gösterilen n tane düğümden oluşan n yapraklı gül grafına göre, $R_n{}^0 = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $R_n{}^1 = \{e_1, \cdots, e_n\}$ ve her bir e_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ için $s(e_i) = v_i = r(e_i)$ dir (Abrams vd., 2017).



Şekil 2.6. n- yapraklı gül grafı (Abrams vd., 2017)

2.3. Leavitt Cebiri

Tanım 2.3.1. K herhangi bir cisim $n \geq 1$ herhangi bir tam sayı olsun. Bu durumda $(1, n)$ tipindeki Leavitt $K-$cebiri $L_K(1, n)$ olarak gösterilir ve K/$\langle X_1, X_2 ... X_n, Y_1, Y_2 ... Y_n \rangle / \langle (\sum_1^n Y_i X_i) - 1_K; X_i Y_i, -\delta_{ij} 1_K \rangle$ olarak tanımlanır (Abrams vd., 2017).

2.4.Katsayıları Cisim Üzerindeki Leavitt Yol Cebirleri

Tanım 2.4.1. K bir cisim ve E bir yönlü graf olacak biçimde E grafı üzerindeki yol $K-$ cebiri aşağıdaki bağıntılarla birlikte E^0 ve E^1 kümeleri tarafından üretilen yani $K[E^0 \cup E^1]$ olan bir K- cebiridir.

(A1) Her $v_i v_j \in E^0$için, $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$,

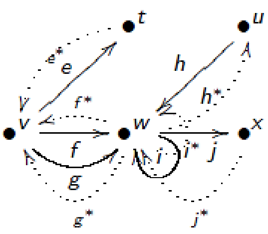
(A2) Her $e \in E^1$için $s(e)e = e = er(e)$

Bu yol K cebiri $A(E)$ ile gösterilir (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.4.2. $E = (E^0, E^1, r, s)$ bir yönlü graf olmak üzere, $(E^1)^* = \{e_i^* : e_i \in E^1\}$ kümesi ve r', s' dönüşümleri, $r'|_{E^1} = r$, $s'|_{E^1} = s$, $r'(e_i^*) = s(e_i)$ ve $s'(e_i^*) = r(e_i)$ olmak üzere $\hat{E}$=$(E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$ ile tanımlanan grafa, E grafının genişletilmiş grafı denir. E^1 reel kenarların kümesi, $(E^1)^*$ kümesi ise gölge kenarların kümesidir. $p = e_1 \cdots e_n$ yolu için $p*$ gölge yolu, $p^* = e_n^* \cdots e_1^*$ şeklindedir (Abrams vd., 2017).

Örnek 4.1.1. Aşağıda verilen $\hat{E}$ grafı genişletilmiş graftır (Şekil 2.7.).

$\hat{E}$ =



Şekil 2.7. Genişletilmiş graf (Abrams , 2017)

Tanım 2.4.3. K bir cisim ve E keyfi bir graf olsun. E grafının Leavitt yol cebiri, katsayıları K cisminde olan, E^0, E^1 ve $(E^1)^*$ kümeleri tarafından üretilen yani $K[E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*]$ olan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $K-$cebiridir. Bu $K-$cebiri $L_K(E)$ ile gösterilir.

(A1) Her $v_i, v_j \in E^0$ için $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$

(A2) Her $e \in E^1$ için $s(e)e = e = er(e)$ ve $r(e)e^* = e^* = e^* s(e)$

(CK1) Her $\mathrm{e_i}, \mathrm{e_j} \in \mathrm{E}^1$ için $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$

(CK2) Her düzgün $v \in E^0$ için $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e)=v\}} ee^*$

A; $\{a_v : v \in E^0\}$ ortogonal idempotent çifti ve $\{b_e, b_e^* : e \in E^1\}$ kümesi ile (1) ile (4) koşulları gerçekleyen bir K- cebiri ise bu durumda her $v \in E^0$ için $\phi(v) = av$ ve her $e \in E^1$ için $\phi(e) = be$ ve $\phi(e^*) = be^*$ olacak biçimde bir $\phi: L_K(E) \to A$ cebir homomorfizması mevcuttur (Abrams vd., 2017).

Tanım 2.4.4. E grafının Leavitt yol cebiri, $\widehat{E}$ genişletilmiş grafı üzerinde, Cuntz-Krieger bağıntıları olarak adlandıran (CK1) ve (CK2) bağıntılarını sağlayan bir yol $K-$cebiridir (Abrams vd., 2017).

Teorem 2.4.1. E bir graf ve $e \in E^1$olsun. Leavitt yol cebirlerinden alınan (ee^*) elemanı bir idempotenttir.

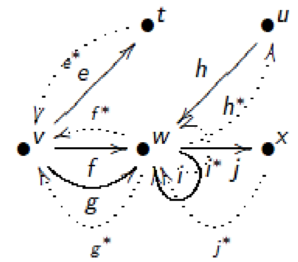
İspat: (CK1) koşulundan,

$$(ee^*)\,(ee^*) = e(e^*e)e^* = er(e)e^* = ee^* \qquad (2.3)$$

sağladığı için Leavitt yol cebirlerinden alınan ee^*elemanı bir idempotenttir ve $L_K(E)$ de köşelerin kümesi de ortogonal idempotentlerin bir kümesini verir (Abrams vd., 2017).

Örnek 2.4.2. Şekil 2.8.' deki (CK1) ve (CK2) koşullarını sağlayan Leavitt yol cebirine göre;

$\hat{E} =$



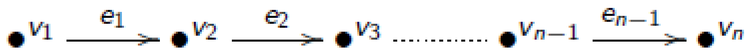
$$ee^* + ff^* + gg^* = v \quad g^*g = w \quad g^*f = 0$$

$$h^*h = w \ (CK1) \quad hh^* = u \ (CK2)$$

Şekil 2.8. (CK1) ve (CK2) koşullarını sağlayan Leavitt yol cebiri (Abrams, 2017)

Örnek 2.4.3. Katsayıları K cismi olan nxn tipindeki $M_n\ (K)$ matris cebiri için aşağıdaki graf verilsin (Şekil 2.9.). Bu durumda, e_{ij} $M_n\ (K)$ matris cebirindeki $i-$ inci satır ve $j-$ inci sütun hariç diğer girdileri 0 olan birimsel matris olmak üzere $\phi: L_K(E) \longrightarrow M_n\ (K),\ \ v_i \longmapsto e_{ii},\ \ e_i \longmapsto e_{(i+1)i}$ ve $e_i^* \longmapsto e_{i(i+1)}$ olarak tanımlanan dönüşüm ile $\mathrm{L_K(E)} \cong M_n\ (K)$ dir (Abrams vd., 2017).

E:



Şekil 2.9. nxn tipindeki matris cebri (Abrams vd., 2017)

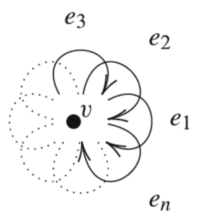
Örnek 2.4.4. Tek düğümlü bir R_1 grafı verilsin ve $K[x, x^{-1}]$ Laurent polinom halkası olsun (Şekil 2.10.).

R_1 :

Şekil 2.10. Tek düğüm grafı (Abrams vd., 2017)

Bu grafta yani (Bkz. Şekil 2.10.) da, $\varphi: \mathrm{L_K}(R_1) \to K[x, x^{-1}]$, $v \mapsto 1$, $e \longmapsto x$ ve $e^* \longmapsto \mathrm{x}^{-1}$ olarak tanımlanan dönüşüm ile $\mathrm{L_K}(R_1) \cong \mathrm{K}[\mathrm{x}, \mathrm{x}^{-1}]$ dir (Abrams vd., 2017).

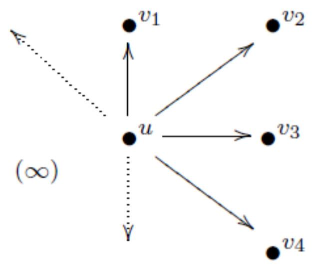
Örnek 2.4.5. $n \geq 2$ için R_n grafı verilsin (Şekil 2.11.).



Şekil 2.11. n-yapraklı gül grafı (Abrams vd., 2017)

Bu grafta, $\psi: \mathrm{L_K}(R_n) \to L_K(1, n)$, $v \mapsto 1$, $e_i \longmapsto x_i$ ve $e_i^* \longmapsto y_i$ ile tanımlanan dönüşüm ile $L_K(R_n) \cong L_K(1, n)$ dir (Abrams vd., 2017).

Örnek 2.4.6. Sonlu olmayan saat grafı verilsin (Şekil 2.12).



Şekil 2.12. Sonlu olmayan saat grafı (Abrams vd., 2017)

u sonlu olmayan kenar yayan bir yayıcı köşe, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K)$, $M_2(K)$ nin sayılabilir sonsuz kopyalarının dik toplamı ve $I_{22} = \prod_{i=1}^{\infty} E_{22}$ olsun. $\phi: L_K(c_\infty) \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K) \bigoplus K I_{22}$ fonksiyonu için $\phi(u) = I_{22}$, $\phi(e_i) = (E_{21})_i$, $\phi(v_i) = (E_{11})_i$ ve $\phi(e_i{}^*) = (E_{12})_i$ verilsin. $\phi(ue_i) = \phi(e_i)$ olacak biçimde herhangi bir e_i kenarı için;

$$\phi(ue_i) = \phi(u)\phi(e_i) = I_{22}(E_{21})_i = (E_{22})_i(E_{21})_i = (E_{21})_i = \phi(e_i) \qquad (2.4)$$

Dolayısıyla $L_K(c_\infty) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_2(K) \bigoplus K I_{22}$ dir (Abrams vd., 2017).

Önerme 2.4.1. E bir graf K herhangi bir cisim olsun. $k \in K$; $p, q \in E$ için $L_K(E)$ nin her bir elemanı kpq^* formundadır ve

i) $k \in K$ ve $v_i \in E^0$için kv_i veya

ii) $k \in K$; $e_{i_1}, \cdots, e_{i_m}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_n} \in E^1$, m , $n \geq 0$ ve $m + n \geq 1$olacak biçimde $ke_{i_1} \cdots e_{i_m} e_{j_n}^* \cdots e_{j_1}^*$ şeklindedir. p ve q, v_i köşesinde 0 uzunluklu yollardır veya $p = e_{i_1} \cdots e_{i_m}$ ve $q = e_{j_1} \cdots e_{j_n}$ yollarından en az biri 0 dan büyük uzunluktadır (Abrams vd., 2017).

İspat: Her $x_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ olacak biçimde $kx_1 \dots x_n$ elemanını ele alalım. $n = 1$ ise $x_1 \in E^0$ için kx_1 (i) formunda, $x_1 \in E^1$ veya $x_1 \in (E^1)^*$ için ise kx_1 (ii) formundadır. Her $y_i \in E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ olmak üzere $y = ky_1 \dots y_n y_{n+1}$ elemanındaki $n \geq 1$ için iki formdan biri şeklinde yazılabildiğini kabul edelim $y = xy_{n+1}$ olacak şekilde $x = ky_1 \dots y_n$ elemanı üzerinden indirgeme bağıntısını kullanırsak;

1. Durum: $v_i \in E^0$ için $x = kv_i$ olsun. $y_{n+1} = v_j \in E^0$ ise $y = kv_i v_j = k\delta_{ij} v_i$ (i) formunda yazılır. $y_{n+1} = e_j \in E^1$ ise $y = kv_i e_j = kv_i s(e_j) e_j = k\delta_{v_i, s(e_j)} e_j$ veya $y_{n+1} = e_j^* \in (E^1)^*$ için $y = kv_i e_j^* = kv_i r(e_j) e_j^* = k\delta_{v_i, r(e_j)} e_j^*$ olduğundan y (ii) formunda yazılır.

2. Durum: Her $e_i, e_j \in E^1$ ve $m + n \geq 1$ için $x = ke_{i_1} \dots e_{i_m} e_{j_n}^* \dots e_{j_1}^*$ olsun. x elemanı için aşağıdaki durumlara bakacak olursak;

2.1. $v_j \in E^0$ için $y_{n+1} = v_j$ ve $n = 0$ olsun. Öyleyse $m \geq 1$ olmalı ve $y = ke_{i_1} \dots e_{i_m} v_j = k\delta_{v_j, r(e_{i_m})} e_{i_1} \dots e_{i_m}$ (ii) şeklinde yazılabilir.

2.2. $v_j \in E^0$ için $y_{n+1} = v_j$ ve $n \geq 1$ olsun. $e_{j_1}^* v_j = e_{j_1}^* s(e_{j_1}) v_j = \delta_{v_j, s(e_{j_1})} e_{j_1}^*$ olduğundan $y = k\delta_{v_j, s(e_{j_1})} e_{i_1} \dots e_{i_m} e_{j_n}^* \dots e_{j_1}^*$ (ii) formunda yazılır.

2.3. Kabul edelim ki; $e_j \in E^1$ için $y_{n+1} = e_j$ ve $n = 0$ olsun. Bu durumda, $m \geq 1$ olmalıdır ve $y = ke_{i_1} \dots e_{i_m} e_j$ (ii) şeklinde yazılır.

2.4. $e_j \in E^1$ için $y_{n+1} = e_j$ ve $n \geq 1$ olsun. (CK1) koşulundan $e_{j_1}^* e_j = \delta_{j_{1,j}} r(e_j)$ dir.

2.4.1. $n = 1$ ve $m = 0$ ise $y = k\delta_{j_{1,j}} r(e_j)$ (i) formunda yazılır.

2.4.2. $n = 1$ ve $m > 0$ ise $y = k\delta_{j_{1,j}} \delta_{r(e_{i_m}), r(e_j)} e_{i_1} \dots e_{i_m}$ (ii) formunda yazılır.

2.4.3. $n > 1$ ise $y = k\delta_{j_{1,j}}\delta_{s(e_{j_2}),r(e_j)}e_{i_1} \dots e_{i_m}e_{j_n}^* \dots e_{j_2}^*$ (ii) şeklindedir.

2.5. $e_j \in E^1$ için $y_{n+1} = e_j^*$ ve $n = 0$ olsun. Bu durumda, $m \geq 1$ olur ve $y = k\delta_{r(e_{i_m}),r(e_j)}e_{i_1} \dots e_{i_m}e_j^*$ (ii) formunda yazılır.

2.6. $e_j \in E^1$ için $y_{n+1} = e_j^*$ ve $n \geq 1$ olsun. $y = k\delta_{s(e_{j_1}),r(e_j)}e_{i_1} \dots e_{i_m}e_{j_n}^* \dots e_{j_1}^*e_j^*$ (ii) formundadır (Abrams vd., 2017).

Önerme 2.4.2. E bir graf olsun.

i) E^0 sonlu ve n tane köşe içeriyorsa, $L_K(E)$ birimli bir K-cebiridir ve birimi $1 = \sum_{i=1}^{n} v_i$ dir.

ii) E^0 sonsuz ise $L_K(E)$ yerel birimlere sahiptir (Abrams vd., 2017).

İspat: (i); E^0 sonlu olsun. $\sum_{i=1}^{n} v_i$ nin $L_K(E)$ için birim olduğunu gösterelim. Her $v_i \in E^0$ için $(\sum_{i=1}^{n} v_i)v_j = \sum_{i=1}^{n} v_i\, v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}v_j = v_j$ ve her $e_j \epsilon E^1$ için Leavitt yol cebiri tanımındaki (A2) koşulu $(\sum_{i=1}^{n} v_i)v_j = ((\sum_{i=1}^{n} v_i)s(e_j)e_j = e_j$ dir. Benzer olarak $(\sum_{i=1}^{n} v_i)e_j^* = e_j^*$dir. $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ tarafından üretildiğinden her $\alpha \in L_K(E)$ için $(\sum_{i=1}^{n} v_i)\alpha = \alpha$ ve $\alpha(\sum_{i=1}^{n} v_i) = \alpha$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{n} v_i$ $L_K(E)$ nin birim elemanıdır.

(ii); E^0 köşe kümesi sonsuz ve $X = \{a_i\}_{i=1}^{t} \subseteq L_K(E)$ nin sonlu bir alt kümesi olsun. Önerme 2.4.1. den her bir $p_j^i, q_j^i \in Path(E)$ *ve* $k_j^* \in K$ olmak üzere $a_i = \sum_{j=1}^{s(i)} kp_j^i\, (q_j^i)^*$ şeklinde yazabiliriz. $V = \bigcup_{i=1}^{t}\{s(p_j^i), s(q_j^i): j = 1, \cdots, s(i)\}$ olarak tanımlansın ve $\beta = \sum_{v \in V} v$ olsun. Bu durumda (i) de kullanılan yöntem ile her $a_i \in X$ için $\beta a_i = a_i = a_i\beta$ dır . β sonlu bir toplam ve idempotent olduğu için X kümesi için bir yerel birim üretir . Bu durumda E^0, $L_K(E)$ nin yerel birim elemanıdır (Dangerfield, 2011).

Tanım 2.4.6. E bir graf ve $p, q \in Path(E)$ olsun. Bazı $p = qm$ olacak şekilde $m \in Path(E)$ varsa q yoluna p yolunun inital segmenti denir. Ayrıca $L_K(E)$ nin sıfır olmayan pq^* ve mn^* verildiğinde q yolunun m nin inital segmenti olması için gerek ve yeter koşul $(pq^*)(mn^*) \neq 0$ dır .

Teorem 2.4.2. $L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v$ dir.

İspat: Her bir $x \in L_K(E)$, $k_i \in K$ ve her $p_i q_i \in E^*$ için;

$x = k_1 p_1 q_1^* v_1 + \cdots k_n p_n q_n^* v_n \in \sum_{v \in E^0} L_K(E)v$ ve her $v_i = s(q_i)$ için $L_K(E) = \sum_{v \in E^0} L_K(E)v$ dir. $v \in E^0$ için $y \in L_K(E)v \cap \sum_{w \in E^0, w \neq v} L_K(E)w$ olsun. O halde; en az bir $a, a_w \in L_K(E)$ için $y = av = \sum_{w \in E^0, w \neq v} a_w w$ dir. E grafındaki köşelerin kümesi $L_K(E)$ nin ortogonal idempotenti olduğu için $av = (av)v = \left(\sum_{w \in E^0, w \neq v} a_w w\right) = 0$ dır. Böylece $L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v$ eşitliği sağlanır (Dangerfield, 2011).

Teorem 2.4.3. Leavitt yol cebirleri aynı zamanda $\mathbb{Z}-$ dereceli cebir olma özelliğini sağlar (Abrams vd., 2017).

İspat: $m, n \in \mathbb{Z}$ için $L_K(E)_m L_K(E)_n \subseteq L_K(E)_{m+n}$ olduğunu göstereceğiz. $p_1, p_2, q_1, q_2 \in E^*$, $x = p_1 {q_1}^* \in L_K(E)_m$ ve $y = p_2 {q_2}^* \in L_K(E)_n$ monomialleri için;

$l(p_1) - l(q_1) = m$ ve $l(p_2) - l(q_2) = n$ olsun. (CK1) koşulundan $xy = p_1 {q_1}^* p_2 {q_2}^* = 0$ dır. Farz edelim , $xy \neq 0$ olsun.

1. Durum: $l(q_1) = l(q_2)$ için, ${q_1}^* p_2 = r(p_2)$ olup $xy = p_1 {q_2}^*$ dir. $l(p_1) - l(q_2) = (m + (l(p_1))) - (l(p_2) - n) = m + n$ olup $xy \in L_K(E)_{m+n}$ dir.

2. Durum: $l(q_1) > l(q_2)$ ve q_1 yolunun bir q alt yolu için $q_1 = p_2 q$ olsun. Bu durumda $xy = p_1 q^* {q_2}^*$dır. $l(p_1) - l(q_2 q) = l(p_1) - l(q_2) + l(q) = l(p_1) - \big(l(q_2) + l(q_1) - l(p_2)\big) = \big(l(p_1) - l(q_1)\big) + (l(p_2) - l(q_2)) = m + n$ olup $xy \in L_K(E)_{m+n}$ dır.

3. Durum: $l(p_2) > l(p_1)$olsun. 2. Durum dan $xy \in L_K(E)_{m+n}$ dır. Son durumda eğer $x = \sum_{i=1}^{r} {p_1}_i {q_1}^*{}_i \in L_K(E)_{m+n}$ ve $y = \sum_{j=1}^{s} {p_2}_j {q_2}^*{}_j \in L_K(E)_{m+n}$ ise $xy \in L_K(E)_{m+n}$ olur. O halde; $L_K(E)_m L_K(E)_n \subseteq L_K(E)_{m+n}$ dir (Dangerfield, 2011).

Önerme 2.4.3. E herhangi bir graf olsun. $L_K(E)-$ mod kategorisinde $L_K(E)$ projektif modüldür.

İspat: Teorem 2.4.2. den $L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v$ olarak yazılır ve $v \in E^0$ idempotenti için $L_K(E)$ yerel birimlere sahiptir. Her bir $L_K(E)v$ dik toplanan $L_K(E)-$ mod da projektif modül olduğundan projektif modüllerin dik toplamları da projektiftir. Dolayısıyla $L_K(E)$ projektif modüldür (Dangerfield, 2011).

3.YÖNTEM

3.1. Leavitt Yol Cebirlerinin Endomorfizma Halkaları

Tanım 3.1.1. E herhangi bir graf, K herhangi bir cisim olsun ve $L := L_K(E)$ Leavitt yol cebiri verilsin. Birimli $End(L_L)$ halkasını H ile gösterelim. Bu durumda L yi H nin bir alt halkası olarak tanımlanabilir (Pino vd.,2015). Ayrıca,

$$\varphi : L \to End(L_L)$$

$$x \to \lambda_x \tag{3.1}$$

ve sıfırdan farklı olarak verilen $x \in L$ için $xu = x$ şartını sağlayan bir $u \in L$ idempotenti mevcuttur. Böylece $0 \neq x = \lambda_x(u)$ olduğundan φ, bir halka monomorfizmasıdır. Burada $\lambda_x : L \to L$, x ile soldan çarpma yani, her $y \in L$ için $\lambda_x(y) = xy$ ile tanımlanan bir sağ $R-$modül homomorfizmasıdır (Pino vd., 2015).

Önerme 3.1.1. Herhangi bir $f \in H$ ve $x \in L$ için $f\,\lambda_x = \lambda_{f(x)}$ dir. Bunun sonucu olarak L, H nin bir sol idealidir (Pino vd., 2015).

İspat: Keyfi $a \in L$ için $f\,\lambda_x(a) = f(xa) = f(x)a = \lambda_{f(x)}a$ olduğundan $f\,\lambda_x = \lambda_{f(x)}$ dir.

Önerme 3.1.2. E bir graf ve K keyfi bir cisim olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

- **i.** $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri devirli bir sol H modüldür.
- **ii.** $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri devirli bir sol $L_K(E)$ modüldür.
- **iii.** E grafı sonlu sayıda köşeye sahiptir (Pino vd., 2015).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii); $L_K(E)$ devirli sol H modül olsun. $x \in L_K(E)$ için $L_K(E) = Hx$ ve $u \in L_K(E)$ yerel birim elemanı için $ux = x$ yazılabilir. $L_K(E)$, H nin sol ideali olduğundan $L_K(E) = Hx = Hux = L_K(E)x$ dir. O halde $L_K(E)$ aynı zamanda devirli sol $L_K(E)$ modüldür.

(ii) ⇒ (i); $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri devirli bir sol $L_K(E)$ modül olsun. $L_K(E)$, H halkasının sol ideali olduğundan $x \in L_K(E)$ ve $u \in L_K(E)$ yerel birim elemanı için, $L_K(E) = L_K(E)x = Hux$ olarak yazılabilir. u, $L_K(E)$' nin yerel birim elemanı olduğundan $L_K(E) = L_K(E)x = Hux = Hx$ elde edilir. O halde; $L_K(E)$ devirli sol H modül olur.

(ii) ⇒ (iii); L_K (E) devirli sol modül olsun. Bu durumda L_K (E) $= L_K(E)x$ olacak şekilde $\exists x \in L_K$ (E) dir. Buradan her $i \in \{1, \cdots, n\}$ için $xu_i \neq 0$ olacak şekilde u_i köşeleri için; $E^0 = \{u_{1,\dots,}u_n\}$ dir. Yani, E sonlu sayıda köşeye sahiptir.

(iii) ⇒ (ii); E sonlu sayıda köşeye sahip yani $E^0 = \{u_{1,\dots,}u_n\}$ olsun. Bu durumda $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri birimlidir ve $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ birim elemanıdır. Burada $L_K(E) = L_K(E)u$ olur. Dolayısıyla $L_K(E)$ devirli sol $L_K(E)$ modüldür (Pino vd., 2015).

Önerme 3.1.3. Aşağıda verilen şartlar birbirine denktir.

i) H, değişim halkasıdır.

ii) L, değişim halkasıdır (Pino vd., 2015).

İspat:(i) ⇒ (ii); H bir değişim halkası ve x ∈ L olsun. $f, g \in H$ ve $e^2 \in H$ $e = f\lambda_x = g + \lambda_x - g\lambda_x$ olacak şekilde vardır. L, H halkasının sol ideali olduğundan $f\lambda_x \in L$ ve dolayısıyla $g = e\lambda_x + g\lambda_x \in L$ dir. Eğer u, $ux = x = ux$ olacak şekilde ise $f\lambda_x = f(xu) = f(ux) = f\lambda_{ux} = \lambda_{f(ux)} = \lambda_{f(u)x} = f\lambda_u\lambda_x$ dir ve böylece f elemanı yerine $f\lambda_u = \lambda_{f(u)} \in L$ yazılabilir. Dolayısıyla L değişim halkası olur.

(ii) ⇒ (i); L bir değişim halkası olsun. L, aynı zamanda kendisi üzerinde bir modül olduğundan kendisi üzerinde oluşturulan H endomorfizma halkası da değişim halkasıdır (Pino vd., 2015).

Önerme 3.1.4. Keyfi K cismi ve E grafı için eğer H von Neumann düzgün halka ise L de von Neumann düzgün halkadır (Pino vd., 2015).

İspat: $a \in L$ olsun. H halkası von Neumann düzgün halka olduğundan $\lambda_a f\lambda_a$ olacak şekilde $\exists f \in H$ dır. Bir $u \in L$ idempotenti(yerel birim elemanı) $ua = a = au$ olacak şekilde vardır. Önerme 3.1.1. den $\lambda_a = \lambda_a f\, \lambda_{ua} = \lambda_a\, \lambda_{f(ua)} = \lambda_{f(u)a} = \lambda_a\, \lambda_{f(u)}\, \lambda_a$ elde edilir. Böylece L von Neumann düzgün halkadır (Pino vd., 2015).

Teorem 3.1.1. E sıra sonlu graf ve H ise L nin endomorfizma halkası olsun. H halkası von Neumann düzgün halka ise E, döngü içermeyen ve her sonsuz yolları batak ile biten bir graftır (Pino vd.,2015).

İspat: H von Neumann düzgün halka olsun. H von Neumann düzgün halka olduğundan Önerme 3.1.2. den L de von Neumann düzgün halkadır. L von Neumann düzgün halka olduğundan E grafı devirli olmayan bir graftır. Şimdi, E grafı içindeki her sonsuz yolların batakla bittiğini gösterelim. Farz edelim ki; p, $v_1 = s(p)$ olacak şekilde batakla bitmeyen E grafının sonlu olmayan bir yolu olsun. E devirli olmayan bir graf olduğundan p yolu birçok çatallanan köşelere sahip olur. $v_i = s(\gamma_i)$, $s(e_i) = v_i$ ve CK1 koşulundan dolayı $e^*\gamma_i = 0$ olur. Herhangi bir n için, $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n L \neq \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n\gamma_{n+1} L$ dir. Aksi halde, bazı $x \in L$ için $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n\gamma_{n+1} x$ olur. O halde; CK1 koşulundan $p = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$ dir. Burada $i \geq 2$, $v_i = s(\gamma_i)$ ve $s(e_i) = v_i$ olacak şekilde çatallanan bir kenardır.

$$0 \neq e_{n+1}^* = e_{n+1}^*\gamma_n^* \cdots \gamma_1^*\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n = \mathrm{e}_{n+1}^*\gamma_n^* \cdots \gamma_1^*\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n \tag{3.2}$$

$$\mathrm{e}_{n+1}^*\gamma_n^* \cdots \gamma_1^*\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n\gamma_{n+1}\mathrm{x} = \mathrm{e}_{n+1}^*\gamma_{n+1}\mathrm{x} = 0 \tag{3.3}$$

$e_{n+1}^* = 0$ olamayacağından çelişkidir. Böylece E grafının içindeki her sonlu olmayan yol grafları batakla biter (Pino vd., 2015).

Sonuç 3.1.1. L projektif sol H- modüldür (Pino vd., 2015).

İspat: L ortogonal idempotentlerin kümesi tarafından üretilen bir cebirdir. Bu nedenle ortogonal idempotentlerin tanımından $L = \bigoplus_{v \in E^0} Lv$ yazılabilir. L devirli sol H modül olduğundan $v \in L$ idempotenti için $Lv = Hv$ olacak şekilde H nin dik toplananı olarak yazılabilir ve Lv projektif olur. O halde L projektif sol $H -$ modüldür (Pino vd., 2015).

Önerme 3.1.5. L, sonlu halka dik toplanan halka ise E grafının çıkışı yoktur.

İspat: L sonlu dik toplanan halka olduğundan E grafının içindeki p döngüsünün çıkışı e kenarı olsun. p döngü olduğundan bir v köşesi için $s(p) = r(p) = s(e) = v$ olarak yazılabilir. $r(e) = w$, $x = p + (1 - \delta_{v,w})w$ ve CK2 koşulundan $pp^* = v$ olduğundan $x^*x = p^*p + \left(1 - \delta_{v,w}\right)w = v + (1 - \delta_{v,w})w$ elde edilir. Fakat CK1 ile $e^*pp^* = (e^*p)p^* = 0$ ve $e^*pp^* = e^*(\underbrace{pp^*}_{v}) = e^*v = e^*$ yani $e^* = 0$ elde edilir ki bu p yolunun çıkışının e olmasıyla çelişir. Dolayısıyla E grafının çıkışı yoktur (Vas, 2015).

Teorem 3.1.2. E grafı çıkışa sahip değilse L sonlu dik toplanan halkadır.

İspat: E grafı çıkışa sahip olmadığında L sonlu dik toplanan halka olduğunu gösterelim. $x, y \in L$, $u \in L$ idempotenti ve $i = 1,2, \cdots, n$ için $p_i q_i^*$ formundaki bazı p_i ve q_i yolları elemanlarının sonlu K- lineer birleşimleri olsun. E grafının p_i ve q_i yollarının köşe kümesi E^0; $p_i$ve q_i yollarının kenar kümesi E^1 olacak şekilde $R(E)$, E grafının düzgün köşelerin kümesi, $S \subseteq R(E)$ ve $T = S \cap \{v \in E^0 : s_E^{-1}(v) \cap E^1 \neq \emptyset\}$ verilsin. E grafının çıkışı olmadığından E grafının bir döngüsü için v köşesi E grafının yayıcı köşesidir. v, düzgün köşe olduğundan $s_E^{-1}(v) \cap E^1 \neq \emptyset$ dir. O halde, $u^2 = u, xu = x = ux, uy = y = yu$ ve $xy = u$ olduğunda $yx = u$ dur. Bu durumda $L_K(E)$ sonlu dik toplanan halkadır (Vas, 2015).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Leavitt Yol Cebirlerinin Endomorfizna Halkalarının Yerel Birimlilik Koşulları

Bu bölümde E bir graf, K herhangi bir cisim olmak üzere katsayıları K cisminden alınan E grafının Leavitt yol cebiri $L \coloneqq L_K(E)$ ve H de L nin sağ modülleri üzerinden tanımlanan endomorfizma halkası olarak gösterilecektir.

Önerme 4.1.1. E sonlu olmayan bir graf olsun. u, H de bir yerel birimsel eleman ve e, L de bir idempotent ise $\lambda_{u(e)}$, L de yerel birimsel elemandır.

İspat: E sonlu olmayan graf olduğundan L yerel birimsellere sahiptir ve $L,\ H$ ın bir alt halkasıdır. Bu durumda herhangi bir $a \in L$ ve $e \in L$ idempotenti için $ea = a = ae$ ve H halkası için de u yerel birim eleman olduğundan $\lambda_a \in H$ için $\lambda_a u = u\lambda_a = \lambda_a$ olarak yazılır.

O halde Önerme 3.1.1. den ;

$$\lambda_a = u\lambda_a = u\lambda_{ae} = u\lambda_{ea} = \lambda_{u(e)a} = \lambda_{u(e)}\lambda_a$$

$$\lambda_a = \lambda_a u = \lambda_{ea}u = (ea)u = (ae)u = a(eu) = a(ue) = \lambda_a\lambda_{u(e)}$$

$$\lambda_a\lambda_{u(e)} = \lambda_a u\lambda_e = u\lambda_a\lambda_e = u\lambda_{ae} = u\lambda_{ea} = u\lambda_e\lambda_a = \lambda_{u(e)}\lambda_a$$

Teorem 4.1.1. Eğer H düzgün yerel birimsel halka ise L de yerel birimsel halkadır. Ayrıca L düzgün halkadır.

İspat: $x \in L$ alalım. Buradan $\lambda_x \in H$ dır. H düzgün yerel birimsel halka olduğundan $e \in H$ idempotenti $\lambda_x \in eHe$ ve $f, g \in eHe$ yerel tersleri $fg = e = gf$ ve $\lambda_x f \lambda_x = \lambda_x$ olacak şekilde vardır. $x = x\lambda_{e(u)} = \lambda_{e(u)}x$ olacak şekilde $u \in L$ idempotenti seçelim. $x\lambda_{e(u)}$ deki x in yerine $\lambda_{e(u)}x$ yazarak; $(\lambda_{e(u)}x)\lambda_{e(u)} = \lambda_{e(u)}x = x$ yani $x \in \lambda_e(u)L\lambda_e(u)$ elde ederiz. Ayrıca,

$\lambda_f(u).\lambda_g(u) = \lambda_e(u) = \lambda_g(u).\lambda_f(u)$ ve $\lambda_x f\lambda_x = \lambda_x = \lambda_x\lambda_{f(x)} = \lambda_x\lambda_{f(ux)} = \lambda_x\lambda_{f(u)}\lambda_x$ tir. $f \in eHe$ olduğundan $f = ehe$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. Buradan, $f(u) = e(u).h(u).e(u)$ ve dolayısıyla $\lambda_{f(u)} \in \lambda_{e(u).h(u).e(u)} = \lambda_{e(u)}.\lambda_{h(u)}.\lambda_{e(u)}$

yani $\lambda_{f(u)} \in \lambda_{e(u)} L \lambda_{e(u)}$ elde ederiz. Benzer şekilde, $\lambda_g(u) \in \lambda_{e(u)} L \lambda_{e(u)}$ bulunur. Dolayısıyla L düzgün yerel birimsel halkadır.

Teorem 4.1.2. Eğer L yerel birimsel halka ise sıfırdan farklı her $v \in L$ idempotenti için vLv düzgün yerel birimseldir.

İspat: Keyfi bir $a \in vLv$ alalım. L düzgün yerel birimsel halka olduğundan e idempotenti ve u, u' yerel tersleri $ea = a = ae, uu' = e = u'u$ ve $aua = a$ olacak şekilde vardır. $\exists x \in L$ için $a \in vLv$ olduğundan $a = vxv$ dir. Böylece $av = a = va$ dır. Ayrıca $ea = a$ ve $av = a$ olduğundan $vea = va = a = ea$ ve $eav = ea$ elde ederiz.

Bu durumda $ea \in vLv$ için $ea = eav = vea$ olacak biçimde $e \in vLv$ vardır. O halde; $ve = e = ev$ yazabiliriz. $e^* = vev,\ h = vuv,\ h' = veu'ev$ olsun. O halde $v \in L$ idempotenti için;

$$e^*e^* = (vev)(vev) = ve\underbrace{ve}_{e}v = vee\underbrace{vv}_{v} = vev = e^* \in vLv$$

$$hh' = (vuv)(veu'ev) = vu\underbrace{ve}_{e}u'ev = v(ue)u'ev = v(uu')(uu')ev = veeev$$

$$= vev = e^*$$

$$h'h = (veu'ev)\ (vuv) = veu'\underbrace{ev}_{e}uv = veu'(euv)$$

$$= veu'(euv) = ve(u'e)uv = ve(u'u)(u'u)v = veeev = vev = e^*$$

$aha = a(vuv)a = v\underbrace{aua}_{a}v = vav = a$ elde ederiz. Dolayısıyla vLv yerel birimsel halkadır.

Teorem 4.1.3. H bağımlı halka ise L de bağımlıdır.

İspat: H bağımlı halka ve $a, b \in L$ olsun. H bağımlı halka olduğundan ikisi birlikte sıfır olmayan $f, g \in H$ için $f\lambda_a + g\lambda_b = 0$ dır. L nin $u_1 a = a = au_1$ ve $u_2 b = b = u_2 b$ eşitliklerini sağlayan u_1 ve u_2 yerel birimselleri için;

$$f\lambda_a = f\lambda_{u_1 a} = f\lambda_{u_1}\lambda_a = \lambda_{f(u_1)}\lambda_a$$

$$g\lambda_b = g\lambda_{u_2 b} = g\lambda_{u_2}\lambda_b = \lambda_{g(u_2)}\lambda_b$$

olduğundan;

$0 = f\lambda_a + g\lambda_b = \lambda_{f(u_1)}\lambda_a + \lambda_{g(u_2)}\lambda_b$ elde ederiz. Dolayısıyla L bağımlı halkadır.

Ehrlich'in yaptığı çalışmaya göre her düzgün R birimsel halkası bağımlı halkadır. Şimdi aşağıda verilen teoremde bu durumu $L_K(E)$ için göstereceğiz. Fakat bu durumun tersi her zaman doğru değildir, yani Henriksen'in yaptığı çalışmaya göre her bağımlı halka düzgün halka değildir.

Teorem 4.1.4. $L_K(E)$ düzgün yerel birimsel halka ise $L_K(E)$ bağımlıdır.

İspat: $L_K(E)$ düzgün yerel birimsel halka ve $a, b \in L_K(E)$ $L_K(E)$ nin yerel birimsellik koşullarını sağlayan bazı elemanları olsun. Ayrıca $L_K(E)$ içindeki v yerel birimseli için eğer hem a nın hem de b nin $L_K(E)$ içindeki yerel tersleri mevcutsa $u_1 a = v$ ve $u_2 b = v$ olacak biçimde $u_1, u_2 \in L_K(E)$ vardır. Ayrıca $s = u_1$ve $t = -u_2$ olacak şekilde $sa + tb = 0$ olduğunu elde ederiz. $L_K(E)$ nin elemanlarından biri yerel terse sahip değilse ve yerel terse sahip olmayan elemanlarından birine a dersek yerel birimsellik koşullarının tanımından $aua = a = va \Rightarrow (au - v)a = 0$ olarak yazabiliriz.

Şimdi ise $(au - v) \neq 0$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki; $(au - v) = 0$ olsun. Bu durumda L düzgün yerel birimsel olduğundan $au = v \Rightarrow u'u$ dur.

$$au - u'u = 0$$

$$(a - u')u = 0 \Longrightarrow a = u'$$

a , L nin yerel terse sahip olmayan bir elemanı ve u' nün yerel tersi u olduğundan

$$a \neq u' \Rightarrow (a - u')u \neq 0$$

$$(a - u')u \neq 0 \Rightarrow (a - u')u \neq au - u'u.$$

$0 \neq au - u'u \Rightarrow 0 \neq au - v \Rightarrow v \neq au$ olduğundan $au = v$ olmasıyla çelişir. O halde $s = (au - v) \neq 0$ ve $t = 0$ için $sa + tb = 0$ dır.

Tanım 4.1.1. R yerel birimsellere sahip bir halka olsun. Eğer her $a \in R$, için $u'u = v$ (uu' =v),$va = a(av = a)$ ve $aua = a$ olacak şekilde $v \in R$ idempotenti ve sol(sağ) yerel u', u tersleri mevcutsa R halkasına sol(sağ) düzgün yerel birimsel halka denir.

Teorem 4.1.5. Aşağıda verilen koşullar birbirine denktir.

i) H sol düzgün yerel birimsel halkadır.

ii) H düzgün ve $x, y \in L$ yollarının hepsi için $Hx = Hy$ ise x , y nin inital segmentidir.

iii) L dual –Rickart modül ve $x, y \in L$ yolları için $Hx = Hy$ ise x, y nin inital segmentidir.

İspat: (i)⇒ (ii); H sol düzgün yerel birimsel halka olsun. Teorem 4.1.1. den H düzgün ve L de sol düzgün yerel birimsel halkadır. Şimdi $x, y \in L$ olmak üzere iki yolu alalım. O halde L yerel birimsel halka olduğundan $vy = y, v_1 v_2 = v$ ve $y = yv_1 y$ olacak şekilde $v \in L$ idempotenti ve $u_1, u_2 \in L$ yerel tersleri vardır. Eğer $Hx = Hy$ ise bazı $f \in H$ için $x = f(y)$ dir. Ayrıca $y = yv_1 y$ olarak yazabildiğimiz için $f(y) = f(yv_1 y)$ dir. Böylece $x = \underbrace{f(yv_1)}_{\in L}\ y$ elde ederiz. Dolayısıyla x, y nin inital segmentidir.

(ii)⇒ (iii); H düzgün halka ise Teorem 4.1.1 den L de düzgün halkadır. 2011 yılında Lee ve Tariq tarafından yapılan çalışmaya göre bir halka üzerinden oluşturulan modülün dual- Rickart modül olması için gerek ve yeter koşulun halkanın düzgün halka olmasıdır. Bu durumda L düzgün halka ise L dual-Rickart modüldür ve L dual -Rickart modül olduğundan $f \in H$ için $f(L)$, L nin dik toplananı olur. Bu nedenle $f(L) = eL$ olacak şekilde $e \in H$ idempotenti vardır. Şimdi $x \in L$ yolunu ele alalım. L dual-Rickart modül olduğundan $f(x) = e(y)$ olacak şekilde $y \in L$ yolu vardır. O halde;

$$f(x) = e(y) \Rightarrow e\big(f(x)\big) = e\big(e(y)\big) = \underbrace{(ef)}_{\in H}(x) = e(y) = y = f(x)$$

olduğundan y nin inital segmenti x dir.

(iii)⇒ (i); L dual- Rickart modül olsun. Bu durumda $f \in H$ için $f(L), L$ nin dik toplananıdır. O halde $f(L) = eL$ olacak biçimde $e \in H$ idempotenti vardır. $x \in L$ alalım. $f(x) = e(y)$ olacak şekilde $y \in L$ vardır. Şimdi; $(ef)(x) = e\big(f(x)\big) =$

$e(e(y)) = e(y) = f(x)$ ise $ef = f$ elde ederiz. Ayrıca f nin h gibi sol tersi ve $g = fe$ olsun. Buradan $gh = \underbrace{hf}_{e} e = e$ ve $fhf = fe = f$ dir.

Teorem 4.1.6. $L_K(E)$ sol morfik ve düzgün halka ise $L_K(E)$ sol düzgün yerel birimsel halkadır.

İspat: $L_K(E) := L$ sol morfik ve düzgün halka olsun. Bu durumda her $a \in L$ elemanları hem düzgün hem de morfiktir. Böylece $a \in L$ için $a = axa$ ve $La = ann(b)$ ve $Lb = ann(a)$ olacak şekilde $b \in L$ vardır. $u = xax + b$ alalım. L yerel birimsellere sahip halka olduğundan $va = a$ olacak biçimde $v \in L$ idempotenti vardır. Ayrıca u sol yerel terse sahip eleman ise $a = aua$ olarak yazılır. O halde;

$0 = va - a = va - axa = (v - ax)a$ ve $v - ax \in ann(a) = Lb$ olarak bulunur. Dolayısıyla $y \in L$ elemanı için $v - ax = yb$ elde ederiz. Şimdi $u'u = v$ olacak şekilde u'nun sol yerel tersini $u' = a + y(v - ax)$ olarak alalım.

$$u'u = \big(a + y(v - ax)\big)(xax + b)$$

$$= axax + ab + y(v - ax)xax + y(v - ax)b$$

$$= ax + ab + yvxax - yxaxax + yvb - yxab$$

$$= ax + yb = v$$

elde ederiz. Dolayısıyla L sol düzgün yerel halkadır.

Teorem 4.1.7. $L_K(E)$ morfik ve görüntü- projektif ise H sol morfiktir.

İspat: $L_K(E)$ morfik ve görüntü-projektif olsun. L morfik olduğundan $L\alpha = ker(\beta)$ ve $L\beta = ker(\alpha)$ olacak biçimde $\alpha, \beta \epsilon H$ seçebiliriz. $\alpha\beta = 0$ olduğundan $H\alpha \subset ann^H(\beta)$ dır. o halde; eğer $\gamma \epsilon\, ann^H(\beta)$ ise $\gamma\beta = 0$ olduğundan $L\gamma \subset ker(\beta) = L\alpha$ dır. Ayrıca L görüntü- projektif olduğundan $\gamma \epsilon\, H\alpha$ dır. Bu yüzden $H\alpha = ann^H(\beta)$ dir. Benzer olarak $H\beta = ann^H(\alpha)$ gösterilebilir. Sonuç olarak H sol morfiktir.

Teorem 4.1.8. H sonlu-dik toplanan halka ise $L_K(E)$ de sonlu- dik toplanan halkadır.

İspat: $x, y \in L_K(E)$ alalım. H sonlu dik toplanan halka olduğundan $\varepsilon \epsilon H$ idempotenti için, $\lambda_x\varepsilon = \lambda_x = \varepsilon\lambda_x$ ve $\lambda_y\varepsilon = \lambda_y = \varepsilon\lambda_y$ olacak şekilde $\lambda_x\lambda_y = \varepsilon$ olduğunda $\lambda_y\lambda_x = \varepsilon$ dur. $xu = x = ux, yu = y = uy$ eşitliklerini sağlayan bir $u \epsilon L$ idempotenti için;

$$\lambda_x\lambda_y = \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\lambda_x\lambda_y}_{\varepsilon}\lambda_x = \varepsilon\lambda_x = \varepsilon\lambda_{ux} \Rightarrow \lambda_x = \lambda_{\varepsilon(u)}\lambda_x$$

$$\lambda_x = \underbrace{\varepsilon\lambda_x = \lambda_{\varepsilon(x)}}_{\text{Önerme 3.1.1. den}} = \lambda_{\varepsilon(xu)} = \varepsilon\lambda_x\lambda_u = \varepsilon\underbrace{\lambda_x\varepsilon}_{\lambda_x}\lambda_u = \lambda_{\varepsilon(x)}\lambda_{\varepsilon(u)} = \varepsilon\lambda_x\lambda_{\varepsilon(u)}$$

$$\lambda_x = \underbrace{\varepsilon\lambda_x}_{\lambda_x}\lambda_{\varepsilon(u)}$$

$\lambda_x = \lambda_x\lambda_{\varepsilon(u)} = \lambda_x\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \lambda_{\varepsilon(u)}$ dur. O halde $\lambda_x\lambda_y = \varepsilon$ olduğundan $\lambda_x\lambda_y = \lambda_{\varepsilon(u)}$ olarak elde ederiz. Benzer şekilde;

$$\lambda_y\lambda_x = \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\lambda_y\lambda_x}_{\varepsilon}\lambda_y = \varepsilon\lambda_y = \lambda_y \Rightarrow \lambda_{uy} \Rightarrow \varepsilon\lambda_{uy} = \lambda_{\varepsilon(uy)} = \lambda_{\varepsilon(u)y} = \lambda_{\varepsilon(u)}\lambda_y$$

$$\lambda_y = \varepsilon\lambda_y = \lambda_{\varepsilon(yu)} = \lambda_{\varepsilon(y)}\lambda_{\varepsilon(u)} = \varepsilon\lambda_y\lambda_{\varepsilon(u)}$$

olduğundan,

$\lambda_y\lambda_x = \lambda_{\varepsilon(u)}$ dur. O halde $\lambda_x\lambda_y = \lambda_{\varepsilon(u)}$ olarak verildiğinde $\lambda_y\lambda_x = \lambda_{\varepsilon(u)}$ olur.

Ayrıca $\lambda_y\lambda_{\varepsilon(u)}\lambda_x = \underbrace{\lambda_y\lambda_x}_{\varepsilon}\lambda_{\varepsilon(u)} = \varepsilon\lambda_{\varepsilon(u)} = \lambda_{\varepsilon^2(u)} = \lambda_{\varepsilon(u)}$ elde ederiz.

L sonlu-dik toplanan halka ise L nin düzgün yerel birimsel halka olduğu düşünülebilir. Fakat bu düşünce yanlıştır. Çünkü $K[x, x^{-1}]$ değişmeli Leavitt yol cebiri sonlu-dik toplanan halkadır fakat düzgün von Neumann halkası değildir.

Sonuç 4.1.1. H sonlu-dik toplanan halka ise E grafının çıkışı yoktur.

İspat: H sonlu dik toplanan halka ise Teorem 4.1.8. gereğince L de dik toplanan halkadır. Önerme 3.1.5. gereğince de L dik toplanan halka ise E grafının çıkışı yoktur.

Teorem 4.1.9. H değişim halkası ise L sonlu- dik toplanan halkadır.

İspat: H değişim halkası olsun. Önce H değişim halkası ise L nin de değişim halkası olduğunu gösterelim H değişim halkası olduğundan Önerme 3.1.3. den $e = f\lambda_x = g + \lambda_x - g\lambda_x$ olacak biçimde $x \in L$ ve $f, g \in H$ vardır.

L, H nin sol ideali olduğundan $e = f\lambda_x \in L$ ve $g = e\lambda_x + g\lambda_x \in L$ dir. $u \in L$ yerel birimi için $ux = x = xu$, $f\lambda_x = f\lambda_{ux} = f\lambda_u\lambda_x$ olacak biçimde Önerme 3.1.1. den $f\lambda_u = \lambda_{f(u)} \in L$ olarak yazılır. Dolayısıyla L değişim halkasıdır.

Şimdi ise her $x, y \in L$ ve $u \in L$ idempotenti için $ux = x = xu, uy = yu = y$ ve $xy = u$ verildiğinde $yx = u$ olduğunu gösterelim. L değişim halkası olduğundan $r, s \in L$ ve

$u \in L$ idempotenti için $u = rx = s + x - sx$ olarak yazılabilir. Bu durumda

$$u = rx \Rightarrow uy = rxy = y \Rightarrow \underbrace{rxy}_{xy=u} = ru \Rightarrow yx = rux = rx = u$$

Ayrıca değişim halkaları simetrik olduğundan;

$u = rx \Rightarrow xu = xrx = x \Rightarrow xy = u = (xrx)y = xr\,\underbrace{(xy)}_{u} = (xr)u = u \Rightarrow xr = u$ dur.

Teorem 4.1.10. L sonlu- dik toplanan halka ise L değişim halkasıdır.

İspat: L sonlu- dik toplanan halka olsun. $x, y \in L$ ve $u \in L$ idempotenti $ux = x = xu, uy = y = y$ ve $xy = u$ verildiğinde $yx = u$ olacak biçimde vardır. Herhangi bir $x \in L$ için $r := y, s := u$ olarak alırsak , $u = rx = s + x - sx$ ve $u = yx = u + x - ux$ elde edilir. Böylece, L değişim halkasıdır.

Sonuç 4.1.2. Aşağıda verilen koşullar birbirine denktir.

- **i.** H, değişim halkasıdır.
- **ii.** $L_K(E)$, değişim halkasıdır.
- **iii.** $L_K(E)$, sonlu- dik toplanan halkasıdır.
- **iv.** E grafı çıkışa sahip değildir.

İspat:(i) $\Leftrightarrow$ (ii); Önerme 3.1.3. den H, değişim halkası ise $L_K(E)$ de değişim halkasıdır ve $L_K(E)$, değişim halkası ise H, değişim halkasıdır.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i); Teorem 4.1.10. dan $L_K(E)$, sonlu- dik toplanan halkası ise $L_K(E)$, değişim halkasıdır. Önerme 3.1.3. den de; $L_K(E)$, değişim halkası ise H, değişim halkasıdır.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii); Önerme 3.1.3. den H, değişim halkası ise $L_K(E)$, değişim halkasıdır. Teorem 4.1.9 dan $L_K(E)$, değişim halkası ise $L_K(E)$, sonlu- dik toplanan halkasıdır.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv); Sonuç 4.1.1. den $L_K(E)$, sonlu- dik toplanan halkası ise E grafı çıkışa sahip değildir.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii); Sonuç 4.1.1. den $L_K(E)$, sonlu- dik toplanan halkası ise E grafı çıkışa sahip değildir. Teorem 3.1.2. den E grafının çıkışı yoksa $L_K(E)$, sonlu- dik toplanan halkasıdır.

5.SONUÇLAR

Katsayıları keyfi bir cisim üzerinde olan Leavitt yol cebirlerinin temel özellikleri incelenmiş ve $L := L_K(E)$ olarak gösterdiğimiz Leavitt yol cebirlerinin sağ L modülleri üzerinden H olarak adlandırdığımız birimli bir endomorfizma halkası elde edilmiştir. Bu tezde sol düzgün yerel birimsel halkanın tanımı verilmiştir. Ayrıca, H düzgün yerel birimsel halka ise L de düzgün yerel birimsel halka, L morfik ve görüntü-projektif ise H halkası sol morfik, H sonlu- dik toplanan halka ise L de sonlu dik toplanan halka olduğu gösterilmiştir. Son olarak H değişim halkası ise L sonlu- dik toplanan halka ve L sonlu-dik toplanan halka ise L nin değişim halkası olduğu ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasında elde ettiğimiz sonuçlar, Vas' ın ve Akalın'ın 2012 yılında yaptığı çalışmada Noetherian Leavitt yol cebirleri temiz (clean) modüldür. Noetherian Leavitt yol cebirlerinin temiz (clean) modül olması için gerek ve yeter koşul Noetherian Leavitt yol cebirleri üzerinden oluşturulan endomorfizma halkalarının temiz halka olmasıdır. Her temiz halka değişim halkası olduğundan oluşturulan endomorfizma halkası değişim halkası ve eğer değişim halkası ise L nin sonlu dik toplanan halkasının olup olmadığına dair yapılan veya yapılacak olan çalışmaların araştırılmasına imkan verebilir.

KAYNAKLAR

Abrams, G. and Pino, G. A. (2005) "The Leavitt Path Algebra of a Graph", ***J. Algebra*** 293 (2), 319–334.

Abrams , G. and Rangaswamy K. M. (2010) "Regularity Conditions for Arbitrary Leavitt Path Algebras", ***Algebras and Representation Theory***, 319–334.

Abrams , G. (2017) "Workshop on Leavitt path algebras (three one-hour introductory lectures)", ***FloripaDynSys-III***, Florianopolis, Brazil.

Abrams, G. Ara, P. and Molina, M. (2017) Leavitt Path Algebras, ***Springer.***

Abrams, G. , Aranda Pino, G. , Perera, F. and Siles Molina, M. , (2010) " Chain Conditions for Leavitt Path Algebras, ***Forum Mathematicum*** , 22 (1), 95-114.

Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. (1969) ''Introduction to Commutative Algebra", ***Ed: Lynn H. Loomis***.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992) "Rings and Categories of Modules", Second ed., ***Springer***, New York.

Ara, P. (1997) ''Extensions of Exchance Rings", ***J. Algebra*** 197, 409-423.

Ara, P. , Moreno, M. A. and Pardo, E. , (2007) " Nonstable K-Theory for Graph Algebras", **Algebras and Representation Theory** , 10, 157-178.

Bresar, M.(2004) " Introduction to Noncommutative Algebra", ***Springer***, Switzerland.

Crawley, P. , J´onnson, B. (1980)" Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems", ***Pacific J. Math***. , 91, 249-261.

Cuntz, J. , (1977) " Simple C^*Algebras Generated by Isometries", ***Commun. Math. Phys.*** , 57, 173-185.

Dangerfield, I., (2011) “Leavitt Path Algebras”, University of Otago, Dunedin, , 178s. (Master Thesis).

Ehrlich, G. , (1968) “Unit regular rings”, ***Portugal. Math***. , 27, 209-212.

Fuller, K. R. , (1976) “ On Rings whose Left Modules are Direct Sums of.Finitely Generated Modules”, ***Proc. Amer. Math. Soc***. , 54, 39-44.

Goodearl, K. R. , (1979) “Von Neumann Regular Rings”, ***Pitman*** , London.

Goodearl, K.R. and Warfield , R.B. Jr. (2004)“An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings”, ***London Mathematical Society***, Cambridge, 61.

Henriksen, M. , (1973) “ On a Class of Regular Rings That Are Elementary Divisor Rings”, ***Archive der Mathematik***, 24, 133-141.

Hungerford, T. W. (2000) “Algebra” , ***Springer***.

Kasch, F. (1982) “ Modules and Rings”,Academic Press, ***London Mathematical Society***.

Lam, T.Y. (2006)“Corner Ring Theory: A Generalization of Peirce Decompositions”, ***Algebras, Rings and Their Representations***, 153-182.

Lam, T. Y.(1999) “ Lectures on Modules and Rings”, ***Springer*** , New York.

Leavitt, W. , (1962) “The Module Type of a Ring”, ***Trans. Amer. Math. Soc***. , 103, 113-130.

Lee, G. , Tariq, R. S. and Cosmin, S. R, (2011) “ Dual Rickart modules”, ***Commun. in Algebra*** , 39, 4036-4058.

Maeda, (1960) “ On a Ring whose Principal Right Ideals Generated by Idempotents of a Lattice” , ***I. Sci. Hirosh. Univ.*** , Ser. A 24, 509-525.

Matej, B. (2014) ‘‘Introduction to Noncommutative Algebra”, ***Springer***.

Mohammed S. H. and . Müller ,B. J. (1990) " Continuous and Discrete Modules" ***London Math. Soc***. , 147.

Nicholson ,W. K. and Campos, E. S. (2005) "Morphic Modules," ***Communications in Algebra*** , 33 (8) 2629-2647.

Özdin, T. (2018) "On Endomorphism Rings of Leavitt Path Algebras" ***Filomat***, 11-18.

Pino, G. A. , Rangaswamy, K. M. and Molina, M. S. (2015) ''Endomorphisim rings of Leavitt path algebras", ***Journal of Pure and Applied Algebra***, 219 (12), 5330-5343.

Pino,G. A. , Rangaswamy, K. M. and Molina, M.S. (2011) " Weakly Regular and Self-İnjective Leavitt Path Algebras Over Arbitrary Graphs" ***Springer***,751–777.

Raeburn, I. (2005) ''Graph algebras", CBMS Regional Conferans Series in Mathematics, ***Amer Math Soc Providence,*** 103.

Rotman, J. J. 2000, " An introduction to homological algebra " Academic Press, New York.

Ware, R. (1971) " Endomorphism Rings of Projective Modules" ***Trans. Amer. Math*. Soc.** 155 (1), 233–256.

Warfield , R. B. Jr. (1972) "Exchange Rings and Decomposition of Modules" ***Math. Ann***. , 31–36.

Vas, L. (2015) " Canonical traces and direct finite Leavitt path algebras", ***Algebras and Representation Theory***, 18(3), 711-738.