T.C.

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

İKTİSAT ANABİLİM DALI

RAMSEY MODELİ ÖZELİNDE ETKİN BÜYÜME VE TASARRUF İLİŞKİSİ: TÜRKİYE ÖRNEĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Rabia ÖCAL

Danışman

Dr. Oğuzhan YILMAZ

Hatay-2020

T.C.

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

İKTİSAT ANABİLİM DALI

RAMSEY MODELİ ÖZELİNDE ETKİN BÜYÜME VE TASARRUF İLİŞKİSİ: TÜRKİYE ÖRNEĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Rabia ÖCAL

Danışman

Dr. Oğuzhan YILMAZ

Hatay-2020

ONAY

RABİA ÖCAL tarafından hazırlanan ***"RAMSEY MODELİ ÖZELİNDE ETKİN BÜYÜME VE TASARRUF İLİŞKİSİ: TÜRKİYE ÖRNEĞİ"*** adlı bu çalışma jüri tarafından lisansüstü öğretim yönetmeliğinin ilgili maddelerine göre değerlendirilip oybirliği/oyçokluğu ile ***İKTİSAT ANA BİLİM DALINDA*** yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

…./…./2020

Jüri Üyeleri	**İmza**
Dr. Öğr. Üyesi Oğuzhan YILMAZ (Tez Danışmanı, Başkan)	
Prof. Dr. Mehmet KARA (Üye)	
Dr. Öğr. Üyesi Sertaç HOPOĞLU (Üye)	

Rabia ÖCAL tarafından hazırlanan ***"Ramsey Modeli Özelinde Etkin Büyüme ve Tasarruf İlişkisi: Türkiye Örneği"*** adlı tez çalışmasının yukarıda imzaları bulunan jüri üyelerince kabul edildiğini onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa Onur KAN

Enstitü Müdürü

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ***“Ramsey Modeli Özelinde Etkin Büyüme ve Tasarruf İlişkisi: Türkiye Örneği”*** adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

01.01.2020

Rabia ÖCAL

TEŞEKKÜR METNİ

Bu çalışma boyunca bilgi ve tecrübelerini esirgemeden zamanını bana ayıran, değerli hocam ve danışmanım Dr. Oğuzhan YILMAZ' a;

Yüksek lisans ders dönemi de dahil olmak üzere bu çalışma sürecinde göstermiş olduğu müsamahalarından dolayı Sayın Kaymakam Dr. Polat KARA' ya

Bu günlere gelmemde benden daha çok emekleri olduğuna inandığım anneme ve babama;

Göstermiş olduğu sabırlarından dolayı canım eşim Yusuf'a ve kıymetli kızlarım Zeynep Merve'ye ve Zehra Nur'a sonsuz teşekkür ederim.

Rabia ÖCAL

Hatay,2020

RAMSEY MODELİ ÖZELİNDE ETKİN BÜYÜME VE TASARRUF İLİŞKİSİ: TÜRKİYE ÖRNEĞİ

Rabia ÖCAL
İktisat Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi,2020
Danışman: Dr. Öğretim Üyesi, Oğuzhan YILMAZ

ÖZET

Bu çalışmada normatif büyüme modellerinden Ramsey Büyüme Modeli incelenmiştir. Etkin büyümeyi optimum tüketime dayandıran Ramsey, modelini kurarken dinamik optimizasyon metotlarından faydalanmıştır. Dolayısı ile çalışma dinamik optimizasyon metotlarının teorisini ve iktisadi uygulamasını da içermektedir. Ayrıca Ramsey Büyüme Modeli'ne göre Türkiye etkin iktisadi büyümeye veya denk bir soru olan optimum tüketime ulaşabilmiş midir soruları cevaplanmaktadır. Bu bakımdan kişi başı gayrisafi yurt içi hasıla serisi ile kişi başı özel tüketim nihai harcamaları serisine ait uzun dönemli ilişki zaman serisi analizi teknikleri ile araştırılmıştır. Ayrıca serilerin gelir grubu yüksek ülkeler için standart sapma değerleri ile Türkiye'nin ve aynı gelir grubunda bulunan Malezya'nın standart sapma değerleri karşılaştırılarak optimum tasarruf (tüketim) hakkında bilgi elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER

Dinamik Optimizasyon, Etkin Büyüme, Optimum Tüketim Oranı (Tasarruf Oranı), Eş Bütünleşme Analizi, Standart Sapma.

THE RELATIONSHIP BETWEEN EFFICIENT GROWTH AND SAVINGS SPECIFIC TO RAMSEY MODEL:

THE CASE OF TURKEY

Master'sThesis Rabia ÖCAL

Department of Economics,2020

Supervisor:Asst. Prof. Dr.FacultyMember Oğuzhan Yılmaz

ABSTRACT

In the present study, one of the normative growth models, the Ramsey Growth Model was examined. Basing the efficient growth on the optimum consumption, Ramsey utilized the dynamic optimization methods while establishing his model. Thus, the present study incorporates the theory and the economic implementation of dynamic optimization methods. Moreover, the answer to the question "if Turkey has achieved the efficient economic growth and (as an equal achievement) the optimum consumption" is sought. In this aspect, the long-term relationship between "gross domestic product per capita" series and "private consumption final expenses per capita" series were examined using time-series analysis methods. Moreover, by comparing the standard deviation values of these two variables for high-income group countries and Turkey and Malaysia, which is in the same income group with Turkey, the information was gathered regarding the optimum savings (consumption).

KEY WORDS

Dynamic Optimization, Optimum Growth , Optimum Consumption Rate (Saving Rate), Co-Integration Analysis, Standard Deviation.

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM
LİTERATÜR TARAMASI

İKİNCİ BÖLÜM
DİNAMİK OPTİMİZASYON

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

RAMSEY MODELİ

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TÜRKİYEDE ETKİN BÜYÜMENİN AMPİRİK ANALİZİ

TABLOLAR

ŞEKİLLER VE GRAFİKLER

KISALTMALAR

f: Fonksiyon

Δf: Fonksiyonun artışı

J: Fonksiyonel

ΔJ: Fonksiyonelin artışı

γJ: Fonksiyonelin ilk varyasyonu

$\dot{f}$: f'nin birinci türevi

$\ddot{f}$: f'nin ikinci türevi

df: f'nin diferansiyeli

L: Lagrange denklemi

λ: Lagrange çarpanı

λ^T: Lagrange çarpanının transpozesi

$(\ )_*$: Optimal değer şartı

$K(t)$: t anındaki sermaye

$C(t)$: t anındaki tüketim

φ: Tüketimi refaha bağlayan fonksiyon

ψ: Emeğin fonksiyonu

$\dot{\varphi}$: Fonksiyonun birinci türevi

ψ: Fonksiyonun birinci türevi

$\ddot{\varphi}$: Fonksiyonun ikinci türevi

$\ddot{\psi}$: Fonksiyonun ikinci türevi

U: Mutluluğu ifade eden fonksiyonel

$\dot{U}$: Fonksiyonelin birinci türevi

$\ddot{U}$: Fonksiyonelin ikinci türevi

H: Hamilton denklemi

d/dt: Fonksiyon veya fonksiyonelin t 'ye göre birinci türevi

EKK: En küçük kareler yöntemi

St. Dev.: Standart sapma değeri

ADF: Genişletilmiş Dickey Fuller

GSYİH: Gayrisafi Yurtiçi Hasıla

GİRİŞ

Etkinlik kavramı, her alanda olduğu gibi iktisadi büyüme alanında da önemli olduğu fikrini her geçen gün kabul ettirmektedir. Kavram iktisat ile birleşince en az maliyet ve çaba ile en çok faydayı elde etme anlamına gelmektedir. Etkin iktisadi büyüme kavramı ise dinamik bir özellik barındırmaktadır. Fayda maksimizasyonunun zamanın her anında sağlanması tüketimin veya tasarruf değişkenlerinin zamana bağlı bir fonksiyon olduğu anlamını taşımaktadır. Bu, iktisadi büyümede matematiksel yöntemlerin de kullanması gerekliliğini ortaya koymaktadır ki bundan yıllar öncesine bakıldığında 1928 yılında bir İngiliz matematikçisi Ramsey'in yaptığı çalışma ile de bu sonuç apaçık ortaya koyulmuştur. Tüm zamanlarda faydayı maksimum yapmak için optimum tasarruf oranının ne olması gerektiği üzerine çalışmalar yapan Ramsey'in "Tasarruf'un Matematiksel Teorisi" başlıklı makalesi incelendiğinde varyasyon hesabı ve optimal kontrol teorisinden yararlanarak etkin büyüme modelini ortaya koyduğu anlaşılmaktadır. Etkin iktisadi büyümeyi Ramsey modeli özelinde inceleyeceğimiz çalışmada onun büyüme modelini ortaya koyarken kullandığı dinamik optimizasyon metotlarını ele almamamız çalışmanın eksik olmasına neden olacaktır. Bu nedenle sunulan bu çalışmanın ikinci bölümü, Ramsey'in yaklaşımını daha iyi tanımlayabilmek ve uygulayabilmek amacıyla dinamik optimizasyona odaklanmıştır. Şüphesiz bir çalışmanın matematik tekniğini kavramadan iktisadi uygulamasını anlamamız mümkün olmayacaktır. Varyasyon hesabı, optimal kontrol ve iktisadi dinamiklik kavramlarının teorisini örnekler yolu ile anlatılarak tamamlanan bu bölümü takiben, üçüncü bölümde Ramsey büyüme modelini anlamaya çalışarak iktisadi etkinliğin sağlanmasının yolunun ne olduğu sorusuna yanıt aranmıştır. Değişimler hesabı ve optimal kontrol teorisi teknikleri ile etkin büyüme için optimum tasarruf (tüketim) oranının kuralını Ramsey Modeli ile ortaya konulmasının ardından zamanlar arası tercih oranının (iskonto) modele dahil edilmesi ve nüfus artışı durumunda sermayenin marjinal verimliliğinin ne olacağı analiz edilmiştir. Daha sonra çalışmada durağan denge durumu sonrası sermayenin marjinal verimliliğinin sıfır olduğunu ortaya koyulmuştur. Durağan denge durumu sonrası zamanlar arası tercih ve nüfus artışının Ramsey modeline dahil edilerek optimum sermaye birikiminin kuralını belirlenmiştir.

Ramsey'in ortaya koyduğu kurala göre optimum tüketimin büyüme hızının hesaplanmasında kullanılan değişkenler nüfus artış hızı, sermayenin yıpranma oranı, zamanlar arası tercih oranı (iskonto), ve sermayenin marjinal verimliliğidir.

Çalışmanın dördüncü ve son bölümünde Ramsey Modeli'nin Türkiye ekonomisi için geçerliliği araştırılmıştır. Esasında optimum tüketimin ne olması gerektiğine Ramsey'in formülünü kullanarak ulaşıp Türkiye ekonomisinde gerçekleşen tüketim harcamaları ile kıyaslanarak Ramsey Modeline göre Türkiye tüketim harcamalarında optimuma ulaşmıştır ya da ulaşmamıştır denilebilinecekti. Ancak ilgili değişkenler için Türkiye'de zaman serisi verilerine ulaşmada gerçekleşen problemler nedeni ile Ramsey Modeli'ne göre optimum tüketimin belirlenmesinde kullanılan değişkenlere ait verilere ulaşılamamıştır. Bu durum çalışmanın sınırlılığını ortaya koymaktadır. Bu sınırlılık dahilinde Türkiye'de optimum tüketimi araştırma yolunda ilerlerken önce Ramsey'in sonsuz zaman ufku dikkate alınarak kişi başı hane halkı tüketim harcamaları ile kişi başı reel gelir değişkenleri arasında uzun dönemli ilişkinin varlığı eş tümleşme analizleri ile araştırılmıştır. Uzun dönemli ilişkinin varlığı ortaya konulduktan sonra hata düzeltme modelinin kullanılabilirliği Wald testi ile araştırılmıştır. Hata düzeltme modelinin anlamlılığı tespit edildikten sonra bu çalışma kapsamında Dünya Bankası'ndan elde edilen sıralamaya göre yüksek gelir grubunda olduğu belirlenen ülkelerden İngiltere, Kanada, Portekiz ile; Türkiye ile aynı gelir grubunda bulunan Malezya'nın kişi başı özel tüketim harcamaları serileri ile kişi başı reel gelir serilerine ait standart sapmaların kıyaslanması yoluna gidilmiştir. Standart sapmanın kıyaslanmasında teoriden elde ettiğimiz bir bilgi olan optimizasyonun sağlanmasında değişimin az olması gerekliliği bilgisi kullanılmıştır. Yani standart sapmasına bakılarak seriye ait farklı zamanlardaki değişimin az olduğu veya tam tersi fazla olduğu bilgisine dayanarak etkinlik hakkında bilgi elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen bulgulara göre Türkiye ekonomisinde kişi başı reel gelir ile tüketim arasında uzun dönemli ilişki olduğuna karar verilmiştir. Yine standart sapmaları hesaplanan gelir ve tüketim değişkenlerinin yüksek gelir grubunda bulunan İngiltere ve Kanada'ya göre ortalama dört kat fazla olduğu tespit edilmiştir. Bu ise yüksek gelir grubunda bulunan ülkelere göre gelir ve tüketim değişkeninde optimizasyonun sağlanmadığı hakkında bilgi elde edilmesini sağlamıştır.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında literatürde; etkin büyüme, dinamik optimizasyonun iktisadi uygulamalarını içeren ve Ramsey Modeli'ni temel alarak yapılan çalışmalar incelenecektir.

BİRİNCİ BÖLÜM
LİTERATÜR TARAMASI

1. LİTERATÜR

Literatürde Ramsey Modeli özelinde yapılan çalışmalar sınırlı olmasına rağmen etkin büyüme ve zamanlar arası tercih konularına değinen çalışmalar mevcuttur. Bu kısımda bu çalışmalardan da bahsedilecektir.

Thaler (1981), tasarrufun büyüme üzerindeki etkisini dinamik optimizasyon metotları ile ortaya koymuş ve gelişmekte olan ülkeler için tasarruf ile büyüme arasında birebir ilişki olduğunu ortaya koymuştur.

Hall (1987) Tüketim isimli çalışmasında Rasyonel Beklentiler hipotezine göre modelleme yaparak Sürekli Gelir hipotezini bir adım ileri taşımış ve ekonometrik çalışmasının neticesinde tüketimin rassal yürüyüş (random walk) sürecinde olduğuna karar vermiştir. Yaşam Döngüsü -Sürekli Gelir Hipotezine ekonometrik bir katkı niteliğinde olan Rassal Yürüyüş Hipotezi cari tüketimin geçmiş tüketimler ile ilişkili olmadığını sadece bir dönem önceki tüketimin cari tüketimi açıklayabileceğini ortaya koymuştur. Ayrıca gelir değişkeninin gecikmeli değerlerinin cari tüketimi açıklamada yetersiz olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Campell , Mankiw (1989) tüketimin, gelirin ve faiz oranlarının zaman serileri ile yeniden yorumlanışı isimli çalışmalarında mutlak gelir hipotezini destekleyici sonuçlara ulaşmışlardır. Çalışmada cari gelirde meydana gelen 1 dolarlık artışın tüketimde 0,5 dolarlık bir artışa neden olduğu saptanmıştır. Bu ise tüketimin gelire aşırı duyarlılığını ortaya koymaktadır. Campell ve Mankiw'e göre bu aşırı duyarlılığın nedeni beklentilerin rasyonel beklentilere göre değil de uyarlayıcı beklentilere göre hesaplanmasıdır.

Loewenstein ve Pralec (1992), tek denklem olarak tahmin ettikleri Ramsey modelinde tüketicilerin aşırı tüketim kararlarını araştırdıkları çalışmalarında tasarruf oranını ve iskonto oranını içselleştirmişlerdir.

Laibson (1997), kalibrasyon modeli ile faiz oranları ve tüketim harcamaları arasındaki ilişkiyi pozitif ve çok güçlü bulmuştur.

Maliar ve Maliar (2006), Ramsey modelini logaritmik lineer denklem olarak tahmin ettikleri modellerinde iskonto oranının yarı-geometrik kullanımı ile determinist durumda modellerin durağan denge durumuna ulaştığını stokastik durumda ise çözüme ulaşılamayacağını ifade etmişlerdir.

Aşırım (1996), Türkiye verileri ile yaptığı çalışmasında tüketimin bir gecikmeli değeri ile ilişkisini araştırmış, bu günkü tüketimin bir dönem önceki tüketim ile tahmin edileceğini ortaya koymuştur.

Çağlayan (2003), Türkiye verilerini kullanarak yaptığı çalışmasında tüketim harcamaları ile harcanabilir gelir değişkenlerinin eş tümleşen oldukları ancak anlamlı doğrusal bir ilişki içerisinde olmadıklarını ortaya koymuştur.

Okcu (2008), gelir tüketim ilişkisini eş tümleşme analizleri ile incelediği çalışmasında gelir değişkeninin tüketim değişkenini açıklamada yetersiz olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Eryüzlü (2010), tüketicilerin, tüketim kararlarını verirlerken çok daha zaman önce yaşanan olaylardan etkilenebileceği, gelirlerinin de tüketim kararlarında önemli bir rol oynayabileceği dikkate alınarak politika üretmenin gerekliliğini vurgulamıştır.

Kargı (2014), tüketimin ve kişi başı reel gelirin zaman serilerini incelemiş tüketicilerin tüketim harcamalarının cari gelirden ve gelecek dönem beklentilerinden etkilendiği sonucuna ulaşmıştır.

Altunöz (2014), tüketim fonksiyonunun ampirik analizini yaptığı çalışmasında gelir değişkeninin tüketim değişkenini açıklamada yetersiz olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Etro (2016), tekelci rekabet altında tedarik edilen çeşitli mallar üzerindeki genel tercihlere göre makroekonomik dinamikleri ele aldığı çalışmasında kurduğu model ile kısa süreli tüketim dinamiklerini etkileyen değiştirilmiş bir Euler denklemi sunmaktadır.

Santambrogio, Xepapadeas ve Yannacopoulos (2017), Ramsey tipi optimal büyüme modelinde değişimler hesabı tekniğini kullanarak, dışsallıkların etkisi altında genel bir mekansal ekonomik model sınıfında mekansal rasyonel beklentiler dengesini araştırmışlardır. Çalışma neticesinde parametrik optimizasyon problemi için ayrıntılı tahminler kullanılarak, mekansal rasyonel beklentiler dengesinin varlığı kanıtlanmıştır. Ve bu denge yerel olmayan bir Euler –Lagrange denklemi ile karakterize edilmiştir.

Nordhaus (2017), Karbonun sosyal maliyetini yeniden gözden geçirmek isimli çalışması ile değindiği Ramsey tipi optimal büyüme modeli üzerinden revize edilmiş bir iklim ve ekonomi dinamik entegre modelini oluşturmuştur.

Krasovskii, Lebedev, Tarasyev (2017) Ramsey Modeli hakkında bazı gerçekler isimli çalışmalarında Sermayenin dinamiklerini modellerken, Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ile birleştirilen Ramsey denkleminin, Bernoulli ikamesi yoluyla doğrusal bir diferansiyel denkleme indirgendiğini göstermişlerdir. Bu denklemin logaritmik formunun tercih edilerek optimal büyüme probleminde kullanmışlardır. Çalışmaları sonsuz ufuk probleminin optimal kontrol ile çözümünü içermektedir. Kontrol kısıtlarını dikkate alarak Pontryagin maksimum prensibinde Hamilton sisteminin bir vektörel alanı olarak ifade edilen sınırlamalara bağlı olarak iki alternatif kararlı durumun varlığını kanıtlamaktadırlar.

Akimoto (2018), Ramsey Modeli'nde doğrusal bir ekonomiden dairesel bir ekonomiye geçiş isimli çalışması ile hane halklarının tüketimden kaynaklanan atıkları geri dönüştürdüğü ve geri dönüştürülmemiş atığın negatif dışsallığa sahip olduğu Ramsey tipi bir model inşa etmiştir. Çalışmanın amacını iki nokta olarak nitelendiren Akimoto ilk olarak doğrusal bir ekonomide gerçekleşen tüketimin dönüştürülmesi veya geri dönüşümü ile dairesel bir ekonomiye geçişin yapısal sürecini, ikinci nokta olarak ise optimum tüketim vergisi ve geri dönüşüm sübvansiyonunun dinamiklerini incelemektedir.

Nakamura (2020), Heterojen hane halkları ile Basit bir Ramsey Modeli'nde uzun dönemli servet isimli çalışmalarında, bireylerin ortak bir zaman tercihi ancak farklı zamanlar arası ikame esnekliklerine sahip olduğu bir Ramsey modelinde uzun dönemli servet dağılımını analiz etmektedir. Sonuç olarak, zamanlar arası ikamede hane halkları arasında heterojenliğin, yıpranmayan uzun dönemli servet dağılımının varlığı için yeterli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, uzun dönemli servet dağılımının özelliklerini sermaye diyagramı ve tüketimin faz diyagramını kullanarak araştırmıştır.

Türkiye'de yapılan çalışmalar incelendiğinde Yaşam Döngüsü- Sürekli Gelir hipotezinin omurgası olarak nitelendirilebilecek büyüme modellerinden Ramsey Büyüme Modeli üzerine çalışma olmaması dikkat çekicidir. Yine aynı şekilde Türkiye'de yapılan çalışmaların dinamik optimizasyonun iktisadi alanda kullanımına yönelik çalışmaların olmaması çalışmamızın önemini bir kat daha ortaya koymaktadır.

İKİNCİ BÖLÜM
DİNAMİK OPTİMİZASYON

2. DİNAMİK OPTİMİZASYON

İnsanlar erken yaşlardan itibaren geleceği planlamanın gerekliliğini öğrenirler. Günlük hayatımızda aldığımız kararlar yeni fırsatlarla karşılaşmamıza bu ise elenen diğer tercihler açısında fırsat maliyetlerinin oluşmasına neden olarak geleceğimizi etkilemektedir. Bugün aldığımız bir karar geleceğimizi etkilemiyor olsaydı planlama gereksinimi ortadan kalkardı. Aldığımız kararların geleceği etkileme özelliği apaçık ortada olduğuna göre bulunduğumuz zaman diliminde en iyi planlama ile en iyi tercihi yapmak durumundayız.

Bu bölümde zamanın sürekliliği içerisinde planlama sorununu çözmek amacı ile kullanılan yöntemlerden değişimlerin hesaplanması (calculus of variation) ve optimal kontrol teorisi (optimal control theory) adlı Dinamik Optimizasyon metotları ele alınacaktır. Sürekli zaman dinamik probleminin çözümü ise değişkenlerin zaman (ya da uzay) içinde izleyecekleri optimal yolu gösteren bir sürekli fonksiyondur (ya da fonksiyonlar setidir) (Kamien & Schwartz, 2018, s. 14). Optimumun varlığı, optimum için gerekli koşullar ve optimallık için gerekli koşulların yeterliliği şeklindeki, hesaplamadan doğan üç soru dinamik optimizasyonda karşılıklarını bulmaktadır (Dixit, 2002, s. 20). Bazı optimizasyon problemleri mantıklı görünebilir ama optimumları yoktur. Örneğin, her ne kadar bir düzlemde iki farklı noktayı birbirine bağlayan en kısa eğri mevcut olsa da en uzun eğri yoktur (Kamien & Schwartz, 2018, s. 16).

Değişimlerin hesaplanması ilk olarak John Bernoulli tarafından 1696'da kısa zaman eğrisi probleminin ortaya atılması ve 1697 yılında kendisi ve kendisinden bağımsız olarak kardeşi tarafından çözümün sunulmasına kadar geçen sürede kullanılmıştır (Eğer küçük bir nesne yerçekimi etkisi ile hareket ediyorsa iki sabit nokta arasındaki en kısa yol nedir?) (Kamien ve Schwartz, 2018, s. 16). İlerleyen dönemlerde Euler ve Lagrange tarafından genel matematiksel bir teori geliştirilmiştir. Değişimlerin hesaplanması teorik fizikte Hamilton Prensibi ve En Az

Eylem Prensibi'nde uygulanmıştır (Kamien ve Schwartz, 2018, s. 21). Roos, Evans, Ramsey ve Hotelling ise bu yöntemi ekonomi biliminde kullanan ilk isimlerdir (Chiang, 1992, s. 23).

1960 ların başında dinamik problemlerin çözümüne odaklanılmasıyla beraber modern matematikçiler ve ekonomistler varyasyon hesabı yöntemini daha da fazla araştırmaya ve kullanmaya başlamışlardır (Chiang ve Wainwright, 2016, s. 5).

Pontryagin ve arkadaşları 1950 yılında varyasyon hesabı yöntemini daha da ileri taşıyarak Optimal kontrol teorisini geliştirmiştir (İngilizce çevirisi 1962 yılında yayımlanmıştır)[1]. Aynı dönemlerde ekonomistler uzun yıllar öncesinde Ramsey tarafından başlatılan optimal ekonomik büyüme ile ilgilenmekteydiler (Kamien ve Schwartz, 2018, s. 25) .Varyasyon hesabı ve optimal kontrol araçları günümüzde ekonomi alanında klasikleşmiş olarak kullanılmaktadır. İktisadi yazında son dönemlerde önemini arttıran bu matematik teknik sayesinde büyüme teorileri ile planlama arasında sağlam bir köprü kurulmaktadır. Bu bölüm bahse konu bu araçların önce teorik olarak anlatımından sonrasında ise uygulamalarının örnekler üzerinden değerlendirilmesinden oluşacaktır.

2.1. VARYASYON HESABI

Varyasyon hesabı bir fonksiyona veya fonksiyonele ait ekstremum noktaları belirleme ile ilgilidir (Naidu, 2002, s. 27). Konuyu daha iyi kavramak adına bazı matematiksel ifadelerin tanımlamasına yer verilmesi uygun görülmüştür.

2.1.1. Fonksiyon ve Fonksiyonel

Verilen herhangi bir sayının belirli bir kurala göre başka bir sayı olarak karşılık bulması işlemi fonksiyon olarak adlandırılır. Verilen bir fonksiyondan yine belirli bir kural dâhilinde bir sayı üretilmesi ise fonksiyonel olarak tanımlanır. Çok değişkenli fonksiyonlar olduğu gibi çok fonksiyonlu fonksiyonellerde vardır (Chiang & Wainwright, 2016, s. 29).

Sayı(lar) $\rightarrow$ Tek bir sayı: Fonksiyon ; $\longrightarrow \{x_i\} \quad f(x_i)$

Fonksiyon(lar) $\rightarrow$ Tek bir sayı: Fonksiyonel; $\{ f_j(x_i\} \longrightarrow J[fj(xi)]$

2.1.1.1 Bir Fonksiyonun Artışı

f gibi bir fonksiyonun artışı Δf şeklinde gösterilir ve şu şekilde tanımlanır.

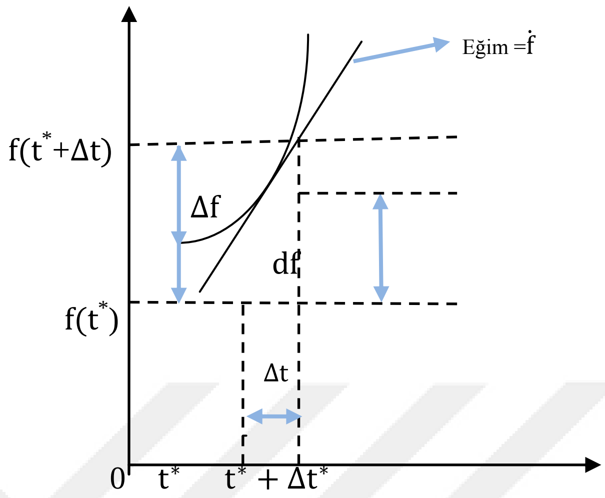
$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t) \tag{1.1}$$

[1] Bölüm 2 de bahsedildiği üzere Ramsey Büyüme Modeli'nin 1962 yılından sonra ilgileri üzerine çekmesinin nedeni geliştirilen bu matematik tekniğidir.

Tanımdan Δf nin t bağımsız değişkenine ve Δt bağımsız değişkeninin artışına bağlı olduğu görülür. $\Delta f\,(t, \Delta t)$bir fonksiyonun artışı olarak yazılabilir (Naidu, 2002, s. 23).

Şekil 1:

Bir$f(t)$ fonksiyonunun Δf artışı , df diferansiyeli ve $\dot{f}$ türevi



2.1.1.2 Bir Fonksiyonelin Artışı

J gibi bir fonksiyonelin artışı ΔJ ile gösterilir (Naidu, 2002, s. 30). 2. Bölümde Ramsey'in makalesinde ele aldığı mutluluk (bliss) ifadesi U fonkiyoneli ile ifade edilmiştir. ΔJ şöyle tanımlanır:

$$\Delta J = J\big((x) + \gamma x(t)\big) - J(x(t)) \tag{1.2}$$

Burada $\gamma x(t)$, $x(t)$ fonksiyonunun bir varyasyonudur. Bir fonksiyonel artışı $x(t)$ fonksiyonuna ve $\gamma x(t)$ fonksiyonuna bağlı olduğu için artış olarak $\Delta J(x(t), \gamma x(t))$ yazılabilir (Kamien & Schwartz, 2018, s. 40).

2.1.1.3 Diferansiyel ve Varyasyon

Bir Fonksiyonun Diferansiyeli: Bir f fonksiyonunun artışı herhangi bir t^* noktasında şöyle tanımlanır:

$$\Delta f = f(t^*+\Delta t) - f(t^*)$$

t^* Taylor serisi kullanılarak $f(t^*+\Delta t)$ genişletilir.

$$\Delta f = f(t^*) + \left(\frac{d_f}{d_t}\right)\Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)(\Delta t)^2 + \ldots - f(t^*) \tag{1.3}$$

$\Delta t'$de yüksek dereceli terimler ihmal edilerek;

$$\Delta f = (df/dt)\Delta t = \dot{f}(t^*)\Delta t = df \tag{1.4}$$

sonucu elde edilir. Burada df, t^* noktasında f'nin diferansiyeli adını alır.$\dot{f}(t^*)$, t^*da f'nin eğimi veya türevidir. df diferansiyeli Δt artışının birinci dereceden tahminidir.

2.1.1.4 Bir Fonksiyonelin Varyasyonu

Bir fonksiyonelin artışı Taylor serisinde $J\big(x(t) + \gamma x(t)\big) - Jx(t)$ genişletilerek;

$$\Delta J = J\big(x(t)\big) + \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right).\gamma x(t) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).\gamma(x(t))^2 + \ldots - J\big(x(t)\big)$$

$$= \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)\cdot\gamma x(t) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).\gamma(x(t))^2 + \ldots$$

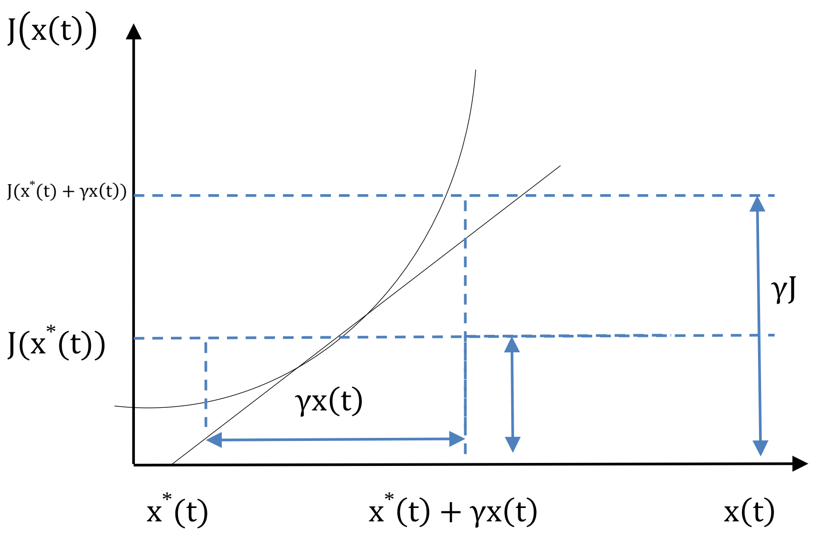
$= \gamma J + \gamma^2 J$ elde edilir.

$$\gamma J = \left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)\gamma x(t) \text{ve } \gamma^2 J = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\right)\cdot\gamma\big(x(t)\big)^2 \tag{1.5}$$

Bu eşitliklere sırayla J fonksiyonelinin ilk varyasyonu ve ikinci varyasyonu denir. J fonksiyonelinin γJ varyasyonu ΔJ artısının lineer kısmıdır. Şekil 2 de bir fonksiyonelin ilk varyasyonu ve artışı arasındaki bağlantı gösterilmiştir.

Şekil 2:

J fonksiyonelinin ΔJ artısı ve γJ ilk varyasyonu



2.1.2 Bir Fonksiyon ve Fonksiyonelin Optimumu

Bir fonksiyon ve fonksiyonelin ekstremumu (maksimum veya minimum) veya optimumu için bazı tanımlar aşağıda verilmiştir.

Bir fonksiyonelin optimal değerini belirlemede varyasyon, bir fonksiyonun ekstremal ya da optimal değerini belirlemede diferansiyelin oynadığı rol ile aynı rolü oynar. Yani diferansiyel bir fonksiyondaki çok küçük sıfıra yakın değerde değişimleri ölçebiliyorken varyasyon fonksiyonellerde meydana gelen çok küçük, sıfıra yakın değişimleri ölçer (Dixit, 2002, s. 25).

Tanım: Bir fonksiyonun optimumu: Eğer bir D düzleminde tüm noktalar için $|t - t^*| < \varepsilon$ sağlayan bir ε parametresi var ise bir $f(t)$ fonksiyonunun t^* noktasında bir göreceli optimumu vardır (Chiang, 1992, s. 32).

$$\Delta f = f(t) - f(t^*) \geq 0 \tag{1.6}$$

ise $f(t^*)$ göreceli lokal minimum;

$$\Delta f = f(t) - f(t^*) \leq 0 \tag{1.7}$$

ise $f(t^*)$ göreceli lokal maksimumdur.

Yukarıdaki şartlar keyfi bir ε için sağlanıyorsa $f(t^*)$ global mutlak bir optimuma sahiptir. Bir fonksiyonun optimumu için gerek şart (ilk) diferansiyelin sıfıra eşit olmasıdır (Kamien ve Schwartz, 2018, s. 42).

$df = 0$ Yeter şart;

Minimum nokta için ikinci diferansiyelin pozitif olması gerekir yani; $d^2f > 0$

Maximum nokta için ikinci diferansiyelin negatif olması gerekir yani; $d^2f < 0$

$d^2f = 0$ ise, değişmeyen bir noktaya tekabül eder (Naidu, 2002, s. 27).

Tanım: Bir J fonksiyonelinin optimumu;

$|x - x^*| < \varepsilon$ sağlayan bir Q düzleminde tüm x fonksiyonları için pozitif bir ε var ise x^* fonksiyonunda göreceli bir optimumu vardır (Dixit, 2002, s. 27).

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0 \tag{1.8}$$

ise$J(x^*)$ göreceli bir maksimumdur.

$$\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0 \tag{1.9}$$

ise$J(x^*)$ göreceli bir minimumdur.

Yukarıdaki bağlantılar keyfi büyüklükteki bir ε için sağlanıyorsa $J(x^*)$ global bir mutlak optimumdur (Naidu, 2002, s. 27).

$x^*(t)$ için optimum aday olarak J' nin ilk varyasyonu $x^*(t)$' de sıfır olmalıdır. Yani bir fonksiyonelin ilk varyasyonun sıfıra eşit olması optimumu için gerek şarttır (Naidu, 2002, s. 27).

$$\gamma J(x^*(t), \gamma x(t)) = 0 \tag{1.10}$$

Yeter şart ise;

minimum için yeter şart $\gamma^2 \mathrm{J} > 0$

maksimum için yeter şart $\gamma^2 \mathrm{J} < 0$ dır (Naidu, 2002, s. 27).

2.1.2. Temel Varyasyon Problemi (Euler- Lagrange Denklemi)

Başlangıç zamanı ve durumu ve bitiş zamanı ve durumu önceden verilen veya sabit olan sabit-bitiş zamanlı ve durumlu problem açıklanmak istenirse $x(t)$ gibi birinci dereceden türevlenebilir, sürekli ve skaler bir fonksiyon üretim fonksiyonu olarak ele alınırsa; üretim fonksiyonuna ait extremalleri bulmak $x^*(t)$ optimal üretim fonksiyonuna ulaşmak anlamını taşır.[2].

$$\mathrm{J}\,(x(t)) = \int_{\mathrm{t_i}}^{\mathrm{t_f}} \mathrm{V}\big((\mathrm{x(t)}, \dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}), \mathrm{t})\big)\,\mathrm{dt} \tag{1.12}$$

Fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulmak temel varyasyon problemi olarak bilinir. Burada V integralleneni sürekli, birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlidir.

$$x(t = t_i\,) = x_i,\;\; x(t = t_f) = x_f \tag{1.13}$$

Bir fonksiyoneldeki değişimi sıfıra eşitleyen varyasyon optimum için gerek şarttır. $x(t)$ fonksiyonunun optimumunu bulma girişiminde J fonksiyoneli için artış tanımlanır. Varyasyon elde edilir ve son olarak temel teorem uygulanır. Sonuç olarak temel varyasyon problemi elde edilir (Naidu, 2002, s. 28).

Bu adımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

Adım 1: Bir optimumun varsayımı

Adım 2: Varyasyonlar ve Artış

Adım 3: İlk varyasyon

Adım 4: Temel Varyasyon Teoremi

Adım 5: Yardımcı Teorem (Lemma)

Adım 6: Euler- Lagrange Denklemi

Sayılan bu adımlar verilen fonksiyonele sırası ile uygulanacaktır.

<u>Adım 1</u>: Bir optimumun varsayımı:

$x(t)$ fonksiyonu için ulaşılan optimum$\mathrm{x}^*(\mathrm{t})$ olarak kabul edilmişti. $\mathrm{x}^*(\mathrm{t})$ optimumuna yakın $x_{\mathrm{a}}(t)= \mathrm{x}^*(\mathrm{t})+ \gamma\mathrm{x}(\mathrm{t})$ fonksiyonunu alalım. $\gamma\mathrm{x}(\mathrm{t})$ $\mathrm{x}^*(\mathrm{t})$'nin varyasyonudur. $x_{\mathrm{a}}(t)$(1.13) sınır şartlarını da sağlamalıdır. Gerek şart ise;

$\gamma\mathrm{x}(\mathrm{t_i})=\gamma\mathrm{x}(\mathrm{t_f})=0$

<u>Adım 2</u>: Artış ve Varyasyonun uygulanması: İntegraller ile artış tanımı birleştirilir.

---

[2] Kısım 1.3 (1.70) denkleminde iktisadi ayrıntısı verilecektir.

$\Delta J(x^*(t),\gamma x(t)) \triangleq J(x^*(t)+\gamma x(t),\dot{x}^*(t)+\gamma\dot{x}(t),t) - J(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)$

$$= \int_{t_i}^{t_f} V(x^*(t)+\gamma x(t),\dot{x}(t)+\gamma\dot{x}(t),t)dt - \int_{t_i}^{t_f} Vx^*(t),\dot{x}^*(t),t)dt \qquad (1.15)$$

$\Delta J(x^*(t),\gamma x(t))=$

$$\int_{t_i}^{t_f}\left[V\left((x^*(t)+\gamma x^*(t),\dot{x}^*(t)+\gamma\dot{x}^*(t),t\right) - V\left((x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right)\right]dt \qquad (1.16)$$

elde edilir. ayrıca burada;

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \text{ ve } \gamma\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[\gamma x(t)] \qquad (1.17)$$

artıştaki V'yi $x^*(t)$ ve $\dot{x}^*(t)$ noktasında Taylor serisine genişleterek, ΔJ artışı

$\Delta J = \Delta J(x^*(t),\gamma x(t))$

$$= \int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{\partial V(x^*(t),\ \dot{x}^*(t),t)}{\partial x}\gamma x(t) + \frac{\partial V(x^*(t),t)}{\partial \dot{x}}\gamma\dot{x}(t)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial x^2}\left(\gamma x(t)\right)^2 + \frac{\&\,\partial^2 V(\dots)}{\partial \dot{x}^2}\left(\gamma\dot{x}(t)\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V(\dots)}{\partial x d\dot{x}}\gamma x(t)\gamma\dot{x}(t)\right\} + \cdots\right]dt \qquad (1.18)$$

halini alır. Burada kısmi türevler optimal koşulda x(t) ve $\dot{x}(t)$ ye göredir. Ve $x^*(t)$ ve $\dot{x}^*(t)$ kolaylık amaçlı ihmal edilmiştir.

<u>Adım 3</u>: Birinci varyasyon uygulanması:

$\gamma x(t)$ve $\gamma\dot{x}(t)$' de lineer olan terimler korunarak varyasyon elde edilir.

$\gamma J\left(x^*(t),\gamma\dot{x}(t)\right) =$

$$\int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{\partial V\left((x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right)}{\partial x}\gamma x(t) + \frac{\partial V\left((x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\right)}{\partial \dot{x}}\gamma\dot{x}(t)\right]dt \qquad (1.19)$$

$\gamma x(t)$ içeren terimlerde (1.19)ilk varyasyonuna ait bağıntıyı elde etmek için $\gamma\dot{x}(t)$içeren terimlerin integrasyonu gerekir. Çünkü $\gamma\dot{x}(t),\gamma x(t)$' ye bağlıdır.

$$\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* \gamma\dot{x}(t)dt = \int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \frac{d}{dt}\left(\gamma x(t)\right)dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* d\left(\gamma x(t)\right),$$

$$= \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_*\right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f}\gamma x(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{d\dot{x}}\right)_* dt \qquad (1.20)$$

Yukarıda kısmi integral uygulamalarında sıkça kullanılan $\int u dv = uv - \int v du$ formülü kullanılmıştır. Burada $u = \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}$ ve $v = \gamma x(t)$ dir. (1.20)kullanılarak birinci varyasyon için (1.19)bağıntısı aşağıdaki forma dönüşür.

$\gamma J\left(x^*(t),\gamma x(t)\right) =$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* \gamma x(t)dt + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \gamma x(t)\right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \gamma x(t)dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_*\right] \gamma x(t)dt + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \gamma x(t)\right]_{t_i}^{t_f} \qquad (1.21)$$

(1.14) bağıntısı kullanılarak (1.21) deki sınır değişkenleri için

$$\gamma J\big(x^*(t), \gamma x(t)\big) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_*\right] \gamma x(t)dt = 0 \qquad (1.22)$$

elde edilir.

Adım 4: Temel Teoremin Uygulanması:

Bir optimum için varyasyon olmamalıdır. Yani $x^*(t)$optimumu için

$$\gamma J\big(x^*(t), \gamma x(t)\big) = 0 \qquad (1.23)$$

$\gamma x(t)$fonksiyonut_f ve t_i sınır noktalarında sıfır olmalıdır.

Adım 5: Lemma'nın uygulanması:

$\gamma x(t)$fonksiyonu$[t_i, t_f]$ aralığında sürekli; sürekli bir $g(t)$ fonksiyonu $[t_i, t_f]$ aralığında bütün noktalarda sıfır olmak üzere her $g(t)$ fonksiyonu için;

$$\int_{t_i}^{t_f} g(t)\gamma x(t)dt = 0 \qquad (1.24)$$

bağıntısı geçerlidir.

Adım 6: Euler – Lagrange Denklemi:

(1.22) deki bağıntıya yardımcı temel teorem uygulandığında $x^*(t)$ için gerek şart (1.12) ile verilen J fonksiyonelinin optimalına ulaşılır.

$$\left(J\big(x(t)\big) = \int_{t_i}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt\right)$$

$$\left\{\frac{\partial V[x^*(t), \dot{x}^*(t), t]}{\partial x}\right\}_* - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial V[x^*(t), \dot{x}^*(t), t]}{\partial \dot{x}}\right\}_* = 0 \qquad (1.25)$$

bağıntısının basitleşmesi amacı ile $[x^*(t), \dot{x}^*(t), t]$idealari ihmal edilerek tüm $t \in [t_i, t_f]$ için;

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \qquad (1.26)$$

denklemi elde edilir ve bu denklem Euler-Lagrange denklemi olarak adlandırılır.

2.1.3 Euler Lagrange Denkleminin Yorumu:

Öncelikle Euler- Lagrange denklemi bir çok farklı formda yazılabilir.

$$V_x - \frac{d}{dt}(V_{\dot{x}}) \qquad (1.27)$$

Burada;

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = V_x(x^*(t), \dot{x}^*(t), t); V_{\dot{x}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = V_{\dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)$$

$V; x^*(t), \dot{x}^*(t), t$ nin bir fonksiyonu ve $x^*(t), \dot{x}^*(t)$ de t nin dönüşmüş fonksiyonları olduklarından;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}}\right)_*$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} d\dot{x} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{x}} dt\right)_*$$

$$= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}}\right)_* \left(\frac{dx}{dt}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}\right)_* \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{x}}\right)_*$$

$$= V_{x\dot{x}} \dot{x}^*(t) + V_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x}^*(t) + V_{t\dot{x}} \tag{1.28}$$

halini alır. (1.27) ve (1.28) birleştirildiğinde, Euler- Lagrange denkleminin alternatif formu elde edilir.

$$V_x - V_{t\dot{x}} - V_{x\dot{x}} \dot{x}^*(t) - V_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{x}^*(t) = 0 \tag{1.29}$$

Euler-Lagrange denklemi diferansiyel bir denklemdir.(1.25) denkleminde $\dot{x}^*$ veya $\frac{d}{dt}$ nin varlığı bunu ispatlamaktadır. Euler-Lagrange denklemi; lineer olmayan, iki nokta sınır değerli ve zamanla değişen adi diferansiyel bir denklemdir.t nin varlığı katsayıların zamanla değişebildiğini gösterir. Başlangıç noktasındaki $t = t_0$ ve bitiş noktasındaki $t = t_f$ şartları bir sınır değer problemini oluşturur. Euler-Lagrange denklemi her fonksiyonu sağlamazsa bu, fonksiyonel için optimumun olmadığını gösterir (Naidu, 2002, s. 30).

2.1.4 Euler-Lagrange Denklemi İçin Farklı Durumlar:

Durum 1: V, $\dot{x}(t)$ ve t ye bağlıdır. Yani $V = V(\dot{x}(t), t)$ dir. $V_x = 0$ ile (1.25) Euler- Lagrange denklemi şu hale gelir: (Naidu, 2002, s. 32)

$$\frac{d}{dt}(V_x) = 0 \tag{1.30}$$

buradan,

$$V_x = \frac{\partial V(\dot{x}^*(t), t)}{\partial x} = c \tag{1.31}$$

bulunur, buradac bir integral sabitidir.

Durum 2: V sadece $\dot{x}(t)$ e bağlı değildir. Yani;

$V = V(\dot{x}(t))$ dir. $V_x = 0$ ile (1.25) Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt}(V_{\dot{x}}) = 0 \rightarrow V_{\dot{x}} = c \qquad (1.32)$$

halini alır, (1.30) veya (1.31)' nin çözümü aşağıdadır ve bu basit bir doğru denklemidir.

$$\dot{x}^*(t) = C_1 \rightarrow x^*(t) = C_1 t + C_2 \qquad (1.33)$$

Durum 3: V $\dot{x}(t)$ ve $x(t)$ ye bağlıdır. Yani; $V = V(x(t), \dot{x}(t))$ dir.

$V_{t\dot{x}} = 0$ ile (1.28) Euler-Lagrange denkleminin diğer formu kullanılarak

$$V_x - V_{x\dot{x}}\dot{x}^*(t) - V_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}^*(t) = 0 \qquad (1.34)$$

elde edilir ve $\dot{x}^*(t)$ ile önceki denklem çarpılır,

$$\dot{x}^*(t)[V_x - V_{x\dot{x}}\dot{x}^*(t) - V_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}^*(t)] = 0 \qquad (1.35)$$

şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{d}{dt}(V - \dot{x}^*(t)V_{\dot{x}}) = 0 \rightarrow V - \dot{x}^*(t)V_{\dot{x}} = C \qquad (1.36)$$

Durum 4: V $x(t)$ ve t ye bağlıdır. $V = V(x(t), t)$ dir. $V_{\dot{x}} = 0$ ile 1.27 Euler-Lagrange denklemi

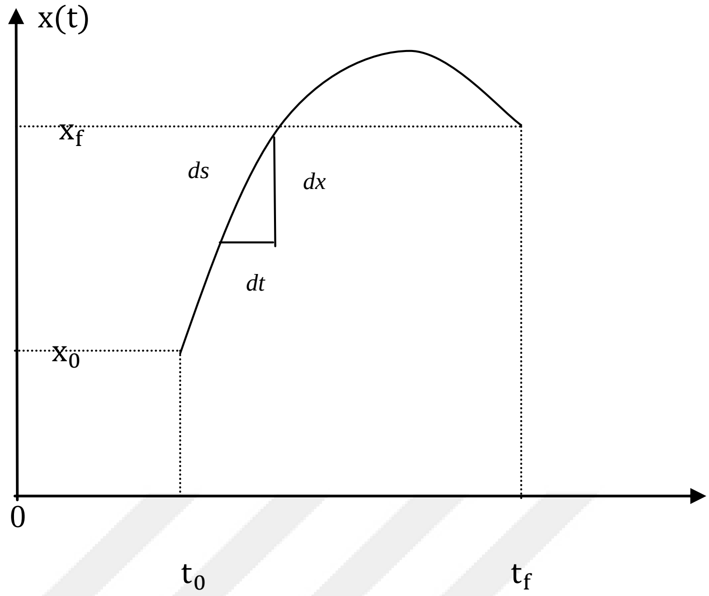
$$\frac{\partial V(x^*(t), t)}{\partial x} = 0 \qquad (1.37)$$

halini alır. Bu denklem çözümü keyfi sabit içermez. Bu yüzden $x(t_0)$ ve $x(t_f)$ sınır şartlarını sağlamaz Bu varyasyonel problemin çözümü yoktur. $x(t)$ fonksiyonu verilen sınır şartları $x(t_0)$ ve $x(t_f)$ i sağlarsa, optimal bir fonksiyon halini alır.

Örnek 1.1:İki nokta arasındaki minimum uzunluğu bulunuz (Chiang, 1992, s. 25).

Bu problemin çözümü bir doğrudur. Şekil 3'te A ve B noktaları arasındaki yay uzunluğu ds olsun. Dikdörtgen koordinat değerleri dx ve dt olsun. t uzaklığa bağlı değişkendir, zaman değildir.

Şekil 3:
İki nokta arasındaki uzaklık



$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dt)^2 \tag{1.38}$$

Denkleminde;

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \text{ ve } ds = \sqrt{1 + x^2(t)}dt \tag{1.39}$$

$x(t = t_0)$ve$x(t = t_f)$ noktaları arasındaki toplam yay uzunluğu S, minimize edilen J performans indeksidir.

$$S = J = \int ds = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t_f} V(\dot{x}(t))\, dt \tag{1.40}$$

Burada $V(\dot{x}(t)) = \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}$ dir. V sadece$\dot{x}t$ ye bağlı bir fonksiyondur. (1.39) performans indeksine uygulanan (1.31) Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}^{*2}(t)}} = c \tag{1.41}$$

bulunur, bu denklem çözülerek optimal çözüm;

$$x^*(t) = c_1 t + c_2 \tag{1.42}$$

bulunur ve bu bir doğru denklemidir. Verilen sınır şartlarından c_1 ve c_2 sabitleri değerlendirilir. Örnek olarak $x(0) = 1$ ve $x(2) = 5$, $c_1 = 2$ ve$c_2 = 1$ doğrusu $x^*(t) = 2t + 1$ dir.

Özet olarak;

i.Verilen basit bir açıklama veya durumdan performans indeksi formüllenir.

ii.Euler-Lagrange denklemini uygulaması önceden bilinen çözümle gerçeklenir. Bu örnekte (1.39) fonksiyonelinin V integralleneni sadece $\dot{x}t$ nin bir fonksiyonudur. Aşağıdaki örnekte V , $x(t)$, $\dot{x}t$ ve t nin fonksiyonudur.

Örnek 1.2:

$$J = \int_0^2 [2x^2(t) + \dot{x}^2(t)]\, dt \tag{1.43}$$

$$x(0) = 0 \;\text{ ve }\; x(2) = 5 \tag{1.44}$$

sınır şartlarını sağlayan optimumu bulunuz (Naidu, 2002, s. 38).

(1.29) denkleminde $V = 2x^2(t) + \dot{x}^2(t)$ belirlenir. (1.43) performans indeksine (1.26) denklemi uygulandığında

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \rightarrow 4x(t) - \frac{d}{dt}\big(2\dot{x}(t)\big) = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) = 2x(t) \tag{1.45}$$

bulunur ve önceki basit diferansiyel denklem çözülerek;

$$x^*(t) = \frac{x^3(t)}{3} + c_1 t \tag{1.46}$$

elde edilir. Burada c_1 ve c_2 integral sabitidir. (1.46) da , verilen (1.29) sınır şartları kullanılarak;

$$x(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$x(2) = 5 \;\rightarrow c_1 = -\frac{55}{3} \tag{1.47}$$

bulunur ve bu sabit değerleri ile optimal fonksiyon elde edilir.

$$x^*(t) = \frac{x^3(t)}{3} - \frac{55}{3}t \tag{1.48}$$

2.1.5 İkinci Varyasyon

İlk varyasyonun kayboluşu klasik Euler-Lagrange denklemi ile başlar .Optimumun doğası için ikinci varyasyonu incelemek gerekir. Artışın (1.18) bağıntısındaki terimleri ikinci varyasyona karşılıktır.

$$\gamma^2 J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_* \big(\gamma x(t)\big)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* \big(\gamma \dot{x}(t)\big)^2 + \; 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial \dot{x}}\right)_* \gamma x(t)\gamma \dot{x}(t)\right] dt \tag{1.49}$$

Önceki denklemdeki son terim incelenir ve kısmi integrasyon kullanılarak $\gamma x(t)$ nin terimlerinde yazılır. Sabit bitiş şartları $\gamma x(t_0) = \gamma x(t_f) = 0$ kullanılarak

$$\gamma^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial}\right)_* \big(\gamma x(t)\big)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* \big(\gamma \dot{x}(t)\big)^2\right] dt \tag{1. 1}$$

bulunur. Varyasyon hesabı temel teoremine göre minimum için yeter şart $\gamma^2 J > 0$' dır. Bu $\gamma x(t)$ ve $\gamma\dot{x}(t)$ keyfi değerler için

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\dot{x}}\right)_* > 0 \tag{1.51}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\dot{x}^2}\right)_* > 0 \tag{1.52}$$

olacağı anlamına gelir.Maksimum için önceki şartların işaretleri çevrilir.Matris formunda (1.49) ikinci varyasyonunu tekrar yazabiliriz.

$$\gamma^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\gamma x(t) \quad \gamma\dot{x}(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\dot{x}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\dot{x}} & \frac{\partial^2 V}{\partial\dot{x}^2} \end{bmatrix}_* \begin{bmatrix} \gamma x(t) \\ \gamma\dot{x}(t) \end{bmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\gamma x(t) \quad \gamma\dot{x}(t)] \prod \begin{bmatrix} \gamma x(t) \\ \gamma\dot{x}(t) \end{bmatrix} dt \tag{1.53}$$

Burada;

$$\prod = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\dot{x}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\dot{x}} & \frac{\partial^2 V}{\partial\dot{x}^2} \end{bmatrix}_* \tag{1.54}$$

Önceki denklemdeki $\prod$ matrisi pozitif (negatif) tanımlı ise, minimum (maksimum) bulunur. $\gamma x(t)$keyfi olduğu için, $(\gamma\dot{x}(t))^2$ nin katsayısı, $\partial^2 V/\,\partial\dot{x}^2$,$\gamma^2 J$ nin işaretini belirler. İkinci varyasyonun işareti $\partial^2 V/\,\partial\dot{x}^2$ nin işareti ile aynıdır.

Minimizasyon için;

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\dot{x}^2}\right)_* > 0 \tag{1.55}$$

Olmasını gerektirir. Maksimizasyon için önceki denklemin işareti ters çevrilir. Literatürde bu şarta Legendre Şartı denir. (Chiang, 1992, s. 42)

Örnek 1.3:İki nokta arasındaki minimum uzaklığı gösteren doğruyu bulunuz. (Naidu, 2002, s. 41) İki nokta arasındaki uzaklık için bir fonksiyoneli formülleyelim.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_f} V\big(\dot{x}(t)\big)\,dt \tag{1.56}$$

$x^*(t) = c_1 t + c_2$doğrusu optimumdur. (1.45) yeter şartını sağlar ise;

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\dot{x}}\right)_* = \frac{\dot{x}^*(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^{*2}(t)}} \text{ ve } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\dot{x}^2}\right)_* = \frac{1}{[1+\dot{x}^{*2}(t)]^{3/2}} \tag{1.57}$$

bulunur, $\dot{x}^*(t)$ sabit olduğu için denklem (1.45) şartını sağlar. $x^*(t)$ile verilen iki nokta arasındaki uzaklık minimumdur. Optimal kontrolün ikinci aşamasında bir sistem fonksiyonelinin optimizasyonu, fonksiyonelin şartı veya sınırı bulunur. Bir sistem denklemi formundaki bazı şartlarla bir fonksiyonelin ekstremizasyonunu açıklayalım. Durum denklemi formundaki sistem dinamik sistemlerin optimal kontrolünü oluşturur.

2.1.6 Şartlarla Fonksiyonların Ekstremumları

Şartlarla fonksiyonların ekstremumlarını bulmak için iki metot vardır. Birincisi direkt metot, ikincisi Lagrange çarpan metodudur (Dixit, 2002, s. 53).

a) Direkt Metot

Bu metotta diferansiyel hesaplama kullanılarak değişken yok edilir(Dixit, 2002, s. 53). Genelleştirme için birbirine bağlı değişkenler x_1 ve x_2 ile $f(x_1, x_2)$ fonksiyonun ekstremumu bulunur (Naidu, 2002, s. 41). İlgili şart;

$$g(x_1, x_2) = 0 \qquad (1.58)$$

dır ve ve ekstremum için gerekli şart olarak;

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (1.59)$$

elde edilir. dx_1ve dx_2 keyfi olmadığından şartla bağlantılıdr.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (1.60)$$

şartlar olmadan fonksiyonun ekstremizasyonunu elde etmek mümkün değildir.(1.59) gerek şartında;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad (1.61)$$

bulunur. (1.61) ekstremum şartları $x_1{}^*$ ve $x_2{}^*$optimal değerleri ile çözülürse, (1.58) ile verilen şart optimal değerleri garanti etmez. Hem (1.58) şartını hem de (1.59) ekstremum şartlarını sağlayan optimal değerleri bulmak için, keyfi olarak bir değişken seçilir, $x_1$bağımsız değişkeni seçilirse (1.58) şartına göre $x_2$bağımlı bir değişken olur. Farz edelim ki$\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$ olsun , bu durumda (1.60)

$$dx_2 = -\left\{\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}}\right\} dx_1 \qquad (1.62)$$

halini alır ve (1.59) gerek şartında (1.62) kullanılarak

$$\mathrm{df} = \left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1} - \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2}\left\{\frac{\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_1}}{\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_2}}\right\}\right]\mathrm{dx}_1 = 0 \tag{1.63}$$

bulunur. dx_1bağımsız olarak seçildiğinden, keyfi olarak incelenebilir ve (1.63) ü sağlar. dx_1katsayısı sıfır olsun.

$$\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_1}\right) = 0 \tag{1.64}$$

dir ve (1.58) şartı ile (1.64) bağıntısı $x_1{}^*$ ve $x_2{}^*$optimal çözümleri ile çözülür.(1.64) denklemi şu şekilde tekrar yazılır:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.65}$$

x_1 ve $\mathrm{x}_2$ye göre f ve g Jacobi denklemidir. Bağımlı değişkenleri yok etme metodu yüksek dereceli problemler için oldukça zaman alır (Naidu, 2002, s. 45).

b) Lagrange Çarpan Metodu

Şartlarla verilen aynı problemin ekstremumunu bulmak için Lagrange çarpan metodu kullanılır (Naidu, 2002, s. 46). $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$fonksiyonunun ekstremumu incelenir, ilgili şart olarak;

$$\mathrm{g}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = 0 \tag{1.66}$$

dır ve bu metotta artan (augmented) Lagrange fonksiyonu

$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \lambda) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) + \lambda \mathrm{g}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \tag{1.67}$$

dir ve burada λolarak belirlenen parametre (çarpan), Lagrange çarpanıdır. (1.67) Lagrange denkleminde, verilen (1.66) şartı kullanılarak

$$\mathrm{L}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \tag{1.68}$$

bulunur ve ekstremum için gerek şart

$$df = dL = 0 \tag{1.69}$$

dir. (1.67) Lagrange denklemi tam problemin gösteriminde (1.68) ekstremumu bulma denkleminden daha iyidir.(1.67) Lagrange bağıntısından

$$\mathrm{dL} = \mathrm{df} + \lambda \mathrm{dg} = 0 \tag{1.70}$$

bulunur ve (1.70) de (1.59) ve (1.60) kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1} + \lambda \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_1}\right]\mathrm{dx}_1 + \left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2} + \lambda \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_2}\right]\mathrm{dx}_2 = 0 \tag{1.71}$$

Elde edilir. dx_1 ve dx_2bağımsız değildir. dx_1i bağımsız diferansiyel olarak seçersek dx_2(1.60) denkleminde bağımlı bir diferansiyel haline gelir. Üretilen ve kontrolde olan λ çarpanı, (1.71) deki dx_1 ve dx_2 nin katsayılarından birini sıfır yapmak için seçilir. Mesela λ, λ^* değerinde alındığında dx_2 bağımlı diferansiyelinin katsayısı sıfır olur.

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \tag{1.72}$$

Böylece (1.71) denklemi

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}\right] dx_1 = 0 \tag{1.73}$$

haline gelir. dx_1bağımsız diferansiyel olduğundan keyfi olarak değişebilir.(1.73) ü sağlayan tüm dx_1 ler için dx_1 in katsayısı sıfırdır.

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1} + \lambda^* \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}_1} = 0 \qquad (\ 1.74)$$

dir.(1.67) Lagrange denkleminden

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \tag{1.75}$$

(1.66) sınır bağıntısı ortaya çıkar. (1.74), (1.72) ve (1.75) denklemlerinden çıkan sonuçlar birleştirilerek;

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \tag{1.76}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \tag{1.77}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : g(x_1^*, x_2^*) = 0 \tag{1.78}$$

Elde edilir. Bu denklemler çözülerek x_1^* , x_2^* , λ^* elde edilir. (1.76) ve (1.77) arasında λ^* yok edilerek

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{1.79}$$

Direkt metodu ile bulunan (1.64) şartı bulunur. Lagrange çarpan metodu ile aynı sonuç elde edilir.(1.76) ve (1.77) gerek şartları, (1.71)de bağımsız diferansiyel olan dx_1 ve dx_2 den elde edilen aynı şartlardır. λ çarpanı artan fonksiyon $L(x_1, x_2, \lambda)$da her değişken bağımsız olsa da tüm değişkenleri ele alabilmeye izin verir. λ çarpanı katalizörgibidir, sadece ara aşamada görünür.

Özet olarak, ilgili sınır şartı $\mathrm{g}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = 0$ ile $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ ekstremum fonksiyonu x_1 , x_2 ve λ bağımsız olsa da tek bir artan fonksiyonun ekstremumuna;

$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$a eşittir. Bu sonucun genelleştirilmesini veren teorem aşağıdadır (Naidu, 2002, s. 46).

Teorem:Sürekli gerçek değerli bir fonksiyonun ekstremumu $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ilgili şartlar;

$g_1(x) = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$

$g_2(x) = g_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$

…

$$g_m(x) = g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (1.80)$$

Şeklindedir, burada f ve g sürekli kısmi türevlere sahiptir ve $m < n$ dir. m şartlarına karşılık Lagrange çarpanları $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ olsun. Artan Lagrange fonksiyonu şu formdadır:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x) \qquad (1.81)$$

Burada λ^t λ ‘nın transpozesidir. X^* ve λ^*optimal değerleri aşağıdaki $(n + m)$denklemlerinin çözümüdür.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^t \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad (1.82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) = 0 \qquad (1.83)$$

c) Lagrange Çarpımının Özellikleri

Lagrange çarpan metodu ilgili sınırlarla fonksiyonun ekstremumunu bulmada çok önemlidir (Naidu, 2002, s. 47).

1.$g(x) = 0$ ilgili kısıtı ile $f(x)$ fonksiyonunun ekstremumunu belirleme problemi ile basit artan (augmented) fonksiyonun $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t g(x)$ ekstremumunu belirleme problemi arasındadır.

2.Lagrange çarpanı,artan fonksiyon $L(x, \lambda)$ daki her terim bağımsız olsa da tüm x ve λ değişkenlerini ele almaya izin verir.

3. λ çarpanı katalizör gibidir,2. Madde ile verilen kesin görevi başarı ile sağlar.

4.Lagrange çarpan metodunun özelliği olan artan boyut $(n + m)$ tekniğin basitliği ve sistematikliği ile karşılık verir.

2.1.7 Şartlarla Fonksiyonellerin Ekstremumu

Önceki alt başlıklarda fonksiyonlar için geliştirilen düşünceler fonksiyonellere dayalı olarak genişletilecektir.Önce iki değişkenli bir fonksiyon önceki bölümde varyasyon hesabındaki sonuçlar kullanarak incelemiştir.Gerek şartlar ele alınıp, sonra genelleme için n.derece vektör durumunu aynı şekilde genişletilmiştir (Dixit, 2002, s. 52).

Fonksiyonel formunda performans indeksinin ekstremizasyonu:

$$J(x_1(t), x_2(t), t) = J = \int_{t_0}^{t_f} V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t)\, dt \qquad (1.84)$$

Kısıt (veya sistem denklemi);

$$g\big(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)\big) = 0 \qquad (1.85)$$

Ve sabit bitiş nokta şartları;

$$x_1(t_0) = x_{10;} x_2(t_0) = x_{20}$$

$$x_1(t_f) = x_{1f}\ ;\ x_2(t_f) = x_{2f} \qquad (1.86)$$

dir. Bu probleme aşağıdaki adımlar uygulanır.

Adım 1: Lagrange Denklemi

Adım 2: Varyasyonlar ve Artış

Adım 3: İlk varyasyon

Adım 4: Temel Teorem

Adım 5: Yardımcı Teorem

Adım 6: Euler-Lagrange Denklemi

Adım 1: Lagrange Denklemi: Artan fonksiyonel formu;

$$J_{a=} \int_{t_0}^{t_f} L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t)\, dt \qquad (1.87)$$

şeklindedir. Burada $\lambda(t)$ Lagrange çarpanı ve Lagrange denklemi;

$$L = L(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t), t)$$

$$= V(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), t) + \lambda(t) g\big(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)\big) \qquad (1.88)$$

şeklinde tanımlanır. (1.84) performans indeksi ve (1.87) artan performans indeksinden (1.85) şartı her $\lambda(t)$ için sağlanırsa $J_a = J$ dir.

Adım 2: Varyasyonlar ve Artış:

Optimal değerler için varyasyon ve artış şöyledir

$$x_i(t) = x_i^*(t) + \gamma x_i(t), \dot{x}_i(t) = \dot{x}_i^*(t) + \gamma \dot{x}_i(t), \qquad [i = 1,2]$$

$$\Delta J_a = J_a(x_i^*(t), \gamma x_i(t), \dot{x}_i^*(t) + \gamma \dot{x}_i(t), t) - J_a(x_i^*(t), \dot{x}_i^*(t), t), \quad [i = 1,2] \qquad (1.89)$$

Adım 3: İlk Varyasyon:

Taylor serisi açılımını kullanarak ve sadece lineer terimler kullanılarak J_a fonksiyonelinin ilk varyasyonu

$$\gamma J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* \gamma x_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* \gamma x_2(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \gamma \dot{x}_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* \gamma \dot{x}_2(t) \right] dt \qquad (1.90)$$

halini alır. Varyasyon hesabında sadece $\gamma x_1(t)$ ve $\gamma x_2(t)$ içeren terimlerde $\gamma \dot{x}_1(t)$ ve $\gamma \dot{x}_2(t)$ içeren terimler tekrar yazılır (kısmi integrasyon kullanılır).

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* \gamma \dot{x}_1(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \frac{d}{dt}\big(\gamma x_1(t)\big)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* d(\gamma x_1(t))$$

$$= \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \gamma \dot{x}_1(t) \right] \Bigg|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \gamma x_1(t)\, dt \qquad (1.91)$$

Yukarıdaki denklemler kullanılarak (1.91) ilk varyasyonu elde edilir.

$$\gamma J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* \gamma x_1(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* \gamma x_2(t) \right] dt$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \gamma x_1(t) \right] \Bigg|_{t_0}^{t_f} + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* \gamma x_2(t) \right] \Bigg| - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \gamma x_1(t)\, dt -$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* \gamma x_2(t)\, dt \qquad (1.92)$$

Sabit bitiş zamanı ve sabit bitiş durum problemi (1.86) ile verildiğinden,bitiş noktasında varyasyonlara izin verilmez.

$$\gamma x_1(t_0) = \gamma x_2(t_0) = \gamma x_1(t_f) = \gamma x_2(t_f) = 0 \qquad (1.93)$$

tür ve (1.92) artan ilk varyasyonunda (1.93) sınır varyasyonları kullanılarak

$$\gamma J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \right] \gamma x_1(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* \right] \gamma x_2(t)\, dt \qquad (1.94)$$

bulunur.

Adım 4 :Temel Teorem:

i.Varyasyon hesabı temel teoremine göre sıfıra eşit olan (1.94) ilk varyasyonu bulunur.

ii.Her iki $\gamma x_1(t)$ ve $\gamma x_2(t)$ bağımsız değildir,çünkü $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ (1.85) şartıyla bağlantılıdır. $\gamma x_2(t)$i bağımsız varyasyon olarak $\gamma x_1(t)$ i bağımlı varyasyon olarak seçilebilir.

iii.Keyfi ve kontrolde olan $\lambda^*(t)$ çarpanını ile (1.94) de $\gamma x_1(t)$ bağımlı varyasyonun katsayısı yok edilir.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* = 0 \qquad (1.95)$$

Bu seçimlerde (1.94) ilk varyasyonu aşağıdaki halini alır.

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* \right] \gamma x_2(t)\, dt = 0 \qquad (1.96)$$

Adım 5: Yardımcı Teorem :

Varyasyon hesabı temel lemmasını kullanılır ve $\gamma x_2(t)$ keyfi olarak bağımsız varyasyon seçilebilir.(1.96) yı sağlayabilen $\gamma x_1(t)$ in katsayısı da yok edilir.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* = 0 \tag{1.97}$$

dir.(1.88) Lagrange denkleminden

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* = 0 \tag{1.98}$$

(1.85) sınır bağıntısı bulunur.

Adım 6 : Euler-Lagrange Denklemi:

(1.95), (1.97),(1.98) bağıntıları birleştirilerek(Euler-Lagrenge denklemine göre)ilgili (1.85) sınır şartı ile (1.84)fonksiyonelinin ekstremizasyonu için gerek şartlar

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)_* = 0 \tag{1.99}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)_* = 0 \tag{1.100}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0 \tag{1.101}$$

dir. Bu şartlar $\gamma x_1(t)$ ve $\gamma x_2(t)$bağımsızmış gibi (1.88) Lagrange denkleminden elde edilmiştir.(1.101) de L Lagrange denklemi $\lambda(t)$ den bağımsızdır ve (1.100) şartı (1.85) sistem denklemi ile verilir. Bu yüzden, $\lambda(t)$ Lagrange çarpanı $x_1(t)$ ve $x_2(t)$bağımsızmış gibi (1.85) şartına bağlı olmalarına rağmen değişkenleri ele alabilir.(1.99) ve (1.100) ikinci dereceli diferansiyel denklemlerinin çözümü ve (1.85 veya (1.101) şart bağıntısı (1.86) sınır şartları $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ ve $\lambda^*(t)$ optimal çözümlerini verir.n. dereceli sistemlerin genelleştirmesi için bir fonksiyonelin ekstremizasyonu;

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \tag{1.102}$$

dir ve burada $x(t)$ n. dereceli durum vektörüdür,ilgili sistem denklemi

$$g_i(x(t), \dot{x}(t), t) = 0; i = 1,2, \dots, m \tag{1.103}$$

dir ve sınır şartları $x(0)$ ve $x(t_f)$ dir. Artan fonksiyonel

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t)\, dt \tag{1.104}$$

Ve burada L Lagrange denklemi;

$$L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) = V(x(t), \dot{x}(t), t) + \lambda^t(t) g_i(x(t), \dot{x}(t), t) \tag{1.105}$$

ile verilir ve Lagrange çarpanı $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_m(t)]^t$ dir.Euler-Lagrange denklemini J_a üzerine uygulanır.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \tag{1.106}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0 \rightarrow g_i(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \tag{1.107}$$

(1.105) den , L Lagrange denklemi $\dot{\lambda}(t)$ den bağımsızdır ve (1.107) Euler-Lagrange denklemi önemsizdir fakat (1.103) sistemi ile ilgili bağıntı verilmiştir.

Örnek 1.4:Performans indeksini minimize ediniz (Naidu, 2002, s. 53).

$$J = \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]\, dt \tag{1.108}$$

İlgili sınır şartları

$$x(0) = 1;\ x(1) = 0 \tag{1.109}$$

Sistem denklemi şu şekildedir:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \tag{1.110}$$

Her iki metotla bu problemi çözelim

a) Direkt Metot

Burada fonksiyonel için (1.108) performans indeksi ile (1.110) sistemi arasında $u(t)$ yok edilir.

$$J = \int_0^1 [x^2(t) + (\dot{x}(t) + x(t))^2]\, dt$$

$$= \int_0^1 [2x^2(t) + \dot{x}^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t)]\, dt \tag{1.111}$$

(1.111) fonksiyoneli (1.110) şartını içerir.Euler-Lagrane denklemi (1.111) fonksiyoneline uygulanarak;

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \tag{1.112}$$

bulunur. Burada;

$$V = 2x^2(t) + \dot{x}^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t) \tag{1.113}$$

$$4x^*(t) + 2\dot{x}^*(t) - \frac{d}{dt}\big(2\dot{x}^*(t) + 2x^*(t)\big) = 0 \qquad (1.114)$$

elde edilir.Basitleştirerek

$$\ddot{x}^*(t) = 2x^*(t) = 0 \qquad (1.115)$$

bulunur.Optimal çözüm olarak

$$x^*(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t} \qquad (1.116)$$

bulunur,burada C_1 ve C_2 sabitleri (1.109) verilen sınır şartları ile değerlendirilir.

$$C_1 = \frac{1}{\left(1 - e^{-2\sqrt{2}}\right)}\ ;\ C_2 = \frac{1}{\left(1 - e^{2\sqrt{2}}\right)} \qquad (1.117)$$

Sonuç olarak, $x^*(t)$optimal, $u^*(t)$ optimal kontrolü (1.110) sisteminden bulunur.

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + x^*(t) = C_1(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \qquad (1.118)$$

Metot basit olmasına rağmen, özellikle yüksek dereceli sistemlerde (1.108) ve (1.110) dan $u(t)$yi yok etmek mümkün değildir.

b) Lagrange Çarpan Metodu

Önceki bölümde sınırlarla fonksiyonların ekstremizasyonunda geliştirilen fikirler kullanılarak (1.110) sistemini tanımlayan şart altında (1.109) sınır şartları ile (1.108) fonksiyonelinin optimizasyonu elde edilir.(1.110) şartı aşağıdadır.

$$g(x(t), \dot{x}(t), u(t)) = \dot{x}(t) + x(t) - u(t) = 0 \qquad (1.119)$$

Artan fonksiyonel;

$$J = \int_0^1 [x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t)\{\ddot{x}(t) + x(t) - u(t)\}]\, dt$$

$$= \int_0^1 L\big(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)\big)\, dt \qquad (1.120)$$

Burada $\lambda(t)$ Lagrange çarpanı ve;

$$L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) = x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t)\{\dot{x}(t) + x(t) - u(t)\} \qquad (1.121)$$

Lagrange denklemidir. Bu denkleme Euler-Lagrange denklemi uygulanır.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \rightarrow 2x^*(t) + \lambda^*(t) - \dot{\lambda}^*(t) = 0 \qquad (1.122)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)_* = 0 \rightarrow 2u^*(t) - \lambda^*(t) = 0 \qquad (1.123)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0 \rightarrow \dot{x}^*(t) + x^*(t) - u^*(t) = 0 \qquad (1.124)$$

Optimal $x^*(t)$, $u^*(t)$, $\lambda^*(t)$ çözülür. Önce (1.123) ve (1.124) den

$$\lambda^*(t) = 2u^*(t) = 2(\dot{x}^*(t) + x^*(t)) \qquad (1.125)$$

Bulunur ve (1.112) de(1.115) denklemi kullanılarak

$$2x^*(t) + 2(\dot{x}^*(t) + x^*(t)) - 2(\ddot{x}^*(t) + \dot{x}^*(t)) = 0 \tag{1.126}$$

Elde edilir,bu denklemin çözümü ile

$$\ddot{x}^*(t) - 2x^*(t) = 0 \rightarrow x^*(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 \tag{1.127}$$

Bulunur (1.125)' den

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + x^*(t) = C_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \tag{1.128}$$

bulunur.Direkt metotla çözümde aynı sonuçlar bulunmuştur.

2.2. OPTİMAL KONTROL TEORİSİ

Verilen bir sistemin kontrolü için en iyi yolu bulma olarak tanımlayabileceğimiz optimal kontrol teorisinin stratejisi; en iyi durumun, en az zaman ve en az emek harcanarak nasıl elde edileceği ile ilgilidir. Örneğin bir firmanın üretim planlamasını ele alırsak optimal kontrol teorisinin amacının üretimin en az maliyetle ve en kısa zamanda hedeflenene varması için gereken şartlar olarak ifade edebiliriz. (Naidu, 2002, s. 79). Optimal kontrol yöntemine göre fonksiyonele ait işlemlervaryasyonel yaklaşımlar kullanılarak aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

2.2.1 Bir Fonksiyonelin Optimizasyonu

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \tag{1.129}$$

Verilen sınır şartları;

$x(t_0)$ sabit $x(t_f)$ serbest varsayılsın

$x^*(t)$optimal fonksiyonu Euler-Lagrange denklemini sağlamalıdır. (Naidu, 2002, s. 85)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \tag{1.130}$$

Serbest-bitiş noktasında sağlanan genel sınır şartı;

$$\left[V - \dot{x}^t(t)\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)\right]_{*t_f} \gamma t_f + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)^t_{*t_f} \gamma x_f = 0 \tag{1.131}$$

Optimum için yeter şart verilen Legendre şartı aşağıdadır. (Naidu, 2002, s. 81)

$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* > 0$ minimumiçin

$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* < 0$ maksimumiçin

2.2.2 Bir Fonksiyonelin Kısıt Altında Optimizasyonu

Bir fonksiyonelin optimizasyonu iktisadi olarak anlamlandırılmak istendiğinde bir firmanın karını minimum maliyetle maksimize edebildiği üretim düzeyi olarak ifade ederiz. Bununla ilgili ayrıntılı örnekli anlatım kısım 1.3 te verilecektir. Burada matematik teorisi verilecek J gibi bir fonksiyoneli ele alalım.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \tag{1.132}$$

ve verilen sınır değerleri;

$x(t_0)$sabit ve $x(t_f)$ serbesttir.

Kısıtı;

$$g(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \tag{1.133}$$

dır, burada(1.130) şartı artan fonksiyonel formuyla aşağıdaki şekildedir.

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t)\, dt \tag{1.134}$$

ve $\lambda(t)$ Lagrange çarpanıdır (eş-durum fonksiyonu da denir). L Lagrange denklemi;

$$L(x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), t) = V(x(t), \dot{x}(t), t) + \lambda^t(t) g(x(t), \dot{x}(t), t) \tag{1.135}$$

ile verilir. Vyerine(1.137) artan fonksiyoneli için aşama 1'in sonuçları kullanılır.Optimal şartta $x(t)$ ve $\lambda(t)$ terimlerinde verilen artan fonksiyonel için (1.129)Euler-Lagrange denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz (Naidu, 2002, s. 83).

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \tag{1.136}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0 \tag{1.137}$$

(1.135) ile L Lagrange denklemi $\dot{\lambda}^*(t)$ den bağımsızdır ve $\lambda(t)$ costate için (1.133) sınır bağıntısı önemli, (1.137) Euler-Lagrange denklemi önemsizdir.Serbest-bitiş noktasında sağlanan genel sınır şartı (1.129) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$\left[L - \dot{x}^t(t)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]_{*t_f} \gamma t_f + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{*t_f}^{t} \gamma x_f = 0 \tag{1.138}$$

Bu sınır şartı t_f ve $x(t_f)$nin doğasına bağlı değişir.

2.2.3 Lagrange Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem

Standart kontrol sistemi genel itibari ile aşağıdaki şekildedir. (Naidu, 2002, s. 85)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.139}$$

Sınır şartlarını ise aşağıdaki gibi belirlediğimizi düşünelim.

$x(t_0)$sabit ve $x(t_f)$ serbesttir.

Performans indeksini aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)\, dt \tag{1.140}$$

(1.132) bağıntı şartı olarak (1.138) sistem denklemi;

$$g(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) = f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) = 0 \tag{1.141}$$

Şeklinde yazılır.(1.140) performans indeksinin ve (1.141) bağıntı şartının artan fonksiyoneli;

$$J_a(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)\, dt \tag{1.142}$$

Şeklinde yazılır. Burada L Lagrange denklemi

$$L = L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)$$

$$= V(x(t), u(t), t) + \lambda^t(t)\{f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\} \tag{1.143}$$

Olarak elde edilir. 1.2.2 (Bir fonksiyonelin kısıt altında optimizasyonu) sonuçları kullanıldığında optimal şartta $x(t)$, $\lambda(x)$ ve $u(t)$ terimlerinde verilen (1.142) artan fonksiyoneli için (1.135) ve (1.136) Euler-Lagrange denklemleri mevcuttur. (Naidu, 2002, s. 88)

$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0$ durum denklemi,

$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)_* = 0$ costate denklemi ve

$\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)_* = 0$ kontrol denklemidir.

2.2.4 Hamilton Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem (Pontryagin Prensibi)

Lagrange denklem formundan Hamilton denklem formuna geçiş için Hamilton denklemi tanımlanır. (Naidu, 2002, s. 92)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda^t(t) f(x(t), u(t), t) \tag{1.144}$$

(1.143) Lagrange denklemi hamilton denklem formu ile aşağıdaki hali alır.

$$L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) = H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda^t(t)\dot{x}(t) \tag{1.145}$$

(1.145) kullanılarak, Lagrange denklem terimlerindeki Euler-Lagrange denklemleri Hamilton denklemi formuyla (sırası ile durum denklemi, lagrange denklemi ve kontrol denklemi olarak) yeniden aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}(-\lambda^*) = 0 \tag{1.146}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* - \dot{x}^*(t) - \frac{d}{dt}(0) = 0 \tag{1.147}$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{u}}\right)_{*} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(0) = 0 \qquad (1.148)$$

Böylece

$\dot{x}^{*}(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{*}$ durum denklemi;

$\dot{\lambda}^{*}(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{x}}\right)_{*}$ costatedenklemi

$0 = +\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{*}$ kontrol denklemidir

2.3 İKTİSADİ DİNAMİKLİK VE DİNAMİK OPTİMİZASYON ARAÇLARININ İKTİSADİ ALANDA KULLANIMI[3]

Bölüm 1.1 ve 1.2'de matematik teorisi verilen varyasyon hesabı ve optimal kontrol teorisinin bu kısımda iktisadi uygulamalarına örnekler üzerinden açıklama getirilecektir. Çalışma sırasında mümkün olan yerlerde statik optimizasyondan tanıdık kavramlar için analojiler yapılacaktır.

Statik bir problemde optimal değer sonlu sayılar kümesi içerisindedir. Örneğin bir firma A malını üretiyorsa bu A malından x birim üretip satarak karını [$\mathrm{F(x)}$] maksimum yapan x^{*} üretim düzeyini arar (Kamien & Schwartz, 2018, s. 3).

$$\max_{\mathrm{x}} \geq 0 \ \mathrm{F(x)} \qquad (1.149)$$

Bu problemin çözümü bir sayıdır. Eğer $\mathrm{F(x)}$ belirli bir fonksiyonel formda ise bu durumda x^{*} sayısı kesin bir şekilde belirlenebilir. Değilse x^{*} değeri Ffonksiyonu bağlamında yeniden tanımlanır. Eğer F sürekli olarak türevlenebiliyorsa ve üretim fonksiyonu ise bu durumda x^{*}içintipik olarak birinci dereceden gerekli koşul;

$$\mathrm{F'(x)} = 0 \qquad (1.150)$$

Başka bir şekilde, değişkenler eşzamanlı olarak seçilebilirler.

$$\max \mathrm{F}\ (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_{3\dots}\mathrm{x}_\mathrm{n}) \qquad (1.151)$$

$$\mathrm{x}_\mathrm{i} \geq 0 \qquad \mathrm{i} = 1,2,3, \dots \mathrm{n}$$

Burada $\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_{3\dots}\mathrm{x}_\mathrm{n})$ kar fonksiyonudur. x_i ise i numaralı ürünün miktarıdır. Burada maksimum karı verecek üretim ve satış miktarı belirlendiğinde elde edilen her bir çözüm n sayı dizisini oluşturacaktır. $(\mathrm{x}_1{}^{*}, \mathrm{x}_2{}^{*}, \mathrm{x}_3{}^{*} \dots \dots \mathrm{x}_\mathrm{n}{}^{*})$.$\max_{\mathrm{x}} \geq 0$ şartlı $\mathrm{F(x)}$ Fonksiyonunun birden fazla dönemi içine alan kesikli zaman genellemesinde her bir t döneminde üretilecek ve satılacak ürünün miktarı (x_t) seçilir.

[3] Bu kısımda anlatılan örneklerin tamamı (Kamien & Schwartz, 2018) Dynamic Optimization isimli kitabından alınmıştır.

$$\max \sum_{t=1}^{T} F(t, x_t) \tag{1.152}$$

$x_t \geq 0 \qquad t = 1,2, \dots \dots \dots, T$

Bu durumda ise optimal çözüm T adet sayı dizisidir. $(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^* \dots \dots x_T{}^*)$. Burada mevcut dönemde elde edilen üretim sadece o dönemdeki karı etkileyeceği için (1.152) statik bir problem olarak değerlendirilir. (Kamien & Schwartz, 2018, s. 3)

Yani her bir döneme ait güncel karı maksimum yapacak üretim düzeyini seçme problemi ile karşı karşıyayızdır. Mevcut üretim düzeyi, içinde bulunulan döneme ait karı değil de gelecekteki dönemleri de etkiliyorsa bu durumda problemimiz dinamik bir hale dönüşür. Mesela güncel kar oranları değişen üretim oranlarının maliyeti nedeni ile (işe alım ve işten çıkarma maliyetleri gibi) hem mevcut hemde geçmiş üretim miktarlarına bağlı olabilir. (Chiang, 1992, s. 9)

$$\max \sum_{t=1}^{T} F\left(t, x_t, x_{(t-1)}\right) \tag{1.153}$$

$x_t \geq 0 \qquad t = 1,2, \dots \dots \dots, T$

Burada planlama anındaki $(t = 0)$ üretim düzeyi x_0'dır. Dikkat ediniz, x_0'ın belirtilmesi gerekir, çünkü dönem1'deki kârı etkilemektedir. Optimal çözümü sağlamada T birinci derece koşullar ayrıştırılmazlar, bunların eşzamanlı olarak çözümlenmeleri gerekmektedir.

(1.152)'nin sürekli zaman gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\max \int_{0}^{T} F(t, x_t,)dt \tag{1.154}$$

$x_t \geq 0$

Burada çözüm, planlama döneminden sonra her zaman noktasında firmanın optimal üretim miktarını veren $x^*(t)$, $0 \leq t \leq T$, fonksiyonu olacaktır. Bu gerçekte dinamik bir problem değildir, çünkü herhangi bir t anındaki üretim sadece ilgili dönemdeki kârı etkilemektedir. Optimal çözüm her t dönemi için $F(t, x(t))$kârını maksimize edecek x(t)'yi seçmektir.

(1.153)'ün sürekli zaman analoğu daha az anlıktır. Zaman sürekli olduğu için "önceki dönem" kavramı çok açık bir kavram değildir. Mevcut dönem kârının hem mevcut dönem üretim miktarına hem de zaman içinde üretimin ne kadar değiştiğine bağlıdır. Zaman içinde üretimin değişim oranı $\dot{x}(t)$'dir. Bu nedenle problem şu şekilde ifade edilebilir.

$$\max \int_{0}^{T} F(t, x_t, \dot{x}_t)\, dt \qquad (1.155)$$

$x(t) \geq 0 \qquad x(0) = x_0$

Problem dinamik bir çözümlemeyi gerekli kılmaktadır. Çözümleme için gerekli koşullar sürekli dinamik optimizasyon problemlerine ilişkin birkaç örnek sonrasına bırakılacaktır.Burada örmeklerle iktisadi dinamikliği pekiştirmek yerinde görülmüştür.

Örnek 1.5

Bir firma T zamanında teslim edilecek B adette ürün siparişi almıştır. Bu talebi, belirtilen teslim süresinde minimum maliyetle üretmek için bir üretim planı arayışındadır birim üretim maliyetlerinin üretim miktarıyla birlikte doğrusal olarak arttığını ve birim zaman için stok maliyetin ise sabit olduğunu unutmamak kaydıyla t sürede biriken envanterin $x(t)$ olduğunu düşünelim. Bu durumda $x(0) = 0$ olacaktır ve $x(T) = B$ elde edilecektir. Herhangi bir anda envanter düzeyi önceki üretimlerin birikimidir; envanter değişimi ise üretim düzeyi $dx/dt = \dot{x}(t)$'dir. Bu nedenle de herhangi bir anda bir firmanın toplam maliyeti aşağıdaki şekilde formüllendirilir.

$$[c_1\dot{x}(t)]\dot{x}(t) + c_2x(t) = c_1[\dot{x}(t)]^2 + c_2x(t) \qquad (1.156)$$

Burada ilk terim birim üretim maliyeti ve toplam üretim miktarının sonucu olan toplam üretim maliyeti, ikinci terim ise toplam envanter maliyetidir, c_1 ve c_2 ise pozitif sabitlerdir. Firmanın hedefi $0 \leq t \leq T$ için üretim düzeyi $\dot{x}(t)$ ve envanter birikimi $x(t)$'yi bulmaktır.

$$\min \int_{0}^{T} [c_1(\dot{x}(t))^2 + c_2x(t)]dt \qquad (1.157)$$

Koşul $x(0) = 0, \qquad x(T) = B, \quad \dot{x}(t) \geq 0$

Olası bir üretim planı sabit hızda üretim yapmaktır ki bu da $\dot{x}(t) = B/T$ şeklinde ifade edilmektedir.

$$x(t) = \int_{0}^{t} \left(\frac{B}{T}\right) ds = \frac{Bt}{t} \qquad (1.158)$$

Toplam maliyet aşağıdaki gibidir;

$$\int_{0}^{T} \left[c_1\left(\frac{B}{T}\right)^2 + c_2\left(\frac{Bt}{T}\right)\right] dt = c_1\frac{B^2}{T} + c_2\frac{BT}{2} \qquad (1.159)$$

Bu uygulanabilir bir plan olsa da maliyeti minimize etmeyebilir.

Örnek 1.6

t Zamanında $K(t)$'ye eşit bir sermaye stokundan üretilebilecek ürün miktarı $F(K)$'dir. Üretim fonksiyonu F'nin iki kere sürekli türevlenebilir, artan ve konkav olduğu varsayılmaktadır. Bu üretim tüketilebilir, anlık tatmin sağlayabilir ya da sermaye stokunu ve bu sayede gelecekteki üretim kapasitesini arttırmak için yatırım yapılabilir. Bu nedenle de üretim miktarı $F(K)$,$C(t)$ tüketim ve $\dot{K} = dK/dt$ (sermaye stokundaki değişim) yatırımın toplamıdır. Bu noktada problem üretim miktarının her t anında yatırıma dönüştürülecek kısmını belirleyerek faydayı maksimize etmektir. Bu da sermaye stokunun büyüme oranı $\dot{K}$ seçimi anlamına gelir ki;

$$\max \int_0^T U\big(C(t)\big)\,dt \tag{1.160}$$

veya

$$\max \int_0^T U\big[F(K(t) - \dot{K}(t)\big]\,dt \tag{1.161}$$

Koşul $K(0) = K_0,\ \ K(T) \geq 0,$

Burada tüketimin fayda fonksiyonu U iki kat sürekli türevlenebilir, artan ve konkavdır. Eğer sermaye mükemmel derecede kalıcı değilse ve b doğru orantısı ile zaman içerisinde eriyorsa $bK(t)$ düzeyindeki yeniden yatırımın stoku sabit tutması gerekir[4] ve bu nedenle de; $F(K) = C + \dot{K}' + bK.$ Bu nedenle tüketime uygun olan miktar hem sermaye stokunun yenilenmesine ayrılan miktardan hem de sermayedeki net değişimden küçüktür. Ayrıca, eğer gelecekteki tahminler r düzeyinde azalacaksa[5] problem aşağıdaki gibi belirlenir.

---

[4]Yıpranma

Eğer K stoku sabit oran $b > 0$ oranında eksiliyor – yıpranıyor ise ve eğer yenilenmiyorsa, bu durumda; $\dot{K}(t)/K(t) = -b$, yani $\dot{K}(t) = -b \cdot K(t)$'dir. Bu türevsel eşitliğin çözümü $K(t) = K(0)\,e - bt$ olduğu için bazen K stokunun üssel olarak b oranında yıprandığını ifade ederiz. (Kamien & Schwartz, 2018)

[5]e'nin İktisadi Yorumuna Kısa Bir Bakış

esayısı matematiksel olarak $f(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ gibi bir fonksiyonun limitinin sonsuza yaklaştığı varsayımı sonucunda elde edilen değerdir. İktisadi olarak ise e sayısı bir faiz bindireme sürecinin sonucudur. Varsayalım 1 TL lik bir paranın yatırımcısıyız ve görülmemiş yıllık %100 lük bir faiz oranı teklifi ile karşılaşıyoruz. Faiz bindirgeme yılda 1 defa ise varlığımız yıl sonunda 2 TL ye çıkacaktır. Bu değeri M(1) ile gösterelim. Burada parantez içerisinde bulunan 1 değeri 1 yıl içindeki bindirgeme sayısıdır. (Chiang & Wainwright, 2016)

M(1) =Başlangıçtaki ana para· (1+ faiz oranı) (Chiang & Wainwright, 2016)

= 1·(1+%100)

$=(1 + \frac{1}{1})^{1} = 2$

Ve yine varsayalım ki faiz bindirgemesi her yarıyılda bir yapılıyor olsun. Her altı ay sonunda ana paranın % 50 si (%100 'ün yarısı) tutarında bir faiz elde edecektir. Böylece ikinci altı aylık dönem boyunca yeni anapara

$$\max \int_0^T e^{-rt} U\big[F\big(K(t) - \dot{K}(t) - bK(t)\big)\big] dt \tag{1.162}$$

Koşul $K(0) = K_0, K(T) \geq 0$

Örnek 1.7

Örnek 1 de belirlenen problemi çözelim;

Varsayalım ki envanter tutma maliyeti $c_2 = 0$ olsun. Her ne kadar artık $x(t)$ integrant işlemine girmese de problem dinamiktir, çünkü T uzunluğundaki zaman eğrisi boyunca toplam üretim B olmak zorundadır. $c_1$pozitif bir sabit olduğu için eşdeğer problem $c_1 = 1$ alınarak elde edilebilir.

$$\min \int_0^T ([\dot{x}(t)]^2) dt \tag{1.163}$$

Koşul $x(0) = 0, \quad x(T) = B, \quad \dot{x}(t) \geq 0$

Bu problemde kesikli zaman tahminleşmesinin yapılması optimallığı daha sonra teyit edilecek olan (1.163) için çözüm formunu ortaya koyacaktır.$[0, T\,]$ aralığını k uzunluğunda eşit T/k segmente bölelim $x(t)$ fonksiyonu her segmentin bitiş noktasında y köşeli poligonal doğrularla tahminlenecektir:

---

olarak 1,50 TL ye sahip olacağız ve faiz yeni yılda 1,50 TL nin % 50 si olarak hesaplanacaktır. Öyleyse varlığımız yılsonunda;

M(2) = $(1 + \%50) \cdot (1 + \%50) = (1 + \frac{1}{2})^2$

Aynı işlemler diğer yıllar için uygulandığında;

M(3) = $(1 + \frac{1}{3})^3$, M(4) =$(1 + \frac{1}{4})^4$ veya daha da genel bir şekilde;

M(v)= $\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ yazılır.

Anlaşıldığı üzere burada v bir yıl içerisinde faiz bindirgeme sıklığını göstermektedir.

Faizin yıl boyunca sürekli olarak bindirgendiği limit durumunda, yani m'nin sonsuz olduğu durumda;

$\lim_{m \to \infty} M(v) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ = e (TL)

Öyleyse , e =2,71828 sayısı bir ana paranın 1 yıl sonunda yılda %100 oranında sürekli faiz bindirgemesi neticesinde ulaşacağı yıl sonu değeri olarak yorumlanabilir. (Chiang & Wainwright, 2016)

Faiz bindirgeme ve A· e^{rt} Fonksiyonu (İskonto)

Eğer A Dolar yıllık $100r$ ile yatırılırsa, miktar 1 yılın sonunda $A + rA =\ (1 + r)$ A düzeyine, 2 yılın sonunda $(1 + r)$ A $+\ (1 + r)$ A $=\ (1 + r)2$ A ve tyıl sonunda ise $(1 + r)t$ A olacaktır. Ancak eğer faiz bileşik faiz (yılda iki sefer), 6 aylık faiz oranı $r/2$ olacak ve ilk miktar olan A 1 yılın sonunda $(1 + r/2)^2$A ve tyıl sonunda ise $(1 + r)^{2t}$A olacaktır. Daha genel bakacak olursak, faiz yılda m sefer tekrarlanıyor ise, ilgili periyot için faiz oranı r/m olacaktır. Bu durumda A miktarı bir yıl sonunda$(1 + r/m)^m$A ve t yıl sonunda ise $(1 + r/m)^{mt}$A olacaktır. m $\to \infty$ iken

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = e^{rt}$$

Burada yıllık sürekli bileşik faizi r oranında yatırılan A dolar tyıl sonundaAe^{rt} olacaktır. Eğer faiz sürekli olarak r değerinde bileştirilirse X dolar t yılda nasıl B dolar haline gelir? Bilinmeyen toplam X miktarı t yıl içerisinde Xe^{rt}düzeyine ulaşacaktır, bu sayede Xe^{rt} = B olur. Yani, $X = e^{-rt} \cdot$ B'dir. Yani, B doların gelecekte t yılda bugünkü değeri (eğer faiz oranı ya da iskonto oranı r ise) e^{-rt}B'dir.

$[(0,0),(k,y1),(2k,y2),\ldots,(T,B)]$. Karar değişkenleri envanter düzeyleri olan$\left[y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{T}{k-1}}\right]$'dir Değişim oranı $\dot{x}(t)$ *ise* $\Delta x/\Delta t = (y_i - y_{i-1})/k$ ile tahminlenir. Bu nedenle de tahminleme problemi aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde y_i'yibulmaktır$\left[i = 1, \ldots, \left(\frac{T}{k}\right)\right]$.

$$\min \sum_{i=1}^{\frac{T}{k}} \left[\frac{(y_i - y_{i-1})}{k}\right]^2, \text{ burada } y_0 = 0 \text{ ve } y_{\frac{T}{k}} = B \tag{1.164}$$

dt nin tahminlenmesi için $\Delta t = k$ kullanılmaktaydı. 13'ün sıfıra eşit her bir y_i değeri için kısmi türevini ele alalım.

$$\frac{(y_i - y_{i-1})}{k} - \frac{(y_{i+1} - y_i)}{k} = 0 \tag{1.165}$$

$$i = 1,2, \ldots \ldots \ldots, \frac{T}{k-1}$$

Bu nedenle

$$\frac{(y_i - y_{i-1})}{k} = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{k} \quad i = 1,2, \ldots \ldots \ldots, \frac{T}{k-1} \tag{1.166}$$

Dolayısıyla ardışık farklar eşittir. Envanterdeki ya da üretim hızındaki değişim k boyunca her zaman aralığında aynıdır. Envanter lineer olarak $(0,0)$ ile (T,B) arasındaki düz çizgi boyunca y_i ile büyür. Sürekli zaman optimizasyon problemi (1.163) ise (1.164)'de $k = 0$ iken elde edilir. Önceki hesaplama sürekli zaman probleminin çözümünün doğrusal olarak envanter oluşturmak suretiyle sabit oranda üretimi içerebileceğini göstermiştir; $x(t) = tB/T$

$$\dot{x}(t) = \frac{B}{T} \geq 0$$

olduğu için bu yol kullanılabilirdir. Bu konjonktür herhangi bir başka uygulanabilir envanter birikim yolunun daha düşük maliyet sunmadığı ortaya konarak teyit edilebilir. Tüm uygulanabilir yollar aynı ilk ve son koşullara sahiptir. $z(t)$'nin $z(0) = 0$ koşulunu sağlayan sürekli türevlenebilir bir karşılaştırma yolu ise $z(T) = B$ dir.Burada;

$$h(t) = z(t) - x(t) \tag{1.167}$$

t Zamanında karşılaştırma yolu; $z(t)$ ile aday yol $x(t) = t \cdot B/T$ arasındaki sapmadır. x ve z yolları ilk ve son zamanda kesiştiği için $h(0) = 0$ ve $h(t) = 0$'dır.

$z(t) = t \cdot B/T + h(t)$olduğundan $\dot{z}(t) = B/T + \dot{h}(t)$'dir ve z ve x planları arasındaki maliyet farkı aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^T \{[\dot{z}]^2 - [\dot{x}(t)]^2\}dt = \int_0^T \left\{\left[\frac{B}{T} + \dot{h}(t)\right]^2 - \left(\frac{B}{T}\right)^2\right\}dt \tag{1.168}$$

$$= 2\left(\frac{B}{T}\right)\int_0^T \dot{h}(t)dt + \int_0^T \left[\dot{h}(t)\right]^2 dt$$

$$= 2\left(\frac{B}{T}\right)[h(T) - h(0)] + \int_0^T \left[\dot{h}(t)\right]^2 dt$$

$$= \int_0^T \left[\dot{h}(t)\right]^2 dt \geq 0$$

Çünkü $h(t) = h(0) = 0$. Bu nedenle de herhangi bir verimli üretim planı (karşılaştırma planı) kullanıldığında maliyet aday plan $x(t) = tB/T,\ 0 \leq t \leq T$ ile elde edilecek maliyetten daha düşük olmayacaktır. Bu nedenle aday yol optimaldir.

Genel olarak problemler bu şekilde çözülmezler, ancak hem kesikli zaman tahminlemesi hem de optimallık doğrulaması yararlıdır.

Örnek 1.8

Örnek 1 de üretim ve depolama maliyetleri toplamını minimize etmek için aradığımız üretim ve envanter birikim planı;

$$\min \int_0^T \{c_1[x'(t)^2] + c_2 x(t)\}dt$$

Koşul; $x(0) = 0,\quad x(T) = B,\quad \dot{x}(t) \geq 0$

Burada c_1 ve c_2 negatif olmayan veri sabitlerdir. Optimal çözümün mutlak eşitsizlikle $\dot{x}(t) \geq 0$ negatif olmama kuralını sağladığını varsayalım. Bu durumda sabit asla bağlayıcı değildir. $F_x = c_2 F_{\dot{x}} = 2c_1\dot{x}$ olduğu için Euler denklemi de $(2c_1\dot{x})$' ya da;

$$\ddot{x}(t) = \frac{c_2}{2c_1} \tag{1.169}$$

Belirlenen Euler denklemine 2 defa integral alma işlemi uygulandığında sonuç;

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + k_1 t + k_2 \tag{1.170}$$

olacaktır. Burada k_1 ve k_2 sınır koşullarınca belirlenen integral sabitleridir;

$$x(0) = 0 = k_2$$

$$x(T) = B = \frac{c_2 T^2}{4c_1} + k_1 T + k_2$$

Bu nedenle;

$$k_1 = \frac{B}{T} - c_2T/4c_1$$

$k_2 = 0$ ve;

$$x(t) = \frac{c_2t(t-T)}{4c_1} + \frac{Bt}{T} \qquad (1.171)$$

$0 \leq t \leq T$

ki bu da aranan ekstremum noktadır. (1.171)'in $\dot{x} \geq 0$' a uyup uymadığını kontrol edelim. Euler denklemi (1.170)'ten $\ddot{x} > 0$ elde edilmektedir ki x' te t'nin artan bir fonksiyonudur. Bu nedenle de ancak ve ancak başlangıçta geçerli olması koşuluyla tüm t'ler için $\dot{x} > 0$'dır; $\dot{x}(0) = k_1 \geq 0$, Bunun anlamı da $\dot{x}(t) \geq 0$'ın aşağıdaki koşula bağlı olarak (1.171) ile karşılanacaktır.

$$B \geq \frac{c_2T^2}{4c_1} \qquad (1.172)$$

Bu nedenle de, eğer gerekli B toplam üretim miktarı mevcut T süresine kıyasla yeterince büyükse ve depolama maliyeti c_2 birim üretim maliyeti c_1'e göre yeterince küçükse problemin çözümü (1.171)'dir. Eğer (1.172) geçerli değilse, optimal planda üretime başlama işlemi ertelenir.

Euler denklemi $2c_1\ddot{x} = c_2$' nin bir yorumu vardır. Hatırlayalım, c_2 bir ilave birim envanteri bir zaman birimi tutmanın maliyetidir. Ayrıca$c_1[\dot{x}(t)]^2$ de t de toplam üretim maliyetidir ki bu nedenle de $2c_1\dot{x}$ üretimin anlık marjinal maliyeti ve $2c_1\ddot{x}$ ise zaman değişim oranıdır. Bu nedenle Euler denklemi B birim ürünü T zamanda teslim etmenin maliyetin minimize etmek için marjinal envanter tutma maliyetine karşı marjinal üretim maliyeti değişim oranını dengelemeyi amaçlar.

Euler denklemini oldukça kısa bir zaman dilimi (varsayalım ki Δ olsun) için entegre ettiğimizde bu yorum daha açık bir hal alacaktır. Bu denklem yol boyu tüm t değerleri için geçerli olmak zorunda olduğu için elimizdeki eşitlik:

$$\int_t^{t+\Delta} 2c_1x''(t)\,ds = \int_t^{t+\Delta} c_2\,ds$$

Burada temel integral teoremi kullanıldığında;

$$\int_a^b \dot{F}(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$2c_1\dot{x}(t) + c_2\Delta = 2c_1\dot{x}(t+\Delta)$$

Bu nedenle de bir birim ürünü t zamanında üretmenin ve onu Δ süre kadar envanterde tutmanın marjinal maliyeti $t+\Delta$ zamanda üretmenin marjinal maliyetiyle aynı olmak zorundadır. Yani, bir birim ürünü t sürede üretmek ve bunu küçük bir süre ertelemek arasında bir fark yoktur. Aslında optimal yolun tamamı boyunca üretim planında yapılacak hiçbir kayma maliyetleri düşüremez.

Örnek 1.9:

Harcamaların sürekli olarak r oranında azaltıldığını varsayalım.

$$\min \int_0^T e^{-rt}[c_1\dot{x}^2 + c_2 x]\, dt$$

Koşul; $x(0) = 0$, $x(t) = B$

Ekonomik açıdan $\dot{x} \geq 0$ olması gerekmektedir ama bu gerekliliği geçici olarak bir kenarda tutuyoruz. $F_x = e^{-rt}c_2 \text{ve} F_{\dot{x}} = 2e^{-rt}c_1\dot{x}(t)$ hesaplamalarını yapıyoruz. Euler denklemi

$$e^{-rt}c_2 = d(2e^{-rt}c_1\dot{x}(t))/dt$$

t'de marjinal envanter maliyetinin bugünkü değeri ile ilgili marjinal üretim maliyetindeki değişim oranı arasında bir denge amaçlanır. Bu denklemi küçük bir zaman dilimi için integrale uyguladığımızda;

$$\int_t^{t+\Delta} e^{-rt}c_2\, ds = \int_t^{t+\Delta} [d(2e^{-rt}c_1\dot{x}(s))/ds]ds$$

Bu da

$$2e^{-rt}c_1x'(t) + \int_t^{t+\Delta} e^{-rt}c_2\, ds = 2e^{-r(t+\Delta)}c_1\dot{x}(t+\Delta)$$

Bir birim ürünün t de üretiminin ve bunu Δ süre elde tutmanın marjinal maliyeti bir birim ürünün $t+\Delta$ 'da üretiminin marjinal maliyeti ile eşittir.Bu nedenle de t'de ya da kısa bir süre sonrasında üretim yapmak arasında bir fark yoktur. Bu üretim planındaki herhangi bir değişiklik toplamda düşmüş maliyeti yeniden düşüremez. Genişlettiğimizde

$$\frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = -2re^{-rt}c_1\dot{x}(t) + 2e^{-rt}c_1\ddot{x}(t)$$

Euler denklemini basitleştirdiğimizde;

$$\ddot{x}(t) = r\dot{x}(t) + \frac{c_2}{2c_1} \qquad (1.173)$$

$\dot{x}$ negatif olamayacağı için (1.173)'ün sağ tarafı pozitif olmak zorundadır. Bu nedenle de $\ddot{x} > 0$ olduğu için optimal plan üretimin zaman içerisinde kesinlikle artmasını içermektedir. Depolama maliyetleri olmadığında bile paranın zaman karşılığı $(r > 0)$ firmanın marjinal üretim faaliyetinin bugünkü değerini sabit tutmak için zaman içerisinde artan oranda üretim yapmaya itmektedir. Birim depolama maliyeti c_2 ve birim faiz oranı r ne kadar büyük olursa üretimi ertelemek (depolama maliyetlerinden tasarruf etmek ve harcamaları ertelemek) de o kadar avantajlı olacaktır ve bundan ötürü de zamana karşı üretim eğrisi o kadar dik olacaktır.

Euler denklemi (1.173)'ü çözmek için ne x'in ne de t'nin diferansiyel denklemde yer almadığına dikkat edelim. $\dot{x} = u$ değişkeni değiştirilir ki bu durumda $\ddot{x} = \dot{u}$ olur. Bu da sabit katsayılarla birinci derece lineer diferansiyel denklemi vermektedir.

$\dot{u} = ru + c_2/2c_1$

Çözümü;

$$\dot{x} = u = k_1 e^{rt} - \frac{c_2}{2rc_1}$$

Burada k_1 integral sabitidir. İntegral sonucu

$$x(t) = \frac{k_1 e^{rt}}{r} - \frac{c_2 t}{2rc_1} + k_2$$

Sınır koşulları;

$$x(0) = 0 = \frac{k_1}{r} + k_2$$

$$x(T) = B = \frac{k_1 e^{rT}}{r} - \frac{c_2 T}{2rc_1} + k_2$$

Buda integral sabitleri için aşağıdaki değerleri verir:

$$k_2 = -k_1/r \quad , \quad k_1 = r(B + \tfrac{c_2 T}{2rc_1})/(e^{rT} - 1)$$

Dolayısıyla çözüm;

$$x(t) = \frac{\left(B + \frac{c_2 T}{2rc_1}\right)(e^{rt} - 1)}{e^{rT} - 1} - \frac{c_2 t}{2rc_1} \qquad (1.174)$$

Koşul; $0 \le t \le T$

Ki $\dot{x}(t) \ge 0$ koşulu da sağlanmaktadır. Bu da daha önce olduğu şekilde kontrol edilebilir. $\ddot{x} > 0$ olduğu için tüm $\dot{x}(0) \ge 0$ boyunca$\dot{x}(0) \ge 0$ olduğunu da biliyoruz. Sonuç olarak sadece ve sadece aşağıdaki koşulda $\dot{x}(0) \ge 0$ olduğu görülebilir:

$$B \geq \frac{(e^{rT} - 1 - rT)c_2}{2r^2 c_1} \tag{1.175}$$

Eğer (1.175) geçerliyse bu durumda (1.174) de $\dot{x}(0) \geq 0$'ın negatif olmama koşulunu sağlar ve optimal sonuç (1.174) olur..Her ne kadar (1.175)'in fonksiyonel formu bir şekilde (1.72)'den farklı olsa bile üretim optimal olarak $t = 0$'da $r = 0$'daki duruma kalitatif olarak benzer koşullarda başlar. Eğer (1.175) ihlal edilirse üretimin başlanması da ertelenir.

Örnek 6:

Devam ettiğimizde, varsayalım ki üretim maliyeti monoton bir artışla artıyor olsun, üretim oranı $\dot{x}$ için konveks fonksiyon $g(\dot{x})$; $x \geq 0$ için $g(0) = 0$ $\dot{g}(0) \geq 0$ $\ddot{g} > 0$

Karesel üretim maliyeti açıkça görüleceği üzere özel bir durumdur. Aşağıdaki problem için

$$\min \int_0^T e^{-rt}[g(\dot{x}) + c_2 x]\, dt$$

Koşul; $x(0) = 0$, $x(T) = B$

Hesaplama ise

$F_x = e^{-rt}c_2$, $F_{\dot{x}} = e^{-rt}\dot{g}(\dot{x})$,

$$\frac{dF_{\dot{x}}}{dt} = -re^{-rt}\dot{g}(\dot{x}) + e^{-rt}\ddot{g}(\dot{x})\ddot{x}$$

Euler denklemi de bu nedenle

$$\ddot{g}\big((\dot{x})(t)\big)\ddot{x}(t) = r\dot{g}\big(\dot{x}(t)\big) + c_2 \tag{1.176}$$

$\ddot{x}$ için (1.176)'daki tüm terimlerin negatif olmadığı bilinmektedir. $\ddot{x} > 0$ olduğundan optimal üretim oranı (pozitif olduğu yerde) toplam B ürün birikiminin sağlandığı T zamanına kadar kati bir şekilde artacaktır. Örnek 6 da olduğu üzere, depolama maliyetleri ve zaman tercihlerinin her ikisi de firmayı envanter maliyetlerinden tasarruf etmek ve harcamaları ertelemek için üretimi ertelemeye itecektir. Veri üretim oranı $\dot{x}$ için (1.176)'dan anlayacağınız üzere faiz oranı r ve depolama maliyeti c_2 ne kadar yüksek olursa $\ddot{x}$ üretim değişim oranı da o kadar yüksek olacaktır. Dikkat edilirse, çözümün genel kalitatif davranışı üretim maliyeti fonksiyonu g 'nin kati bir şekilde spesifikasyonu yapılmadan belirlenmiştir. Gerçek analitik çözüm bu spesifikasyona dayanmaktadır.

Örnek 1.10:

Bir bireyin iskontolu fayda eğrisini zaman içerisinde bilinen T kadar süre boyunca maksimize edecek tüketim oranının peşinde olsun. Tüketimin her t anındaki faydası $U(C(t))$ 'nin artan konkav bir fonksiyon olduğu bilinmektedir (tüketimin azalan marjinal faydası): $\dot{U} > 0$ ve $\ddot{U} < 0$. Gelecekteki fayda r oranında iskonto edilir. Hedef;

$$\max \int_0^T e^{-rt} U\big(C(t)\big)\, dt \tag{1.177}$$

ki bu da nakit akışı kısıtına tabidir. Birey mevcut gelirini dışsal olarak belirlenen ücretlerden $W(t)$ ve elinde tutmuş olduğu sermaye varlıkları $K(t)$ için aldığı faiz gelirleri iK 'dan elde ediyor olsun. Basitleştirmek için bireyin sermayeyi borç olarak almış olabileceğini (yani $K < 0$) ve i faiz oranından faize yatırdığını düşünelim. Sermaye bir fiyattan satılabilir ya da alınabilir. Bu nedenle de faiz ve ücret gelirleri harcamalar ve yatırımlara pay edilir.

$$iK(t) + w(t) = C(t) + \dot{K}(t) \tag{1.178}$$

Hem ilk hem de son sermaye stokları şu şekilde belirlenir:

$$K(0) = K_0$$

$$K(T) = K_T \tag{1.179}$$

C 'yi ((1.177) den elimine etmek için (1.178)'in kullanımı tek fonksiyon $K(t)$'deki değişimler problemin hesaplanmasını sağlar.(1.177)'nin integrantını F olarak belirlediğimizde ve (1.178) i hesaba kattığımızda hesaplanacak ifadeler (zincir kuralı kullanılarak);

$FK = e^{-rt}U(C)iveF\dot{K} = -e^{-rt}\dot{U}(C)$ olacaktır. Euler denklemi;

$$\frac{d\left(-e^{-rt}\dot{U}(C)\right)}{dt} = e^{-rt}\dot{U}(C)i \tag{1.180}$$

Yorumlama kolaylığı açısından (1.180)'i kısa bir zaman aralığında integral alma işlemi uyguluyor ve yeniden düzenliyoruz:

$$e^{-rt}\dot{U}\big(C(t)\big) = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}\dot{U}(C(s))i\ ds + e^{-r(t+\Delta)}\dot{U}\big(C(t+\Delta)\big) \tag{1.181}$$

Optimal tüketim planında birey harcamasını ilave bir USD daha arttırarak tüketimin marjinal faydasını arttıramaz. t'de tüketimin marjinal ıskontolu faydası ((1.181)'in sol tarafı) ilgili tüketimi $t + \Delta$ 'ya ertelemediğinde elde edilen marjinal ıskontolu faydaya ((1.181)'in sağ tarafı) eşit olmak zorundadır. Daha açık ifade etmek gerekirse, eğer tüketim ertelenirse her 1 USD i faiz oranından bir faiz getirisi elde edecektir ki bu da kazanıldığı gibi harcanabilir. s zamanında harcanan her ilave 1 USD artan fayda $\dot{U}(C(s))$ kadar katkı sağlayacaktır. Bu nedenle de (1.181)'in sağ tarafındaki ilk terim ertleme süresi boyunca elde edilen ıskontolu artan faydadır. Son olarak, erteleme süresinin sonunda para harcanır ve $\dot{U}(C(t+\Delta))$ kadar artan fayda sağlar.(1.181)'in sağ tarafını ikinci terimi de bu ıskontolu marjinal faydadır. (1.203)'te ilgili türev işlemi gerçekleştirildiğinde elde edilen sonuç :

$$-\frac{\ddot{U}\dot{C}}{\dot{U}} = i - r \qquad (1.182)$$

Marjinal faydanın değişim oranı yatırılan sermayenin getiri oranı ile sabırsızlık oranı arasındaki farka eşittir. Hipotez gereği $-\frac{\ddot{U}}{\dot{U}} > 0$ olduğundan ötürü optimal çözüm sadece ve sadece $i > r$ için $\frac{dC}{dt} > 0$ ile karakterize edilmektedir. Eğer sermayenin getiri oranı i bireyin sabırsızlık (zaman tercih) oranı r'yi aşarsa optimal tüketim eğrisi ortaya çıkacaktır.(Görece sabırlı bir birey gelecekte daha yüksek bir tüketim sağlayabilmek adına sermayenin büyümesine olanak tanımak için bazı mevcut harcamalarını erteler.)

Eğer U'nun fonksiyonel formu belirlenirse daha fazlası da açıklanabilir.

$U(C) = \ln C$ olsun, $0 \leq t \leq T$ için $w(t) = 0$ ve $K_T = 0$ olsun. Bu durumda (1.182) şu hali alır:

$$\frac{\dot{C}}{C} = i - r$$

İntegral alma işlemi ve sonrasında (1.178) yerine konduktan sonra;

$$\dot{K} - iK = -C = -C(0)e^{(i-r)t}$$

e^{-rt}ile çarptıktan sonra integral alma işlemi gerçekleştirilir ve integral sabitlerini bulmak için $K(0) = K_0$ ve $K(T) = 0$ sınır koşulları kullanılır:

$$K(t) = e^{it}K_0\left[1 - \frac{1 - e^{-rt}}{1 - e^{-rT}}\right] \qquad (1.183)$$

Buradan optimal tüketim miktarı herhangi bir t anı için aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$C(t) = \frac{rK_0e^{(i-r)t}}{1 - e^{-rT}}$$

Serbest Ufuk

Örnek 1.11:

Belirli bir zaman dilimi için optimal tüketim planını araştırdığımız Örnek 7'yi genelleyelim. Bireyin ömrünün bilinmez olduğunu varsaydığımız için optimal olasılık planını arıyoruz. $F(t)$ t zamanında ölme ihtimalini, $F'(t)$ ise ilişkili olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve T de olası ömrün üst sınırını (örneğin 140 yıl olsun) temsil ettiğini varsayalım. Bu durumda; $F(T) = 1$'dir. Buradan $1 - F(t) = \int_t^T F'(s)ds$ de en azından t'ye kadar yaşama ihtimalini göstermektedir. Birey sadece $U(C)$ tüketiminden tatmin sağlamaz, ayrıca mirasçılarına da bir miras bırakır. İkinci unsur$W(K)$ sürekli türevlenebilir, negatif olmayan ve artan bir vasiyet faydası unsurunu temsil etmektedir. $W(K)$ fonksiyonu tüketimin faydası $U(C)$ fonksiyonundan farklıdır; bu fonksiyon akışa değil birikime dayanır ve mirasçıların kullanmasına izin verilen tüketimi yansıtır. Burada $a(t)$'nin ilgili mülk faydasına ilişkin ıskonto terimi olduğunu varsayalım.Bu fonksiyonun faydası belirtilmemektedir. Bu fonksiyon t anına kadar artabilir ve sonrasında da azalabilir ki bu da bireyin mirasçılarına büyük bir miras bırakma niyetinin çocuklarının henüz tam yetişkin olmadığı orta yaş döneminde, çocukların yeni doğduğu ve çocukların kendi ayakları üzerinde durduğu dönemlere kıyasla daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Eğer bir birey t zamanında ölürse, yaşam boyu toplam fayda t anına kadarki ıskontolu toplam tüketim fayda akışı (r oranında) ve ölüm anındaki iskontolu mirasın ($a(t)$ faktörü) toplamından oluşacaktır. Bu nedenle de bireyin problemi;

$$\int_0^T F'(t)\left[\int_0^t e^{-rs}\,U\big(C(s)\big)ds + a(t)W\big(K(t)\big)\right]dt \tag{1.184}$$

Bütçe sınırı;

$$C(t) = iK(t) + w(t) - \dot{K}(t) \tag{1.85}$$

Ve sınır koşulu;

$$K(0) = K_0$$

Bu problemi yönetilebilir bir forma sokmak için ikili integral içeren hedef kısmını parçalı olarak integral alma işlemi uyguluyoruz (iç integral u ve katsayısı $\dot{F}dt$ de dv olsun).Burada (1.184)'te

$$\int_0^T \left[e^{-rt}U\big(C(t)\big)[1 - F(t)]\big(K(t)\big)\dot{F}(t)\right]dt \tag{1.186}$$

Bu alternatif form (1.186) aşağıdaki şekilde yorumlanabilir. Eğer birey en az t yıl yaşar ise (olasılık $1 - F(t)$), bu durumda $U(C(t))$ tüketiminden elde edilen kadar fayda toplanır. Eğer birey t anında ölürse (olasılık $\dot{F}(t)$) bu durumda mirastan elde edilecek fayda da alınır. G fonksiyoneli K'ya göre integrali alınmış fonksiyonel olsun. Bu durumda;

$$G_K = e^{-rt}\dot{U}(C)i(1-F) + a\dot{W}(K)\dot{F}$$

$$G_{\dot{K}} = -e^{-rt}\dot{U}(C)i(1-F)$$

Sadeleştirme sonrasında Euler denklemi;

$$C(t) = -\frac{(i-r)\dot{U}(C)}{\ddot{U}(C)} + \frac{m\left(\dot{U}(C) - e^{rt}a\dot{W}(K)\right)}{\ddot{U}(C)}$$

Burada

$$m(t) \equiv \frac{\dot{F}(t)}{[1-F(t)]} \qquad (1.187)$$

ise t anında ölmenin ve o ana kadar hayatta kalmanın koşullu olasılık yoğunluğudur.

$$\dot{C}(t) = \frac{(i-r-m)\dot{U}(C)}{\ddot{U}(C)} \qquad (1.188)$$

Buradan da görüldüğü üzere, bir insanın ömrüne ilişkin belirsizliğin etkisi iskonto oranı r'deki artış ile yani sabırsızlık etkisi ile aynıdır. Özel olarak bakıldığında, bireyin ömrüne ilişkin belirsizlik her t'de "efektif" iskonto oranını r'de

$r + \frac{\dot{F}(t)}{[1-F(t)]} = r + m'$ye yükseltmektedir. Bu nedenle de hem sabırsızlık hem de ölüm riski nedeniyle iskonto gerçekleşmektedir. Bu da $a(t) > 0$ olduğu sürece geçerlidir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

RAMSEY MODELİ

3.RAMSEY MODELİ

1928 yılı kadar erken bir dönemde İngiliz Matematikçi Frank Ramsey tarafından toplumun tasarruf oranının optimum ne olacağı sorusunu içeren bir makale yayınlanmıştır (Groth, 2010, s. 2).

Denilebilir ki Ramsey Tasarrufun Matematiksel Teorisi başlıklı makalesinde değişimler hesabı tekniğini kullanarak iktisadi büyüme ile planlama kavramları arasında bir köprü kurmuştur. Klasik iktisadi yaklaşımda bu sorunun kısmen kendiliğinden düzeltileceği yönünde yaygın bir kanaat bulunduğu için Ramsey'in makalesinin otuz yılı aşkın hak ettiği ilgiyi görmediğini uzun süre sonra yapılan çalışmalardan anlaşılmaktadır. Bu unutulmanın nedeni kısmen kullandığı ileri matematik olabilir. Ayrıca 1930 buhranının iktisatçıların dikkatini iktisadi dalgalanmalara çekmiş olmasının etkisi de düşünülebilir. Uzun yıllar süren bu sessizliğin bozulmasında ise tesadüfen aynı yılda farklı ilgi alanlarında çalışmalar yapan J. Tinbergen ile diğer bir makalede birlikte çalışmalar yapan P. A. Samuelson ve R. M. Solow etkili olmuştur. Samuelson, Ramsey'in modelini birden fazla sermaye malı için genelleştirirken Tinbergen ise yöntemi bir planlama aracı haline getirmeye çalışmıştır (Barro ve Martin, 2004, s. 46).Yine de bu yıllarda Ramsey'in kullandığı optimizasyon tekniği iktisatçılar arasında yaygınlaşmamıştır. Optimal yöntemin yaygın halde kullanılmasının öncüsü T.C. Koopmans olmuştur. Koopmans 1965 te yazdığı makalesinde Ramsey'in yöntemi ile modern iktisat teorisi arasında ilişki kurmaya çalışmış ve ileri düzeyde tartışmaların başlamasını sağlamıştır.

Esasında 1965 li yıllarda Ramsey'in makalesinde kullandığı metodun dikkat çekmesinin bir diğer nedeni yeni ve güçlü bir matematik tekniğin ortaya konulmasıydı. 1962 ye kadar optimale ulaşmada kullanılan matematik tekniği değişimler hesabı idi. Teknik Ramsey'den (1928) Koopmans'a (1965) kadar optimal yöntemin değişmez bir aracı olarak kullanılmıştır. Bölüm 1'de bahsedildiği üzere L.S. Pontryagin ve arkadaşları tarafından 1950 yılında geliştirilen optimal kontrol teorisi etkin iktisat kavramının hızla yayılmasını sağlamıştır.

Ramsey'in makalesi etkin iktisadi büyüme konusunu yaratmıştır denilebilir. Onun bıraktığı hali ile konunun en önemli aksaklığı yaptığı bazı aydınlatıcı yorumlara rağmen, varsayımlarının gerçek dışı olması idi (Mirrlees, 1967, s. 18). Bu varsayımların gerçek dışı olması ilk yapılan bir çalışma için hoş görülebilir niteliktedir. Ancak makalede yer alan varsayımların büyüme teorisinin temel büyüklükleri üzerinden olduğu görülmektedir. Bu nedenle de bu varsayımların genişletilmesi gerekmektedir. Gerçekten bakıldığında 1963-1974 yılları arasında etkin iktisadi büyüme konusunda yapılan çalışmalar bu varsayımların genişletilmesinden oluşmaktadır[6] (Groth, 2010, s. 5)

Ramsey'in Yapmış olduğu basitleştirici varsayımlardan ilki sermaye stokunda yıpranmanın olmadığını kabul etmesidir. Ancak makaleden, yıpranma oranının olmadığını çıkarmamız mümkün iken genişletilmesi mümkün olan bu varsayımı

[6] Bkz. J. Tinbergen (1956) J.A. Mirrless(1967), T.J. Koopmans (1965), D. Cass(1960)

belirtme gereği dahi duymadığını anlıyoruz (Ramsey, 1928, s. 2,11,18). İkinci bir varsayım nüfus artışı hızının sıfır kabul edilmesidir. 1928 lerin İngiltere'sinde nüfus artış hızı çok düşük olduğu için modelin bu varsayımı sınırlayıcı olarak kabul edilmeyebilir. Ancak ilerleyen yıllar içinde nüfus artış hızının dikkate alınmaması gerçeklikten uzak sonuçları doğuracaktır. Yine de Ramsey modeli temelinde kurulan modellere bakıldığında nüfus değişkeninin dışsal kabul edildiğini görüyoruz. Bu ise modelin sonuçlarının değişmemesini sağlamaktadır. Üçüncü varsayımı tek mal ve tek üretim sektörlü bir ekonominin kabul edilmesidir. Dördüncü varsayımı kuşaklar arası adaletin varlığını kabul etmesidir. Ramsey bu varsayımı ile bir kuşakta yaşayan bireylerin gelecek nesillerin aleyhinde bir karar almayacağını ifade etmektedir. (Ramsey, 1928, s. 11,15,17) Beşinci olarak Ramsey, büyüme modelini ortaya koyarken kapalı bir ekonomiyi ele almıştı. Bu varsayım ile Ramsey dış ticaretin olmadığını belirtmektedir. Yine makalesinden Ramsey'in bu varsayım altında dış yardımları ve sermaye hareketliliğini ihmal ettiğini anlıyoruz. Teknolojik gelişmenin olmadığı varsayımını ise altıncı varsayım olarak söyleyebiliriz. Sayılan bu altı varsayımdan görüldüğü üzere hepsi Ramsey'in modelini kurarken o dönemin şartlarına odaklanması ve normatif bir model olması için kısıt sayısını azaltma gerekliliği olarak söyleyebiliriz. Ramsey başlıca sayılan bu altı varsayımın dışında ayrıca makalesinde açıkça ifade etmediği iki varsayımdan da söz etmemiz yanlış olmayacaktır. Bu varsayımlar devletin ekonomiye müdahale etmemesi ve kusursuz öngörüdür. Bunlardan ilki devletin ekonomiye para ve maliye politikaları ile müdahale etmemesidir. Aslında devletin ekonomiye müdahale etmemesi kusursuz öngörünün bir uzantısıdır. Kusursuz öngörü ise iktisadi karar birimlerinin (üreticilerin ve tüketicilerin) iktisadi hayatın geleceğini kesin bir şekilde tam olarak tahmin etmeleridir. Tahmine konu olacak iktisadi büyüklükler enflasyon, fiyatlar vs olabileceği gibi hava koşulları gibi çevresel üretim faktörleri veya üretim teknolojisi gibi teknik faktörlerde olabilir (Leland, 1974, s. 20-31). Varsayıma göre kusursuz öngörü ile yapılan bütün tahminler doğru çıkmaktadır. Bu kavramı aslında statik iktisat ile analoji kurarak açıklamamız mümkündür. Nasıl ki statik iktisatta piyasaların temizlenmesi için kesin bilgiye ulaşabilme varsayılıyor ise dinamik iktisatta da kusursuz tahmin piyasanın zamanın dinamikliğinde denge sağlaması adına gerekli bir varsayım olarak görülüyor (Tinbergen, 1956, s. 19-26). İşte bu nedenle kusursuz öngörüye sahip bir ulusta devletin ekonomiye müdahale etmesi ihmal edilebilir (Mirrlees, 1967, s. 25-42).

3.1 Ramsey Modelinin Varysasyon (Değişimler) Hesabı Yöntemi İle İncelenmesi

Ramsey'in modeli hem içinde bulunulan zaman için hem de sürekli zaman için kurgulanmıştır. Makalesinden anlaşıldığı üzere Ramsey geleneksel sermaye teorisine bağlı kalmadan etkin iktisadi büyüme için optimizasyonu matematiksel tekniğe dayandırmaktadır (Fındıkçıoğlu, 2010, s. 2). Ramsey'in makalesinde ilk önce mutluluk (bliss) üzerinde felsefi bir yaklaşım geliştirdiğini ve matematiksel teknikler aracılığı ile bir sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. 2. Bölüm'de bahsedildiği üzere çalışmada U fonksiyoneli ile ifade edilecek olan mutluluk düzeyi (maksimum fayda) son derece uygun bir sınır değer olarak karşımıza çıkıyor. Eğer mutluluk gibi bir üst sınır koymaz isek U fonksiyoneline integral alma işlemi uyguladığımızda çözüme ulaşmak mümkün olmuyor (Ramsey, 1928, s. 7). Çünkü sonsuza giden bir ufukta varyasyon hesabıyla tek bir sonuç bulmak imkânsızdır. Mutluluk integralinin toplanması (convergence) için kullanılabilecek en iyi ve zararsız yollardan biri olarak görünmektedir. Ramsey önce faydayı tüketime tüketimi ise sermayeye bağlayarak esasen faydayı doğrudan doğruya sermayeye bağlamıştır. Bu işlem iktisadi bir varsayım olarak karşımıza çıkmaktadır. Fayda ile sermaye arasındaki ilişkileri gruplayarak klasik faydadan farklı öngörüler getiren Ramsey ilk büyük ayrımı sermaye artışının fayda üzerinde belirli bir süre sonunda etkisinin olmayacağı yönünde yapmıştır. Yani fayda bir süre sonra sermayede artışa neden olduğu gibi bunun tam terside geçerli olabilir demektedir (Ramsey, 1928, s. 11). Faydanın sermayede artışı sağlamadığı durumda mümkün olabilecekleri de şu şekilde ayırabiliriz. İlk önce belirli bir zaman sonrasında sermaye artışı; tüketim mallarında bir artış gerçekleştirmeyebilir, tüketim veya boş zaman artışı faydanın artışını sağlamayabilir. İkincisi ise azami mutluluğa ulaşmışızdır. Tüketimin veya boş zamanın artması faydayı arttırmaz. Her iki durumda da belirli bir sermaye stoku vardır ki iktisadi olarak daha fazlası yararlı değildir. Bu sermaye stokunu aşmak bize iktisadi olarak fayda sunmazken zevk alma kapasitesi yüksek olabilir ancak tüketim malları ile karşılanan yönü artık doymuştur (Koopmans, 1962, s. 9).

İkinci büyük ayrımı ise sermaye artışının faydayı sürekli olarak arttıracağıdır. Bu durumu da sermaye stoku arttıkça sonsuza kadar faydanın artması veya süreklilik arz eden azami zevk (rate of enjoyment) düzeyine yaklaşılabilinir (hiç ulaşılmasa bile) şeklinde ikiye ayırmak mümkün görünmektedir (Koopmans, 1962, s. 11). Bu ayrımlardan hangisi olursa olsun azami zevk ve faydayı Ramsey mutluluk olarak tanımlamıştır. Kısaca Ramsey'in problemini mutluluğa ulaşmak için bir ulus gelirinin ne kadarını tasarruf etmelidir (Ramsey, 1928, s. 15) şeklinde özetlememiz mümkündür.

Ramsey modelini kurarken iktisadi bir takım varsayımları kabul etmiştir. Buna göre Ramsey nüfusun artmadığını (azalmadığını), zamana bağlı tüketici fayda fonksiyonunun değişmediğini, faydaların birbirinden bağımsız olarak toplanabildiğini ve hesaplanabilirliliğini, teknolojik icatların (sermaye birikimi tarafından gerçekleşmeyenler dışında) olmadığını, gelir dağılımı sorunlarının ele alınmadığını, dış ticaretin olmadığını, emek ve sermayenin denk bir standartla ifade edilebildiğini, bir neslin önceki neslin kararlarının aksine karar almadığını kabul etmiştir (Ramsey, 1928, s. 15).

Çalışmanın bundan sonraki kısmında Ramsey'in problemini ortaya koyarken yararlandığı varyasyon hesabı yönteminin kullanımına geçilecektir. Burada 2. Bölümde anlatılan değişimler hesabı tekniğinin modele nasıl dâhil edildiği açıklanmaya çalışılacaktır. Toplumun sermaye stokunu K ile işgücünü L ile tüketimi ise C ile gösterdiğimiz bir modelde K, L, C zamanın birer fonksiyonu olarak kabul edilecektir. Yani t gibi bir zaman diliminde bu üç fonksiyonu da şu şekilde ifade ederiz. t zamanındaki sermaye $K(t)$, t zamanındaki işgücü $L(t)$, t zamanındaki tüketim $C(t)$.Toplumun sermaye birikimi herhangi bir t anındaki sermaye miktarındaki değişimdir. Yani fonksiyonun değişimidir. Bir fonksiyondaki değişimi kalkulüs tekniğinin1. Bölüm 1.1.4 te verildiği diferansiyel başlığına göre dK/dt olarak yazabiliriz.

Milli geliri ele alış biçimi incelendiğinde Ramsey analizi tek bir kişi için ele almıştır ve t anında milli gelir fonksiyonunu $Y(t)$ ile ifade etmiştir. Bütün büyüklükleri nüfus ile çarptığımızda ulusal büyüklüklerin elde edileceğini varsaymıştır. Bu varsayımı yaparken milli gelir ile bireyin geliri arasında hiçbir fark gözetmemiştir. Bu nedenle gelir kelimesinden hem bireyin gelirini hem de milli geliri anlamamız mümkündür. Milli gelir fonksiyonunu emek ve sermaye değişkenlerine bağladığımızda $Y(t) = f(K, L)$ yani gelirin emek ve sermayenin de bir fonksiyonu olduğunu ifade ederiz. Aynı zamanda gelir tasarruf ve tüketimin toplamı cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Y(t) = f(K, L) = C(t) + dK/dt$$

bu denklemden $C(t)$ tüketim fonksiyonunu çektiğimizde

$$C(t) = f(K, L) - \frac{dK}{dt} \tag{2.1}$$

elde edilir. Toplumun refahının yani sağlanan faydanın sadece tüketime bağlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda U ile göstereceğimiz refahı tüketim (c)’ ye bağlı bir fonksiyon şeklinde aşağıdaki gibi yazabilmemiz mümkün olur.

$$U = \varphi(c)$$

Diğer yandan tüketim malını elde etmek için harcanan emek faydasızlığı da doğuracağı için (disutility of labor) emeğin faydasızlığını da kullanılan emeğin bir fonksiyonu olarak kabul ederiz.

$$v = \psi\,(L)$$

Belirli bir zamanda (t_0’ dan t_1’ e kadar) toplumun sağlayacağı net fayda olarak yazılabilir.

U faydayı ifade ediyor ve aynı zamanda bir fonksiyonel. Bu durumda değişimler hesabı 1.1.5 ‘ e göre U fonksiyonelini yeniden düzenlersek;

$$U = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(C)dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi\,(L)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \big(\varphi(C) - \psi\,(L)\big)dt \tag{2.2}$$

şeklinde olacaktır. Burada bu denklemi yazabilmek için tüketicilerin fayda fonksiyonlarının zamana bağlı değişmediği ve faydanın hesaplanabilirliği varsayımlarını kullandığımızı hatırlayalım. Burada insanlar geçmiş anılarından veya gelecekteki beklentilerinden zevk almamaktadır.

Daha önce de belirtildiği üzere U bir fonksiyoneldir. 1.1 de J ile ifade etmiştik. $L(t)$ ve $K(t)$’de zamana bağlı değişken fonksiyonlardır. Çünkü $\varphi(C)$, $C(t)'$ ye $C(t)'$ de $K(t)$’ye bağlıdır. (Ramsey nüfusun değişmediğini varsayıyordu. Yani nüfus artış hızı 0 idi.) Dolayısı ile belirtilen koşulları sınır koşullar olarak değerlendirip toplumun toplam faydasını maksimum yapacak tasarruf miktarı (oranı) ve emek miktarını belirleyeceğiz. Yani U fonksiyonelini maksimum yapan $L(t)$ ve $K(t)$ fonksiyonlarını bulmak gerekecektir. Şimdi sorunumuzu tanımlamış bulunuyoruz. Maksimum noktayı veren fonksiyonlar elde etmek. 1.1’de Euler denklemini genelleştirmede kullandığımız yöntemi burada uygulayarak iki adet Euler denklemi elde edeceğiz. Denklem 2.2 den yararlanarak U fonksiyonelini şu şekilde yazmamız mümkün.

$$U = \int_{t_0}^{t_1} F(K, L, \dot{K}) dt \qquad (2.3)$$

Burada;

$F(K, L, \dot{K}) = [\varphi(C) - \psi\,(L)]$ve $\quad C = f - \dot{K}$

Bu verilerle Euler denklemini yazılırsa;

$$F_L - \frac{d}{dt}(F_{\dot{L}}) = 0 \text{ ve } F_K - \frac{d}{dt}(F_{\dot{K}}) = 0 \qquad (2.4)$$

Burada

$$F_L = \frac{\partial F}{\partial L} \qquad (2.5)$$

$$F_{\dot{L}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{L}}$$

$$F_K = \frac{\partial F}{\partial K} \qquad (2.6)$$

$$F_{\dot{K}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{K}}$$

Şeklinde yazılır. Burada ifade edilen Euler denklemini oluşturmada bölüm 1.1.8 de 1.27 denkleminden faydalanılmıştır.

$$F_L = \frac{\partial}{\partial L}(\varphi(C) - \psi(L)) = 0 \qquad (2.7)$$

$C = f - \dot{K}$ olduğunu yeniden hatırlayalım ve türev zincir kuralını uygulayalım.

$$F_L = \dot{\varphi}(C) f_L - \dot{\psi}(L) = 0 \qquad (2.8)$$

2.8 denkleminden f_L'yi çekersek

$$f_L = \frac{\dot{\psi}(L)}{\dot{\varphi}(C)} \qquad (2.9)$$

elde edilir.

Emek kuralını sözlü olarak ifade edersek ücret, tüketimin marjinal faydasının emeğin faydasızlığına (disutility) oranıdır deriz (Ramsey, 1928). Dikkat edildiğinde burada ücreti emeğin marjinal ürünü olarak tanımlandığı anlaşılmaktadır.

Emeğin marjinal ürünü yani ücreti tüketimin marjinal faydasına ve emeğin marjinal zahmetine göre belirlenmiştir. Peki sermayenin marjinal verimliliğini nasıl elde edilecektir? Sermayenin marjinal verimliliği tüketimin büyüme oranına eşit olmalıdır diyen Ramsey yine Euler denklemini kullanarak ;

$$F_K = \dot{\varphi}(C) f_K \qquad (2.10)$$

2.1 denkleminden yararlanarak aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$\frac{dK}{dt} = f(K, L) - C(t)$$

2.6 Euler denklemini kullanarak $\left(F_K = \frac{\partial F}{\partial K}\right)$

$$F_K = \dot{\varphi}(C) f_K \qquad (2.11)$$

Zamana göre türevi alındığında

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{K}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{K}}\left\{\varphi\left(f - \dot{K}\right) - \psi(L)\right\}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\dot{\varphi}(C)\right)$$

$$\dot{\varphi}(C) F_K = \frac{d}{dt}[-\dot{\varphi}(C)] \qquad (2.12)$$

halini alır. Böylece aşağıda F_K sermaye kuralını yazabiliriz. (Ramsey, 1928, s. 15)

$$F_K = -\left(1/\dot{\varphi}(C)\right) \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}(C)\right) \qquad (2.13)$$

Denklemi açıklamak gerekirse sermayenin marjinal ürünü , marjinal faydanın artış hızına eşit olmalıdır. Faktörlere marjinal faydanın dağıtıldığını varsayarsak (emekte olduğu gibi) bu ifade de faiz haddini gösterecektir. (Koopmans, 1962, s. 23)

Şimdi Ramsey'in tasarruf kuralına bakalım. İktisadi literatür incelendiğinde tasarruf değişkenine ait ilk önemli katkı Ramsey tarafından sağlanmıştır. Tasarruf davranışında optimalı yine varyasyon hesabı tekniğini kullanarak ortaya koymuştur.

$$\frac{dK}{dt} = f(K, L) - C(t)$$

Bağıntısından yararlanalım. 2.9 ve 2.13 denklemlerini kullanarak yararlanacağımız bağıntının sağ tarafını $\varphi(C)$ ve $\psi(L)$ fonksiyonlarını kullanarak yeniden ifade eder ve çarpımın türevi kuralına göre yeniden düzenlersek;

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\varphi}(C) f(K, L)\} = \frac{\ddot{\varphi}(C)(C) dC}{dt} f(K, L) + \dot{\varphi}(C)\left[\frac{f_L\, dL}{dt} + \frac{f_K dK}{dt}\right] \qquad (2.14)$$

2.9 ve 2.13 denklemelerinden

$$\frac{\ddot{\varphi}(C) dC}{dt} f(K, L) + \frac{\ddot{\psi}(L) dL}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}(C)\right) \frac{dK}{dt}$$

Elde edilir.

$$\frac{dK}{dt} = f(K, L) - C(t)$$

Bağıntıyı elde ettiğimiz denklemde dK/dt yerine yazalım.

$$\frac{\ddot{\varphi}(C)dC}{dt} f(K, L) + \frac{\dot{\psi}(L)dL}{dt} - \frac{d}{dt}\big(\dot{\varphi}(C)\big)[f(K, L) - C(t)]$$

$$= \frac{\ddot{\varphi}(C)dC}{dt} f(K, L) + \frac{\dot{\psi}(L)dL}{dt} - \frac{\ddot{\varphi}(C)dC}{dt}[f(K, L) - C(t)]$$

$$= \frac{\ddot{\varphi}(C)dC}{dt} f(K, L) + \frac{\dot{\psi}(L)dL}{dt} - \frac{\ddot{\varphi}(C)dC}{dt} f(K, L) + \frac{\ddot{\varphi}(C)dC}{dt} C(t)$$

$$= \frac{C(t)d}{dt}\left[\big(\dot{\varphi}(C)\big)\right] = \frac{\dot{\psi}(L)dL}{dt}$$

Elde ettiğimiz denkleme ait integral alma işlemini uygulayalım.

$$\big(\dot{\varphi}(C)\big)\, f(K, L) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{C(t)d}{dt}\left[\big(\dot{\varphi}(C)\big)\right]dt \qquad (2.15)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\dot{\psi}(L)dL}{dt}\right] dt = \dot{\psi}(L)dL$$

$$C(t)\big(\dot{\varphi}(C)\big) = \int C(t)d/dt\big(\dot{\varphi}(C)\big)\, dt + \int (\ddot{\varphi}(C)dC/dt)dt$$

Buradan;

$$\int C(t)d/dt\big(\dot{\varphi}(C)\big)\, dt = C(t)\big(\dot{\varphi}(C)\big) - \int (\ddot{\varphi}(C)dC/dt)dt$$

İfadesine ulaşılır.

$C(t)\big(\dot{\varphi}(C)\big)$ifadesini farklı bir integral formu ile yazmış olduk. Şimdi bu ifadeyi denklem 2.15 te yeniden kullanalım.

$$\big(\dot{\varphi}(C)\big)\, f(K, L) = C(t)\big(\dot{\varphi}(C)\big) - \int (\ddot{\varphi}(C)dC/dt)dt \; + \int (\dot{\varphi}(L)dL/dt)dt$$

İntegral alma işlemi uygulandığında;

$$C(t)\big(\dot{\varphi}(C)\big) - \varphi(C) + \psi(L) + \text{sabit}$$

$$= \mathrm{C(t)} - \big(\varphi(\mathrm{C}) - \psi(\mathrm{L})\big) + \text{sabit}$$

Her iki denklem kullanılarak

$$\big(\dot{\varphi}(\mathrm{C})\big)[\mathrm{f(K,L)} - \mathrm{C(t)}] = \text{sabit} - [\varphi(\mathrm{C}) - \psi(\mathrm{L})]$$

$$[\mathrm{f(K,L)} - \mathrm{C(t)}] = \frac{\{\text{ sabit} - [\varphi(\mathrm{C}) - \psi(\mathrm{L})]\}}{\big(\varphi'(\mathrm{C})\big)}$$

$$[\mathrm{f(K,L)} - \mathrm{C(t)}] = \frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{dt}}$$

Olduğunu hatırlayalım. Ayrıca sabit ulaşılabilecek en yüksek fayda düzeyini yani mutluluğu gösterdiği için (Ramsey, 1928, s. 18);

$$\frac{\mathrm{dK}}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathrm{K}} = \frac{\big[\text{mutluluk} - \big(\varphi(\mathrm{C}) - \psi(\mathrm{L})\big)\big]}{\big(\varphi'(\mathrm{C})\big)} \tag{2.16}$$

2.16 Ramsey'in ünlü sermaye kuralıdır. Denklem ulaşılabilecek en yüksek faydadan (Mutluluktan) gerçekte elde edilen net faydanın farkının güncel marjinal faydaya oranıdır (Ramsey, 1928, s. 16). Sermaye tasarruf eşitliğinden faydalanarak aslında Ramsey'in optimum tasarruf kuralını elde etmiş olduk.

Buraya kadar Ramsey Modelinin temel makale ile incelenmesini ve değişimler hesabına göre elde edilişini inceledik. 1960 lı yıllardan sonra Ramsey modelini daha çok optimal kontrol ile oluşturan çalışmalar literatürde yerini almıştır. Şimdi Modelin optimal kontrol teorisi çerçevesinde elde edilişinin teorisini inceleyelim.

3.2 Ramsey Modelinin Optimal Kontrol Teorisi ile İncelenmesi

Varsayımların ardından "Bir Ulus Gelirinin Ne Kadarını Tasarruf Etmelidir" sorusuna yanıt bulmaya çalışan Ramsey'in modelinin formülasyonunu anlamaya çalışalım. Ramsey modelini kurarken ilk önce bir fayda fonksiyonu tanımlıyor. Fayda fonksiyonu elbette modern matematik ile uyumlu kurmuştur. $\mathrm{U(C)}$ gibi bir fonksiyonu ele alalım. Fonksiyonun tanımı 1. Bölüm 1.1 Varyasyon Hesabı başlığında yapılmıştı.

$$\mathrm{U(\,C)} > 0 \qquad \dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C}) > 0 \qquad \mathrm{U}''(\mathrm{C}) < 0$$

$$\dot{\mathrm{U}}(0) = \infty \qquad \dot{\mathrm{U}}(\infty) = 0$$

Modelin amacı M düzeyinde belirlenen faydaya ulaşmaktır. Ramsey makalesinde bu fayda düzeyini mutluluk olarak tanımlamıştır. $\mathrm{U(C)}$ ulaşılan fayda düzeyi olarak ifade edilirse ,$\mathrm{M} - \mathrm{U(C)}$ farkının en aza indirilmesi bu ulusun amacı olmalıdır (Groth, 2010, s. 21). $\mathrm{U(C)}$ fayda fonksiyonunu ele alalım. Toplumun maksimum faydayı sağlaması için J gibi bir fonksiyonel objektif fonksiyonel olarak ele alınabilir. Fonksiyonel tanımı yine 1. Bölüm 1.1 de Varyason Hesabı başlığında yapılmıştı.

$$\max \mathrm{J}\big(\mathrm{U(C)}\big) = \min \int_0^\infty \big(\mathrm{M} - \mathrm{U(C)}\big)\mathrm{dt} \qquad (2.17)$$

Bir diğer taraftan ulusun toplam hasılasını Y ile gösterelim ve sermaye stoku K′nın bir fonksiyonu olduğunu kabul edelim .Bu durumda;

$$\mathrm{Y} = \mathrm{F(K)}$$

Bu üretim fonksiyonunun da fayda fonksiyonu gibi Inada koşullarını sağladığını ve modern matematik ile uyumlu olduğunu varsayılsın.

$$\mathrm{F(K)} > 0 \qquad \mathrm{F'(K)} > 0 \qquad \mathrm{F''(K)} < 0$$

$$\mathrm{F'(0)} = \infty \qquad \mathrm{F'(\infty)} = 0$$

Sermaye değişimini $\mathrm{dK/dt} = \dot{\mathrm{K}}$ ile gösterelim. Bu değişim iktisadi olarak ülkenin toplam çıktısı ile tüketimin farkına eşit olduğu için dinamik sınırı;

$$\dot{\mathrm{K}} = \mathrm{F(K)} - \mathrm{C} \qquad (2.18)$$

olarak yazabiliriz. Burada tasarruf ve yatırım eşitliği kabul ediliyor. Dolayısı ile 2.17 -2.18 sistemi bir optimal kontrol problemi olarak ifade edilir. (Acemoğlu, 2009, s. 129) Problemini belirlediğimiz bu sistemi çözebilmek için 1. Bölüm 2.1 de anlatıldığı üzere Hamilton Fonksiyonunu kullanacağız. Hamilton fonksiyonunu H ile ifade edelim.

Bu durumda;

$$\mathrm{H} = -\big(\mathrm{M} - \mathrm{U(C)}\big) + \delta[\mathrm{F(K)} - \mathrm{C}\,] \qquad (2.19)$$

Burada K durum değişkeni, δ eş durum değişkeni C ise kontrol değişkenidir.[7] Aynı zamanda δ sermaye birikimine ait gölge fiyatı [8]gösterir. Optimal kontrol teorisi başlığı altında anlatılan maksimum prensibinden faydalanarak[9];

$$\dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C}) = \delta \qquad (2.20)$$

---

[7]Durum değişkeni, Eş durum değişkeni ve Kontrol Değişkeni için Bölüm 1'de 1.2 Optimal Kontrol Teorisi başlığına bakılabilir.

[8] Gölge Fiyat: Bir mal, üretim faktörü ya da dövizin gerçek toplumsal değeri veya fırsat maliyeti olarak hesaplanan ve genellikle piyasa fiyatından farklı olan fiyat.

[9] Maksimum prensibinin uygulanışı için Bölüm 1.2 optimal kontrol teorisi 1.2.4 Hamilton Denklem Formuyla Optimal Kontrol Sistem (Pontryagin Prensibi) başlığına yeniden bakmakta fayda var.

Elde edilir. Bu sonuç bize tüketimin marjinal faydasının sermaye birikiminin gölge fiyatına eşit olduğunu gösterir. ($\dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C})$ tüketimin marjinal faydasıdır) Ramsey sermaye birikiminin fiyatını üretim fonksiyonundan bağımsızlaştırmıştır. Statik neoklasik iktisatta sermayenin fiyatı tek mallı bir modelde üretim fonksiyonundan elde edilir (Çolak & Öztürkler, 2012, s. 33). Yani sermayenin fiyatını sermayenin marjinal verimliliği belirler. Ramsey türü dinamik iktisadi bir modelde ise sermaye birikiminin fiyatı tüketimin marjinal faydası tarafından belirlenmiştir. Yine statik iktisatta tüketimin faydasını marjinal fayda belirlemektedir. Bu aslında tüketimin marjinal faydasının fiyatı belirlediği anlamına gelir. Yani marjinal fayda arttıkça fiyat artar marjinal fayda azaldıkça fiyat azalır. Ramsey tüketimin marjinal faydasının sermayenin fiyatına bağlaması aslında bu statik duruma dinamik bir özellik kazandırmaktır. Bu dinamik yansıma şu şekilde yorumlanabilir. Zamana bağlı olarak tüketim malında bir artış sağlanabilmesi için yatırım yapılmalıdır ki bu yatırımlar yeni tüketim mallarının üretilmesini sağlayacaktır. Ramsey'in amacı burada fayda ve tüketim ilişkisinden, tüketim malı sermaye birikimi ilişkisi ile sermaye birikimi ve fayda arasında ilişki kurmaktır. Tüketim malının değeri, tüketimin marjinal faydası azaldıkça azalacaktır. Dolayısıyla tüketim malına olan talep düşecektir. Bu ise tüketim malındaki üretimin azalmasına neden olacaktır. Üretimin azalması ile bu mal için gereken sermaye birikimine olan ihtiyaç azalacaktır.Bunun sonucunda ise sermaye birikiminin fiyatı düşecektir. Görüldüğü gibi Ramsey'in modelini kurarken izlediği bu dinamik mantık sayesinde marjinal faydadan doğrudan doğruya sermaye birikiminin fiyatına geçmek mümkün olmaktadır. Bu ise bize dinamik bir modeli sunuyor. Burada şu noktaya dikkat etmek gerekir ki statik iktisadi bir modelde sermayenin fiyatı söz konusu iken Ramsey tipi dinamik bir modelde sermaye birikiminin fiyatı söz konusudur. Yine maksimum prensibinden faydalanarak aşağıdaki eşitliği yazabilmemiz mümkün : (bkz dipnot: 4)

$$-\dot{\delta} = \dot{\mathrm{F}}(\mathrm{K})\delta \qquad (2.21)$$

Denklem (2.20)' ten yararlanarak $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C})\right) = \dot{\delta}$ eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliği ve denklem (2.21)'i kullanarak aşağıda $\dot{\mathrm{F}}(\mathrm{K})$' yı yalnız bırakalım. (Groth, 2010, s. 29)

$$\dot{\mathrm{F}}(\mathrm{K}) = -\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C})}{\dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C})} \qquad (2.22)$$

Denklem (2.22) "sermayenin marjinal verimliliğinin Ramsey'e göre kuralı"olarak bilinir. Eşitliğin sağ tarafında marjinal faydanın azalış hızı negatif işaretlidir. Bunun anlamı şudur: Sermayenin marjinal verimliliği marjinal faydanın azalma hızına eşittir. İktisadi olarak yorumlayalım: Bir ulusun refahının yükselmesi yani tüketiminin artması (her bir miktar artış sonucunda) tüketimin marjinal faydasının azalması anlamına gelecektir. Tüketimin marjinal faydasındaki azalış sermaye artışı ihtiyacını ortadan kaldıracaktır. Sermaye artış ihtiyacı sermayenin marjinal verimliliğinin azalması anlamına gelir. Yani bireyin (toplumun) marjinal faydasında artış oldukça sermayenin marjinal verimliliği artacak, bireyin (toplumun) marjinal faydasında azalma oldukça sermayenin marjinal verimliliği azalacaktır. Bir başka deyişle refah artışı sermayenin marjinal verimliliğinin azalması anlamını taşıyor.

Oluşturduğumuz Hamilton denklemine maksimizasyon işlemini uygulamak için denklemi sıfıra eşitleyelim.

$$\mathrm{H} = -\big(\mathrm{M} - \mathrm{U}(\mathrm{C})\big) + \delta[\mathrm{F}(\mathrm{K}) - \mathrm{C}\,] = 0$$

Buradan:

$$\big(\mathrm{M} - \mathrm{U}(\mathrm{C})\big) = \delta[\mathrm{F}(\mathrm{K}) - \mathrm{C}\,]$$

Veya

$$[\mathrm{F}(\mathrm{K}) - \mathrm{C}\,] = \frac{\big(\mathrm{M} - \mathrm{U}(\mathrm{C})\big)}{\delta} \tag{2.23}$$

Olacaktır.Denklem2.4 ile bağıntı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[\mathrm{F}(\mathrm{K}) - \mathrm{C}\,] = \frac{\big(\mathrm{M} - \mathrm{U}(\mathrm{C})\big)}{\dot{\mathrm{U}}(\mathrm{C})} \tag{2.24}$$

2.2’ yi 2.10’ da yerine yazar isek;

$$\dot{\mathrm{K}} = \frac{\big(\mathrm{M} - \mathrm{U}(\mathrm{C})\big)}{\mathrm{U}'(\mathrm{C})} = \mathrm{S} \tag{2.25}$$

2.25 Ramsey’in optimal tasarruf kuralıdır. Daha önce varyasyon hesabı ile elde ettiğimiz yöntemde 2.1 kısmında anlatıldığı üzere zamanın herhangi bir anında ulaşılabilecek maksimum fayda düzeyinden ulaşılan fayda farkının bulunulan zamandaki marjinal faydaya oran bize optimum tasarrufu sağlayacaktır. Burada $\big(\mathrm{M} - \mathrm{U}(\mathrm{C})\big)'$yi net fayda olarak tanımlamamız mümkün. Bu durumda net faydanın artışını sağlamak isteyen bir bireyden bahsediyorsak yapılması gereken tasarruf miktarının arttırılmasıdır deriz. Ancak ulaşılması arzu edilen fayda düzeyi düşük ise tasarruf miktarını azaltabiliriz.

3.3 Zamanlar Arası Tercih

Mutluluk felsefi bir yaklaşımla düşünüldüğünde toplumdan topluma hatta bireyden bireye değişen subjektif bir kavramdır. Ramsey Mutluluğu modelinde en üst düzey olarak belirlerken sonsuzluk belirliliğini ortadan kaldırmak amacı ile maksimum fayda düzeyi olarak bir üst sınır değer oluşturmuştur. Ancak bu fayda düzeyi de belirsizliği nedeni ile objektif fonksiyonelin çözümü amacı ile bireyin farklı zamanlarda yapacağı tercihe dayandırılması uygun görülmüştür (Cass, 1965, s. 17). Zamanlar arası tercih bireyin bu günkü tüketimini mi yoksa yarınki tüketimini mi tercih edeceğini temsil eden bir kavramdır.

Eğer birey yaşadığı zamanın tüketimine ağırlık veriyor ise tasarrufu önemsemeyip daha fazla harcamalarda bulunarak tasarrufunu azaltacak ya da tam tersi gelecekteki tüketimini önemsiyor ise harcamalarını azaltmak sureti ile tasarruf miktarını arttıracaktır.

Ramsey modelini oluştururken zamanlar arası tercihi iskonto (indirgeme) oranına benzetmiştir. Matematiksel olarak burada bu oran ρ ile ifade edilecektir. Bir değerin gelecekteki değerinden bu günkü değerinin elde edilmesini (iskonto) 1. Bölüm 3. Kısımda yer alan yer alan dipnot 4 te anlatmıştık. Buna göre faydanın gelecekteki değerini bu günden hesaplayabilmemiz mümkün olacaktır. Bunun yolu $U(C)$ fayda fonksiyonunu $e^{-\rho t}$ ile çarpmaktır. Buradan $U(C) \cdot e^{-\rho t}$ ifadesinin bireyin gelecekte elde edeceği faydanın bugünkü değerini gösteren bir ifade olarak karşımıza gelir. Bireyin gelecekte elde edeceği fayda yüksek ise toplum tasarrufunu arttıracak düşük ise tüketimini arttıracaktır.

Artık amacımız bireyin zamanlar arası tercih oranı ile indirgenmiş faydasını yani bu günkü gelecekte elde edeceği faydanın bu günkü değerini maksimize eden fonksiyonu bulmaktır. Bu hali ile objektif fonksiyonelimiz:

$$\max J\,[U(C)] = \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot U\big(C(t)\big)dt \qquad (2.26)$$

halini alır. Dinamik kısıtımızda bir değişikliğin olmadığını biliyoruz.

$$\dot{K} = F(K) - C$$

şimdi Hamilton Fonksiyonunu yeniden oluşturalım.

$$H \cdot e^{\rho t} = \big\{U\big(C(t)\big) + \delta(F(K) - C)\big\} \qquad (2.27)$$

Burada H fonksiyonunu yalnız bırakalım.

$$H = \big\{U\big(C(t)\big) + \delta(F(K) - C)\big\}e^{-\rho t} \qquad (2.28)$$

Maksimum prensibini uyguladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\delta = U'\big(C(t)\big)e^{-\rho t} \qquad (2.29)$$

(2.29) sermaye birikiminin gölge fiyatı (2.20) deki gibi tüketimin marjinal faydasına eşit değildir. Zamanlar arası tercih dikkate alındığında sermaye birikiminin gölge fiyatı ,bugünkü marjinal fayda fiyatına eşit oluyor. (2.29)'a dikkat ettiğimizde sermaye fiyatının zamana bağlı olarak sonsuzda sıfıra eşitleneceğini görürüz. (Cass, 1965, s. 24) Şöyle ki:

$$\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0 \tag{2.30}$$

(2.30)iktisadi olarak doymuş sermayeyi (capital saturation) ifade eder. Sermaye birikimi ihtiyacı tüketim malına olan talebe göre değiştiğine göre tüketimin marjinal faydasının sıfıra eşitlendiği durumda sermaye birikimi ihtiyacı da sıfır olacaktır. Bu da demek oluyor ki sermayenin marjinal verimliliği sıfır olacaktır. Yani durağan denge durumunda;

$$\frac{\dot{\delta}}{\delta} = 0 \tag{2.31}$$

olacaktır.Yine maksimum prensibinden denklem (2.31)'i elde etmemiz mümkün.

$$-\frac{\dot{\delta}}{\delta} = \left(\dot{F}(K) - \rho\right)e^{-\rho t} \tag{2.32}$$

(2.31)durağan durum denge halinde sıfıra eşitse (2.32) denklemi, denklem (2.33)'e döner.

$$\dot{F}(K) = \rho \tag{2.33}$$

Denklem (2.33)'ü iktisadi olarak yorumlayalım. Sermayenin marjinal verimliliği $\dot{F}(K)$ Bireyin zamanlar arası tercih oranına (ρ'ya) eşittir. Yani zamanlar arası tercih oranı büyük ise (birey yakın bir zamanda yapacağı tercihi daha fazla önemsiyor ise) $F'(K)$yüksek zamanlar arası tercih oranı küçük ise $F(\dot{K})$ düşük çıkacaktır.

3.4 Nüfus Artışının Sermaye Birikimi Üzerindeki Etkisi

Ramsey makalesinde nüfus artış hızını sıfır varsaymıştır. Bu işlem modelini gerçeklikten uzaklaştırmıştır. Burada nüfus artış hızının sermaye birikimi üzerindeki analizini yapacağız.

$N(t) = N(0) \cdot e^{nt}$ olarak kurduğumuz denklemde N nüfusu, n'de nüfus artış hızını göstersin(Cass, 1965). Göç, hastalık, savaşlar gibi sosyal nedenlere bağlı olarak nüfus artış hızı zamana bağlı değişmiyor ise; n'yi işgücü artış hızı olarakta ifade edebiliriz. L emeği ifade etsin.$L(t) = L(0).e^{nt}$ yazabiliriz. Burada esasında toplumun refahını yakından ilgilendiren kavramın C/L değil C/N olduğunu anlıyoruz. Bununla beraber, işgücü başına nüfus denk geliyor ise refahın sade bir göstergesi olarak C/N yerine C/L'yi kullanmamız mümkün olacaktır. Burada işgücü başına tüketimi c ile gösterelim. Yani $c = C/L$. Burada temel modelde belirttiğimiz $U(C)$ fayda fonksiyonu da $U(c)$ olarak ifade edilecektir. Bu durumda objektif fonksiyonelimiz aşağıdaki forma dönecektir.

$$\max J\big(U(c)\big) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\, U\big(c(t)\big)\, dt \tag{2.34}$$

Diğer taraftan çıktıyı işgücü başına ifade edelim. Çıktıyı daha önce Y ile ifade etmiştik. Emeği L ile. İşgücübaşına çıktı y ile gösterilirse $y = Y/L$olacaktır.Yine aynı şekilde işgücü başına sermayeyi k ile ifade edelim. Sermayeyi daha önce K ile ifade etmiştik Bu durumda $k = K/L$ olarak yazılır.Yani bu durumda işgücü başına sermaye iş gücü başına çıktının bir fonksiyonu haline gelecektir. Bunu ise şu şekilde ifade edebiliriz:

$y(t) = f(k)$. Burada $f(k)$ tek faktörlü bir üretim fonksiyonu olmaktan çıkmıştır. Artık emek ve sermaye ile üretimin söz konusu olduğu iki sektörlü bir ekonomiden söz etmek mümkündür. Dolayısıyla çıktının bir bölümü nüfus artış hızını karşılamak üzere yatırıma eklenecektir. Yani işgücü başına sermaye ile nüfus artış hızı oranının çarpımı kadar yatırıma ayrılması gereken pay artacaktır. Bu pay $(n \cdot k)$'ya eşittir. Bu durumda $f(k)$ aşağıdaki şekilde formüle edilir.

$$f(k) = (\dot{k} + c + nk) \tag{2.35}$$

Bir diğer taraftan mevcut sermaye stokunun σ hızı ile aşınmaya uğradığını kabul edersek bu durumda kişi başı milli hasıladan bu yıpranmayı karşılamak için σk kadar daha fazla yatırım yapmak gerekecektir. Bu durumda $f(k)$ aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$f(k) = \dot{k} + c + nk + \sigma k \tag{2.36}$$

$(2.36)'$daeşitliğin sağ tarafında k yı $(n + \sigma)$ parantezine alır ve $(n + \sigma = \varrho)$ olarak ifade edersek $f(k)$'yı denklem (2.37) olarak yazabiliriz.

$$f(k) = \dot{k} + c + \varrho k \tag{2.37}$$

Dinamik sınırımızı yeniden yazacak olursak;

$$\dot{k} = f(k) - \varrho k - c \tag{2.38}$$

Olacaktır.Denklem 2.34 ile ifade ettiğimiz formülasyonu aşağıdaki formda yeniden düzenlersek,

$$\max J\big(U(c)\big) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\, U\big(c(t)\big) + \ \delta(\, f(k) - \varrho k - c)dt \tag{2.39}$$

elde edilecektir (Koopmans, 1962, s. 35). Modelin çözümü için hamilton fonksiyonunu oluşturalım (Koopmans, 1962, s. 36).

$$H = \{U(c(t)) + \delta(\, f(k) - \varrho k - c)\}e^{-\rho t} \tag{2.40}$$

δyine sermaye birikiminin gölge fiyatıdır. Maksimum prensibinden:

$$-\dot{\delta} = (\delta f'(k) - \delta\varrho - \delta\rho \tag{2.41}$$

$$\delta = U'(c(t))e^{-\rho t} \tag{2.42}$$

Burada sermaye birikiminin gölge fiyatının temel modele ait gölge fiyatı (2.29) ile aynı olduğunu görüyoruz. Şimdi statik iktisat ile analoji kuralım ve tüketimin marjinal fayda esnekliğini tanımlayalım (Çolak & Öztürkler, 2012, s. 33).

$$\varepsilon = -\frac{U''(c)}{U'(c)} \cdot c \tag{2.43}$$

(2.37)′de δ′nın t'ye (zamana) göre türevini alalım.

$$\dot{\delta} = U''(c(t))\dot{c}e^{-\rho t} - \rho\, U'(c(t))e^{-\rho t} \tag{2.44}$$

Denklem (2.42)'yi (2.44)′ de yerine yazarsak

$$\dot{\delta} = U''(c(t))\dot{c}e^{-\rho t} - \delta\rho \tag{2.45}$$

(2.45) Düzenlendiğinde;

$$\frac{\dot{\delta}}{\delta} = \frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c}$$

Yani;

$$\frac{\dot{\delta}}{\delta} = -\varepsilon\frac{\dot{c}}{c} \tag{2.46}$$

Maksimum prensibinden elde edilen denklem (2.46) yı aşağıdaki formda yeniden düzenleyelim.

$$\dot{\delta} = \delta(f(\dot{k}) - \delta\varrho - \delta\rho)$$

$$= \delta(f(\dot{k}) - \varrho - \rho)$$

Buradan ;

$$\frac{\dot{\delta}}{\delta} = (f(\dot{k}) - \varrho - \rho) \tag{2.47}$$

(2.46)ve (2.47) denklemlerini kullanıldığında

$$-\varepsilon\frac{\dot{c}}{c} = (f(\dot{k}) - \varrho - \rho) \tag{2.48}$$

(2.48)′de $\dot{c}$ yalnız bırakılırsa;

$$\dot{c} = \frac{1}{\varepsilon}(f(\dot{k}) - \varrho - \rho)c \tag{2.49}$$

(2.44) diferansiyel denklemi çözüldüğünde;

$$c(t) = c(0)e^{(f(\dot{k})-\varrho-\rho)t} \qquad (2.50)$$[10]

(2.50) denklemi tüketimin kişi başına optimum ne olması gerektiğini verir.

Büyüme hızı $g_c = f(\dot{k}) - (\varrho + \rho)$ ye eşittir. Durağan denge sıfıra eşit olduğunda birey başına tüketimin artış hızı sıfır olacaktır (Barro & Sala-i Martin, 2004).

Modelin durağan denge çözümünü bulalım: $\frac{\dot{\delta}}{\delta} = 0$

Durağan dengede $g_c = 0$ olduğunda; $f(\dot{k}) = (\varrho + \rho)$ sonucuna ulaşılacaktır. Yani durağan dengede bireyin zamanlar arası tercihi ile nüfus artış hızı ve sermayenin aşınma oranının toplamı sermayenin marjinal verimliliğine eşit olacaktır. Bu kural iktisadi yazında Koopmans kuralı olarak bilinmektedir. Ramsey modelini bir adım ileri taşıyan Koopmans artan nüfusun refah düzeyini maksimum yapmak için ya da birey başına tüketimi maksimum yapmak amacı ile sermayenin marjinal verimliliğinin daha yüksek bir düzeyde gelişmesi gerektiğini ifade etmiştir (Koopmans, 1962, s. 57). Yani büyümenin dinamiği sermayenin marjinal verimliliğine bağlanmıştır.

Ramsey temel modeli kurduğunda optimal tasarrufu net faydanın tüketimin marjinal faydasına orantısı ile buluyordu. Tasarruf teknolojiden bağımsızdı. Halbuki yeni modelde tasarruf ile teknoloji ilişkilidir. Şimdi bu durumu değerlendirelim. (2.45)'te $c(t) = c(0)e^{(f(\dot{k})-\varrho-\rho)t}$ olarak verilmişti. Burada görüldüğü üzere, tüketimdeki (veya tasarruftaki artışta) artışta k' nın etkisi vardır. k'nın üretim teknolojisi olarak tanımlanması mümkün ise bu tüketimin ya da tasarrufun belirlenmesinde teknolojik etkiyi göz ardı etmemiz mümkün olmaz (Koopmans, 1962, s. 57).

Zaten literatüre bakıldığında neoklasik iktisadi büyüme modellerinden sonra teknolojik ilerlemenin de dinamik büyüme modellerine dahil edildiğini görüyoruz. Ancak çalışmamızın dışında kalması nedeni ile burada bu konuya değinilmeyecektir.

[10] (2.44) ve (2.45) Denklemin oluşturulmasında yararlanılan kaynaklar: (Acemoğlu, 2009), (Barro & Sala-i Martin, 2004), (Intriligator, 1975), (Koopmans, 1962)

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
TÜRKİYE’ DE ETKİN BÜYÜMENİN AMPİRİK ANALİZİ

4. TÜRKİYE’ DE ETKİN BÜYÜMENİN AMPİRİK ANALİZİ

Etkin iktisadi büyümenin teorik anlatımını Ramsey Modeli özelinde optimal tüketimin formüle edilmesiyle sonlandırılan ikinci bölümün ardından bu bölümde, Türkiye ekonomisinde modelin geçerliliği analiz edilecektir.

2. kısımda optimum tüketimi elde ederken sermayenin marjinal verimliliğinin; zamanlar arası tercih, sermayenin aşınma oranı ve nüfus artış oranının toplamına eşit olduğunu ifade edilmiştir. Yani optimum tüketimi belirleyen değişkenler olarak sermayenin marjinal verimliliği, sermayenin aşınma oranı, zamanlar arası tercih oranı (iskonto oranı) ve nüfus artış oranını sayılabilir. Aslında Türkiye ekonomisinde Ramsey Modeline göre optimum tüketimin sağlanıp sağlanılmadığının araştırılmasında saydığımız bu değişkenlerle elde ettiğimiz tüketim serisinin uygulamada gerçekleşen tüketim serisi ile belirli yıllar dahilinde karşılaştırılması Ramsey Modeline göre net bir sonuç ortaya koyacaktır ve Türkiye ekonomisi belirlenen yıllar dahilinde optimum tüketime dolayısı ile optimum büyümeye ulaşmıştır denilebilinecektir. Ancak sayılan değişkenlerin zaman serilerine ait verilere ulaşılamıyor olması çalışmanın sınırlılığını ortaya koymaktadır. Bu nedenle optimum tüketimin dolayısı ile optimum büyümenin ampirik araştırılmasında teoriden yola çıkılacaktır. Bunu yaparken iki faklı yöntemden faydalanılacaktır. Bu yöntemlerden ilki eş tümleşme analizidir. Bölüm 2.2’de Ramsey Modeli optimal kontrol sistemi ile incelenmişti. Tüketim kontrol değişkeni, sermaye ise durum değişkeni olarak belirlenmişti. İki değişken arasında kontrol-durum ilişkisi ortaya konulabilinmesi için öncelikle bu iki değişkenin uzun dönemli bir ilişki göstermesi gerekliliği açıktır. Peki, Türkiye ekonomisinde de tüketim ve gelir birbirini uzun dönemli etkilemekte midir? İlk yöntem eş tümleşme analizi ile bu soruya yanıt aranacaktır. İkinci yöntem ise farklı gelir grubunda bulunan ülkelerin tüketim ve gelir serilerine ait büyüme oranlarının standart sapmalarının kıyaslanmasıdır. Standart sapma kıyaslaması elbette büyümede etkinliğin sağlanıp sağlanmadığı konusunda kesin bir bilgi vermeyecektir. Sadece yüksek gelir grubundaki ülkelerin serilerine ait standart sapma ile Türkiye’ye ait serilerin standart sapması karşılaştırılarak etkinlik hakkında bir bilgi elde etmemiz mümkün olacaktır. Aslında burada serilere ait standart sapma değeri ile zaman içerisinde serideki

değişkenliği ortaya koymuş olacağız. Değişkenliğin fazla çıkması şu anlama geliyor. Tüketim serisini ele alalım. Bireyin bir zaman sürecinde a zamanında yaptığı tüketim ile b zamanında yaptığı tüketim arasındaki fark arttıkça etkinliğin sağlanmasından o kadar uzaklaşılıyor. Yani yüksek gelirde yüksek tüketim ya da düşük gelirde düşük tüketim bireyi tüm zamanlar için değil de sadece bulunulan zamanda daha çok mutlu ya da mutsuz yapıyor. Teoriden elde ettiğimiz bu bilgiye dayanarak tüketim ve gelir serisinde değişkenliğin ölçüsünü hesaplayarak optimizasyonun sağlanılıp sağlanılmadığı konusunda bilgi elde edebilmemiz mümkün olacaktır. Üstelik yüksek gelir grubunda bulunan ülkeler ile Türkiye karşılaştırılarak bu bilgi pekiştirilmiş olunacaktır.

4.1 Veri Seti ve Yöntem

Çalışmada kullanılacak veriler; eş tümleşme analizi için, Ramsey Modeli bağlamında kişi başı özel tüketim nihai harcamaları ve kişi başına reel gelir olarak belirlendi. Standart sapmaların kıyaslanması yönteminde ise Dünya, İngiltere, Kanada, Portekiz, Malezya ve Türkiye'ye ait kişi başı özel tüketim nihai harcamaları yıllık büyüme oranı ve kişi başı reel gelir yıllık büyüme oranı belirlendi. Farklı para biriminde bulunan ülkelerin kıyaslamasını yapacağımız için ilgili değişkenlerin yıllık büyüme oranı üzerinden çalışıldı. Yapısal değişimleri analiz dışı tutmak amacı ile 1988 ile 2018 yılları dâhilinde son otuz yıla ait veriler yıllık frekansta kullanıldı. Veriler Dünya Bankası internet sayfası[1] üzerinden elde edilmiştir.

Tablo 1
Ampirik Analizde Kullanılacak Değişkenler Ve Tanımlamaları:

Veri	Çalışmada gösterimi	Tanımı
Türkiye Kişi Başı Hane Halkı Özel Tüketim	TRPC.	2009 yılı sabit fiyatları ile yerel para biriminde.
Türkiye Kişi Başı Gayri Safi Yurt İçi Hâsıla	TRPY.	2009 sabit fiyatları ile yerel para biriminde.

[1] https://databank.worldbank.org/reports.aspx?source=2&country=TUR#advancedDownloadOptions

Tablo 2:
Standart Sapmaları Hesaplanacak Değişkenler Ve Ülkelere Göre Gösterimleri:

Ülkeler	Kişi Başı Gayri Safi Yurt İçi Hâsıla Büyüme Oranı	Kişi Başı Özel Tüketim Harcamaları Büyüme Oranı Gösterimi
Türkiye	TRPGDPBO	TRCONSBO
Malezya	MALEYPGDPBO	MALEYCONSBO
Portekiz	PORTUGALPGDPBO	PORTUGALCONSBO
Kanada	KANADAPGDPBO	KANADACONSBO
İngiltere	UKPGDPBO	UKCONSBO
Dünya	WORLDPGDPBO	WORLDCONSBO

Ekonometri biliminin tarihsel gelişimi süreci içerisinde iktisatçılar, zaman serisi analizlerini kullanarak en iyi modellemeyi yapabilme, etkin hesaplama ve eldeki verilerle kurulan modeller ile iktisat teorisi arasındaki ilişkilerin anlaşılır olmasını sağlamaya çalışmışlardır (Mills, 1991, s.19). Bu kısımda aslında Türkiye'nin kişi başı özel tüketim harcamalarının, kişi başı reel gelir ile zaman içerisinde uzun dönemli ilişkisi incelenerek bir anlamda etkin iktisadi büyümeyi optimum tüketime dayandıran Ramsey Modelinin Türkiye Ekonomisi için geçerliliği sınanmış olunacaktır. Robert E. Hall "Consumption" isimli çalışmasında Euler Denklemi'nden yola çıkarak elde ettiği ampirik sonuçlara göre Rasyonel Beklentiler Hipotezi dahilinde tüketimin rassal yürüyüş (random walk) süreç izlediğini ifade ediyor (Hall, 1987, s. 5,11). Hall'ün bu çalışmasını dikkate alınarak Türkiye'nin kişi başı özel tüketim harcamaları ve kişi başı gayrisafi yurtiçi hâsıla değişkenleri için birim kök analizi yapılacaktır.Yine tüketimin gelir ile uzun dönemli ilişkisini araştırmak amacı ile eş tümleşme analizleri uygulanacaktır. Birim kök testi Levin, Lin Chu ortak birim kök testi, Philips-Peron Birim Kök Testi olmak üzere 2 farklı yöntemle test edildi ve gecikme uzunluklarının belirlenmesinde SIC bilgi kriterlerine bakıldı. SIC bilgi kriterinin belirlenmesinin nedeni 3.1 "Gecikme Uzunluğunun Belirlenmesinde Kullanılan Bilgi Kriterleri" başlığında açıklanmıştır. Çalışmada Türkiye'ye ait tüketim ve gelir serileri 1. Dereceden durağan çıkmıştır. Dolayısı ile iki değişken arasında eş tümleşme analizleri mümkün görünüyor. Bu amaçla Engle – Grenger, Johansen ve Philips Ouliaris eş tümleşme analizleri uygulanmıştır. Analiz sonuçlarına göre seriler uzun dönem ilişkilidir. Yani her üç analizde de H_0 hipotezi (serilerin koentegre olmadığını savunan hipotez) reddedilmiştir. Eş tümleşik olduğu tespit edilen değişkenlere ait eş tümleşme modeli kurulmuş, model EKK (En Küçük Kareler) yöntemi ile tahmin edilmiştir. Tahmin edilen modelin artıklarının düzey seviyede durağanlığı ADF(Augmented Dickey Fuller) birim kök analizi ile test edilmiş ve artıkların düzey seviyede durağan olduğu anlaşılmıştır. Dolayısı ile serilere ait hata düzeltme modeli kurulabilir sonucuna ulaşılmıştır. Serilere ait hata düzeltme modelinde artıkların bir gecikmeli değerine ait katsayının 0 ile -1 arasında olması gerekir (Akgül, 2000, s. 47). Kurulan hata düzeltme modelinde hata teriminin katsayısı -0,32 olarak tahmin edilmiştir. Elde ettiğimiz hata düzeltme modelinde hata düzeltme katsayısının çalıştığı bilgisine ulaşılmıştır. Yani tahmin ettiğimiz hata düzeltme modeli birim kökü gidermek için kaybettiğimiz verilerin bilgilerini de içermektedir.

4.2 Gecikme Uzunluğunun Belirlenmesinde Kullanılan Bilgi Kriterleri

Birim kökü ortadan kaldırmak amacı ile kurulacak modele değişkenin gecikmeli değerlerini ekleyerek durağanlık sorununu çözmeye çalışılan testlerde gecikme sayısının belirlenmesinde bir çok farklı kriter kullanılmaktadır. Bu kriterleri Akaike (AIC), Schwarz (SIC), Hannan-Quin (HQ), Modified AIC (MAIC), Modified SIC (MSIC), Modified HQ(MHQ) olarak sıralamak mümkündür. Gecikme sayısı belirlenirken önce modele serinin bir gecikmeli değeri eklenir, model tahmin edilir ve tahmin sonucuna göre elde edile AIC değeri AIC1 olarak adlandırılır. İki gecikmeli değer ile tahmin edilen modele ait AIC değeri AIC2 olarak elde edilir ve elde edilen AIC1 ve AIC2 değerlerinde hangisi daha küçük ise o kritere ait gecikme uygundur denilir (Mills, 1991, s. 31). Diğer kriterlere de bu yöntem uygulanarak en doğru gecikme uzunluğuna karar verilir. Ancak burada daha önemli bir soru akla gelmektedir. Bu soru hangi bilgi kriterinin gecikme uzunluğunun belirlenmesinde kullanılacağıdır. Örneklemlere ait tutarlılık ve etkinlik varsayımları kullanılan kriterlerin belirlenmesinde önemli ipuçları sunar (Akgül, 2000, s. 21). Büyük örneklemlerde AIC bilgi kriteri kullanımı etkinliği arttırırken orta ve küçük örneklerde SIC bilgi kriteri daha güvenilir sonuçlar elde edilmesini sağlar (Akgül, 2000, s. 21). Çalışmada kullandığımız 30 gözlem sayısı küçük örneklem grubuna örnektir. Bu nedenle birim kök ortadan kaldırılmasına yönelik kurulacak modeller orta ve küçük örneklem için belirtilen bilgi kriterlerinden SIC bilgi kriterine göre uygun gecikme uzunluğu belirlenecektir.

Tablo 3:

Kişi Başı Hane Halkı Özel Tüketim Nihai Harcamaları ve Kişi Başı Reel Gelir Değişkenlerine Ait Zaman Serileri

Yıllar	Kişi Başı Hane halkı Özel Tüketim Nihai Harcamaları Serisi (2009 Sabit Fiyatları İle)	Kişi Başı Reel Gelir (2009 Sabit Fiyatları İle)
1988	5.841,29	8.993
1989	5.678,60	8.860
1990	6.312,18	9.514
1991	6.325,62	9.422
1992	6.428,47	9.735
1993	6.859,69	10.312
1994	6.392,59	9.675
1995	6.645,92	10.273
1996	7.096,27	10.857
1997	7.570,56	11.496
1998	7.534,81	11.578
1999	7.390,65	11.014
2000	7.609,56	11.568
2001	6.994,22	10.717

Tablo 3:
Kişi Başı Hane Halkı Özel Tüketim Nihai Harcamaları ve Kişi Başı Reel Gelir Değişkenlerine Ait Zaman Serileri (Devamı)

2002	7.165,33	11.239
2003	7.637,12	11.700
2004	8.252,09	12.652
2005	8.657,82	13.611
2006	8.864,06	14.398
2007	9.220,92	14.943
2008	9.137,03	14.890
2009	8.685,50	14.010
2010	9.487,96	14.987
2011	10.488,31	16.400
2012	10.644,30	16.907
2013	11.290,07	18.035
2014	11.430,00	18.646
2015	11.851,32	19.454
2016	12.086,64	19.749
2017	12.621,84	20.883
2018	12.577,97	21.102

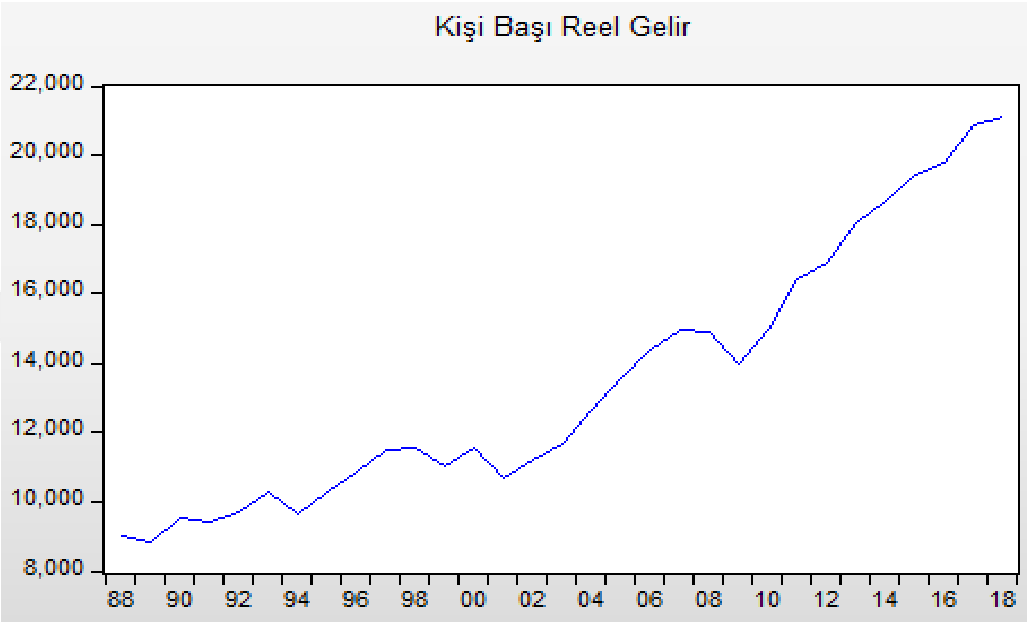
4.3 Ekonometrik yöntem uygulama sonuçları

4.3.1 Eş Tümleşme Analizinin Uygulanması

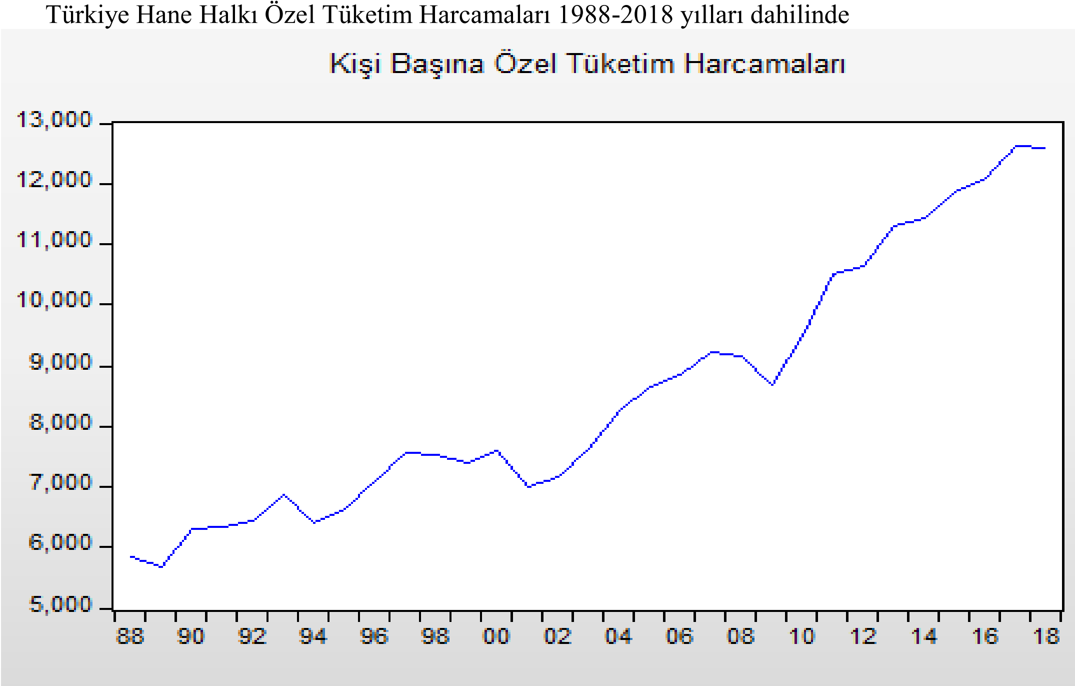
Analize dâhil edilecek kişi başı reel gelir ve kişi başı özel tüketim harcamaları serilerine ait grafikler aşağıda verilmektedir.

Grafik 1:

Türkiye Kişi Başına Reel Gelir 1988-2018 yılları dahilinde



Grafik 2:
Türkiye Hane Halkı Özel Tüketim Harcamaları 1988-2018 yılları dahilinde



Buna göre Grafik 1 ve Grafik 2 incelendiğinde Türkiye'nin kişi başı özel tüketim harcamaları ile kişi başı reel gelirinin birbiri ile benzer değişimler geçirdiğini anlıyoruz. 2007-2009 yıllarında her iki değişkeninde azalan değerler aldığını 2010 yılı ve sonrasında artan bir eğilime girdiğini söyleyebiliriz.

4.3.1.1 Türkiye Kişi Başı Gayri Safi Yurt İçi Hasıla Serisi İle Kişi Başı Özel Tüketim Harcamaları Serisi Birim Kök Araştırması Sonuçları

a) Düzey Seviye Sabitsiz ve Trendsiz Model Levin& Lin Chu Birim Kök Testi

Modele ait gecikme uzunluğu SIC bilgi kriteri ile E-views paket programında otomatik olarak belirlenmiştir.

Tablo 4
$TRPC_t = \rho TRPC_{t-1} + \varepsilon_t$ ve $TRPY_t = \rho TRPY_{t-1} + u_t$ Modellerine Ait Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Levin, Lin & Chu Unit Root Test on UNTITLED

Null Hypothesis: Unit root (common unit root process)
Series: TRPC, TRPY
Date: 12/11/19 Time: 13:10
Sample: 1988 2018
Exogenous variables: None
Automatic selection of maximum lags
Automatic lag length selection based on SIC: 0
Newey-West automatic bandwidth selection and Bartlett kernel
Total (balanced) observations: 60
Cross-sections included: 2

Method	Statistic	Prob.**
Levin, Lin & Chu t*	5.21455	1.0000

** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Tablo 4 incelendiğinde düzey seviyede her iki değişkene uygulanan Levin, Lin& Chu, Birim Kök Testlerine ait olasılık değerlerinin (Prob.) 0,05 kritik olasılık değerinden büyük (1,000) olduğu görülmektedir. Bu ise test için H_0 hipotezinin reddedilemeyeceği anlamına gelir. Yani değişkenlerin sıfır gecikmeli sabitsiz ve trendsiz modeli düzey seviyede birim kök içermektedir.

b) Düzey Seviye Sabitli ve Trendsiz Model Levin& Lin Chu Birim Kök Testi

Tablo 5
$TRPC_t = \alpha_1 + \rho TRPC_{t-1} + \varepsilon_t$ ve $TRPY_t = \alpha_2 + \rho TRPY_{t-1} + u_t$
Modellerine Ait Levin Lin & Chu Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Levin, Lin & Chu Unit Root Test on UNTITLED

Null Hypothesis: Unit root (common unit root process)
Series: TRPC, TRPY
Date: 12/11/19 Time: 13:04
Sample: 1988 2018
Exogenous variables: Individual effects
Automatic selection of maximum lags
Automatic lag length selection based on SIC: 0
Newey-West automatic bandwidth selection and Bartlett kernel
Total (balanced) observations: 60
Cross-sections included: 2

Method	Statistic	Prob.**
Levin, Lin & Chu t*	2.46583	0.9932

** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Tablo 5 değerleri incelendiğinde Levin, Lin &Chu t istatistiğine ait olasılık (Prob.) değeri (0,9932) olarak hesaplanmıştır. Olasılık değerine göre H_0 hipotezi %5 anlam düzeyinde reddedilemez. Bu ise değişkenlerin sıfır gecikmeli sabitli ve trendsiz modelinin düzey seviyede birim kök içerdiği anlamına gelir.

c) Düzey Seviye Sabitli ve Trendli Model Levin& Lin Chu Birim Kök Testi

Tablo 6
$TRPC_t = \alpha_1 + \rho TRPC_{t-1} + \beta_1 t + \varepsilon_t$ ve $TRPY_t = \alpha_2 + \rho TRPY_{t-1} + \beta_2 t + u_t$
Modellerine Ait Levin Lin & Chu Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Levin, Lin & Chu Unit Root Test on UNTITLED

Null Hypothesis: Unit root (common unit root process)
Series: TRPC, TRPY
Date: 12/11/19 Time: 13:07
Sample: 1988 2018
Exogenous variables: Individual effects, individual linear trends
Automatic selection of maximum lags
Automatic lag length selection based on SIC: 0
Newey-West automatic bandwidth selection and Bartlett kernel
Total (balanced) observations: 60
Cross-sections included: 2

Method	Statistic	Prob.**
Levin, Lin & Chu t*	-0.72824	0.2332

** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Yine tablo değerleri incelendiğinde Levin, Lin&Chu t istatistiğine ait olasılık (Prob.) değeri (0,2332) olarak hesaplanmıştır. Buna göre H_0 Hipotezi reddedilemez. Bu ise değişkenlerin sıfır gecikmeli sabitli ve trendli modelinin düzey seviyede birim kök içerdiği anlamına gelir. Modele trend eklenmesi de birim kökü ortadan kaldırmamıştır. Dolayısıyla her iki değişkene ait serilerde 1. fark alma işlemine gidilerek yeni modeller ile serilerin birim kök içerip içermedikleri araştırılmalıdır.

d) Düzey Seviye Sabitli ve Trendsiz Model Philips -Peron Birim Kök Testi

Tablo 7

$TRPC_t = \propto_0 + \rho TRPC_{t-1} + \varepsilon_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on TRPC

Null Hypothesis: TRPC has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 6 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		1.608462	0.9992
Test critical values:	1% level	-3.670170	
	5% level	-2.963972	
	10% level	-2.621007	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	133826.4
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	47797.16

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPC)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 12:53
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TRPC(-1)	0.022194	0.034876	0.636371	0.5297
C	37.97961	301.2285	0.126082	0.9006

R-squared	0.014257	Mean dependent var	224.5560
Adjusted R-squared	-0.020948	S.D. dependent var	374.7578
S.E. of regression	378.6627	Akaike info criterion	14.77551
Sum squared resid	4014792.	Schwarz criterion	14.86892
Log likelihood	-219.6326	Hannan-Quinn criter.	14.80539
F-statistic	0.404969	Durbin-Watson stat	2.069230
Prob(F-statistic)	0.529703		

Tablo 8:

$TRPY_t = \propto_1 + \rho TRPY_{t-1} + u_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on TRPY

Null Hypothesis: TRPY has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 6 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		2.841637	1.0000
Test critical values:	1% level	-3.670170	
	5% level	-2.963972	
	10% level	-2.621007	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	306652.1
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	102235.7

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPY)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 12:54
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TRPY(-1)	0.040482	0.029956	1.351390	0.1874
C	-131.4325	409.5347	-0.320931	0.7506

R-squared	0.061230	Mean dependent var	403.6339
Adjusted R-squared	0.027702	S.D. dependent var	581.3062
S.E. of regression	573.1979	Akaike info criterion	15.60468
Sum squared resid	9199564.	Schwarz criterion	15.69809
Log likelihood	-232.0702	Hannan-Quinn criter.	15.63456
F-statistic	1.826254	Durbin-Watson stat	2.104606
Prob(F-statistic)	0.187389		

Her iki modele sabit teriminin eklenmesi birim kökü ortadan kaldırmamıştır. Phillips-Perron test istatistik değerleri her iki modelde de %1, %5 ve %10 kritik değerlerinden büyük olarak belirlenmiştir. Bu ise birim kökün varlığını savunan H_0 Hipotezi'nin reddedilemeyeceği anlamını taşır.

e) Düzey Seviye Sabitli ve Trendli Model Philips -Perron Birim Kök Testi

Tablo 9
$TRPC_t = \propto_0 + \rho TRPC_{t-1} + \beta_1 t + \varepsilon_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on TRPC

Null Hypothesis: TRPC has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Bandwidth: 2 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.673878	0.7378
Test critical values:	1% level	-4.296729	
	5% level	-3.568379	
	10% level	-3.218382	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	117122.3
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	115903.7

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPC)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 13:37
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TRPC(-1)	-0.191509	0.113858	-1.682004	0.1041
C	1041.375	586.3517	1.776025	0.0870
@TREND("1988")	51.17043	26.07624	1.962339	0.0601

R-squared	0.137297	Mean dependent var	224.5560
Adjusted R-squared	0.073393	S.D. dependent var	374.7578
S.E. of regression	360.7435	Akaike info criterion	14.70885
Sum squared resid	3513668.	Schwarz criterion	14.84897
Log likelihood	-217.6328	Hannan-Quinn criter.	14.75368
F-statistic	2.148488	Durbin-Watson stat	1.906580
Prob(F-statistic)	0.136185		

Tablo 10:

$TRPY_t = \propto_1 + \rho TRPY_{t-1} + \beta_3 t + u_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on TRPY

Null Hypothesis: TRPY has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Bandwidth: 3 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.257462	0.8792
Test critical values:	1% level	-4.296729	
	5% level	-3.568379	
	10% level	-3.218382	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	274524.6
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	265430.3

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPY)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 13:38
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TRPY(-1)	-0.124967	0.097448	-1.282397	0.2106
C	971.6709	735.3957	1.321290	0.1975
@TREND("1988")	69.91564	39.33184	1.777584	0.0867

R-squared	0.159584	Mean dependent var	403.6339
Adjusted R-squared	0.097330	S.D. dependent var	581.3062
S.E. of regression	552.2928	Akaike info criterion	15.56067
Sum squared resid	8235737.	Schwarz criterion	15.70079
Log likelihood	-230.4101	Hannan-Quinn criter.	15.60550
F-statistic	2.563464	Durbin-Watson stat	1.988971
Prob(F-statistic)	0.095648		

Her iki modele sabit terimin ardından trendin eklenmesi de birim kökü ortadan kaldırmamıştır. Phillips-Perron test istatistik değerleri her iki modelde de %1, %5 ve %10 kritik anlam düzeylerinden büyük olarak belirlenmiştir (Prob. değeri tüketim değişkeni için 0,7378; gelir değişkeni için 0,8792'dir). Bu ise birim kökün varlığını savunan H_0 Hipotezi'nin reddedilemeyeceği anlamını taşır. Serilere ait 1. fark alma işlemine gidilerek birim kök testlerinin yeniden yapılması gerekmektedir.

f) Birinci Fark Alma İşlemi Uygulanmış Seriler için Sabitli ve Trendli Model Levin, Lin ve Chu Birim Kök Testi Sonuçları

Tablo11:

$\Delta TRPC_t = \alpha_1 + \rho\Delta TRPC_{t-1} + \beta_1 t + \varepsilon_t$ ve $\Delta TRPY_t = \alpha_2 + \rho\Delta TRPY_{t-1} + \beta_2 t + u_t$ Modellerine Ait Levin, Lin & Chu Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Levin, Lin & Chu Unit Root Test on D(UNTITLED)

Null Hypothesis: Unit root (common unit root process)
Series: TRPC, TRPY
Date: 12/11/19 Time: 14:02
Sample: 1988 2018
Exogenous variables: Individual effects, individual linear trends
Automatic selection of maximum lags
Automatic lag length selection based on SIC: 0
Newey-West automatic bandwidth selection and Bartlett kernel
Total (balanced) observations: 58
Cross-sections included: 2

Method	Statistic	Prob.**
Levin, Lin & Chu t*	-5.81600	0.0000

** Probabilities are computed assuming asympotic normality

Intermediate results on D(UNTITLED)

Series	2nd Stage Coefficient	Variance of Reg	HAC of Dep.	Lag	Max Lag	Band-width	Obs
D(TRPC)	-1.07722	130557	31749.	0	6	6.0	29
D(TRPY)	-1.08236	297364	68963.	0	6	10.0	29

Tablo değerleri incelendiğinde Levin, Lin&Chu testine ait olasılık değerinin 0,00 olduğu görülüyor. Yani testin olasılık değeri %5 anlam düzeyinden küçük. Bu durumda H_0 hipotezi reddedilir. Yani farkı alınmış serilerin birim kök içermediği sonucuna ulaşılır.

g) Birinci Fark Alma İşlemi Uygulanmış Seriler İçin Sabitli ve Trendli Model Phillips-Perron Birim Kök Testi Sonuçları

Tablo 12:

$\Delta TRPC_t = \alpha_1 + \rho\Delta TRPC_{t-1} + \beta_1 t + \varepsilon_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on D(TRPY)

Null Hypothesis: D(TRPY) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Bandwidth: 6 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-6.371734	0.0001
Test critical values:	1% level	-4.309824	
	5% level	-3.574244	
	10% level	-3.221728	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	297364.2
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	96146.17

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPY,2)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 14:11
Sample (adjusted): 1990 2018
Included observations: 29 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(TRPY(-1))	-1.082355	0.198104	-5.463558	0.0000
C	100.8311	230.7911	0.436893	0.6658
@TREND("1988")	22.19349	13.73942	1.615315	0.1183

R-squared	0.535918	Mean dependent var	12.16511
Adjusted R-squared	0.500219	S.D. dependent var	814.6424
S.E. of regression	575.9128	Akaike info criterion	15.64749
Sum squared resid	8623563.	Schwarz criterion	15.78893
Log likelihood	-223.8886	Hannan-Quinn criter.	15.69179
F-statistic	15.01229	Durbin-Watson stat	1.921894
Prob(F-statistic)	0.000046		

Tablo13

$\Delta TRPY_t = \alpha_2 + \rho \Delta TRPY_{t-1} + \beta_2 t + u_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on D(TRPY)

Null Hypothesis: D(TRPY) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Bandwidth: 6 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-6.371734	0.0001
Test critical values:	1% level	-4.309824	
	5% level	-3.574244	
	10% level	-3.221728	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	297364.2
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	96146.17

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPY,2)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 14:11
Sample (adjusted): 1990 2018
Included observations: 29 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(TRPY(-1))	-1.082355	0.198104	-5.463558	0.0000
C	100.8311	230.7911	0.436893	0.6658
@TREND("1988")	22.19349	13.73942	1.615315	0.1183

R-squared	0.535918	Mean dependent var	12.16511
Adjusted R-squared	0.500219	S.D. dependent var	814.6424
S.E. of regression	575.9128	Akaike info criterion	15.64749
Sum squared resid	8623563.	Schwarz criterion	15.78893
Log likelihood	-223.8886	Hannan-Quinn criter.	15.69179
F-statistic	15.01229	Durbin-Watson stat	1.921894
Prob(F-statistic)	0.000046		

Her iki değişkene ait modeller incelendiğinde Phillips-Perron Test İstatistiği sonuçlarına göre modelin %1, %5, %10 kritik seviyelerinde birim kök içerdiğini savunan sıfır hipotezleri reddedilir. Ancak modeller incelendiğinde her iki değişken içinde sabit terimi ve trendin katsayılarının t test istatistiğine göre istatistiksel olarak anlamsız olduğu anlaşılmaktadır. Bu nedenle her iki değişkenin sabit terimli ve trendsiz modellerine ait durağanlıkları incelenecektir.

h) Birinci Fark Alma İşlemi Uygulanmış Seriler İçin Sabitli ve Trendsiz Model Phillips-Perron Birim Kök Testi Sonuçları

Tablo 14:

$\Delta TRPC_t = \alpha_1 + \rho\Delta TRPC_{t-1} + \varepsilon_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on D(TRPC)

Null Hypothesis: D(TRPC) has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 3 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-5.397020	0.0001
Test critical values:	1% level	-3.679322	
	5% level	-2.967767	
	10% level	-2.622989	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	135001.4
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	122124.4

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPC,2)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 14:30
Sample (adjusted): 1990 2018
Included observations: 29 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(TRPC(-1))	-1.025935	0.190435	-5.387316	0.0000
C	243.9731	83.56206	2.919663	0.0070

R-squared	0.518057	Mean dependent var	4.097332
Adjusted R-squared	0.500207	S.D. dependent var	538.6307
S.E. of regression	380.7906	Akaike info criterion	14.78885
Sum squared resid	3915041.	Schwarz criterion	14.88314
Log likelihood	-212.4383	Hannan-Quinn criter.	14.81838
F-statistic	29.02318	Durbin-Watson stat	1.869677
Prob(F-statistic)	0.000011		

Tablo 15:

$\Delta TRPY_t = \alpha_2 + \rho \Delta TRPY_{t-1} + u_t$ Modeline Ait Phillips-Perron Birim Kök Testi Analiz Sonuçları:

Phillips-Perron Unit Root Test on D(TRPY)

Null Hypothesis: D(TRPY) has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 1 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-5.087945	0.0003
Test critical values:	1% level	-3.679322	
	5% level	-2.967767	
	10% level	-2.622989	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	327206.4
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	331011.6

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(TRPY,2)
Method: Least Squares
Date: 12/11/19 Time: 14:32
Sample (adjusted): 1990 2018
Included observations: 29 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(TRPY(-1))	-0.965009	0.189717	-5.086576	0.0000
C	407.8154	134.7924	3.025508	0.0054

R-squared	0.489345	Mean dependent var	12.16511
Adjusted R-squared	0.470432	S.D. dependent var	814.6424
S.E. of regression	592.8270	Akaike info criterion	15.67415
Sum squared resid	9488985.	Schwarz criterion	15.76845
Log likelihood	-225.2752	Hannan-Quinn criter.	15.70369
F-statistic	25.87325	Durbin-Watson stat	1.964606
Prob(F-statistic)	0.000024		

Her iki değişkene ait sabit terimli ancak trendin olmadığı modellerin istatistik sonuçlarına göre serilerin birinci farklarında birim kök içermedikleri Phillips-Perron Test İstatistiği sonuçlarından anlaşılmaktadır. Her iki analiz sonucunda da Phillips-Perron test istatistiğinin %1, %5, %10 kritik değerlerinden küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca modelde sabit terime ait katsayının t test istatistiğine göre anlamlı olduğu anlaşılmaktadır.

Serilerin 1. fark alma işlemi sonrasında durağan olduklarını tespit edilmiştir. Aynı mertebeden durağan serileri eş tümleşme analizine tabi tutulabilir. Türkiye ekonomisinin son 30 yılının özel tüketim harcamaları ile gelir değişkenleri arasındaki uzun dönemli ilişkisi 3 farklı analiz ile incelenecektir.

4.3.1.2 Eş Tümleşme Testlerinin Uygulanması

a) Engle-Granger Eş Tümleşme Analiz Sonuçları

Tablo 16
TRPC ve TRPY Serileri Engle –Granger Eş Tümleşme Analiz Sonuçları:

Engle-Granger Cointegration Test

Date: 12/12/19 Time: 13:55
Series: DTRPC DTRPY
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments
Null hypothesis: Series are not cointegrated
Cointegrating equation deterministics: C
Additional regressor deterministics: @TREND
Automatic lags specification based on Schwarz criterion (maxlag=6)

Dependent	tau-statistic	Prob.*	z-statistic	Prob.*
DTRPC	-4.904325	0.0025	-27.35616	0.0017
DTRPY	-4.628855	0.0047	-25.59110	0.0035

*MacKinnon (1996) p-values.

Sabitli ve trendli 1. fark alma işlemi uygulanmış serilere ait tau istatsitiğine ait MacKinon (1996) olasılık değerleri %5 anlam düzeyinden küçük çıkmıştır. Olasılık değerlerine göre H_0 Hipotezi reddedilir. Yani her iki değişken uzun dönemli ilişkili olmadığını söyleyen hipotez reddedilmiştir. Seriler uzun dönemli ilişkilidir.

b) Johansen Eş Tümleşme Analiz Sonuçları

Analizde kurulacak VAR modeli için uygun gecikme uzunluğu belirlenir.

Tablo 17
TRPC ve TRPY Serileri Uygun Gecikme Uzunluğunu Veren Bilgi Kiterleri:

VAR Lag Order Selection Criteria
Endogenous variables: DTRPC DTRPY
Exogenous variables: C
Date: 12/12/19 Time: 15:24
Sample: 1988 2018
Included observations: 24

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-338.7132	NA*	7.34e+09*	28.39276*	28.49094*	28.41881*
1	-336.9851	3.024139	8.90e+09	28.58209	28.87661	28.66023
2	-333.7766	5.080148	9.60e+09	28.64805	29.13890	28.77827
3	-332.4533	1.874615	1.23e+10	28.87111	29.55831	29.05342
4	-331.4812	1.215140	1.65e+10	29.12343	30.00698	29.35784
5	-328.1202	3.641154	1.86e+10	29.17668	30.25656	29.46317
6	-327.2275	0.818298	2.70e+10	29.43562	30.71185	29.77420

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

Tabloda farklı bilgi kriterlerine ait istatistikler yer almaktadır. Buna göre en düşük istatistikî değeri veren gecikme uzunluğu paket program tarafından 1 olarak belirlenmiştir. Eğer bilgi kriterleri farklı gecikme uzunluklarında kümelenmiş olsalardı bu durumda küçük olan gecikme uzunluğu tercih edilecek ve eş tümleşme testi uygulanacaktır. Eğer eş tümleşik olmadığı yönünde bir karar çıkmışsa bu durumda diğer bilgi kriterleri tarafından belirlenen büyük olan gecikme uzunluğu ile analize devam edilecektir.

Tablo 18
TRCONS ve TRPGDP Serileri Johansen Eş Tümleşme Analizi Sonuçları:

Johansen Cointegration Test

Date: 12/12/19 Time: 15:26
Sample (adjusted): 1991 2018
Included observations: 28 after adjustments
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: DTRPC DTRPY
Lags interval (in first differences): 1 to 1

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.565227	30.94104	15.49471	0.0001
At most 1 *	0.238226	7.618946	3.841466	0.0058

Trace test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.565227	23.32209	14.26460	0.0014
At most 1 *	0.238226	7.618946	3.841466	0.0058

Max-eigenvalue test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Johansen eş tümleşme analizi sonuçları incelendiğinde birinci fark serilerin sabit terimli ve trendli modelinde değişkenler arasında eş tümleşme ilişkisi görülmüştür. Tabloda olasılık (Prob.) değerlerinin 0,05 anlam düzeyinden küçük olduğu görülmektedir. Bu ise %5 anlam düzeyinde sıfır hipotezinin reddi anlamına gelir. Eş tümleşmenin olmadığını savunan sıfır hipotezi reddedilir.

c) Philips-Ouliaris Eş Tümleşme Analiz Sonuçları

Tablo 19:
TRPC ve TRPY Serileri Philips-Ouliaris Tümleşme Analizi Sonuçları:

Phillips-Ouliaris Cointegration Test

Date: 12/12/19 Time: 14:54
Series: DTRPC DTRPY
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments
Null hypothesis: Series are not cointegrated
Cointegrating equation deterministics: C @TREND
Additional regressor deterministics: @TREND^2
Long-run variance estimate (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth)
No d.f. adjustment for variances

Dependent	tau-statistic	Prob.*	z-statistic	Prob.*
DTRPC	-5.446828	0.0025	-25.98449	0.0143
DTRPY	-5.459405	0.0024	-27.13906	0.0094

*MacKinnon (1996) p-values.

Modelin çıktılarına göre tau-statistic prob. değerlerinin 0,05 anlam düzeylerinden küçük oldukları görülmektedir dolayısı ile H_0 hipotezi reddedilir. Yani değişkenler arasında uzun dönemli ilişki vardır.

Her üç yöntemle de kişi başı hane halkı özel tüketim harcamaları serisi ve kişi başı gayri safi yurt içi hasıla serisi arasında uzun dönemli ilişki olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Seriler arasında eş tümleşme ilişkisi olduğuna göre hata düzeltme modeli kurulur. Serilere ait eş tümleşikliği ortaya koyduktan sonra uzun dönemli ilişkiden yani dengeden ne kadar uzaklaştıklarını ortaya koymamıza yarayan modeller hata düzeltme modelleri olarak bilinir (Akgül, 2000, s. 43). Durağanlığın sağlanması yani birim kökten arındırma amacı ile serilere fark alma işlemleri uygulanır. Bu durumda ilgili seriye ait bilgi kayıpları ortaya çıkar. İşte hata düzeltme modelleri ile serilerden çıkardığımızda ortaya çıkan bilgi kaybını ortadan kaldırmaya yönelik bu modeller kullanılır.

Ancak hata düzeltme modeline dahil edilecek artıklara ulaşmak amacı ile eş tümleşmeyi sağlayan serilere ait regresyon modelinin bu aşamada kurulması gerekmektedir. Daha sonra modelin çıktıları incelenecektir. Ve modelin artıklarına ait seri elde edilecektir.

d) Eş Tümleşen Serilere Ait Regresyon Modeli

Tablo 20
TRPY ve TRPC Serileri EKK Yöntemi ile Tahmin Edilmiş Denkleme Ait Analiz Sonuçları:

Dependent Variable: TRPY
Method: Least Squares
Date: 12/12/19 Time: 15:47
Sample: 1988 2018
Included observations: 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TRPC	1.774591	0.022800	77.83228	0.0000
C	-1685.568	200.4587	-8.408554	0.0000

R-squared	0.995236	Mean dependent var	13471.65
Adjusted R-squared	0.995071	S.D. dependent var	3769.624
S.E. of regression	264.6439	Akaike info criterion	14.05699
Sum squared resid	2031055.	Schwarz criterion	14.14950
Log likelihood	-215.8833	Hannan-Quinn criter.	14.08715
F-statistic	6057.864	Durbin-Watson stat	0.877608
Prob(F-statistic)	0.000000		

Model incelendiğinde bağımsız değişkenin katsayısına ve sabit katsayıya ait t olasılık değerinin 0,05 anlam düzeyinden küçük olduğu (Prob:0,000) görülmektedir. Dolayısı ile katsayının anlamsızlığını ifade eden H_0 hipotezinin reddedilir. Modelde sabit katsayısı ve bağımsız değişkene ait katsayı istatistiksel olarak anlamlıdır. En Küçük Kareler Yöntemi ile kurulan eş tümleşme modelinin artıkları elde edilecektir ve ADF test istatistiğine göre düzey seviyede durağanlığı araştırılacaktır.

Tablo 21
TRPC ve TRPY Serileri EKK Yöntemi ile Tahmin Edilmiş Denkleme Ait Artıkların Birim Kök Analizi Sonuçları:

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on RESID01

Null Hypothesis: RESID01 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=7)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.774086	0.0080
Test critical values:	1% level	-3.679322	
	5% level	-2.967767	
	10% level	-2.622989	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tablo değerlerine göre artıkların düzeyde durağan olduğu sonucuna ulaşılır. Hesaplanan test istatistiği %1,%5,%10 anlam düzeylerinde kritik değerlerden daha küçüktür (Prob.: 0,008) .Dolayısıyla H_0 hipotezi reddedilir. Artıklara ait birim kök olmadığını tespit ettiğimize göre hata düzeltme modelini kurabiliriz.

Tablo 22
DTRPC, DTRPY ve Artıkların Birinci Fark Alınmış Serilerine Ait EKK Yöntemi İle Tahmin Edilmiş Hata Düzeltme Modeline Ait Analiz Sonuçları:

Dependent Variable: DTRPC
Method: Least Squares
Date: 12/12/19 Time: 16:03
Sample (adjusted): 1989 2018
Included observations: 30 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DTRPY	0.563510	1.86E-16	3.03E+15	0.0000
RESIDX	-0.563510	4.36E-16	-1.29E+15	0.0000
C	4.59E-14	1.29E-13	0.355161	0.7252

R-squared	1.000000	Mean dependent var	224.5560
Adjusted R-squared	1.000000	S.D. dependent var	374.7578
S.E. of regression	5.75E-13	Sum squared resid	8.94E-24
F-statistic	6.15E+30	Durbin-Watson stat	2.504806
Prob(F-statistic)	0.000000		

Tablo değerleri incelendiğinde hata teriminin 1 gecikmeli değerlerine ait RESIDX değişkeninin 0.05 anlam düzeyinde anlamlı olduğunu görüyoruz. Yine aynı şekilde Hata düzeltme modeline dahil edilen artıkların 1 gecikmeli değerlerinin katsayısının 0 ile -1 arasında olduğunu görüyoruz (-0,563510). Bu ise fark alma işlemine gidilerek birim kökten kurtulmasını sağladığımız serilerin bilgi kayıplarını örten bir model olarak kullanılabileceği anlamını taşıyor. (Saygılı, Cengiz & Yurtoğlu, 2005, s. 25)

Regresyon modellerinde katsayıların anlamlılığı Wald Testi ile incelenir. Belirlilik katsayısı (R^2), bilindiği gibi doğrusal regresyonda bağımlı değişkenin bağımsız değişkenler tarafından açıklanma oranını verir. (Altaş & Giray, 2005, s. 19) Artıkların bir gecikmeli değeri ile elde ettiğimiz hata düzeltme modelinin belirlilk katsayısı 1 olarak bulunmuştur. Bu ise kişi başı reel gelir bağımsız değişkeninin kişi başı özel tüketim bağımlı değişkenini %100 oranında açıklandığını ifade eder. Modele ait Wald testi istatsitikleri ise tablo 25 ile verilmiştir.

Tablo 23
TRPC ve TRPY ve Artıkların Birinci Fark Alınmış Serilerine Ait Wald Testi İstatistiki Değerleri:

Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	3.23E+30	(2, 27)	0.0000
Chi-square	6.46E+30	2	0.0000

Null Hypothesis: C(1)=C(2)=C(3)
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(1) - C(3)	0.563510	1.29E-13
C(2) - C(3)	-0.563510	1.29E-13

Restrictions are linear in coefficients.

Wald testi sonuçları incelendiğinde F- istatistik olasılık değerinin 0,05 anlam düzeyinden küçük olduğu yani H_0 hipotezinin red bölgesinde kaldığı anlaşılmaktadır. Yani katsayıların sıfıra eşit olduğunu ifade eden hipotez reddedilmiştir. Tüketimin fark serisi ve hata terimlerinin bir gecikmeli değerine ait fark serisinin katsayısının sıfırdan farklı olduğunu anlıyoruz.

İlk yöntemin uygulanışının ardından Dünya ve Ülkelere göre Türkiye'nin standart sapmasını yorumlayacağımız ikinci yöntemi uygulamaya başlamadan tüketim ve gelir değişkenlerine ait yıllık büyüme oranları serileri incelenecektir.

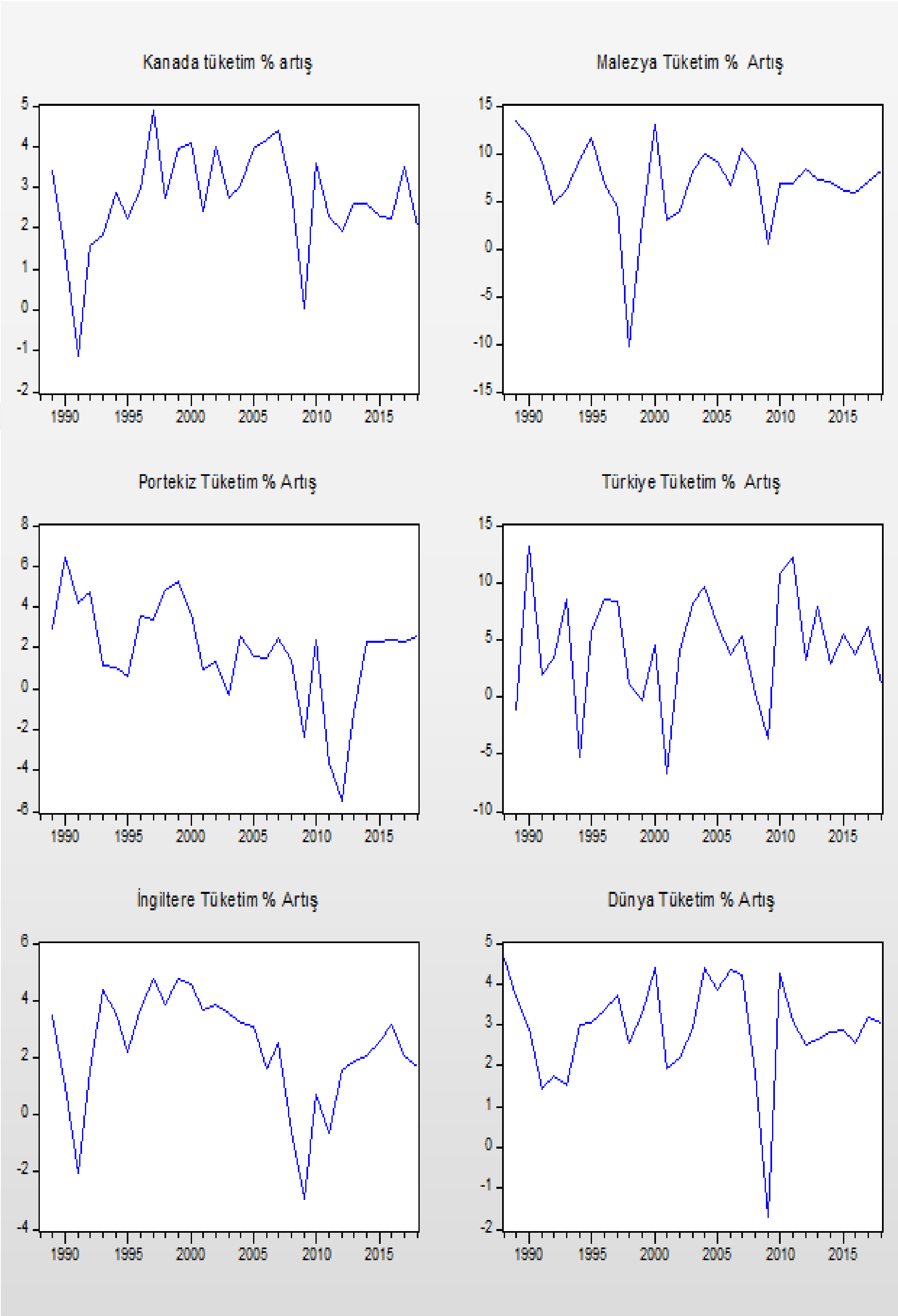
Tablo 24
Ülkelerin ve Dünya'nın Yerleşik Hane Halkı Özel Tüketim Harcamaları Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serisi

YILLAR/ ÜLKELER	TÜRKİYE	İNGİLTERE	KANADA	PORTEKİZ	MALEZYA	DÜNYA
1988	..	..	..	..	..	..
1989	-1,031	3,493	3,418	2,943	13,322	3,676
1990	13,106	0,975	1,379	6,439	11,887	2,912
1991	1,920	-2,063	-1,106	4,229	9,045	1,419
1992	3,309	1,576	1,549	4,737	4,654	1,767
1993	8,439	4,336	1,851	1,102	6,253	1,534
1994	-5,311	3,519	2,887	1,025	9,389	3,012
1995	5,628	2,164	2,236	0,596	11,657	3,029
1996	8,483	3,754	2,967	3,516	6,865	3,382
1997	8,387	4,763	4,894	3,340	4,310	3,704
1998	1,105	3,882	2,747	4,793	-10,236	2,556
1999	-0,381	4,737	3,946	5,255	2,860	3,272
2000	4,536	4,581	4,060	3,690	13,028	4,395
2001	-6,702	3,655	2,437	0,949	3,027	1,945
2002	3,967	3,844	3,996	1,313	3,872	2,192
2003	8,128	3,503	2,745	-0,274	8,113	2,909
2004	9,559	3,215	3,041	2,559	9,849	4,383
2005	6,314	3,075	3,929	1,586	9,109	3,869
2006	3,66	1,614	4,186	1,506	6,610	4,333
2007	5,274	2,517	4,394	2,524	10,444	4,218
2008	0,281	-0,575	2,962	1,375	8,719	1,854

Tablo 24
Ülkelerin ve Dünya'nın Yerleşik Hane Halkı Özel Tüketim Harcamaları Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serisi (devamı)

YILLAR/ ÜLKELER	TÜRKİYE	İNGİLTERE	KANADA	PORTEKİZ	MALEZYA	DÜNYA
2009	-3,723	-2,946	0,053	-2,337	0,554	-1,686
2010	10,779	0,719	3,581	2,398	6,862	4,280
2011	12,250	-0,650	2,299	-3,604	6,864	3,114
2012	3,158	1,535	1,917	-5,494	8,345	2,513
2013	7,879	1,847	2,619	-1,198	7,249	2,652
2014	2,977	2,032	2,594	2,299	6,976	2,840
2015	5,428	2,561	2,295	2,290	6,017	2,853
2016	3,664	3,126	2,243	2,410	5,954	2,565
2017	6,103	2,077	3,500	2,323	6,988	3,165
2018	1,149	1,652	2,055	2,588	8,124	3,039

Grafik 3:
Ülkelerin ve Dünya'nın Yerleşik Hane Halkı Özel Tüketim Harcamaları Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serilerine ait Grafikler:



Tablo 25:
Ülkelerin ve Dünya'nın Kişi Başı Gayri Safi Yurt İçi Hâsıla Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serisi

YILLAR/ ÜLKELER	TÜRKİYE	İNGİLTERE	KANADA	PORTEKİZ	MALEZYA	DÜNYA
1988	..	..	..	..	..	..
1989	-1,486	2,302	0,498	6,596	5,908	4,082
1990	7,383	0,439	-1,335	4,177	5,980	3,255
1991	-0,967	-1,393	-3,295	4,609	6,646	3,244
1992	3,324	0,100	-0,287	1,168	6,119	1,610
1993	5,932	2,281	1,539	-2,163	7,175	2,686
1994	-6,176	3,631	3,356	0,694	6,519	1,938
1995	6,177	2,185	1,635	3,922	7,095	3,069
1996	5,687	2,274	0,562	3,108	7,229	2,742
1997	5,886	4,025	3,248	3,961	4,609	3,316
1998	0,712	3,041	3,040	4,264	-9,671	3,216
1999	-4,875	2,870	4,310	3,302	3,577	2,907
2000	5,033	3,084	4,204	3,061	6,358	3,696
2001	-7,357	2,446	0,689	1,227	-1,665	4,127
2002	4,873	2,067	1,903	0,218	3,217	2,775
2003	4,100	2,859	0,887	-1,305	3,688	2,532
2004	8,137	1,767	2,130	1,568	4,699	2,692
2005	7,577	2,443	2,233	0,580	3,282	3,780
2006	5,780	1,797	1,603	1,370	3,524	3,906
2007	3,785	1,750	1,086	2,291	4,236	3,517
2008	-0,353	-1,127	-0,080	0,055	2,847	4,070
2009	-5,911	-4,968	-4,030	-3,071	-3,286	1,634

Tablo 25:
Ülkelerin ve Dünya'nın Kişi Başı Gayri Safi Yurt İçi Hâsıla Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serisi (devamı)

2010	6,979	0,917	1,950	1,852	5,624	-0,216
2011	9,424	0,853	2,142	-1,682	3,666	3,046
2012	3,093	0,744	0,663	-3,638	3,960	2,936
2013	6,669	1,365	1,255	-0,586	3,270	2,364
2014	3,392	2,175	1,839	1,439	4,595	2,576
2015	4,333	1,539	-0,059	2,245	3,688	2,583
2016	1,513	1,065	-0,031	2,248	2,818	2,639
2017	5,745	1,109	1,765	3,046	4,466	2,740
2018	1,049	0,742	0,453	2,329	3,317	3,063

Grafik 4:
Ülkelerin ve Dünya'nın Yerleşik Hane Halkı Özel Tüketim Harcamaları Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serilerine ait Grafikler:

4.3.1.3 Standart Sapma Değerlerinin Hesaplanması ve Karşılaştırılması Yöntemi

Tablo 26 da görüldüğü üzere Türkiye serisine ait Standart Sapma (Std. Dev.) değeri (4.82) olarak hesaplanmış ve diğer ülkelerin standart sapması ile kıyaslandığında en yüksek değer olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu ise Türkiye'nin özel tüketim harcamalarının zaman içerisinde diğer ülkelere göre daha fazla değişkenlik gösterdiği anlamına gelir.

Tablo 26:
Ülkelerin ve Dünya'nın Yerleşik Hane Halkı Özel Tüketim Harcamaları Değişkeni
Yıllık Büyüme Oranı Serisine ait Standart Sapma ve Diğer İstatistikî Değerleri:

	KANADACONSBO	MALEYCONSBO	PORTUGALCONSBO	TRCONSBO	UKCONSBO	WORLDCONSBO
Mean	2.722484	6.890492	1.829283	4.278427	2.283860	2.913327
Median	2.746377	6.982247	2.311024	4.252256	2.539004	3.011930
Maximum	4.894479	13.32203	6.438833	13.10652	4.762553	4.617041
Minimum	-1.105579	-10.23582	-5.493732	-6.702632	-2.946261	-1.686309
Std. Dev.	1.257307	4.394645	2.538899	4.826781	1.919895	1.226426
Skewness	-0.942978	-1.904138	-0.955209	-0.361185	-1.038594	-1.587513
Kurtosis	4.539708	8.884282	4.253836	2.816180	3.687859	7.466144
Jarque-Bera	7.409417	61.40967	6.527256	0.694510	5.984820	38.78518
Probability	0.024607	0.000000	0.038249	0.706625	0.050166	0.000000
Sum	81.67451	206.7148	54.87848	128.3528	68.51579	90.31315
Sum Sq. Dev.	45.84382	560.0741	186.9342	675.6366	106.8939	45.12364
Observations	30	30	30	30	30	31

Örneğin Standart Sapma değeri (1.91) olarak hesaplanan yüksek gelir grubunda ve Dünya Standart Sapma değerine (1.22) en yakın özellik gösteren İngiltere'ye göre Türkiye'nin özel tüketim harcamalarının değişkenliği ortalama 2,5 kat daha fazladır. Bununla beraber aynı gelir grubunda bulunan Malezya'nın Standart Sapma değerinin (4.39) Türkiye değerine yakın çıkması dikkat çekicidir. Peki tüketim serisine ait standart sapma değerleri ile kişi başına gelir serisi arasında bir paralellik gözlemlenecek midir? Ve en önemlisi Türkiye kişi başı gelir serisinin değişkenliği ile yüksek gelir grubunda bulunan Portekiz ,Kanada, İngiltere ve Dünya'nın serilerinin değişkenliği arasında ne kadar fark vardır? Şimdi bu sorulara yanıt bulmak amacı ile elde edilen tablo incelenecektir.

Tablo 27:
Ülkelerin ve Dünya'nın Kişi Başına Gayri Safi Yurt İçi Hasıla Değişkeni Yıllık Büyüme Oranı Serisine ait Standart Sapma ve Diğer İstatistiki Değerleri:

	KANADAPGDPBO	MALEYPGDPBO	PORTUGALPGDPBO	TRPGDPBO	UKPGDPBO	WORLDPGDPBO
Mean	1.129055	3.783031	1.562794	2.981938	1.479365	2.884138
Median	1.396730	4.098045	1.710167	4.216404	1.782104	2.921698
Maximum	4.309614	7.228737	6.596071	9.423771	4.024891	4.126667
Minimum	-4.030420	-9.671218	-3.638377	-7.357004	-4.968143	-0.215503
Std. Dev.	1.846731	3.431080	2.377735	4.508037	1.732831	0.879045
Skewness	-0.855261	-2.373839	-0.338646	-0.920840	-1.823229	-1.384697
Kurtosis	4.275006	9.470697	2.804548	2.892044	7.655703	6.400676
Jarque-Bera	5.689409	80.51297	0.621157	4.254302	43.71528	24.04268
Probability	0.058151	0.000000	0.733023	0.119176	0.000000	0.000006
Sum	33.87164	113.4909	46.88382	89.45813	44.38096	86.52415
Sum Sq. Dev.	98.90204	341.3969	163.9551	589.3494	87.07844	22.40888
Observations	30	30	30	30	30	30

Tablo 27 de ülkelerin Standart Sapma değerleri görülmektedir. Buna göre bu değerler kıyaslanacaktır. TRPGDPBO serisine ait standart sapma değeri, (4.50) iken durağan dengeye yaklaşmış İngiltere'nin UKPGDPBO değişkenine ait standart hata değeri (1.73)'dür. Yine Türkiye gibi üst orta gelir grubundan olan Malezya'nın MALEYPGDPBO değişkenine ait standart sapmanın ölçüsü (3.43) ve yüksek gelir grubundan seçtiğimiz ülkelerden Kanada ve Portekiz'in standart sapması sırası ile(1,84) ve (2,37) olarak hesaplanmıştır. Ülkelerin standart sapmalarını kıyaslarsak en büyük standart sapma Türkiye'nindir. Yani Türkiye'nin Kişi Başına Gayri Safi Yurt İçi Hasıla Büyüme Oranı serisinin diğer ülkelere göre homojenliği az ve tutarsız olduğunu dolayısı ile seriye ait değişkenliğin İngiltere'ye göre ortalama üç buçuk kat Dünya'ya göre ortalama 5 kat daha fazla olduğunu söylenebilir. Özel Tüketim Harcamaları Büyüme Oranı serisinin standart sapma değerleri ile Kişi Başı Gayri Safi Yurt İçi Hasıla Büyüme Oranı Serisinin standart sapmalarının kıyaslanması da ülkeler bazında paralellik göstermektedir. Özetle σ burada standart sapmayı göstermek üzere kullanılırsa aşağıdaki sıralamayı yapmak mümkündür:

$$\mathrm{TRCONSBO}_{\sigma} > \mathrm{MALEYCONSBO}_{\sigma} > \mathrm{PORTUGALCONSBO}_{\sigma} > \mathrm{UKCONSBO}_{\sigma} > \mathrm{KANADACONSBO}_{\sigma} > \mathrm{WORLDCONSBO}_{\sigma}$$

$$\mathrm{TRPGDPBO}_{\sigma} > \mathrm{MALEYPGDPSBO}_{\sigma} > \mathrm{PORTUGALPGDPBO}_{\sigma} > \mathrm{KANADAPGDPBO}_{\sigma} > \mathrm{UKPGDPBO}_{\sigma} > \mathrm{WORLDPGDPBO}_{\sigma}$$

4.4.Ekonometrik Sonuç

Eş tümleşme analizi neticesinde Türkiye Ekonomisi'nde kişi başı tüketim ve kişi başı reel gelir uzun dönemli ilişkili bulunmuştur. Yani Ramsey Büyüme Modeli Türkiye ekonomisinde etkin büyümenin açıklanması için kullanılabilir bir modeldir. Çünkü Ramsey'in Büyüme Modeli de uzun dönemli ilişkiyi temel almaktadır. Ayrıca her iki değişkenin düzey değerlerinde birim kök taşıdıkları ve birinci dereceden durağan oldukları tespit edilmiştir. Bu ise serilere ait modellemeler yapılırken hata düzeltme modeli ile çalışılması gerekliliğini ortaya koymaktadır. Serilere ait hata düzeltme modeli sonuçlarına göre de hata düzeltme katsayısı -0,5635 olarak tahmin edilmiştir. Yani hata düzeltme modelinin anlamsızlığını savunan H_0 hipotezi reddedilmektedir. Serilere ait birim kökü ortadan kaldırmak amacı ile fark alma işlemine gidilmesinden kaynaklanan gözlem değerinde ki azalma nedeni ile eksik bilgi durumu ortadan kaldırılmıştır. Hata düzeltme modelinin belirlilik katsayısı 1 olarak tahmin edilmiştir. Modelin bağımsız değişken tarafından açıklanma oranı, yani kişi başı reel gelirin kişi başı tüketim değişkeni tarafından açıklanma oranı % 100'dür.

Yine yapılan standart sapma kıyaslamasına göre Türkiye kişi başı özel tüketim harcamaları değişkeninin değişkenliği diğer ülkelere göre ortalama dört kat daha fazla bir değerde elde edildi. Aynı şekilde kişi başı gelir yıllık büyüme oranlarında da diğer ülkelere göre ortalama üç kat daha fazla değişkenlik saptanmıştır. Bu ise Türkiye'nin zamanlar arası optimizasyonda gelişmiş ülkelere göre tüketimde dört kat reel gelirde ise üç kat daha geride olduğuna işaret etmektedir.

5.SONUÇ

Optimizasyon en basit şekilde ifade edilirse olması gerekeni mevcut kısıtlar altında gerçekleştirmedir. Bir öğrencinin hem eğlenmeye vakit ayırıp hem de başarılı olabilmesi için derslerine ayırması gereken süreyi en iyi şekilde planlaması bir optimizasyon problemidir. Yine örneği üretim yapan bir firma için genişletmek mümkündür. Belirli bir süre zarfında belirli bir miktarda üretilmesi gereken ürün için firmanın en düşük maliyetle üretim yapabilmesi firmanın optimizasyonunu sağlamasından geçmektedir. Burada mikro düzeyde örneklendirdiğimiz optimizasyonu makro düzeye taşımak için çalışmada ülke ekonomileri merceğe alınmıştır.

Bilindiği üzere ülkelerin refah seviyesini ölçmede kullanılan kriterlerden biri de kişi başına reel gelirdir. Tüketim değişkeni üzerinden bir ülkenin kişi başı reel gelirini optimum yapabilmesi için gelirinin ne kadarını tasarrufa dolayısı ile ne kadarını da tüketime ayırması gerekir sorusu ortaya koyulabilir. Bu problemi çözebilmek mümkün müdür? Bundan yıllar öncesinde bu soruyu ele aldığı bir çalışma ile optimizasyon kavramını makro iktisada taşıyan Ramsey, çalışmasında optimum tasarruf oranını ortaya koymuştur. Hane halkının tüketim kararlarından yola çıkan Ramsey, büyüme modelini ortaya koyarken dinamik optimizasyon metotlarından faydalanmıştır. Ramsey'in büyüme modelini anlamak için onun modelini ortaya koyarken Dünya Ekonomisi'nin içinde bulunduğu durumu, Dünya'nın teknik ilerlemede bulunduğu konumu ve bunun gibi birçok etmeni göz önünde bulundurmak gerekmektedir. 1928'li yıllar itibari ile ilk Dünya Savaşı'nın üzerinden henüz 10 yıl geçmiştir ve ülkeler için iktisadi büyüme her zaman olduğundan daha da kritik bir öneme sahiptir. Kaynakların etkin bir şekilde dağıtımı şarttır. Yine elde edilen gelirin etkin bir şekilde tüketim ve tasarruf arasında paylaşılması gerekmektedir. Bütün bu problemlere matematiği iktisat ile birleştiren Ramsey belirli varsayımlar altında varyasyon hesabı ile optimum tasarruf kuralını ortaya koyarak çözüm bulmuştur. Dinamik optimizasyon metotlarından varyasyon hesabını kullanan Ramsey, büyüme modeli için nüfus artış hızının sıfır kabul edildiği, ekonominin dışa kapalı olduğu, teknolojinin olmadığı gibi gerçek hayatla bağdaşmayan varsayımları modeline dahil etmiştir. Bu varsayımların genişletilmesi ile yine dinamik optimizasyon metotlarından optimal kontrol teorisini kullanarak ülkelerin optimum büyüme için optimum tüketim formülünü ortaya koyan Cass ve Koopmans (1965) bir anlamda modeli güncellemiştir.

İşte bu çalışma ile geliştirilen büyüme modelinin Türkiye Ekonomisi'nde kullanılabilirliğini ve Türkiye Ekonomisi'nin etkin büyümesinin gidişatı araştırılmıştır. Ancak bu araştırmaya başlamadan önce modeli daha da iyi kavramak matematik tekniğini ve modelin nasıl ortaya konulduğunu anlamak için model teorik zeminde incelenmiştir. Bu inceleme öncesinde matematik tekniği anlamayı gerekli kılmıştır. Literatür taramasında dinamik optimizasyon tekniklerinden varyasyon hesabı ve optimal kontrol teorisini iktisadi uygulamalar yolu ile anlatan çalışmanın yabancı literatürde bulunmasına rağmen yerli literatürde olmaması dikkat çekicidir. Bu bakımdan çalışma yerli literatürde ilk olabilecek niteliktedir. Dolayısı ile varyasyon hesabı, optimal kontrol teorisi ve iktisadi uygulamaların örneklendirilmesinin ve bu konuda yapılacak çalışmaların sayısının arttırılmasının önemli olduğu kanaati hasıl olmuştur. Bu çalışma ile Ramsey Modeli'nin teorik gelişimi varyasyon hesabı ve optimal kontrol teorisi ile elde edilişi anlatılmıştır. Optimizasyonu iktisada kazandıran ilk model olması bakımından bu kadar önemli bir büyüme modeli ile ilgili çalışmanın yine yerli literatürde yok denecek kadar az olması da çalışmanın önemini bir kez daha açığa çıkarmıştır.

Ampirik düzeyde modelin Türkiye Ekonomisi için geçerliliğini sınamak amacı ile teoriden yola çıkılarak kişi başı hane halkı özel tüketim harcamaları ve kişi başı reel gelir son otuz yıl için incelemeye alınmıştır.

Ülkeler ekonomilerinin mevcut durumunu ve geçmişteki durumunu ortaya koyan modeller geliştirerek geleceği öngörmek isterler. Bu sayede planlama yaparak en doğru adımları atmaya çalışırlar. Bu planlama çalışmalarından biri de ekonomideki makro değişkenlerle kurulacak modellerdir. Ancak bu modeller kurulurken bir çok değişken sabit varsayılır. Bu ise modellerin tam manası ile gerçeği yansıtmasına engel olur. Gerçek hayatı tasvir edebilmeye en yakın modeller ortaya koymak amacı ile o modele dahil edilecek değişkenin tesadüfi değişimleri barındırmaması yani stokastik sürecinin mümkün olduğunca az olması gerekli denilebilir. İncelenen bir iktisadi değişkenin zaman serilerine bakılarak o değişkenin stokastik ve deterministik özellikleri hakkında istatistiki bilgi elde edilmesi mümkündür. Ampirik çalışmada kullanılan değişkenlerin zaman serileri birim kök analizine tabi tutuldu ve serilere ait birim kök varlığı ve kaçıncı mertebeden durağanlaştıkları hakkında bilgi elde edilmiştir. Ve birim kök analizlerinde serilerin düzey seviyede birim kök taşıdıkları birinci farklarına ait değerlerin birim kök taşımadıkları tespit edilmiştir.

Aynı dereceden birim kök içeren seriler arasında uzun dönemli ilişkinin varlığını araştıran eş tümleşme analizleri ile kişi başı hane halkı özel tüketim nihai harcamaları ve kişi başı reel gelir değişkenleri arasındaki uzun dönemli ilişki üç farklı eş tümleşme analiz testi ile araştırılmıştır. Engle-Grenger , Johansen, Philips Ouliaris eş tümleşme testleri sonrasında birinci mertebeden durağan serilerin uzun dönemli ilişkili olduğu sonucuna varılmıştır. Eş tümleşme modeli EKK yöntemi ile tahmin edilmiştir ve modelin bağımsız değişkeninin bağımlı değişkeni açıklama oranı, belirlilik katsayısı, % 100 olduğu görülmüştür. Belirlilik katsayısının 1'e eşit olması bağımlı değişkenin bağımsız değişken tarafından açıklanma oranının % 100 olduğunu ortaya koymaktadır. Yani kişi başı reel gelir değişkeninin kişi başı özel tüketim harcamaları değişkeni tarafından açıklanmaktadır. Ayrıca modelin bağımsız değişkeninin katsayısının anlamlılığını ve genel anlamlığını ortaya koyan Wald Testi ile katsayıların istatistiksel olarak anlamsız olduğunu savunan H_0 hipotezi reddedilmiştir. Dolayısı ile eş tümleşme modelinin artıklarının bir gecikmeli değeri ile değişkenlerin bir gecikmeli değerlerini dâhil ederek ECM (Hata Düzeltme Modeli) kurulmuştur. ECM modelinin bağımsız değişkenleri özel tüketim harcamaları ve artıkların bir gecikmeli değerine ait RESIDX değişkenlerinin katsayıları istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Ayrıca ECM modelinin çalıştığı hakkında bilgi veren RESIDX değişkeninin katsayısı -1 ile 0 arasındadır. Bu ECM modelinin çalıştığı yani modelin değişkenlerine ait uzun dönemli bilgileri içerdiği hakkında bize kesin bir bilgi niteliğindedir.

Standart sapma değerine bakılarak serilerin ilgili süreç içerisinde ortalamadan ne kadar uzaklaştıkları yani değişkenlikleri hakkında bilgi edinilebiliyordu. Çalışmada tüketim ve gelir değişkenlerinin son otuz yıla ait değerlerinin standart sapma değerleri hesaplandı. Etkinlik hakkında bir bilgi kriteri olarak kullanılabilecek standart sapma değeri özel tüketim nihai harcamaları ve kişi başı reel gelir değişkenleri için yüksek gelir gurubunda bulunan ülkelerden İngiltere, Kanada, Portekiz ve ayrıca Dünya için; Türkiye ve Türkiye ile aynı gelir grubunda bulunan Malezya için tahmin edildi. Hesaplama neticesinde beklenildiği gibi orta üstü gelir grubunda bulunan Türkiye ve Malezya'ya ait değişkenlerin standart sapma değerlerinin Dünya ve yüksek gelir grubunda bulunan İngiltere, Kanada ve Portekiz'e göre özel tüketim harcamaları değişkeni için dört kat, kişi başı reel gelir değişkeni için üç kat fazla olduğu görülmüştür. Yani Türkiye'nin etkin tüketimi dolayısıyla etkin büyümeyi gerçekleştirip gerçekleştirmediği hakkında bir ön görü sunan bu işlem neticesinde yüksek gelir grubunda bulunan ülkelere göre Türkiye'nin tüketimde etkinliği sağlamadığı bilgisi elde edilmiştir.

Bu sonuçlara göre Türkiye Ekonomisi'nde etkin büyümenin sağlanması amacı ile etkin tasarruf oranının belirlenmesinde iktisadi bireylerin tam bilgiye ulaşabilmesi amacı ile teknik ilerlemelerden yararlanılabilirliğin arttırılmasının, hane halklarının tüketim alışkanlıklarının gözden geçirilmesi ve tüketim alışkanlıklarına yönelik uygulanacak politikaların politika yapıcılar tarafından belirlenmesi ve iktisadi karar birimleri ile paylaşılması tüketimde etkinliğin sağlanması için atılabilecek adımlar olarak önerilmektedir.

KAYNAKÇA

Acemoğlu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth.* Princeton: Princeton University Press.

Akgül, I. (2000). *Geleneksel Zaman Serisi Yöntemleri.* İstanbul: Der Yayınları.

Alptekin, D. D., Kasa, Ö. G., & Uygun, Ö. G. (2018). Yurtiçi Tasarruflar İle Ekonomik Büyüme Arasındaki İlişki :Türkiye Örneği. *International Journal of Academic Value Studies (Javstudies)* , 4/20, 621-630.

Altaş, D., & Giray, S. (2005). Mali Başarısızlığın Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlerle Belirlenmesi. *Sosyal Bilimler Dergisi* , 5/12, 13-25.

Bulutay, T. (1971). Türkiye İktisadi Büyümesi Üzerine Bazı Düşünceler. *Siyasal Bilgiler Fakültesi Dergisi* , 26/3, 27-35.

Barro, J. R., &Sala-i Martin, X . (2004). *Economıc Growth.*The UK.: MIT Press.

Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *The Review of Economic Studies*, 32/3, 233-240.

Cheung, Y. W., & S.Lai, K. (1995). Lag Order and Critical Values of the Augmented Dickey–Fuller Test. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13/3, 277-280.

Chiang, A., & Wainwright, K. Çev.: Aydoğuş, O., (2016). *Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri 4. Basımdan Çeviri.* İstanbul: Literatür Yayıncılık

Chiang, A. C. (1992). *Elemts of Dynamic Optimization.*The Usa: Waveland Press.

Clive, Z. D., W.J.Granger, & F.Engle, R. (1993). A Long Memory Property Of Stock Market Returns and a New Model. *Journal Of Empirical Finance* , 83/12, 83-106.

Çağlayan, E., & Saçaklı, İ. (2006). Satın Alma Gücü Paritesinin Geçerliliğinin Sıfır Frekansta Spektrum Tahmincisine Dayanan Birim Kök Testleri İle İncelenmesi. *Atatürk Üniversitesi İktisadi Ve İdari Bilimler Dergisi*, 20/1, 128-145.

Çolak, P. D., & Öztürkler, D. D. (2012). Tasarrufun Belirleyicileri: Küresel Tasarruf Eğiliminde Değişim Ve Türkiye'de Hanehalkı Tasarruf Eğiliminin Analizi. *Bankacılar Dergisi* , 82, Yayın Tarihi : 21.09.2012, 1-43.

Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of The Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal Article; Taylor & Francis, Ltd. On Behalf Of The American Statistical Association* , 74/366a, 427-431.

Dixit, A. K. (2002). *Optimization in Economic Theory*. Oxford: Oxford University Press.

DPT. (1990). *Altıncı 5 Yıllık Kalkınma Planı.* Ankara: Devlet Planlama Teşkilatı.

Fındıkçıoğlu, G. (2010). Stahanov Tipi Bir Fayda Fonksiyonunun Keynes Ve Ramsey Üzerindeki Gölgesi. İstanbul. Erişim Adresi: https://www.dunya.com/kose-yazisi/stahanov-tipi-bir-fayda-fonksiyonunun-keynes-ve-ramsey-uzerindeki-golges/6259, Yayın Tarihi: 09.02.2019 Erişim Tarihi: 29.12.2019

Granger, C. W. (1969). Investigating Causal Relations By Econometric Models And Cross-Spectral Methods. *Econometrica*, 37/3, 424-438.

Granger, C., & Newbold, P. (1974). Spurious Regressions in Econometrics. *Journal Of Econometrics* , 2/2, 111-120.

Groth,C. (2010). The Ramsey Model. Working Paper. İnternet Erişim Adresi: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:V3dRMvOMsMAJ:web.econ.ku dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%2520notes/Ch7-2010

Gujarati, D. N. (2003). *Basic Econometrics.*The USA: Mc Graw Hill.

Hall, R. E. (1987). Consumption. *National Bureau of Economıc Research* ,NBER WorkingPaper No. 2265, https://www.nber.org/papers/w2265, 1-39.

Intriligator, M. D. (1975). Applications of Optimal Control Theory in Economics. *Synthese*, 31/2, 271-288.

Kamien, M. I., & Schwartz, N. L. (2018). *Dynamic Optimization.*Mineola, New York: Dover Publications

Karabıyık, L., & Anbar, A. (2007). Volatilite Ve Varyans Swapları. *Muhasebe Ve Finansman Dergisi*, 22/2, 62-77.

Koopmans, T. (1965).On The Concept Of Optimal Economic Growth i*n Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 28/1, 224-287*

Lancaster, K. J. (1968). *Mathematical Economics*. New York: Macmillan Publications .

Leland, H. E. (1974). Optimal Growth in a Stochastic Environment. *The Review Of Economic Studies*, 41/1, 75-86.

Mills, T. C. (1991). *Time Series Techniques For Economists.*The UK.: University Of Hull.

Mirrlees, J. A. (1967). Optimum Growth When Technology İs Changing. *Review Of Economic Studies, Oxford University Press*,34/1, 95-124.

Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems.*Pocatello, Idaho: Crc Press.

Öner, O. (1971). Değişimler Hesabı Ve İktisadi Uygulaması. *Siyasal Bilgiler Fakültesi Dergisi*.

Pontryagin, L., Boltyanskii, V., Gamkrelidze, R., & Mishchenko. (1962). The Mathematical Theory of Optimal Processes. *International Journey of Science and Research*, 7/3, 500-860.

Ramsey, F. P. (1928). A Mathematical Theory Of Saving. *The Economic Journal*, 38/152, 543-559.

Said, S. E., & Dickey, D. A. (1984). Testing For Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models Of Unknown Order. *Biometrika*, 71/3, 599-607.

Samuelson, P. A., & Solow, R. M. (1956). A Complete Capital Model Involving Heterogeneous Capital Goods. *The Quarterly Journal of Economics* ,70/4, 537-562.

Saygılı, Ş., Cihan, C., & Yurtoğlu, H. (2005). Türkiye Ekonomisinde Sermaye Birikimi , Verimlilik Ve Büyüme: 1972-2003. Ankara:Ekonomik Modeller Ve Stratejik Araştırmalar Genel Müdürlüğü, Yayın No: 2686,Erişim Adresi:http://www.sbb.gov.tr/wp-content/uploads/2018/11/T%C3%BCrkiye_Ekonomisinde_SermayeBirikimi_Buyume_ve_Verimlilik_1972-2003.pdf

Tinbergen, J. (1956). The Optimum Rate of Saving. *The Economic Journal*, 66/264, 603-609.

Uğurlu, E. (2009). *Durağanlık Ve Birim Kök Sınamaları.* İstanbul: İstanbul Aydın Üniversitesi Ekonomi Ve Finans Bölümü.(Ders Notları)Erişim Adresi:https://www.academia.edu/2402640/Dura%C4%9Fanl%C4%B1k_Birim_K%C3%B6k_S%C4%B1namalar%C4%B1, Erişim Tarihi: 29.12.2019

West, K. (1988). The Insensitivity of Consumption to News About Income. *Journal of Monetary Economic*, 21/1, 17-33.