T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-PELL, k-PELL LUCAS ve MODİFİYE k-PELL MATRİS DİZİLERİ

Büşra KEFÇİ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2019**

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Büşra KEFÇİ tarafından hazırlanan bu çalışma 27/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ	İmza:
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU	İmza: Yesemin
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK	İmza: R. Öztürk

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 06 / 08 / 2019 tarih ve 36/...7..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell Matris Dizileri" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 27/06/2019

Büşra KEFÇİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

k-PELL, k-PELL LUCAS ve MODİFİYE k-PELL MATRİS DİZİLERİ

Büşra KEFÇİ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada, k-Pell, k-Pell-Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri kullanılarak k-Pell, k-Pell-Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizileri tanımlanmıştır ve özellikleri incelenmiştir. Bu dizilerin n-inci genel terimini veren matrisler, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları sunulmuştur. k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizilerinin terimlerini içeren bazı önemli eşitlikler elde edilmiştir. Ayrıca k-Pell, k-Pell-Lucas, Modifiye k-Pell sayı dizileri ile k-Pell, k-Pell-Lucas, Modifiye k-Pell matris dizileri arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir.

2019, 75 Sayfa

Anahtar Kelimeler: k-Pell dizileri, k-Pell-Lucas dizileri, Modifiye k-Pell dizileri

ABSTRACT

Master Thesis

k-PELL, k-PELL LUCAS AND MODIFIED k-PELL MATRIX SEQUENCES

Büşra KEFÇİ

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, k-Pell, k-Pell Lucas and Modified k-Pell matrix sequences are defined by using k-Pell, k-Pell Lucas and Modified k-Pell number sequences and their properties are examined. The matrices that give nth general term of these sequences, Binet formulas and generating functions are introduced. Some important identities involving terms of k-Pell, k-Pell Lucas and Modified k-Pell matrix sequences are obtained. Also some relationships between k-Pell, k-Pell Lucas, Modified k-Pell number sequences and k-Pell, k-Pell Lucas, Modified k-Pell matrix sequences are given.

2019, 75 Pages

Keywords: k-Pell sequences, k-Pell-Lucas sequences, Modifiye k-Pell sequences

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye, değerli öğretim üyesi Sayın Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK'e ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Büşra KEFÇİ
Haziran, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

F	Cisim
f_n	n-inci Fibonacci Sayısı
(f_n)	Fibonacci Sayı Dizisi
F_n	n-inci (s,t)-Fibonacci Sayısı
(F_n)	(s,t)-Fibonacci Sayı Dizisi
$\mathcal{F}_n$	n-inci (s,t)-Fibonacci Matrisi
$(\mathcal{F}_n)$	(s,t)-Fibonacci Matris Dizisi
G	Grup
j_n	n-inci (s,t)-Jacobsthal Sayısı
(j_n)	(s,t)-Jacobsthal Sayı Dizisi
J_n	n-inci (s,t)-Jacobsthal Matrisi
(J_n)	(s,t)-Jacobsthal Matris Dizisi
k	Pozitif Bir Reel Sayı
L_n	n-inci (s,t)-Lucas Sayısı
(L_n)	(s,t)-Lucas Sayı Dizisi
$\mathcal{L}_n$	n-inci (s,t)-Lucas Matrisi
$(\mathcal{L}_n)$	(s,t)-Lucas Matris Dizisi
$M_{m,n}(F)$	F Cismin Üzerinde Bütün mxn Boyutlu Matrislerin Kümesi
P_n	n-inci Pell Sayısı
(P_n)	Pell Sayı Dizisi
$P_{k,n}$	n-inci k-Pell Sayısı
$(P_{k,n})$	k-Pell Sayı Dizileri
$\tilde{P}_{k,n}$	n-inci k-Pell Matrisi
$(\tilde{P}_{k,n})$	k-Pell Matris Dizileri
p_n	n-inci (s,t)-Pell Sayısı
(p_n)	n-inci (s,t)-Pell Sayı Dizisi
$\mathcal{P}_n$	n-inci (s,t)-Pell Matrisi
$(\mathcal{P}_n)$	n-inci (s,t)-Pell Matris Dizisi
R	Halka
$R_{k,n}$	n-inci Fibonacci Benzeri Sayısı

$(R_{k,n})$	Fibonacci Benzeri Diziler
$\tilde{R}_{k,n}$	n-inci Fibonacci Benzeri Matrisi
$(\tilde{R}_{k,n})$	Fibonacci Benzeri Matris Dizileri
q_n	n-inci Modifiye Pell Sayısı
(q_n)	Modifiye Pell Dizisi
$q_{k,n}$	n-inci Modifiye k-Pell Sayısı
$(q_{k,n})$	Modifiye k-Pell Sayı Dizileri
$\tilde{q}_{k,n}$	n-inci Modifiye k-Pell Matrisi
$(\tilde{q}_{k,n})$	Modifiye k-Pell Matris Dizileri
$\mathscr{q}_n$	n-inci (s,t)-Pell Lucas Sayısı
$(\mathscr{q}_n)$	n-inci (s,t)-Pell Lucas Sayı Dizisi
$\mathcal{Q}_n$	n-inci (s,t)-Pell Lucas Matrisi
$(\mathcal{Q}_n)$	n-inci (s,t)-Pell Matris Dizisi
Q_n	n-inci Pell-Lucas Sayısı
(Q_n)	Pell-Lucas Sayı Dizisi
$Q_{k,n}$	n-inci k-Pell Lucas Sayısı
$(Q_{k,n})$	k-Pell Lucas Sayı Dizileri
$\tilde{Q}_{k,n}$	n-inci k-Pell Lucas Matrisi
$(\tilde{Q}_{k,n})$	k-Pell Lucas Matris Dizileri

1. GİRİŞ

Yıllardır yapılan araştırmalar, evrenin rastgele bir düzenle yaratılmadığını ortaya koymuştur. Bu sistemin, elde edilen bulgular sonucu sayılar üzerine oturtulduğu görülmüştür. Buna gösterilecek en önemli örnek ise Altın orandır. Altın oran bilim insanları, müzisyenler, mimarlar gibi birçok kişinin estetik algılarında en güzeli yakalamak adına kullandıkları yegane ölçü olmuştur. Buna, Mimar Sinan'ı ve onun Selimiye Camii'sini, Leanardo da Vinci'nin Mona Lisa tablosunu ve daha birçok örneği verebiliriz. Altın oranın tarihine bakacak olursak da karşımıza İtalyan matematikçi Leanardo çıkar. Kendisinin 1170 yılında İtalya'nın Pisa şehrinde doğduğu tahmin edilmektedir. İtalyan Filius Bonacci yani babasının adı ile anılan Leanardo Bonacci'nin oğlu olarak anılmaktadır. İnsanlar bu ismi kısaltarak ona Fibonacci demişlerdir. Leanardo ülkeler arası posta işleriyle uğraşan babasına yardım etmek amacıyla onunla birlikte sıkça Cezayir İtalya arası seyahat etmektedir. Bu seyahatleri sırasında Hint-Arap sayı sistemini öğrenir ve bunun Romen rakamlarıyla işlem yapmaktan daha kolay olduğunu gözlemlemektedir. Buradan yola çıkarak Liber Abaci adlı eseri yazar ve Hint-Arap sayı sistemini Avrupa'ya duyurur. Fibonacci bu kitabında bir tavşan ailesinin üremesinin sayılara dökülmüş halini göstererek Fibonacci sayılarına 1202 yılında ulaşmıştır. Bu örnek şöyledir:

Erkek ve dişi bir çift tavşanın kapalı bir ortamda üremesi izlenmiştir. Bir aylıkken çok genç olduklarından üreyememişlerdir ama ikinci ayda üreme başlamıştır. Bu şekilde her ay ergin bir çiftin biri erkek biri dişi bir çift ürettikleri varsayılmıştır. Tavşanlar bu şekilde ürerlerse bir yılın sonunda kaç çift tavşanımız olur problemi üzerinden Fibonacci sayılarına ulaşmıştır. Birinci ay bir çift, ikinci ay üreyemediklerinden yine bir çift, üçüncü ay iki çift şeklinde devam ederek hesaplama yapılarak aşağıdaki sayı dizisine ulaşılmıştır.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

Üçüncü terimden itibaren her sayı kendinden önceki iki terimin toplamı şeklinde bulunmuştur. Bu şekilde Fibonacci sayılarının genel denklemine ulaşılmıştır. Aynı zamanda bu sayı dizisinin ilerleyen terimleri arasında Altın oran görülmüştür.

$f_0 = 0, f_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye Fibonacci sayı dizisi, bu dizinin terimlerine de Fibonacci sayıları denir (Vajda, 1989; Vorobyov 1976).

Fibonacci dizilerinin cebir, fizik, biyoloji, bilgisayar bilimi gibi birçok farklı alanda uygulamaları vardır. Fibonacci sayıları modern bilimde teorik ve uygulamalı olarak çok geniş alana sahiptir (Wyler, 1965; Hoggatt, 1969; Horadam, 1965a, 1965b).

Bir dizi tanımlamak için en etkili yollardan biri, rekürans bağıntılar yardımıyla ile diziyi tanımlamaktır. Rekürans bağıntılar, dizinin her bir teriminin kendisinden önceki terimlere bağlı olarak olarak ifade edilmesiyle oluşan bağıntılardır. Bundan dolayı sayı dizilerinin en önemli özelliği dizinin herhangi bir teriminin kendinden önceki iki ardışık sayının toplamının eşit olmasıdır.

Bilim dünyasının ilgisini çeken, sanat ve mimari gibi birçok alanda karşımıza çıkan Fibonacci sayı dizilerinin rekürans bağıntısına benzer bağıntılarla tanımlanan Lucas, Pell, Jacobsthal gibi sayı dizileri ile ilgili de birçok çalışma vardır. Bu çalışmaların bir çoğu Pell sayı dizileri ile ilgilidir (Horadam 1967, 1994; Melham 1999; Bicknell, 1975; Taşyurdu vd., 2016). k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell dizileri çalışmıştır ve bu dizilerin üreteç fonksiyonları, Binet formülleri, üreteç matrisleri ve birçok özelliği elde edilmiştir (Catarino 2013; Catarino, ve Vasco 2013a, 2013b)

Son yıllarda bilinen sayı dizileri matrisler kullanılarak çalışılmaktadır. Bu çalışmalarda sayı dizilerin terimlerinin yardımıyla matris dizileri tanımlanmış, özellikleri incelenmiş ve bu sayı dizileri ile matris dizileri arsındaki ilişkiler elde edilmiştir (Ercolano, 1979; Silvester, 1979; Kalman 1982; Karaduman, 2004; Kılıç ve Taşçı, 2005; Yazlık vd., 2014).

Pell, Pell-Lucas ve Modifiye Pell sayıları matrisler ile incelenmiştir (Daşdemir, 2011). $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s, t reel sayılar olmak üzere (s,t)-Fibonacci, (s,t)-Lucas, (s,t)-Pell, (s,t)-Pell Lucas, (s,t)-Jacobsthal matris dizileri ve k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere k-Pell, k-Pell Lucas, Modifiye k-Pell sayı dizileri ile ilişkili Fibonacci benzeri matris dizileri tanımlanmıştır. Bu matris dizilerinin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve bazı özellikleri verilmiştir (Civciv ve Türkmen, 2008a, 2018b; Uslu ve Uygun, 2012).

Padovan ve Perrin matris dizilerinin tanımı, Binet formülleri ve üreteç matrisleri sunulmuştur (Yılmaz ve Taşkara, 2013). k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri ile ilşkili Fibonacci benzeri matris dizilerinin tanımı, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve bazı özellikleri verilmiştir (Taşyurdu, 2018).

Sunulan bu tezde k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere k-Pell, k-Pell Lucas, Modifiye k-Pell matris dizileri tanımlanmıştır ve birçok önemli özelliklerini içeren sonuçlar elde edilmiştir (Taşyurdu vd., 2017). Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verildi.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak k-Pell, k-Pell-Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizilerine ait bazı ön bilgiler verilmiştir. Bu dizilerin rekürans bağıntıları göz önüne alınarak Binet formülleri, üreteç fonksiyonları sunulmuştur. Daha sonra (s,t)-Fibonacci, (s,t)-Lucas, (s,t)-Pell, (s,t)-Pell Lucas, (s,t)-Jacobsthal matris dizileri ve k-Pell, k-Pell Lucas, Modifiye k-Pell sayı dizileri ile ilişkili Fibonacci benzeri matris dizileri detaylı bir şeklide verilmiştir. Bu dizilerin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve bazı önemli özellikleri sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak k-Pell, k-Pell-Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizileri tanımlanmıştır ve detaylı bir şekilde özellikleri incelenmiştir. Bu dizilerin n-inci genel terimini veren matrisler, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. . Daha sonra k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizilerini içeren bazı önemli eşitlikler, aralarındaki ilişkiler ve birçok sonuç elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1: A boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: AxA \rightarrow A$$

dönüşümüne A üzerinde bir ikili işlem denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.2: Boş kümeden farklı bir küme üzerinde bir veya daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir "$*$" işlemi tanımlanmışsa bu cebirsel yapı $(A,*)$ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.3: G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ olsun. Buna göre

- **i.** $\forall\ a, b, c\ \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise (Birleşme özelliği)
- **ii.** $\forall\ a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (Birim eleman varlığı)
- **iii.** e, G nin birim elemanı olmak üzere $\forall\ a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde $a' \in G$ sayısı varsa (Ters elemanın varlığı)

o zaman $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.4: $(G,*)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

oluyorsa $(G,*)$ grubuna değişmeli (komutatif ya da abelyan) grup denir (Taşçı 2010).

Tanım 2.5: $(G,*)$ bir grup olsun. Eğer G kümesi sonlu ise o zaman bu gruba sonlu grup denir. Eğer G kümesi sonlu değilse bu durumda $(G,*)$ grubuna sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanlarının sayısına grubun mertebesi ya da kardinalitesi denir. $o(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir (Taşçı 2010).

Tanım 2.6: Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer

- **i.** $(R, +)$ değişmeli bir grup,
- **ii.** R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall\ a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ ise
- **iii.** Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall\ a, b, c \in R$ için

$$a(b + c) = ab + ac$$

ve

$$(b + c)a = ba + ca$$

oluyorsa o zaman $(R, +,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir (Taşçı, 2010).

Eğer, $(R, +, .)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre değişmeli ise yani $\forall\ a, b \in R$ için $ab = ba$ ise o takdirde $(R, +,\cdot)$ halkasına değişmeli (komütatif) halka denir. Eğer $(R, +,\cdot)$ cebirsel yapısı çarpma işlemine göre birim elemana sahip ise yani $\forall\ a \in R$ için

$$a1_R = 1_R a = a$$

olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa o zaman $(R, +,\cdot)$ halkasına birimli halka denir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.7: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya cisim denir ve genel olarak F ile gösterilir (Taşçı, 2010).

Tanım 2.8: F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.8 de $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$$

ifadesine matrisin satırları ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{3j} \end{bmatrix}$$

ifadesine de matrisin sütunları denir. m satırlı ve n sütunlu bir matrise $m \times n$ boyutlu (mertebeli) matris denir. i-inci satır ve j-inci sütunun kesişiminde bulunan cismin elemanına matrisin (i, j)-inci elemanı denir. Bu matris kısaca $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ notasyonu ile gösterilir. Eğer bir matrisin satır ve sütun sayıları eşit ise bu matrise kare matris denir (Taşçı, 2011).

İki matrisin eşit olması için,

i. Verilen iki matrisin satır ve sütunlarının sayısının aynı olması

ii. Aynı pozisyondaki elemanlar eşit olması

şartlarının sağlanması gerekir. Daha açık bir ifade ile, eğer $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ ise o zaman $A = B$ olması için gerek ve yeter şart $\forall\ i = 1, 2, \dots, m$ ve $\forall\ j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ olmasıdır.

Reel ya da kompleks sayılar cebirinde olduğu gibi matris cebirinde de işlemler tanımlanmıştır. Bunlar genel olarak

i. Matrislerin toplamı

ii. Bir skalerle matrisin çarpımı

iii. Matris çarpımı

şeklindedir. Aşağıda sırasıyla bu işlemler sunulmuştur.

İki matrisin toplamı; iki matrisin toplanabilir olması için gerek ve yeter şart aynı sayıda satır ve sütuna sahip olmalarıdır. Bu durumda A ve B mxn tipinde iki matris olmak üzere bunların toplamı yine mxn tipinde C gibi bir matristir. Burada C nin herhangi bir elemanı A ve B deki karşılık gelen elemanların toplamıdır. Yani eğer A, B ve C matrislerinin genel elemanlarını sırasıyla a_{ij}, b_{ij} ve c_{ij} ile gösterirsek o zaman her $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

veya matris notasyonu ile

$$A + B = (a_{ij})_{mxn} + (b_{ij})_{mxn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn} = (c_{ij})_{mxn} = C$$

olur (Taşçı, 2011).

Not 2.9: İki matrisin toplamı karşılıklı elemanların toplanması ile teşkil edildiğinden matrislerin toplamı ile ilgili kurallar, reel (veya kompleks) sayıların toplama kuralları ile tam olarak aynıdır (Taşçı, 2011).

Not 2.10: $A = (a_{ij})$ olmak üzere (i, j) elemanı $-a_{ij}$ olan matris olarak $-A$ matrisini tanımlamak mümkündür. Gerçekten bu durumda

$$A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (0) = 0$$

dır. Burada 0 bütün elemanları sıfır olan ve sıfır matrisi olarak adlandırılan matristir. Bu ise matrisler için çıkarma işlemine imkan sağlar. Yani

$$B - A = (b_{ij}) + (-a_{ij}) = (b_{ij} - a_{ij})$$

şeklindeki matrislerin çıkarma işlemini tanımlamak mümkündür (Taşçı, 2011).

Teorem 2.11: F bir cisim olmak üzere, elemanları F cismine ait olan bütün mxn matrislerin kümesi $M_{m,n}(F)$, matrislerin toplama işlemine göre değişmeli bir grup teşkil eder. Yani

i. Her $A, B \in M_{m,n}(F)$ için $A + B \in M_{m,n}(F)$ olması (Kapalılık özelliği)

ii. Her $A, B, C \in M_{m,n}(F)$ için $A + (B + C) = (A + B) + C \in M_{m,n}(F)$ olması (Birleşme özelliği)

iii. Her $A \in M_{m,n}(F)$ için $A + 0 = 0 + A = A$ olacak şekilde bir mxn sıfır matrisinin var olması (Birim eleman özelliği)

iv. Her $A \in M_{m,n}(F)$ için $A + (-A) = (-A) + A = 0$ olacak şekilde A nın toplamsal tersi denilen bir tek $-A$ matrisi var olması (Ters eleman özelliği)

v. Her $A, B \in M_{m,n}(F)$ için $A + B = B + A$ olması (Değişme özelliği)

özellikleri geçerlidir (Taşçı, 2011).

Teorem 2.11 den bütün nxn tipindeki kare matrislerin kümesi $M_n(F)$ nin matrislerin toplama işlemine göre değişmeli bir grup teşkil ettiği elde edilebilir.

Bir skalerle matrisin çarpımı; matris toplamı tanımından eğer $A = (a_{ij})$ ise

$$2A = A + A = (2a_{ij})$$

ve genel olarak eğer k bir tamsayı ise

$$kA = (ka_{ij})$$

yazmak mümkündür. Yani kA, elemanları A matrisinin karşılık gelen elemanlarının k katı olan bir matristir. Daha açık bir ifade ile bir matrisin bir skalerle çarpımı demek matrisin her elemanının bu skalerle çarpılması demektir (Taşçı, 2011).

Bir skalerle bir matrisin çarpımının temel özelliklerini ve matris toplamı ile onların ilişkisi aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.12: A ve B elemanları reel (veya kompleks) sayılar olan $m \times n$ matrisler ve s, t skaler olmak üzere

i. $s(A + B) = sA + sB$

ii. $(s + t)A = sA + tA$

iii. $(st)A = s(tA)$

iv. $1. A = A$

ifadeleri doğrudur (Taşçı, 2011).

Matris çarpımı; ilk olarak matrisin iki özel tipinin çarpımını yani bir $1 \times m$ satır matrisi ile bir $m \times 1$ sütun matrisinin çarpımını göz önüne alalım. Bu daha sonra tanımlanacak dikdörtgen matrislerin çarpımı için temel bir işlem teşkil eder. Bir satır matrisi ile bir sütun matrisinin çarpılabilmesi için onların her birinin aynı sayıda elemana sahip olması gerekir. Eğer

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_m \ ]$$

ve

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

ise o zaman uv aşağıdaki gibi tanımlanan 1×1 bir matristir. Yani

$$uv = [u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_m v_m] = \left[\sum_{j=1}^{m} u_j v_j \right]$$

olarak bulunur.

Matris çarpımı tanımından $1xm$ tipinde bir satır matrisi ile $mx1$ tipinde bir sütun matrisinin çarpımı sonucunda $1x1$ tipinde bir matris elde edilmesine rağmen eğer $m \times 1$ tipinde bir sütun matrisi ile $1 \times m$ tipinde bir satır matrisinin çarpımını göz önüne alınırsa o zaman $m \times m$ tipinde bir matris elde edilir. Bu çarpıma dyad çarpımı denir.

Bu çarpımı yine

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_m\ ]$$

ve

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

şeklinde satır ve sütun matrisleri alınırsa vu matrisi

$$vu = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} [u_1, u_2, \dots, u_m\ ] = \begin{bmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & \cdots & v_1u_m \\ v_2u_1 & v_2u_2 & \cdots & v_2u_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_mu_1 & v_mu_2 & \cdots & v_mu_m \end{bmatrix}.$$

şeklinde ifade edilir.

A ve B gibi verilen iki matrisin çarpılabilir olması için A matrisinin sütunlarının sayısı ile B matrisinin satırlarının sayısı aynı olmalıdır. Eğer A ve B çarpılabilir matrisler ise bu durumda AB çarpımının (i, j)-inci elemanı, A'nın i-yinci satırının B'nin j-yinci sütunu ile çarpılarak elde edilen $1x1$ matristeki elemanıdır. Cebirsel olarak eğer $A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{nxp}$ tipinde iki matris ise o zaman bu iki matris çarpılabilirdir. Eğer $AB = C$ ve C'nin genel elemanını c_{ij} ile gösterirsek o zaman $C = (c_{ij}\ )_{mxp}$ tipinde bir matris olur ve c_{ij} elemanı,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad\qquad (1 \le i \le m, 1 \le j \le p)$$

şeklindedir (Taşçı, 2011).

Teorem 2.13: Eğer $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{nxp}$ ve $C = (c_{ij}\ )_{pxm}$ ise o zaman matrislerin çarpma işlemine göre birleşme kuralı denilen aşağıdaki

$$A(BC) = (AB)C$$

kuralı geçerlidir (Taşçı, 2011).

Teorem 2.14:

i. $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{nxp}$ ve $C = (c_{ij})_{nxp}$ olmak üzere, sol dağılma kuralı denilen

$$A(B + C) = AB + AC$$

kuralı geçerlidir.

ii. $A = (a_{ij})_{pxn}$, $B = (b_{ij})_{mxp}$ ve $C = (c_{ij})_{mxp}$ olmak üzere, sağ dağılma kuralı denilen

$$(B + C)A = BA + CA$$

kuralı geçerlidir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.15: Tanım kümesi pozitif tamsayılar olan fonksiyonlara dizi denir (Kadıoğlu ve Kamali, 2003)

Matematikte çok farklı biçimlerde tanımlanan diziler bulunmaktadır. Burada, dizinin başlangıcındaki birkaç terim hariç olmak üzere, her bir teriminin kendisinden önceki terimler yardımıyla elde edildiği diziler hakkında genel bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.16: Bir dizide bir terim kendinden önceki terimler aracılığı ile hesaplanıyorsa, bu diziye rekürans (tekrarlama, indirgeme) dizisi denir. Bu terimi hesaplarken kullanılan bağıntıya ise rekürans bağıntısı denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.17: $\forall\ n \geq k$, sabit a_j $(0 \leq j \leq k - 1)$ ve $a_0 \neq 0$ katsayıları için

$$u_n = a_{k-1}u_{n-1} + a_{k-2}u_{n-2} + \cdots + a_1u_{n-k+1} + a_0u_{n-k} \qquad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine k. dereceden homojen lineer rekürans dizi denir. Buradaki eşitliğe ise k. dereceden homojen lineer rekürans bağıntı denir. Bu dizinin $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ biçiminde olan ilk k terimine (u_n) dizisinin başlangıç koşulları denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.18: (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlı olan (u_n) dizisi için

$$p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_1 x - a_0$$

polinomuna (u_n) dizisinin karakteristik polinomu denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.19: $p(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \cdots - a_1 x - a_0 = 0$

denklemine (u_n) dizisinin karakteristik denklemi denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.20: $p(x)$ polinomunun kökleri $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall\ i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için, $b_i \neq b_j$ ise, $u_n = c_1 b_1^n + c_2 b_2^n + \cdots + c_k b_k^n$ olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç koşulları için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $c_1, c_2, \dots, c_k$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve u_n arasındaki eşitliğe rekürans bağıntının çözümü denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.21: (u_n) dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan

$$G(x) = u_0 x^0 + u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i$$

serisine (u_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Everest vd., 2003).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, birçok matematikçinin çalışma konusu olmuş ve uygulama alanları geniş olan rekürans ilişkili sayı ve matris dizilerinden bahsedilecektir. Bu dizileri tanımlamanın yöntemlerinden biri rekürans bağıntıları kullanmaktır. Rekürans bağıntılar dizinin terimlerinin kendinden önceki terimler yardımıyla ifade edilmesini sağlayan bağıntılardır.

3.1. Bazı Sayı Dizileri ve Özellikleri

Bu bölümde k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere k-Pell, k-Pell Lucas, Modifiye k-Pell sayı dizileri detaylı bir şeklide sunulmuştur ve indirgeme bağıntıları göz önüne alınarak bu dizilerin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir.

3.1.1. k-Pell sayıları ve dizileri

Tanım 3.1: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $P_{k,0} = 0$, $P_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere k-Pell sayı dizileri $\left(P_{k,n}\right)$

$$P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2},\ n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Catarino, 2013).

Tanım 3.1 den k-Pell sayı dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$P_{k,0} = 0,$

$P_{k,1} = 1,$

$P_{k,2} = 2,$

$P_{k,3} = 4 + k,$

$P_{k,4} = 8 + 4k,$

$P_{k,5} = 16 + 12k + k^2,$

$\vdots$

Özel olarak Tanım 3.1 de $k = 1$ alınırsa $P_{1,0} = 0$, $P_{1,1} = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere bilinen Pell sayı dizisinin rekürans bağıntısı

$$P_{1,n} = 2P_{1,n-1} + P_{1,n-2}, \;\; n \geq 2$$

şeklinde elde edilir.

Bir dizisinin terimleri, rekürans bağıntısını kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Rekürans bağıntılar dizinin her bir teriminin kendisinden önceki terimlere bağlı olarak ifade edilmesiyle oluşan bağıntılardır. Binet formülü ise bir dizinin herhangi bir terimini, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunmasına olanak sağlar. Örneğin, bilinen Pell sayı dizisinin 100. terimini hesaplamak için dizinin rekürans bağıntı kullanılırsa, kendisinden önce ilk 99 terimini hesaplamak gerekmektedir. Ancak dizinin rekürans bağıntısı yerine Binet formülü kullanılırsa bu dizinin 100. terimi için ilk 99 terimi hesaplamaya ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu formülü elde etmek, dizinin rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır.

k-Pell sayı dizilerinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.2: k herhangi bir pozitif reel sayı, $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere k-Pell sayı dizilerinin Binet formülü

$$P_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Catarino, 2013).

İspat: Tanım 3.1 deki k-Pell sayı dizilerinin

$$P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + P_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $P_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

k-Pell sayı dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir.

Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri ise

$$r_1 = 1 + \sqrt{1+k} \text{ ve } r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için k-Pell sayı dizilerinin n-inci teriminin genel formu

$$P_{k,n} = Ar_1{}^n + Br_2{}^n$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$P_{k,0} = 0 = A + B$$

$$P_{k,1} = 1 = Ar_1 + Br_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{1}{r_1 - r_2} \text{ ve } B = -\frac{1}{r_1 - r_2}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$P_{k,n} = Ar_1{}^n + Br_2{}^n$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$P_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

olup k-Pell sayı dizilerinin Binet formülü elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Özel olarak Teorem 3.2 de $k=1$ alınırsa $r_1=1+\sqrt{2}$ ve $r_2=1-\sqrt{2}$ olmak üzere bilinen Pell sayı dizisinin Binet formülü

$$P_{1,n}=\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2},\ \ n\geq 0$$

şeklinde elde edilir.

k-Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.3: k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere k-Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{k,n}\,x^n=\frac{x}{1-2x-kx^2}$$

şeklindedir (Catarino, 2013).

İspat: Tanım 2.21 den k-Pell sayı dizileri için

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{k,n}x^n$$

yazılabilir. Buradan

$$g(x)=P_{k,0}+P_{k,1}x+P_{k,2}x^2+\cdots+P_{k,n}x^n+\cdots \tag{3.1}$$

$$-2g(x)x=-2P_{k,0}x-2P_{k,1}x^2-2P_{k,2}x^3-\cdots-2P_{k,n}x^{n+1}-\cdots \tag{3.2}$$

$$-kg(x)x^2=-kP_{k,0}x^2-kP_{k,1}x^3-kP_{k,2}x^4-\cdots-kP_{k,n}x^{n+2}-\cdots-\cdots \tag{3.3}$$

olup (3.1), (3.2) ve (3.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.1 deki $P_{k,0}=0$, $P_{k,1}=1$ başlangıç şartları için $P_{k,n}=2P_{k,n-1}+kP_{k,n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$g(x)(1-2x-kx^2)=P_{k,0}+P_{k,1}x-2P_{k,0}x$$

eşitliği elde edilir.

Buradan k-Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - 2x - kx^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3 de özel olarak $k = 1$ alınırsa bilinen Pell sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n}\, x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

olarak bulunur.

3.1.2. *k*-Pell Lucas sayıları ve dizileri

Tanım 3.4: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $Q_{k,0} = 2$, $Q_{k,1} = 2$ başlangıç değerleri olmak üzere k-Pell Lucas sayı dizileri $\left(Q_{k,n}\right)$

$$Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2},\ n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Catarino ve Vasco, 2013a).

Tanım 3.4 den k-Pell Lucas sayı dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$Q_{k,0} = 2,$

$Q_{k,1} = 2,$

$Q_{k,2} = 4 + 2k,$

$Q_{k,3} = 8 + 6k,$

$Q_{k,4} = 16 + 16k + 2k^2,$

$Q_{k,5} = 32 + 40k + 10k^2,$

$\vdots$

Özel olarak Tanım 3.4 te $k = 1$ alınırsa $Q_{1,0} = 2$, $Q_{1,1} = 2$ başlangıç değerleri olmak üzere bilinen Pell Lucas sayı dizisinin rekürans bağıntısı

$$Q_{1,n} = 2Q_{1,n-1} + Q_{1,n-2}, , \ n \geq 2$$

şeklinde elde edilir.

k-Pell Lucas sayı dizilerinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.5: k herhangi bir pozitif reel sayı, $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere k-Pell Lucas sayı dizilerinin Binet formülü

$$Q_{k,n} = r_1^n + r_2^n, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Catarino ve Vasco, 2013a).

İspat: Tanım 3.4 teki k-Pell Lucas sayı dizilerinin

$$Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $Q_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

k-Pell Lucas sayı dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri ise

$$r_1 = 1 + \sqrt{1+k} \ \text{ ve } \ r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için k-Pell Lucas sayı dizilerinin n-inci teriminin genel formu

$$Q_{k,n} = Ar_1{}^n + Br_2{}^n$$

şeklindedir.

Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$Q_0 = 2 = A + B$$

$$Q_1 = 2 = Ar_1 + Br_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{2-2r_2}{r_1-r_2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{2r_1-2}{r_1-r_2}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$Q_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$Q_{k,n} = r_1^n + r_2^n$$

olup k-Pell Lucas sayı dizilerinin Binet formülü elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Özel olarak Teorem 3.5 te $k = 1$ alınırsa $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere bilinen Pell Lucas sayı dizisinin Binet formülü

$$Q_{1,n} = r_1^n + r_2^n, \quad n \geq 0$$

şeklinde elde edilir.

k-Pell Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.6: k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere k-Pell Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,n}\, x^n = \frac{2-2x}{1-2x-kx^2}$$

dir (Catarino ve Vasco, 2013a).

İspat: Tanım 2.21 den k-Pell Lucas sayı dizileri için

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{k,n} x^n$$

yazılabilir. Buradan

$$t(x) = Q_{k,0} + Q_{k,1}x + Q_{k,2}x^2 + \cdots + Q_{k,n}x^n + \cdots \tag{3.4}$$

$$-2t(x)x = -2Q_{k,0}x - 2Q_{k,1}x^2 - 2Q_{k,2}x^3 - \cdots - 2Q_{k,n}x^{n+1} - \cdots \tag{3.5}$$

$$-kt(x)x^2 = -kQ_{k,0}x^2 - kQ_{k,1}x^3 - kQ_{k,2}x^4 - \cdots - kQ_{k,n}x^{n+2} - \cdots - \cdots \tag{3.6}$$

olup (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.4 deki $Q_{k,0} = 2$, $Q_{k,1} = 2$ başlangıç şartları için $Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$t(x)(1 - 2x - kx^2) = Q_{k,0} + Q_{k,1}x - 2Q_{k,0}x$$

eşitliği elde edilir. Buradan k-Pell Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$t(x) = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - kx^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.6 da özel olarak $k = 1$ alınırsa bilinen Pell Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{1,n}\, x^n = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

olarak bulunur.

3.1.3. Modifiye k-Pell sayıları ve dizileri

Tanım 3.7: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $q_{k,0} = 1\,, q_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere Modifiye k-Pell sayı dizileri $\left(q_{k,n}\right)$

$$q_{k,n} = 2q_{k,n-1} + kq_{k,n-2},\ \ n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Catarino ve Vasco, 2013b).

Tanım 3.7 den Modifiye k-Pell sayı dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$q_{k,0} = 1,$

$q_{k,1} = 1,$

$q_{k,2} = 2 + k,$

$q_{k,3} = 4 + 3k,$

$q_{k,4} = 8 + 8k + k^2,$

$q_{k,5} = 16 + 20k + 5k^2,$

$\vdots$

Özel olarak Tanım 3.7 de $k = 1$ alınırsa $q_{k,0} = 1\,, q_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere bilinen Modifiye Pell sayı dizisinin rekürans bağıntısı

$$q_{1,n} = 2q_{1,n-1} + q_{1,n-2},\,,\ \ n \geq 2$$

şeklinde elde edilir.

Modifiye k-Pell sayı dizilerinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.8: k herhangi bir pozitif reel sayı, $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere Modifiye k-Pell sayı dizilerinin Binet formülü

$$q_{k,n} = \frac{r_1^n + r_2^n}{2},\ \ n \geq 0$$

şeklindedir (Catarino ve Vasco, 2013b).

İspat: Tanım 3.7 deki Modifiye k-Pell sayı dizilerinin

$$q_{k,n} = 2q_{k,n-1} + kq_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $q_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

Modifiye k-Pell sayı dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleminin kökleri ise

$$r_1 = 1 + \sqrt{1+k} \text{ ve } r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için Modifiye k-Pell sayı dizilerinin n-inci teriminin genel formu

$$q_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$q_0 = 1 = A + B$$

$$q_1 = 1 = Ar_1 + Br_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \frac{1-r_2}{r_1-r_2} \text{ ve } B = \frac{r_1-1}{r_1-r_2}$$

olarak bulunur. Bulunan A ve B değerleri

$$q_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$q_{k,n} = \frac{r_1^n + r_2^n}{2}$$

olup Modifiye k-Pell sayı dizisinin Binet formülü elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Özel olarak Teorem 3.8 de $k = 1$ alınırsa $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere bilinen Modifiye Pell sayı dizisinin Binet formülü

$$q_{1,n} = \frac{r_1^n + r_2^n}{2}, \quad n \geq 0$$

şeklinde elde edilir.

Modifiye k-Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Tanım 3.9: k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere Modifiye k-Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{k,n}(x)\, x^n = \frac{1 - x}{1 - 2x - kx^2}$$

şeklindedir (Catarino ve Vasco, 2013b).

İspat: Tanım 2.21 den Modifiye k-Pell Lucas sayı dizileri için

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{k,n} x^n$$

yazılabilir. Buradan

$$s(x) = q_{k,0} + q_{k,1}x + q_{k,2}x^2 + \cdots + q_{k,n}x^n + \cdots \tag{3.7}$$

$$-2s(x)x = -2q_{k,0}x - 2q_{k,1}x^2 - 2q_{k,2}x^3 - \cdots - 2q_{k,n}x^{n+1} - \cdots \tag{3.8}$$

$$-ks(x)x^2 = -kq_{k,0}x^2 - kq_{k,1}x^3 - kq_{k,2}x^4 - \cdots - kq_{k,n}x^{n+2} - \cdots - \cdots \tag{3.9}$$

olup (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Tanım 3.7 deki $q_{k,0} = 1$, $q_{k,1} = 1$ başlangıç şartları için $q_{k,n} = 2q_{k,n-1} + kq_{k,n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$s(x)(1 - 2x - kx^2) = q_{k,0} + q_{k,1}x - 2q_{k,0}x$$

eşitliği elde edilir.

Buradan Modifiye k-Pell sayı dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$s(x) = \frac{1-x}{1-2x-kx^2}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.9 da özel olarak $k = 1$ alınırsa bilinen Modifiye Pell sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{1,n}(x)\, x^n = \frac{1-x}{1-2x-x^2}$$

olarak bulunur.

3.2. Bazı Sayı Dizilerinin Matris Temsilleri

Bu bölümde $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s, t reel sayılar olmak üzere (s,t)-Fibonacci, (s,t)-Lucas, (s,t)-Pell, (s,t)-Pell Lucas, (s,t)-Jacobsthal sayı dizileri ve k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere k-Pell, k-Pell Lucas, Modifiye k-Pell sayı dizileri ile ilişkili Fibonacci benzeri sayı dizilerinin tanımları sunulmuştur. Buradan bu sayı dizilerinin yardımıyla elde edilmiş (s,t)-Fibonacci, (s,t)-Lucas, (s,t)-Pell, (s,t)-Pell Lucas, (s,t)-Jacobsthal, ve Fibonacci benzeri matris dizilerinin tanımı, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve bazı özellikleri verilmiştir.

3.2.1. $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$-Fibonacci matris dizisi

Tanım 3.10: $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s, t reel sayıları için $F_0(s,t) = 0,\ F_1(s,t) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere (s,t)-Fibonacci sayı dizisi $\left(F_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$F_n(s,t) = sF_{n-1}(s,t) + tF_{n-2}(s,t), \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci (s,t)-Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir (Koshy, 2001).

(s,t)-Fibonacci sayı dizisinin terimleri kullanılarak aşağıdaki (s,t)-Fibonacci matris dizisinin tanımı elde edilir.

Tanım 3.11: $s>0,\ t\neq 0,\ s^2+4t>0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $\mathcal{F}_0(s,t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ve $\mathcal{F}_1(s,t)=\begin{pmatrix}s & 1\\ t & 0\end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere (s,t)-Fibonacci matris dizisi $\big(\mathcal{F}_n(s,t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathcal{F}_n(s,t)=s\mathcal{F}_{n-1}(s,t)+t\mathcal{F}_{n-2}(s,t),\qquad n\geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve *n*-inci (s,t)-Fibonacci matrisi $\mathcal{F}_n$ ile gösterilir (Civciv ve Türkmen, 2008a).

Tanım 3.11 den (s,t)-Fibonacci matris dizisinin ilk terimleri şöyledir:

$$\mathcal{F}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_1=\begin{pmatrix}s & 1\\ t & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_2=\begin{pmatrix}s^2+t & s\\ st & t\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_3=\begin{pmatrix}s^3+2st & s^2+t\\ s^2t+t^2 & st\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_4=\begin{pmatrix}s^4+3s^2t+t^2 & s^3+2st\\ s^3t+2st^2 & s^2t+t^2\end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

Aşağıdaki teorem (s,t)-Fibonacci sayı dizisi ile (s,t)-Fibonacci matris dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 3.12: $n\geq 0$ tamsayısı için

$$\mathcal{F}_n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ tF_n & tF_{n-1}\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

dir (Civciv ve Türkmen, 2008a).

İspat: İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.10 dan $F_{-1} = 1$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olduğundan

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ tF_0 & tF_{-1} \end{pmatrix}$$

olup $n = 0$ için eşitlik (3.10) doğrudur. Tanım 3.10 dan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = s$ olduğundan

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ tF_1 & tF_0 \end{pmatrix}$$

olup $n = 1$ için de eşitlik (3.10) doğrudur. Şimdi $1 \leq n \leq N$ olacak şekildeki N tamsayısı için eşitlik (3.10) doğru olsun. Tanım 3.11 de Tanım 3.10 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\mathcal{F}_{N+1} = s\mathcal{F}_N + t\mathcal{F}_{N-1}$$

$$= s\begin{pmatrix} F_{N+1} & F_N \\ tF_N & tF_{N-1} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} F_N & F_{N-1} \\ tF_{N-1} & tF_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sF_{N+1} + tF_N & sF_N + tF_{N-1} \\ t(sF_N + tF_{N-1}) & t(sF_{N-1} + tF_{N-2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{N+2} & F_{N+1} \\ tF_{N+1} & tF_N \end{pmatrix}$$

olup eşitlik (3.10) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem (s, t)-Fibonacci matris dizisinin $(m + n)$-inci teriminin, m-inci terimi ile n-inci teriminin çarpımına eşit olduğunu söylemektedir.

Teorem 3.13: $m, n \geq 0$ tamsayıları için

$$\mathcal{F}_{m+n} = \mathcal{F}_m \mathcal{F}_n \qquad (3.11)$$

dir (Civciv ve Türkmen, 2008a).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.11 den $\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m &= \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ tF_m & tF_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}_m\mathcal{F}_0\end{aligned}$$

olup $n = 0$ için eşitlik (3.11) doğrudur. Tanım 3.11 den $\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{m+1} &= \begin{pmatrix} F_{m+2} & F_{m+1} \\ tF_{m+1} & tF_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} sF_{m+1} + tF_m & F_{m+1} \\ tsF_m + t^2F_{m-1} & tF_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ tF_m & tF_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}_m\mathcal{F}_1\end{aligned}$$

olup $n = 1$ için de eşitlik (3.11) doğrudur. Şimdi $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki N tamsayısı için eşitlik (3.11) doğru olsun. Tanım 3.11 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{m+N+1} &= s\mathcal{F}_{m+N} + t\mathcal{F}_{m+N-1} \\ &= s\mathcal{F}_m\mathcal{F}_N + t\mathcal{F}_m\mathcal{F}_{N-1} \\ &= \mathcal{F}_m(s\mathcal{F}_N + t\mathcal{F}_{N-1}) \\ &= \mathcal{F}_m\mathcal{F}_{N+1}\end{aligned}$$

olup eşitlik (3.11) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla $m, n \geq 0$ tamsayıları için eşitlik (3.11) doğru olup teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.11 de $s^2 + 4t > 0$ olacak şekilde $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için (s, t)-Fibonacci matris dizisinin

$$\mathcal{F}_n(s,t) = s\mathcal{F}_{n-1}(s,t) + t\mathcal{F}_{n-2}(s,t)$$

rekürans bağıntısında $\mathcal{F}_n(s,t) = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa (s, t)-Fibonacci matris dizisinin karakteristik denklemi

$$x^n - sx^{n-1} - tx^{n-2} = 0$$

şeklinde elde edilir. Özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - sx - t = 0$$

olup bu denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$$

olarak bulunur.

(s, t)-Fibonacci matris dizisinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.14: $\alpha = \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ ve $\beta = \frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}_n = \left(\frac{\mathcal{F}_1 - \beta\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{\mathcal{F}_1 - \alpha\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^n, \quad n \geq 0$$

dir (Civciv ve Türkmen, 2008a).

Aşağıdaki teorem ile (s, t)-Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Teorem 3.15: $x > \frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olacak şekilde x reel sayısı için (s, t)-Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \mathcal{F}_k x^{-k} = \frac{1}{x^2 - sx - t}(x\mathcal{F}_1 + (x^2 - sx)\mathcal{F}_0)$$

şeklindedir (Civciv ve Türkmen, 2008a).

3.2.2. (s,t)-Lucas matris dizisi

Tanım 3.16: $s>0,\ t\neq 0,\ s^2+4t>0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $L_0(s,t)=2,\ L_1(s,t)=s$ başlangıç değerleri olmak üzere (s,t)-Lucas sayı dizisi $\left(L_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$L_n(s,t)=sL_{n-1}(s,t)+tL_{n-2}(s,t),\ n\geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve *n*-inci (s,t)-Lucas sayısı L_n ile gösterilir (Koshy, 2001).

(s,t)-Lucas sayı dizisinin terimleri kullanılarak aşağıdaki (s,t)-Lucas matris dizisinin tanımı elde edilir.

Tanım 3.17: $s>0,\ t\neq 0,\ s^2+4t>0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $\mathcal{L}_0(s,t)=\begin{pmatrix} s & 2 \\ 2t & -s\end{pmatrix}$ ve $\mathcal{L}_1(s,t)=\begin{pmatrix} s^2+2t & s \\ st & 2t\end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere (s,t)-Lucas matris dizisi $\left(\mathcal{L}_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\mathcal{L}_n(s,t)=s\mathcal{L}_{n-1}(s,t)+t\mathcal{L}_{n-2}(s,t),\qquad n\geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve *n*-inci (s,t)-Lucas matrisi $\mathcal{L}_n$ ile gösterilir (Civciv ve Türkmen, 2008b).

Tanım 3.17 den (s,t)-Lucas matris dizisinin ilk terimleri şöyledir:

$$\mathcal{L}_0=\begin{pmatrix} s & 2 \\ 2t & -s\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_1=\begin{pmatrix} s^2+2t & s \\ st & 2t\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2=\begin{pmatrix} s^3+3st & s^2+2t \\ s^2t+2t^2 & st\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_3=\begin{pmatrix} s^4+4s^2t+2t^2 & s^3+3st \\ s^3t+3st^2 & s^2t+2t^2\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_4=\begin{pmatrix} s^5+5s^3t+5st^2 & s^4+4s^2t+2t^2 \\ s^4t+4s^2t^2+2t^3 & s^3t+3st^2\end{pmatrix},$$

$\vdots$

Aşağıdaki teorem (s,t)-Lucas sayı dizisi ile (s,t)-Lucas matris dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 3.18: $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ tL_n & tL_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

dir (Civciv ve Türkmen, 2008b).

İspat: İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.16 dan $L_{-1} = -\frac{s}{t}$, $L_0 = 2$, $L_1 = s$ olduğundan

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} s & 2 \\ 2t & -s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ tL_0 & tL_{-1} \end{pmatrix}$$

olup $n = 0$ için eşitlik (3.12) doğrudur. Tanım 3.10 dan $L_0 = 2$, $L_1 = s$, $L_2 = s^2 + 2t$ olduğundan

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & s \\ st & 2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_2 & L_1 \\ tL_1 & tL_0 \end{pmatrix}$$

olup $n = 1$ için de eşitlik (3.12) doğrudur. Şimdi $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki N tamsayısı için eşitlik (3.12) doğru olsun. Tanım 3.17 de Tanım 3.16 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\mathcal{L}_{N+1} = s\mathcal{L}_N + t\mathcal{L}_{N-1}$$

$$= s\begin{pmatrix} L_{N+1} & L_N \\ tL_N & tL_{N-1} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} L_N & L_{N-1} \\ tL_{N-1} & tL_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sL_{N+1} + tL_N & sL_N + tL_{N-1} \\ t(sL_N + tL_{N-1}) & t(sL_{N-1} + tL_{N-2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{N+2} & L_{N+1} \\ tL_{N+1} & tL_N \end{pmatrix}$$

olup eşitlik (3.12) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.17 de $s^2+4t>0$ olacak şekilde $s>0$ ve $t\neq 0$ tamsayıları için (s,t)-Lucas matris dizisinin

$$\mathcal{L}_n(s,t)=s\mathcal{L}_{n-1}(s,t)+t\mathcal{L}_{n-2}(s,t)$$

rekürans bağıntısında $\mathcal{L}_n(s,t)=x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa (s,t)-Lucas matris dizisinin karakteristik denklemi

$$x^n-sx^{n-1}-tx^{n-2}=0$$

şeklinde elde edilir. Özel olarak $n=2$ alınırsa

$$x^2-sx-t=0$$

olup bu denkleminin kökleri

$$\alpha=\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2} \quad ve \quad \beta=\frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$$

olarak bulunur (Civciv ve Türkmen, 2008b).

(s,t)-Lucas matris dizisinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.19: $\alpha=\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ ve $\beta=\frac{s-\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{n+1}=\left(\frac{\mathcal{L}_2-\beta\mathcal{L}_1}{\alpha-\beta}\right)\alpha^n-\left(\frac{\mathcal{L}_2-\alpha\mathcal{L}_1}{\alpha-\beta}\right)\beta^n, \quad n\geq 0$$

dir (Civciv ve Türkmen, 2008b).

Aşağıdaki teorem ile (s,t)-Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Teorem 3.20: $x>\frac{s+\sqrt{s^2+4t}}{2}$ olacak şekilde x reel sayısı için (s,t)-Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+1}x^{-k}=\frac{1}{x^2-sx-t}\left(x\mathcal{L}_2+(x^2-sx)\mathcal{L}_1\right)$$

şeklindedir (Civciv ve Türkmen, 2008b).

(s,t)-Fibonacci matris dizisi ile (s,t)-Lucas matris dizisi arasındaki bazı ilişkiler

- $n \geq 0$ tamsayısı için, $\mathcal{L}_{n+1}{}^2 = \mathcal{L}_1^2 \mathcal{F}_n$
- $m, n \geq 0$ tamsayıları için, $\mathcal{F}_m \mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1} \mathcal{F}_m$
- $n \geq 0$ tamsayısı için, $\mathcal{L}_{n+1}{}^2 = \mathcal{L}_1^2 \mathcal{F}_{2n}$
- $n \geq 0$ tamsayısı için, $\mathcal{L}_{n+1}{}^2 = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_{2n+1}$
- $n \geq 0$ tamsayısı için, $\mathcal{L}_{2n+1} = \mathcal{F}_n \mathcal{L}_{n+1}$
- $\sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k x^{-k} = -\frac{1}{x^n(x^2-sx-t)}(x\mathcal{F}_{n+1} + t\mathcal{F}_n) + \frac{1}{x^2-sx-t}(x\mathcal{F}_1 + (x^2-sx)\mathcal{F}_0)$
- $\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_{k+1} x^{-k} = -\frac{1}{x^n(x^2-sx-t)}(x\mathcal{L}_{n+2} + t\mathcal{L}_{n+1}) + \frac{1}{x^2-sx-t}(x\mathcal{L}_2 + (x^2-sx)\mathcal{L}_1)$
- $s, t \neq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k = \frac{1}{s+t-1}\begin{pmatrix} F_{n+2} + tF_{n+1} - s - t & F_{n+1} + tF_n - 1 \\ tF_{n+1} + t^2F_n - t & tF_n + t^2F_{n-1} - t \end{pmatrix}$

şeklindedir (Civciv, 2008a, 2008b).

3.2.3. (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas matris dizileri

Tanım 3.21: $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s, t reel sayıları için $p_0(s,t) = 0,\ p_1(s,t) = 1$ başlangıç şartlarına sahip (s,t)-Pell sayı dizisi $\left(p_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\mathscr{p}_0(s,t) = 2,\ \mathscr{p}_1(s,t) = 2s$ başlangıç değerleri olmak üzere (s,t)-Pell Lucas sayı dizisi $\left(q_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sırasıyla

$$p_n(s,t) = 2sp_{n-1}(s,t) + tp_{n-2}(s,t), \qquad n \geq 2$$

$$q_n(s,t) = 2sq_{n-1}(s,t) + tq_{n-2}(s,t), \qquad n \geq 2$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır ve *n*-inci (s,t)-Pell sayısı p_n ile ve *n*-inci (s,t)-Pell Lucas sayısı q_n gösterilir (Güleç ve Taşkara, 2012).

(s,t)-Pell sayı dizisinin ve (s,t)-Pell Lucas sayı dizisinin terimleri kullanılarak aşağıdaki (s,t)-Pell matris dizisinin ve (s,t)-Pell Lucas matris dizisinin tanımı elde edilir.

Tanım 3.22: $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + t > 0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $\mathcal{P}_0(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}_1(s,t) = \begin{pmatrix} 2s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ değerleri olmak üzere (s,t)-Pell matris dizisi $\left(\mathcal{P}_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 2s & 2 \\ 2t & -2s \end{pmatrix}$, $\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2t & 2s \\ 2st & 2t \end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere (s,t)-Pell Lucas matris dizisi $\left(\mathcal{Q}_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sırasıyla

$$\mathcal{P}_n(s,t) = 2s\mathcal{P}_{n-1}(s,t) + t\mathcal{P}_{n-2}(s,t), \qquad n \geq 2$$

$$\mathcal{Q}_n(s,t) = 2s\mathcal{Q}_{n-1}(s,t) + t\mathcal{Q}_{n-2}(s,t), \qquad n \geq 2$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır ve *n*-inci (s,t)-Pell matrisi $\mathcal{P}_n$ ile ve *n*-inci (s,t)-Pell Lucas sayısı $\mathcal{Q}_n$ gösterilir (Güleç ve Taşkara, 2012).

Tanım 3.22 den (s,t)-Pell matris dizisinin ilk terimleri şöyledir:

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 2s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 4s^2 + t & 2s \\ 2st & t \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 8s^3 + 4st & 4s^2 + t \\ 4s^2t + t^2 & 2st \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} 16s^4 + 12s^2 + t^2 & 8s^3 + 4st \\ 8s^3t + 4st^2 & 4s^2t + t^2 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

(s,t)-Pell Lucas matris dizisinin ilk terimleri ise şöyledir:

$$\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 2s & 2 \\ 2t & -2s \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 4s^2 + 2t & 2s \\ 2st & 2t \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} 8s^3 + 6st & 4s^2 + 2t \\ 4s^2t + 2t^2 & 2st \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_3 = \begin{pmatrix} 16s^4 + 16s^2t + 2t^2 & 8s^3 + 6st \\ 8s^3t + 6st^2 & 4s^2t + 2t^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_4 = \begin{pmatrix} 32s^5 + 40s^3t + 10st^2 & 16s^4 + 16s^2t + 2t^2 \\ 16s^4t + 16s^2t^2 + 2t^3 & 8s^3t + 6st^2 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

Aşağıdaki teorem (s,t)-Pell sayı dizisi ile (s,t)-Pell matris dizisi arasındaki bağıntıyı ve (s,t)-Pell Lucas sayı dizisi ile (s,t)-Pell Lucas matris dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 3.23: $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ tp_n & tp_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{Q}_n = \begin{pmatrix} q_{n+1} & q_n \\ tq_n & tq_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

dir (Güleç ve Taşkara, 2012).

İspat: İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.21 den $p_{-1} = \frac{1}{t}$, $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ olduğundan

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ tp_0 & tp_{-1} \end{pmatrix}$$

olup $n = 0$ için eşitlik (3.13) doğrudur.

Tanım 3.21 den $p_0 = 0,\ p_1 = 1\ ,\ p_2 = 2s$ olduğundan

$$p_1 = \begin{pmatrix} 2s & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ tp_1 & tp_0 \end{pmatrix}$$

olup $n = 1$ için de eşitlik (3.13) doğrudur. Şimdi $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki, N tamsayısı için eşitlik (3.13) doğru olsun. Tanım 3.22 de Tanım 3.21 ve kabulümüzde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{N+1} &= 2s\mathcal{P}_N + t\mathcal{P}_{N-1} \\
&= 2s\begin{pmatrix} p_{N+1} & p_N \\ tp_N & tp_{N-1} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p_N & p_{N-1} \\ tp_{N-1} & tp_{N-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2sp_{N+1} + tp_N & 2sp_N + tp_{N-1} \\ t(2sp_N + tp_{N-1}) & t(2sp_{N-1} + tp_{N-2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{N+2} & p_{N+1} \\ tp_{N+1} & tp_N \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olup eşitlik (3.13) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Benzer şekilde eşitlik (3.14) için de ispat yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 3.17 de $s^2 + 4t > 0$ olacak şekilde $s > 0$ ve $t \neq 0$ tamsayıları için (s,t)-Pell matris dizisinin

$$\mathcal{P}_n(s,t) = 2s\mathcal{P}_{n-1}(s,t) + t\mathcal{P}_{n-2}(s,t)$$

rekürans bağıntısında $\mathcal{P}_n(s,t) = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa (s,t)-Pell matris dizisinin karakteristik denklemi

$$x^n - 2sx^{n-1} - tx^{n-2} = 0$$

şeklinde elde edilir.

Özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2sx - t = 0$$

olup bu denkleminin kökleri

$$\alpha = s + \sqrt{s^2 + t} \ \text{ ve } \ \beta = s - \sqrt{s^2 + t}$$

olarak bulunur. Benzer düşünce ile (s,t)-Pell Lucas matris dizisinin rekürans bağıntısından da $\alpha = s + \sqrt{s^2 + t}$ ve $\beta = s - \sqrt{s^2 + t}$ kökleri elde edilir.

(s,t)-Pell matris dizisinin ve (s,t)-Pell Lucas matris dizisinin Binet formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.24: $\alpha = s + \sqrt{s^2 + t}$ *ve* $\beta = s - \sqrt{s^2 + t}$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$\mathcal{P}_n = \left(\frac{\mathcal{P}_1 - \beta\mathcal{P}_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{\mathcal{P}_1 - \alpha\mathcal{P}_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^n$$

$$\mathcal{Q}_n = \left(\frac{\mathcal{Q}_1 - \beta\mathcal{Q}_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{\mathcal{Q}_1 - \alpha\mathcal{Q}_0}{\alpha - \beta}\right)\beta^n$$

dir (Güleç ve Taşkara, 2012).

Aşağıdaki teorem ile (s,t)-Pell matris dizisinin ve (s,t)-Pell Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonları verilmektedir.

Teorem 3.25: $x > s + \sqrt{s^2 + t}$ olacak şekilde x reel sayısı için (s,t)-Pell matris dizisinin ve (s,t)-Pell Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k x^{-k} = \frac{1}{x^2 - 2sx - t}(x\mathcal{P}_1 + (x^2 - 2sx)\mathcal{P}_0) - \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)}(x\mathcal{P}_{n+1} + t\mathcal{P}_n)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_k x^{-k} = \frac{1}{x^2 - 2sx - t}(x\mathcal{Q}_1 + (x^2 - 2sx)\mathcal{Q}_0) - \frac{1}{x^n(x^2 - 2sx - t)}(x\mathcal{Q}_{n+1} + t\mathcal{Q}_n)$$

şeklindedir (Güleç ve Taşkara, 2012).

(s,t)-Pell matris dizisi ile (s,t)- Pell Lucas matris dizisi arasındaki bazı ilişkiler

- $m,n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_m\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{m+n}$
- $m,n \geq 1$ tamsayıları için, $\mathcal{Q}_n\mathcal{Q}_m = \mathcal{Q}_m\mathcal{Q}_n$
- $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_{n+1}$
- $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{Q}_n\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{n+1}$
- $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{P}_n\mathcal{Q}_{n+1} = \mathcal{Q}_{2n+1}$
- $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{Q}_n = 2s\mathcal{P}_n + 2t\mathcal{P}_{n-1}$
- $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{Q}_n = \mathcal{P}_{n+1} + t\mathcal{P}_{n-1}$
- $m,n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{Q}_m\mathcal{Q}_n = (4s^2 + 4t)\mathcal{P}_{m+n}$
- $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n+2} + t\mathcal{P}_n$
- $m + n \geq 4$ tamsayısı için, $\mathcal{P}_n\mathcal{P}_m = 2s\mathcal{Q}_{m+n-2} + t^2\mathcal{P}_{m+n-4}$

şeklindedir (Güleç ve Taşkara, 2012).

3.2.4. (s,t)-Jacobsthal matris dizisi

Tanım 3.26: $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s,t reel sayıları için $j_0(s,t) = 0,\ j_1(s,t) = 1$ başlangıç şartlarına sahip (s,t)-Jacobsthal sayı dizisi $\left(j_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$j_n(s,t) = sj_{n-1}(s,t) + 2tj_{n-2}(s,t), \qquad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci (s,t)-Jacobsthal sayısı j_n ile gösterilir (Uslu ve Uygun, 2012).

(s,t)-Jacobsthal sayı dizisinin terimleri kullanılarak aşağıdaki (s,t)-Jacobsthal matris dizisinin tanımı elde edilir.

Tanım 3.27: $s > 0,\ t \neq 0,\ s^2 + 4t > 0$ olacak şekildeki s, t reel sayıları için $J_0(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $J_1(s,t) = \begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ başlangıç şartlarına sahip (s,t)-Jacobsthal matris dizisi $\left(J_n(s,t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$J_n(s,t) = sJ_{n-1}(s,t) + 2tJ_{n-2}(s,t), \qquad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci (s,t)-Jacobsthal matrisi J_n ile gösterilir (Uslu ve Uygun, 2012).

Tanım 3.27 den (s,t)-Jacobsthal matris dizisinin ilk terimleri şöyledir:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & 2s \\ st & 2t \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} s^3 + 4st & 2s^2 + 4t \\ s^2t + 2t^2 & 2st \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} s^4 + 6s^2t + 4t & 2s^3 + 8st \\ s^3t + 4st^2 & 2s^2t + 4t^2 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

Aşağıdaki teorem (s,t)-Jacobsthal sayı dizisi ile (s,t)-Jacobsthal matris dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 3.28: $n \geq 1$ tamsayısı için

$$J_n = \begin{pmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ tj_n & 2tj_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

dir (Uslu ve Uygun, 2012).

İspat: İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.26 dan $j_0 = 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = s$ olduğundan

$$J_1 = \begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_2 & 2j_1 \\ tj_1 & 2tj_0 \end{pmatrix}$$

olup $n = 1$ için eşitlik (3.15) doğrudur. Tanım 3.26 dan $j_1 = 1$, $j_2 = s$, $j_3 = s^2 + 2t$ olduğundan

$$J_2 = \begin{pmatrix} s^2 + 2t & 2s \\ st & 2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_3 & 2j_2 \\ tj_2 & 2tj_1 \end{pmatrix}$$

olup $n = 2$ için de eşitlik (3.15) doğrudur. Şimdi $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki, N tamsayısı için eşitlik (3.15) doğru olsun. Tanım 3.27 de Tanım 3.26 ve kabulümüz kullanılırsa

$$J_{N+1} = sJ_N + 2tJ_{N-1}$$

$$= s\begin{pmatrix} j_{N+1} & 2j_N \\ tj_N & 2tj_{N-1} \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} j_N & 2j_{N-1} \\ tj_{N-1} & 2tj_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sj_{N+1} + 2tj_N & 2sj_N + 4tj_{N-1} \\ stj_N + 2t^2 j_{N-1} & 2stj_{N-1} + 4t^2 j_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_{N+2} & 2j_{N+1} \\ tj_{N+1} & 2tj_N \end{pmatrix}$$

olup eşitlik (3.15) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.29: $m, n \geq 0$ tamsayıları için

$$J_{m+n} = J_m J_n \tag{3.16}$$

dir (Uslu ve Uygun, 2012).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.27 den $J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$J_m = \begin{pmatrix} j_{m+1} & 2j_m \\ tj_m & 2tj_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= J_m J_0$$

olup $n = 0$ için eşitlik (3.16) doğrudur. Tanım 3.27 den $J_1 = \begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$J_{m+1} = \begin{pmatrix} j_{m+2} & 2j_{m+1} \\ tj_{m+1} & 2tj_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sJ_{m+1} + 2tJ_m & 2J_{m+1} \\ tsJ_m + 2t^2 J_{m-1} & 2tJ_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_{m+1} & 2J_m \\ tJ_m & 2tJ_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= J_m J_1$$

olup $n = 1$ için de eşitlik (3.16) doğrudur. Şimdi $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki N tamsayısı için eşitlik (3.16) doğru olsun. Tanım 3.27 ve kabulümüz kullanılırsa

$$J_{m+N+1} = sJ_{m+N} + 2tJ_{m+N-1}$$

$$= sJ_m J_N + 2tJ_m J_{N-1}$$

$$= J_m(sJ_N + 2tJ_{N-1})$$

$$= J_m J_{N+1}$$

olup eşitlik (3.16) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla $m, n \geq 0$ tamsayıları için eşitlik (3.16) doğru olup teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.27 de $s^2+4t>0$ olacak şekilde $s>0$ ve $t\neq 0$ tamsayıları için (s,t)-Jacobsthal matris dizisinin

$$J_n(s,t)=sJ_{n-1}(s,t)+2tJ_{n-2}(s,t)$$

rekürans bağıntısında $J_n(s,t)=x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa (s,t)-Jacobsthal matris dizisinin karakteristik denklemi

$$x^n-sx^{n-1}-2tx^{n-2}=0$$

şeklinde elde edilir. Özel olarak $n=2$ alınırsa

$$x^2-sx-2t=0$$

olup bu denkleminin kökleri

$$\alpha=\frac{s+\sqrt{s^2+8t}}{2} \text{ ve } \beta=\frac{s-\sqrt{s^2+8t}}{2}$$

olarak bulunur.

(s,t)-Jacobsthal matris dizisinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.30: $\alpha=\frac{s+\sqrt{s^2+8t}}{2}$ ve $\beta=\frac{s-\sqrt{s^2+8t}}{2}$ olmak üzere $n\geq 0$ için

$$J_n=\left(\frac{J_1-\beta J_0}{\alpha-\beta}\right)\alpha^n-\left(\frac{J_1-\alpha J_0}{\alpha-\beta}\right)\beta^n$$

dir (Uslu ve Uygun, 2012).

3.2.5. Fibonacci benzeri matris dizileri

Tanım 3.31: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $R_{k,0}=2$, $R_{k,1}=1$ başlangıç değerleri olmak üzere k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri ile ilişkili Fibonacci benzeri sayı dizileri $\left(R_{k,n}\right)$

$$R_{k,n}=2R_{k,n-1}+kR_{k,n-2},\ n\geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci Fibonacci benzeri sayısı $R_{k,n}$ ile gösterilir (Wani vd., 2017).

Fibonacci benzeri sayı dizilerinin terimleri kullanılarak aşağıdaki Fibonacci benzeri matris dizilerinin tanımı elde edilir.

Tanım 3.32: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $\tilde{R}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2k & -3 \end{pmatrix}$, $\tilde{R}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+2k & 1 \\ k & 2k \end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere Fibonacci benzeri matris diziler $(\tilde{R}_{k,n})$

$$\tilde{R}_{k,n} = 2\tilde{R}_{k,n-1} + k\tilde{R}_{k,n-2}, \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve *n*-inci Fibonacci benzeri matrisi $\tilde{R}_{k,n}$ ile gösterilir (Taşyurdu, 2018).

Tanım 3.32 den Fibonacci benzeri matris dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$\tilde{R}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2k & -3 \end{pmatrix}$,

$\tilde{R}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+2k & 1 \\ k & 2k \end{pmatrix}$,

$\tilde{R}_{k,2} = \begin{pmatrix} 4+5k & 2+2k \\ 2k+2k^2 & k \end{pmatrix}$,

$\tilde{R}_{k,3} = \begin{pmatrix} 8+12k+2k^2 & 4+5k \\ 4k+5k^2 & 2k+2k^2 \end{pmatrix}$,

$\tilde{R}_{k,4} = \begin{pmatrix} 16+28k+9k^2 & 8+12k+2k^2 \\ 8k+12k^2+2k^3 & 4k+5k^2 \end{pmatrix}$,

$\vdots$

Aşağıdaki teorem k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri ile ilişkili Fibonacci benzeri sayı dizileri ile Fibonacci benzeri matris dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 3.33: $n \geq 0$ tamsayı ve k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$\tilde{R}_{k,n} = \begin{pmatrix} R_{k,n+1} & R_{k,n} \\ kR_{k,n} & kR_{k,n-1} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

dir (Taşyurdu, 2018).

İspat: İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Tanım 3.31 den $R_{k,-1} = -\frac{3}{k}$ $R_{k,0} = 2$, $R_{k,1} = 1$ olduğundan

$$\tilde{R}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2k & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{k,1} & R_{k,0} \\ kR_{k,0} & kR_{k,-1} \end{pmatrix}$$

olup $n = 0$ için eşitlik (3.17) doğrudur. Tanım 3.31 den $R_{k,0} = 2$, $R_{k,1} = 1$, $R_{k,0} = 2 + 2k$ olduğundan

$$\tilde{R}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+2k & 1 \\ k & 2k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{k,2} & R_{k,1} \\ kR_{k,1} & kR_{k,0} \end{pmatrix}$$

olup $n = 1$ için de eşitlik (3.17) doğrudur. Şimdi $0 \leq n \leq N$ olacak şekildeki N tamsayısı için eşitlik (3.17) doğru olsun. Tanım 3.32 de Tanım 3.31 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\tilde{R}_{k,N+1} = 2\tilde{R}_{k,N} + k\tilde{R}_{k,N-1}$$

$$= 2\begin{pmatrix} R_{k,N+1} & R_{k,N} \\ kR_{k,N} & kR_{k,N-1} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} R_{k,N} & R_{k,N-1} \\ kR_{k,N-1} & kR_{k,N-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2R_{k,N+1} + kR_{k,N} & 2R_{k,N} + kR_{k,N-1} \\ k(2R_{k,N} + kR_{k,N-1}) & k(2R_{k,N-1} + kR_{k,N-2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{k,N+2} & R_{k,N+1} \\ kR_{k,N+1} & kR_{k,N} \end{pmatrix}$$

olup eşitlik (3.17) $N + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 3.32 de k herhangi bir pozitif reel sayı ve $n \geq 0$ tamsayıları için Fibonacci benzeri matris dizilerinin

$$\tilde{R}_{k,n} = 2\tilde{R}_{k,n-1} + k\tilde{R}_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $\tilde{R}_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa Fibonacci benzeri matris dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

şeklinde elde edilir. Özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

olup bu denkleminin kökleri

$$\alpha = 1 + \sqrt{1+k} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{1+k}$$

olarak bulunur (Taşyurdu, 2018).

Fibonacci benzeri matris dizilerinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.34: $\alpha = 1 + \sqrt{1+k}$ *ve* $\beta = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$\tilde{R}_{k,n} = \left(\frac{\tilde{R}_{k,1} - \beta\tilde{R}_{k,0}}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n - \left(\frac{\tilde{R}_{k,1} - \alpha\tilde{R}_{k,0}}{\alpha - \beta}\right)\beta^n$$

dir (Taşyurdu, 2018).

Aşağıdaki teorem ile Fibonacci benzeri matris dizilerinin üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Teorem 3.35: k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere Fibonacci benzeri matris dizilerinin üreteç fonksiyonları

$$r_k(x) = \frac{\tilde{R}_{k,0} + \left(\tilde{R}_{k,1} - 2\tilde{R}_{k,0}\right)x}{1 - 2x - kx^2}$$

şeklindedir (Taşyurdu, 2018).

Fibonacci benzer matris dizileri ile ilgili bazı özellikler

- $\tilde{R}_{k,n}\tilde{R}_{k,m} = \tilde{R}_{k,m}\tilde{R}_{k,n}$
- $0 \leq r \leq n$ tamsayıları için, $\tilde{R}_{k,n-r}\tilde{R}_{k,n+r} = \tilde{R}_{k,n}^2$
- $0 \leq r \leq n$ tamsayıları için, $\tilde{R}_{k,n-1}\tilde{R}_{k,n+1} = \tilde{R}_{k,n}^2$
- $m \geq n, t \geq s$ tamsayısı için, $\tilde{R}_{k,m+t}\tilde{R}_{k,n+s} = \tilde{R}_{m+s}\tilde{R}_{k,n+t}$
- $m > n$ tamsayısı için, $\tilde{R}_{k,m}\tilde{R}_{k,n+1} - \tilde{R}_{k,m+1}\tilde{R}_{k,n} = [0]_{2x2}$

şeklindedir (Taşyurdu, 2018).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. k-Pell, k-Pell-Lucas, Modifiye k-Pell Matris Temsilleri

Bu bölümde k herhangi bir pozitif reel sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}, \qquad P_{k,0} = 0, P_{k,1} = 1$$

$$Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}, \qquad Q_{k,0} = 2, Q_{k,1} = 2$$

$$q_{k,n} = 2q_{k,n-1} + kq_{k,n-2}, \qquad q_{k,0} = 1, q_{k,1} = 1$$

rekürans bağıntları ile tanımlanan sırasıyla k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri kullanarak k-Pell, k-Pell Lucas, Modifiye k-Pell matris dizileri tanımlandı. k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizilerinin terimleri rekürans bağıntısı kullanılarak elde edilirken kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesi gerekmektedir. Burada k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizilerinin n. terimini, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunmasına olanak sağlayan Binet formülleri elde edildi. Ayrıca k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri ile tanımlanan k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizileri arasındaki ilişkiyi veren matrisler verildi.

Bu çalışmada $\left(\tilde{P}_{k,n}\right)$ ile k-Pell matris dizisi; $\left(\tilde{Q}_{k,n}\right)$ ile k-Pell Lucas matris dizisi ve $\left(\tilde{q}_{k,n}\right)$ ile Modifiye k-Pell matris dizisi gösterilecektir.

Tanım 4.1: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $\tilde{P}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{P}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere $\left(\tilde{P}_{k,n}\right)$ ile gösterilen k- Pell matris dizileri

$$\tilde{P}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n-1} + k\tilde{P}_{k,n-2}, \ \ n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci k-Pell matrisi $\tilde{P}_{k,n}$ ile gösterilir (Taşyurdu vd., 2017).

Tanım 4.1 den k-Pell matris dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$\tilde{P}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\tilde{P}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$,

$\tilde{P}_{k,2} = \begin{pmatrix} 4+k & 2 \\ 2k & k \end{pmatrix}$,

$\tilde{P}_{k,3} = \begin{pmatrix} 8+4k & 4+k \\ 4k+k^2 & 2k \end{pmatrix}$,

$\tilde{P}_{k,4} = \begin{pmatrix} 16+12k+k^2 & 8+4k \\ 8k+4k^2 & 4k+k^2 \end{pmatrix}$,

$\vdots$

k-Pell sayı dizileri ile k-Pell matris dizileri arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 4.2: k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$\tilde{P}_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & P_{k,n} \\ kP_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\tilde{P}_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & P_{k,n} \\ kP_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Tanım 3.1 den k-Pell sayı dizilerinin ilk terimleri $P_{k,0} = 0$, $P_{k,1} = 1$, $P_{k,2} = 2$ olup $n = 1$ için

$$\tilde{P}_{k,1} = \begin{pmatrix} P_{k,2} & P_{k,1} \\ kP_{k,1} & kP_{k,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur.

Benzer düşünce ile Tanım 3.1 den $P_{k,1} = 1$, $P_{k,2} = 2$, $P_{k,3} = 4 + k$ olmak üzere $n = 2$ için

$$\tilde{P}_{k,2} = \begin{pmatrix} P_{k,3} & P_{k,2} \\ kP_{k,2} & kP_{k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+k & 2 \\ 2k & k \end{pmatrix}$$

olup iddia doğrudur. Şimdi iddianın $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu kabul edip $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\tilde{P}_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & P_{k,n} \\ kP_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edip

$$\tilde{P}_{k,n+1} = \begin{pmatrix} P_{k,n+2} & P_{k,n+1} \\ kP_{k,n+1} & kP_{k,n} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Tanım 4.1 de kabulümüz Tanım 3.1, matrislerde skalerle çarpma ve toplama işlemleri ile kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k,n+1} &= 2\tilde{P}_{k,n} + k\tilde{P}_{k,n-1} \\ &= 2\begin{pmatrix} P_{k,n+1} & P_{k,n} \\ kP_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} P_{k,n} & P_{k,n-1} \\ kP_{k,n-1} & kP_{k,n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2P_{k,n+1} + kP_{k,n} & 2P_{k,n} + kP_{k,n-1} \\ 2kP_{k,n} + k^2P_{k,n-1} & 2kP_{k,n-1} + k^2P_{k,n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{k,n+2} & P_{k,n+1} \\ kP_{k,n+1} & kP_{k,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

k-Pell matris dizilerinin genel formu olarak bilinen ve n-inci terimini veren Binet formülü aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 4.3: k herhangi bir pozitif reel sayı, $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere k-Pell matris dizilerinin Binet formülü

$$\tilde{P}_{k,n} = \frac{\left(\tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}\right)r_1^n - \left(\tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}\right)r_2^n}{r_1 - r_2}, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: Tanım 4.1 deki k-Pell matris dizilerinin

$$\tilde{P}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n-1} + k\tilde{P}_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $\tilde{P}_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

k-Pell matris dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

olup bu denklemin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere

$$r_1 = 1 + \sqrt{1+k} \text{ ve } r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$$

şeklindedir. Diğer taraftan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için k-Pell matris dizilerinin n-inci terimlerinin genel formu

$$\tilde{P}_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\tilde{P}_{k,0} = A + B$$

$$\tilde{P}_{k,1} = Ar_1 + Br_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \left(\frac{\tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}}{r_1 - r_2}\right) \text{ ve } B = -\left(\frac{\tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}}{r_1 - r_2}\right)$$

olarak bulunur.

Bulunan A ve B değerleri

$$\tilde{P}_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{P}_{k,n} = \frac{\left(\tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}\right)r_1^n - \left(\tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}\right)r_2^n}{r_1 - r_2}$$

k-Pell matris dizilerinin Binet formülü elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 4.4: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $\tilde{Q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2k & -2 \end{pmatrix}$, $\tilde{Q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere $\left(\tilde{Q}_{k,n}\right)$ ile gösterilen k-Pell Lucas matris dizileri

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{Q}_{k,n-1} + k\tilde{Q}_{k,n-2}, \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci k-Pell Lucas matrisi $\tilde{Q}_{k,n}$ ile gösterilir (Taşyurdu vd., 2017).

Tanım 4.4 ten k-Pell Lucas matris dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$\tilde{Q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2k & -2 \end{pmatrix},$

$\tilde{Q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix},$

$\tilde{Q}_{k,2} = \begin{pmatrix} 8+6k & 4+2k \\ 4k+2k^2 & 2k \end{pmatrix},$

$\tilde{Q}_{k,3} = \begin{pmatrix} 16+16k+2k^2 & 8+6k \\ 8k+6k^2 & 4k+2k^2 \end{pmatrix}$

$\tilde{Q}_{k,4} = \begin{pmatrix} 32+40k+10k^2 & 16+16k+2k^2 \\ 16k+16k^2+2k^3 & 8k+6k^2 \end{pmatrix}$

$\vdots$

Önerme 4.5: k herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$\tilde{Q}_{k,n} = \begin{pmatrix} Q_{k,n+1} & Q_{k,n} \\ kQ_{k,n} & kQ_{k,n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\tilde{Q}_{k,n} = \begin{pmatrix} Q_{k,n+1} & Q_{k,n} \\ kQ_{k,n} & kQ_{k,n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Tanım 3.4 den k-Pell Lucas sayı dizilerinin ilk terimleri $Q_{k,0} = 2$, $Q_{k,1} = 2$, $Q_{k,2} = 4 + 2k$ olup $n = 1$ için

$$\tilde{Q}_{k,1} = \begin{pmatrix} Q_{k,2} & Q_{k,1} \\ kQ_{k,1} & kQ_{k,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur. Benzer düşünce ile Tanım 3.4 den $Q_{k,1} = 2$, $Q_{k,2} = 4 + 2k$, $Q_{k,2} = 8 + 6k$ olmak üzere $n = 2$ için

$$\tilde{Q}_{k,2} = \begin{pmatrix} Q_{k,3} & Q_{k,2} \\ kQ_{k,2} & kQ_{k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 6k & 4 + 2k \\ 4k + 2k^2 & 2k \end{pmatrix}$$

olup iddia doğrudur. Şimdi iddianın her $n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısı için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\tilde{Q}_{k,n} = \begin{pmatrix} Q_{k,n+1} & Q_{k,n} \\ kQ_{k,n} & kQ_{k,n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edip

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = \begin{pmatrix} Q_{k,n+2} & Q_{k,n+1} \\ kQ_{k,n+1} & kQ_{k,n} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

Tanım 4.4 te kabulümüz Tanım 3.4, matrislerde skalerle çarpma ve toplama işlemleri ile kullanılırsa

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = 2\tilde{Q}_{k,n} + k\tilde{Q}_{k,n-1}$$

$$= 2\begin{pmatrix} Q_{k,n+1} & Q_{k,n} \\ kQ_{k,n} & kQ_{k,n-1} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} Q_{k,n} & Q_{k,n-1} \\ kQ_{k,n-1} & kQ_{k,n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2Q_{k,n+1} + kQ_{k,n} & 2Q_{k,n} + kQ_{k,n-1} \\ 2kQ_{k,n} + k^2Q_{k,n-1} & 2kQ_{k,n-1} + k^2Q_{k,n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q_{k,n+2} & Q_{k,n+1} \\ kQ_{k,n+1} & kQ_{k,n} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

k-Pell Lucas matris dizilerinin genel formu olarak bilinen ve n-inci terimini veren Binet formülü aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 4.6: k herhangi bir pozitif reel sayı, $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere k-Pell Lucas matris dizilerinin Binet formülü

$$\tilde{Q}_{k,n} = \frac{(\tilde{Q}_{k,1} - r_2\tilde{Q}_{k,0})r_1^n - (\tilde{Q}_{k,1} - r_1\tilde{Q}_{k,0})r_2^n}{r_1 - r_2}, \ \ n \geq 0$$

şeklindedir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: Tanım 4.4 deki k-Pell Lucas matris dizilerinin

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{Q}_{k,n-1} + k\tilde{Q}_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $\tilde{Q}_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

k-Pell Lucas matris dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir.

Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

olup bu denklemin kökleri ise r_1 ve r_2 olmak üzere

$$r_1 = 1 + \sqrt{1+k} \text{ ve } r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için k-Pell Lucas matris dizilerinin n-inci terimlerinin genel formu

$$\tilde{Q}_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\tilde{Q}_{k,0} = A + B$$

$$\tilde{Q}_{k,1} = Ar_1 + Br_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \left(\frac{\tilde{Q}_{k,1} - r_2\tilde{Q}_{k,0}}{r_1 - r_2}\right) \text{ ve } B = -\left(\frac{\tilde{Q}_{k,1} - r_1\tilde{Q}_{k,0}}{r_1 - r_2}\right)$$

olarak bulunur. Bu A ve B değerleri

$$\tilde{Q}_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{Q}_{k,n} = \frac{(\tilde{Q}_{k,1} - r_2\tilde{Q}_{k,0})r_1^n - (\tilde{Q}_{k,1} - r_1\tilde{Q}_{k,0})r_2^n}{r_1 - r_2}$$

k-Pell Lucas matris dizilerinin Binet formülü elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 4.7: k herhangi bir pozitif reel sayı ve $\tilde{q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$ başlangıç değerleri olmak üzere $(\tilde{q}_{k,n})$ ile gösterilen Modifiye k-Pell matris dizileri

$$\tilde{q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n-1} + k\tilde{q}_{k,n-2}, \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n-inci Modifiye k-Pell matrisi $\tilde{q}_{k,n}$ ile gösterilir (Taşyurdu vd., 2017).

Tanım 4.7 den Modifiye k-Pell matris dizilerinin ilk terimleri şöyledir:

$\tilde{q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix}$,

$\tilde{q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$,

$\tilde{q}_{k,2} = \begin{pmatrix} 4+3k & 2+k \\ 2k+k^2 & k \end{pmatrix}$,

$\tilde{q}_{k,3} = \begin{pmatrix} 8+8k+k^2 & 4+3k \\ 4k+3k^2 & 2k+k^2 \end{pmatrix}$

$\tilde{q}_{k,4} = \begin{pmatrix} 16+20k+5k^2 & 8+8k+k^2 \\ 8k+8k^2+k^3 & 4k+3k^2 \end{pmatrix}$

$\vdots$

Önerme 4.8: k herhangi bir pozitif reel sayı ve olmak üzere

$$\tilde{q}_{k,n} = \begin{pmatrix} q_{k,n+1} & q_{k,n} \\ kq_{k,n} & kq_{k,n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

şeklindedir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 0$ tamsaysı için

$$\tilde{q}_{k,n} = \begin{pmatrix} q_{k,n+1} & q_{k,n} \\ kq_{k,n} & kq_{k,n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Tanım 3.7 den Modifiye k-Pell sayı dizilerinin ilk terimleri $q_{k,0} = 1$, $q_{k,1} = 1$, $q_{k,2} = 2+k$ olup $n = 1$ için

$$\tilde{q}_{k,1} = \begin{pmatrix} q_{k,2} & q_{k,1} \\ kq_{k,1} & kq_{k,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur.

Benzer düşünce ile Tanım 3.7 den $q_{k,1} = 1, q_{k,2} = 2 + k$, $q_{k,3} = 4 + 3k$ olmak üzere $n = 2$ için

$$\tilde{q}_{k,2} = \begin{pmatrix} q_{k,3} & q_{k,2} \\ kq_{k,2} & kq_{k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3k & 2+k \\ 2k+k^2 & k \end{pmatrix}$$

olup iddia doğrudur. Şimdi iddianın $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu kabul edip $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani n için

$$\tilde{q}_{k,n} = \begin{pmatrix} q_{k,n+1} & q_{k,n} \\ kq_{k,n} & kq_{k,n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edip

$$\tilde{q}_{k,n+1} = \begin{pmatrix} q_{k,n+2} & q_{k,n+1} \\ kq_{k,n+1} & kq_{k,n} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Tanım 4.7 de kabulümüz Tanım 3.7, matrislerde skalerle çarpma ve toplama işlemleri ile kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{k,n+1} &= 2\tilde{q}_{k,n} + k\tilde{q}_{k,n-1} \\
&= 2\begin{pmatrix} q_{k,n+1} & q_{k,n} \\ kq_{k,n} & kq_{k,n-1} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} q_{k,n} & q_{k,n-1} \\ kq_{k,n-1} & kq_{k,n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2q_{k,n+1} + kq_{k,n} & 2q_{k,n} + kq_{k,n-1} \\ 2kq_{k,n} + k^2q_{k,n-1} & 2kq_{k,n-1} + k^2q_{k,n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_{k,n+2} & q_{k,n+1} \\ kq_{k,n+1} & kq_{k,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Modifiye k-Pell matris dizilerinin genel formu olarak bilinen ve n-inci terimini veren Binet formülü aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 4.9: k herhangi bir pozitif reel sayı, $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere Modifiye k-Pell matris dizisinin Binet formülü,

$$\tilde{q}_{k,n} = \frac{\left(\tilde{q}_{k,1} - r_2\tilde{q}_{k,0}\right)r_1^n - \left(\tilde{q}_{k,1} - r_1\tilde{q}_{k,0}\right)r_2^n}{r_1 - r_2}$$

şeklindedir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: Tanım 4.7 deki Modifiye k-Pell matris dizilerinin

$$\tilde{q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n-1} + k\tilde{q}_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısında $\tilde{q}_{k,n} = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$x^n - 2x^{n-1} - kx^{n-2} = 0$$

Modifiye k-Pell matris dizilerinin karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik denklemde özel olarak $n = 2$ alınırsa

$$x^2 - 2x - k = 0$$

olup bu denklemin kökleri r_1 ve r_2 olmak üzere

$$r_1 = 1 + \sqrt{1+k} \text{ ve } r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan A, B sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tamsayısı için Modifiye k-Pell matris dizilerinin n-inci terimlerinin genel formu

$$\tilde{q}_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ alınırsa

$$\tilde{q}_{k,0} = A + B$$

$$\tilde{q}_{k,1} = Ar_1 + Br_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

Bu sistemin çözümünde ise

$$A = \left(\frac{\tilde{q}_{k,1} - r_2\tilde{q}_{k,0}}{r_1 - r_2}\right) \text{ ve } B = -\left(\frac{\tilde{q}_{k,1} - r_1\tilde{q}_{k,0}}{r_1 - r_2}\right)$$

olarak bulunur. Bu A ve B değerleri

$$\tilde{q}_{k,n} = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{q}_{k,n} = \frac{(\tilde{q}_{k,1} - r_2\tilde{q}_{k,0})r_1^n - (\tilde{q}_{k,1} - r_1\tilde{q}_{k,0})r_2^n}{r_1 - r_2}$$

Modifiye k-Pell matris dizilerinin Binet formülü elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

k herhangi bir pozitif reel sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere sırasıyla k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizilerinin

$$\tilde{P}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n-1} + k\tilde{P}_{k,n-2}, \qquad \tilde{P}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{P}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{Q}_{k,n-1} + k\tilde{Q}_{k,n-2}, \qquad \tilde{Q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2k & -2 \end{pmatrix}, \ \tilde{Q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n-1} + k\tilde{q}_{k,n-2}, \qquad \tilde{q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix}, \ \tilde{q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$$

reküran bağıntılarının karakteristik denkleminden

$$x^2 - 2x - k = 0$$

olup bu denklemin $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ ve $r_2 = 1 + \sqrt{1+k}$ kökleri arasında

$$r_1 + r_2 = 2$$

$$r_1 r_2 = -k$$

$$r_1 - r_2 = 2\sqrt{1+k}$$

eşitlikleri vardır.

4.2. k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell Matris Temsillerinin Özellikleri

Bu bölümde k-Pell matris dizilerinin $(\tilde{P}_{k,n})$, k-Pell Lucas matris dizilerinin $(\tilde{Q}_{k,n})$ ve Modifiye k-Pell matris dizilerinin $(\tilde{q}_{k,n})$ terimleri arasında bazı ilişkiler elde edildi. Bunun için $n \geq 2$ olmak üzere $\tilde{P}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{P}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ başlangıç şartlarına sahip k-Pell matris dizilerinin

$$\tilde{P}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n-1} + k\tilde{P}_{k,n-2}$$

rekürans bağıntısı kullanılarak

i. $(\tilde{P}_{k,n+1} - \tilde{P}_{k,n})^2 = (1+k)\tilde{P}_{k,n}^2$

ii. $\tilde{P}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,n-1} = \tilde{P}_{k,n}^2$

iii. $\tilde{P}_{k,n} = \tilde{P}_{k,1}^n$

iv. $\tilde{P}_{k,m+n} = \tilde{P}_{k,m}\tilde{P}_{k,n}$

özellikleri elde edildi. Ayrıca sırasıyla k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizilerinin

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{Q}_{k,n-1} + k\tilde{Q}_{k,n-2}, \quad \tilde{Q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2k & -2 \end{pmatrix}, \tilde{Q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n-1} + k\tilde{q}_{k,n-2}, \quad \tilde{q}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix}, \tilde{q}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$$

rekürans bağıntıları da kullanılarak $(\tilde{P}_{k,n})$, $(\tilde{Q}_{k,n})$ ve $(\tilde{q}_{k,n})$ matris dizileri arasında

i. $\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}$

ii. $\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n}$

iii. $\tilde{Q}_{k,n+1} = \tilde{Q}_{k,1}\tilde{P}_{k,n}$

iv. $\tilde{q}_{k,n+1} = \tilde{q}_{k,1}\tilde{P}_{k,n}$

v. $(2+2k)\tilde{P}_{k,n} = \tilde{Q}_{k,n} + 2\tilde{Q}_{k,n-1}$

vi. $\tilde{q}_{k,n} = \tilde{P}_{k,n} + k\tilde{P}_{k,n-1}$

vii. $\tilde{P}_{k,m}\tilde{Q}_{k,n+1} = \tilde{Q}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,m}$

viii. $\tilde{P}_{k,m}\tilde{q}_{k,n+1} = \tilde{q}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,m}$

özellikleri elde edildi.

Önerme 4.10: $n \geq 0$ tamsayı olmak üzere

$$(\tilde{P}_{k,n+1} - \tilde{P}_{k,n})^2 = (1+k)\tilde{P}_{k,n}^2$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: Önerme 4.3 deki k-Pell matris dizisinin Binet formülünde $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$, $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere $A = \tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}$ ve $B = \tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}$ olarak alınırsa

$$AB = \left(\tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}\right)\left(\tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}\right) = [0]_{2x2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\left(\tilde{P}_{k,n+1} - \tilde{P}_{k,n}\right)^2 = \left(\frac{Ar_1^{n+1} - Br_2^{n+1}}{r_1 - r_2} - \frac{Ar_1^n - Br_2^n}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{Ar_1^n(r_1 - 1) - Br_2^n(r_2 - 1)}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{Ar_1^n\left(\sqrt{1+k}\right) - Br_2^n\left(-\sqrt{1+k}\right)}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{Ar_1^n\left(\sqrt{1+k}\right) + Br_2^n\left(\sqrt{1+k}\right)}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \frac{A^2r_1^{2n}(1+k) + 2ABr_1^nr_2^n(1+k) + B^2r_2^{2n}(1+k)}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$= \left(\frac{Ar_1^n - Br_2^n}{r_1 - r_2}\right)^2 (1+k)$$

$$= (1+k)\tilde{P}_{k,n}^2$$

dir. Buradan

$$(\tilde{P}_{k,n+1} - \tilde{P}_{k,n})^2 = (1+k)\tilde{P}_{k,n}^2$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır.

Önerme 4.11: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{P}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,n-1} = \tilde{P}_{k,n}^2$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: Önerme 4.3 deki k-Pell matris dizisinin Binet formülünde $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$, $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ olmak üzere $A = \tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}$ ve $B = \tilde{P}_{k,1} - 1\tilde{P}_{k,0}$ olarak alınırsa

$$AB = \left(\tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}\right)\left(\tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}\right) = [0]_{2x2}$$

$$BA = \left(\tilde{P}_{k,1} - r_1\tilde{P}_{k,0}\right)\left(\tilde{P}_{k,1} - r_2\tilde{P}_{k,0}\right) = [0]_{2x2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\tilde{P}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,n-1} - \tilde{P}_{k,n}^2 = \left(\frac{A{r_1}^{n+1} - B{r_2}^{n+1}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{A{r_1}^{n-1} - B{r_2}^{n-1}}{r_1 - r_2}\right) - \left(\frac{A{r_1}^{n} - B{r_2}^{n}}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \frac{A^2{r_1}^{2n} - AB{r_1}^{n+1}{r_2}^{n-1} - BA{r_1}^{n-1}{r_2}^{n+1} + B^2{r_2}^{2n}}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{A^2{r_1}^{2n} - AB{r_1}^{n}{r_2}^{n} - BA{r_2}^{n}{r_1}^{n} + B^2{r_2}^{2n}}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$= \frac{A^2{r_1}^{2n} + B^2{r_2}^{2n} - A^2{r_1}^{2n} - B^2{r_2}^{2n}}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$= [0]_{2x2}$$

olup

$$\tilde{P}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,n-1} = \tilde{P}_{k,n}^2$$

elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

Önerme 4.12: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{P}_{k,n} = \tilde{P}_{k,1}^n$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\tilde{P}_{k,n} = \tilde{P}_{k,1}^{n}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için

$$\tilde{P}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{P}_{k,1}^{1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur. $n = 2$ için

$$\tilde{P}_{k,2} = \begin{pmatrix} P_{k,3} & P_{k,2} \\ kP_{k,2} & kP_{k,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{P}_{k,1}^{2}$$

olup $n = 2$ için iddia doğrudur. Şimdi iddianın her $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için

$$\tilde{P}_{k,n} = \tilde{P}_{k,1}^{n}$$

olduğunu kabul edip $n + 1$ için

$$\tilde{P}_{k,n+1} = \tilde{P}_{k,1}^{n+1}$$

olduğunu gösterelim.

Önerme 4.2 de Tanım 3.1 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\tilde{P}_{k,n+1} = \begin{pmatrix} P_{k,n+2} & P_{k,n+1} \\ kP_{k,n+1} & kP_{k,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2P_{k,n+1} + kP_{k,n} & P_{k,n+1} \\ 2kP_{k,n} + k^2 P_{k,n-1} & kP_{k,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & P_{k,n} \\ kP_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 4.13: $m, n \geq 1$ tamsayıları olmak üzere

$$\tilde{P}_{k,m+n} = \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 1$ tamsayı için

$$\tilde{P}_{k,m+n} = \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için

$$\tilde{P}_{k,m+1} = \begin{pmatrix} P_{k,m+2} & P_{k,m+1} \\ kP_{k,m+1} & kP_{k,m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2P_{k,m+1} + kP_{k,m} & P_{k,m+1} \\ 2kP_{k,m} + k^2 P_{k,m-1} & kP_{k,m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{k,m+1} & P_{k,m} \\ kP_{k,m} & kP_{k,m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,1}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur.

Önerme 4.12 den $\tilde{P}_{k,n} = \tilde{P}_{k,1}^{n}$ olmak üzere benzer düşünce ile $n = 2$ için

$$\tilde{P}_{k,m+2} = \begin{pmatrix} P_{k,m+3} & P_{k,m+2} \\ kP_{k,m+2} & kP_{k,m+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2P_{k,m+2} + kP_{k,m+1} & P_{k,m+2} \\ 2kP_{k,m+1} + k^2 P_{k,m} & kP_{k,m+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{k,m+2} & P_{k,m+1} \\ kP_{k,m+1} & kP_{k,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{P}_{k,m+1} \tilde{P}_{k,1}$$

$$= \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,1}^{2}$$

$$= \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,2}$$

olup $n = 2$ için iddia doğrudur. Şimdi iddianın her $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için

$$\tilde{P}_{k,m+n} = \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n}$$

doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için

$$\tilde{P}_{k,m+n+1} = \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n+1}$$

doğru olduğunu gösterelim. Tanım 4.1 de kabulümüz kullanılırsa

$$\tilde{P}_{k,m+n+1} = 2\tilde{P}_{k,m+n} + k\tilde{P}_{k,m+n-1}$$

$$= 2\left(\tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n}\right) + k\left(\tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n-1}\right)$$

$$= \tilde{P}_{k,m}\left(2\tilde{P}_{k,n} + k\tilde{P}_{k,n-1}\right)$$

$$= \tilde{P}_{k,m} \tilde{P}_{k,n+1}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 4.14: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için Tanım 4.1 ve Tanım 4.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{k,1} &= \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix} + 2k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\tilde{P}_{k,1} + 2k\tilde{P}_{k,0} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur. Benzer düşünce ile $n = 2$ için

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{k,2} &= \begin{pmatrix} 8+6k & 4+2k \\ 4k+2k^2 & 2k \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 4+k & 2 \\ 2k & k \end{pmatrix} + 2k\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\tilde{P}_{k,2} + 2k\tilde{P}_{k,1} \end{aligned}$$

olup $n = 2$ için iddia doğrudur. Şimdi iddianın her $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}$$

olduğunu kabul edip

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = 2\tilde{P}_{k,n+1} + 2k\tilde{P}_{k,n}$$

olduğunu gösterelim.

Tanım 4.4 de Tanım 4.1 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{k,n+1} &= 2\tilde{Q}_{k,n} + k\tilde{Q}_{k,n-1}\\ &= 2\left(2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}\right) + k\left(2\tilde{P}_{k,n-1} + 2k\tilde{P}_{k,n-2}\right)\\ &= 2\left(2\tilde{P}_{k,n} + k\tilde{P}_{k,n-1}\right) + 2k\left(2\tilde{P}_{k,n-1} + k\tilde{P}_{k,n-2}\right)\\ &= 2\tilde{P}_{k,n+1} + 2k\tilde{P}_{k,n}\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 4.15: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{k,1} &= \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}\\ &= 2\tilde{q}_{k,1}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur. Benzer düşünce ile $n = 2$ için

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{k,2} &= \begin{pmatrix} 8+6k & 4+2k \\ 4k+2k^2 & 2k \end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix} 4+3k & 2+k \\ 2k+k^2 & k \end{pmatrix}\\ &= 2\tilde{q}_{k,2}\end{aligned}$$

olup $n = 2$ için iddia doğrudur. Şimdi iddianın her $n$için doğru olduğunu kabul edip $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Yani her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{q}_{k,n}$$

olduğunu kabul edip $n+1$ için

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = 2\tilde{q}_{k,n+1}$$

doğru olduğunu gösterelim. Tanım 4.4 de Tanım 4.7 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{k,n+1} &= 2\tilde{Q}_{k,n} + k\tilde{Q}_{k,n-1}\\ &= 2(2\tilde{q}_{k,n}) + k(2\tilde{q}_{k,n-1})\\ &= 2(2\tilde{q}_{k,n} + k\tilde{q}_{k,n-1})\\ &= 2\tilde{q}_{k,n+1}\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 4.16: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = \tilde{Q}_{k,1}\tilde{P}_{k,n}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017

İspat: İspat n üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Yani her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = \tilde{Q}_{k,1}\tilde{P}_{k,n}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{k,2} &= \begin{pmatrix} Q_{k,3} & Q_{k,2} \\ kQ_{k,2} & kQ_{k,1} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 8+6k & 4+2k \\ 4k+k^2 & 2k \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 4+2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\\ &= \tilde{Q}_{k,1}\tilde{P}_{k,1}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n = 1$ için iddia doğrudur.

Benzer düşünce ile $n = 2$ için

$$\tilde{Q}_{k,3} = \begin{pmatrix} Q_{k,4} & Q_{k,3} \\ kQ_{k,3} & kQ_{k,2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 + 16k + 2k^2 & 8 + 6k \\ 8k + 6k^2 & 4k + 2k^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 + 2k & 2 \\ 2k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 + k & 2 \\ 2k & k \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{Q}_{k,1} \tilde{P}_{k,2}$$

olup $n = 2$ için iddia doğrudur. Şimdi iddianın her $n \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\tilde{Q}_{k,n+1} = \tilde{Q}_{k,1} \tilde{P}_{k,n}$$

doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için

$$\tilde{Q}_{k,n+2} = \tilde{Q}_{k,1} \tilde{P}_{k,n+1}$$

doğru olduğunu gösterelim. Tanım 4.4 de Tanım 4.1 ve kabulümüz kullanılırsa

$$\tilde{Q}_{k,n+2} = 2\tilde{Q}_{k,n+1} + k\tilde{Q}_{k,n}$$

$$= 2(\tilde{Q}_{k,1} \tilde{P}_{k,n}) + k(\tilde{Q}_{k,1} \tilde{P}_{k,n-1})$$

$$= \tilde{Q}_{k,1}(2\tilde{P}_{k,n} + k\tilde{P}_{k,n-1})$$

$$= \tilde{Q}_{k,1} \tilde{P}_{k,n+1}$$

bulunur. Bu ise iddianın $n + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 4.16 da Önerme 4.15 kullanılırsa Sonuç 4.17 elde edilir..

Sonuç 4.17: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{q}_{k,n+1} = \tilde{q}_{k,1} \tilde{P}_{k,n}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

Önerme 4.18: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$(2+2k)\tilde{P}_{k,n} = \tilde{Q}_{k,n} + k\tilde{Q}_{k,n-1}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat Tanım 4.1 ve Önerme 4.14 kullanılarak yapılabilir. Önerme 4.14 den

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}$$

ve Tanım 4.1 den

$$\tilde{P}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n-1} + k\tilde{P}_{k,n-2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{k,n} + k\tilde{Q}_{k,n-1} &= \left(2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}\right) + k\left(2\tilde{P}_{k,n-1} + 2k\tilde{P}_{k,n-2}\right) \\
&= 2\tilde{P}_{k,n} + k\left(4\tilde{P}_{k,n-1} + 2k\tilde{P}_{k,n-2}\right) \\
&= 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n} \\
&= (2+2k)\tilde{P}_{k,n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Önerme 4.18 de Önerme 4.15 kullanılırsa Sonuç 4.19 elde edilir.

Sonuç 4.19: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{q}_{k,n} = \tilde{P}_{k,n} + k\tilde{P}_{k,n-1}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

Önerme 4.20: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{P}_{k,m}\tilde{Q}_{k,n+1} = \tilde{Q}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,m}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

İspat: İspat Önerme 4.13, Önerme 4.14 ve Önerme 4.16 kullanılarak yapılabilir. Önerme 4.14 den

$$\tilde{Q}_{k,n} = 2\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,n-1}$$

ve Önerme 4.13 ten

$$\tilde{P}_{k,m+n} = \tilde{P}_{k,m}\tilde{P}_{k,n}$$

olmak üzere Önerme 4.16 dan

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{k,m}\tilde{Q}_{k,n+1} &= \tilde{P}_{k,m}\tilde{Q}_{k,1}\tilde{P}_{k,n} \\
&= \tilde{P}_{k,m}\left(2\tilde{P}_{k,1} + 2k\tilde{P}_{k,0}\right)\tilde{P}_{k,n} \\
&= 2\tilde{P}_{k,m}\tilde{P}_{k,1}\tilde{P}_{k,n} + 2k\tilde{P}_{k,m}\tilde{P}_{k,0}\tilde{P}_{k,n} \\
&= 2\tilde{P}_{k,m+n+1} + 2k\tilde{P}_{k,m+n} \\
&= \left(2\tilde{P}_{k,1} + 2k\tilde{P}_{k,0}\right)\tilde{P}_{k,m+n} \\
&= \tilde{Q}_{k,1}\tilde{P}_{k,n}\tilde{P}_{k,m} \\
&= \tilde{Q}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,m}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmıştır.

Önerme 4.20 de Önerme 4.15 kullanılırsa Sonuç 4.21 elde edilir.

Sonuç 4.21: $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\tilde{P}_{k,m}\tilde{q}_{k,n+1} = \tilde{q}_{k,n+1}\tilde{P}_{k,m}$$

dir (Taşyurdu vd., 2017).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada öncelikle k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizileri kullanılarak k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell matris dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. k-Pell sayı dizileri ile k-Pell matris dizileri, k-Pell Lucas sayı dizileri ile k-Pell Lucas matris dizileri ve Modifiye k-Pell sayı dizileri ile Modifiye k-Pell matris dizileri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Bu tanımlar ve buna bağlı elde edilen sonuçlar ile literatüre yeni kavramlar ve sonuçlar kazandırılmıştır.

5.2. Öneriler

Çalışmamızı elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda, araştırmacılara öneriler sunarak sonlandırmak istiyoruz. k-Pell, k-Pell Lucas ve Modifiye k-Pell sayı dizilerinin hepsi ile ilişkili olan genel bir matris dizisi tanımlanabilir. Genel matris dizisi ile bu çalışmadaki matris dizileri arasındaki ilişkiler bulunabilir. Tanımlanacak olan genel matris dizisinin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, üreteç matrisleri ve özellikleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Bicknell, N. (1975) “A primer on the Pell sequence and related sequence”, ***Fibonacci Quarterly***, 13(4), 345-349.

Catarino, P. (2013) “On Some Identities and Generating Functions for k-Pell Numbers”, ***International Journal of Mathematic Analysis,*** 7(38), 1877-1884.

Catarino, P. and Vasco, P. (2013a) “On Some Identities and Generating Functions for k-Pell Lucas Sequence”, ***Applied Mathematical Sciences***, 7(98), 4867-4873.

Catarino, P. and Vasco, P. (2013b) “Modified k-Pell Sequence: Some Identities and Ordinary Generating Function”, ***Applied Mathematical Sciences***, 7(121), 6031-6037.

Civciv, H. and Türkmen, R. (2008a) “On the (s,t)-Fibonacci and Fibonacci Matrix sequences”, ***Ars Combinatoria***, 87, 161-173.

Civciv, H. and Türkmen, R. (2008b) “Notes on the (s,t)-Lucas and Lucas Matrix sequences”, ***Ars Combinatoria***, 89, 271-285.

Çallıalp, F. (2001) Örneklerle Soyut Cebir, ***Birsen Yayınevi***, İstanbul, 300 s.

Daşdemir, A. (2011) “On the Pell, Pell Lucas and Modified Pell Numbers by Matrix Method”, ***Applied Mathematical Sciences***, 5(64), 3173-3181.

Ercolano, J. (1979) “Matrix Generators of Pell Sequences’’, ***The Fibonacci Quarterly***, 17(1), 71-77.

Everest, G., Poorten, A., Shparlinski, I. and Ward, T. (2003) Recurrence Sequences, ***American Mathematical Society***, USA, 323 p.

Gulec, H. H. and Taskara, N. (2012) “On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell–Lucas Sequences and Their Matrix Representations”, ***Applied Mathematics Letters***, 25(10), 1554-1559.

Hoggatt, V. E. (1969) Fibonacci and Lucas Numbers. A publication of the Fibonacci Association, ***Houghton Mifflin Company***, Boston, (OCoLC) 654299031.

Horadam, A. F. (1965a) “Basic Properties of a Certain Generalized Sequences of Numbers”, ***Fibonacci Quarterly***, 3(3), 161-176.

Horadam, A. F. (1965b) “Generating Functions for Powers of a Certain Generalized Sequences of Numbers”, ***Duke Mathematical Journal,*** 32(3), 437- 446.

Horadam, A. F. (1967) “Special Properties of the Sequence $W_n(a,b;p,q)$”. ***Fibonacci Quarterly,*** 5(4), 424-434.

Horadam, A. F. (1994) “Applications of Modified Pell Numbers to Representations”, ***Ulam Quarterly***, 3(1), 34-53.

Koshy, T. (2001) Fibonacci and Lucas Number a with Applications, ***Wiley-Interscience Publications***, Canada, 641 p.

Kılıç, E. and Taşçı, D. (2005) "The Linear Algebra of The Pell Matrix", ***Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana***, 3(11), 12 p.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2003) Genel Matematik, ***Bakanlar Matbaacılık***, Erzurum, 491 s.

Kalman, D. (1982) "Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Methods", ***The Fibonacci Quarterly***, 20(1), 73-76.

Karaduman, E. (2004) "An Application of Fibonacci Numbers in Matrices", ***Applied Mathematics and Computation,*** 147(3), 903-908.

Melham, R. (1999) "Sums İnvolving Fibonacci and Pell Numbers", ***Portugaliae Mathematic***, 56(3), 309-317.

Silvester, J. R. (1979) "Fibonacci Properties by Matrix Methods", ***The Mathematical Gazette***, 63(425), 188-191.

Uslu, K. and Uygun, S. (2012) "The (s,t) Jacobsthal and (s,t) Jacobsthal Lucas Matrix Sequences" ***Ars Combinatoria***, 108, 13-22.

Taşçı, D. (2010) Soyut Cebir, ***Alp Yayınevi***, Ankara, 671 s.

Taşçı, D. (2011) Lineer Cebir, ***Gazi Kitapevi*** Yayınevi, Ankara, 585 s.

Taşyurdu, Y., Çobanoğlu, N. and Dilmen, Z. (2016) "On the a New Family of k-Fibonacci Numbers", ***Erzincan University Journal of Science and Technology,*** 9(1), 95-101.

Taşyurdu, Y., Kefçi, B., Gültekin, İ. and Deveci, Ö. (2017) "k-Pell, k-Pell-Lucas and Modifiye k-Pell Matrix Sequence", ***4th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary athematics Conferenc,*** 03-07 May.

Taşyurdu, Y. (2018) "Matrix Representations of Fibonacci-Like Sequences", ***New Trends in Mathematical Sciences,*** 6(4), 203-210.

Vajda, S. (1989) Fibonacci & Lucas numbers and golden section, Ellis Horwood, Chichester.

Vorobyov, N. (1976) Elementary Numbers Theory, Allyn and Bacon inc, Boston, 285-299.

Yazlık, Y., Yılmaz, N. and Taskara, N. (2014) "The Generalized (s,t)-Matrix Sequence's Binomial Transforms", ***General Mathematics Notes***, 24(1), 127-136.

Yılmaz, Y. and Taşkara, N. (2013) "Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers", ***Journal of Applied Mathematics***, Article ID 941673, 7 p.

Wani, A. A., Bhat, S. A. and Rathore G. P. S. (2017) “Fibonacci-Like Sequences Associated With k-Pell, k-Pell-Lucas and Modified k-Pell Sequences”, ***Journal of Applied Mathematics and Computational MechanicS,*** 16(2), 159-171.

Wyler, O. (1965) “On Second Order Recurrences”, ***American Mathematical Monthly,*** 72, 500-506.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Taşyurdu, Y., Kefçi, B., Gültekin İ. and Deveci Ö. (2017) "k-Pell, k-Pell-Lucas and Modified k-Pell Matrix Sequences", ***4th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference,*** 03-07 May.

ÖZGEÇMİŞ

Büşra KEFÇİ, 1991 yılında Konya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Konya'da tamamladı. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve 2014 yılında mezun oldu. 2014 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Matematik Öğretmeni olarak atanmış ve görevine Erzincan Hacı Ali Akın Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde devam etmektedir. 2016 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.