T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS SAYILARINDA YENİ TEKRARLI BAĞINTILAR

Songül ÇELİK

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2019**

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Engin ÖZKAN danışmanlığında, Songül ÇELİK tarafından hazırlanan bu çalışma 19/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Engin ÖZKAN	İmza:
Üye	: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYDOĞDU	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 23 / 08 / 2019 tarih ve 33/..13..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarında yeni tekrarlı bağıntılar" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 19/08/2019

Songül ÇELİK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PELL, PELL-LUCAS, JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS SAYILARINDA YENİ TEKRARLI BAĞINTILAR

Songül ÇELİK

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu çalışmada, Pell sayıları çokgenlerin köşelerine her bir köşeye denk gelecek şekilde saat yönünde ilerleyerek yerleştirilmiştir. Daha sonra her bir köşeye denk gelen bu sayılar incelenmiş, arasında bir bağıntı bulunmuş ve ispatı yapılmıştır.

Sonra benzer işlemler Pell Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için elde edilip ispatı verildi.

2019, 38 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Binet formül, Fibonacci sayıları, Jacobsthal sayıları, Jacobsthal-Lucas sayıları, Pell sayıları, Pell Lucas sayıları.

ABSTRACT

Master Thesis

NEW RECURRENCES ON PELL NUMBERS, PELL-LUCAS NUMBERS, JACOBSTHAL NUMBERS AND JACOBSTHAL-LUCAS NUMBERS

Songül ÇELİK

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this study, the Pell numbers were placed clockwise to the vertices of the polygons with a number corresponding to each vertex. Then, a relation among the numbers corresponding to a vertex was obtained and proved.

The same procedure was repeated with Pell-Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers and their proof was given.

2019, 38 Pages

Keywords: Binet formula, Fibonacci numbers, Jacobstal numbers, Jacobsthal-Lucas numbers, Pell numbers, Pell-Lucas numbers.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sürecinde bana her türlü desteği sağlayan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN’a en içten duygularımla teşekkür ederim. Çalışmalarım boyunca desteklerini benden esirgemeyen arkadaşım İnan DURUKAN’a ablam Mülkiye ÇELİK’e ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Songül ÇELİK
Temmuz, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\{F_n\}$	Fibonacci sayı dizisi
F_n	n. Fibonacci sayısı
$\{J_n\}$	Jacobsthal sayı dizisi
J_n	n. Jacobsthal sayısı
$\{j_n\}$	Jacobsthal Lucas sayı dizisi
j_n	n. Jacobsthal Lucas sayısı
$\{L_n\}$	Lucas sayı dizisi
L_n	n. Lucas sayısı
$\{P_n\}$	Pell sayı dizisi
P_n	n. Pell sayısı
$\{Q_n\}$	Pell Lucas sayı dizisi
Q_n	n. Pell Lucas sayısı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi

1.GİRİŞ

Ortaçağın en büyük matematikçileri arasında adı geçen Leonardo Fibonacci'nin hayatı ile ilgili pek fazla bilgiye ulaşılamamaktadır. İtalya'da 1170'li yıllarda Pisa şehrinde doğduğu sanılmaktadır. Babasının işi nedeniyle Bugia adlı Kuzey Afrika limanına atandığı ve burada Arap bir hocadan Fibonacci'ye matematik dersi aldığı bilinmektedir. Hint Arap sayılarını (1,2,3,…) böylece öğrenir. Fibonacci matematiği Araplardan alıp Avrupa'nın tanımasını sağlayan kişi olarak da anılır.

Fibonacci hakkında bilgilere ulaşmak daha çok yazmış olduğu kitapları ile mümkün olmuştur. Fibonacci'nin 1202'de yazdığı ''Liber Abaci'' kitabı ilk yazdığı kitap olup bunun dışında''Practica Geometria'' (The Practice of Geometry) (1220), ''Liber Quadratorum'' (The Book of Square Numbers) (1225) ''Flos'' (The flower) (1225) yazmış olduğu matematik alanında diğer kitaplardır. Eserleri içinde en ünlü olan, Fibonacci sayılarının birbiriyle oranı olarak elde edilen Altın Oran'ında anlatıldığı ''Liber Abaci'' adlı kitabıdır.

Bu kitabında Fibonacci, bir arkadaşının tavşan çiftliği ile ilgili olduğunu iddia ettiği bir problem sorar. Tavşan çiftliğine ilk ay bir erkek ve bir dişi yavru tavşan konulmuştur. Bir ay sonra erginleşen bu tavşanlar bir çift yavru doğuruyor. Her ay erişken hale gelen tavşanlarda yavru tavşan doğuruyor. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, bu şekilde yavru doğurmaya devam ederlerse n. ayda kaç çift tavşan çiftlikte olur diye sorar. Bu soru Fibonacci sayılarının elde edilişini verir.

Çiftlikte ilk ay bir çift yeni doğmuş tavşan olsun. Henüz yavrulamadıkları için tavşanlar, ikinci ayda da çiftlikte bir çift tavşan vardır. Erişkin hale gelen bu tavşanlar bir çift yavru verecekleri için üçüncü ayda çiftlikte iki çift tavşan vardır. Dördüncü ayda doğan çift doğurmayacak ancak anne ve baba bir çift yavru yeniden yapacak ve çiftlikte dördüncü ayda üç çift tavşan vardır. Tavşanların çoğalmasına bu şekilde devam edilerek n. aydaki çiftlikteki tavşan çiftlerinin sayısı F_n ile gösterilirse , $F_1 = 1$ve $F_2 = 1$ olmak üzere,

$n \geq 1$ için

$$F_{n+2}=F_{n+1} + F_n,$$

yineleme bağıntısı ile bulunur. Yani ilk iki terim hariç sonraki her terim kendisinden önceki iki terim toplanarak bulunur. Buna göre Fibonacci sayıları 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, … şeklinde gösterilir.

Fibonacci sayılarının ardışık terimlerinden büyüğü küçüğüne oranlandığında elde edilen sayılar gittikçe Altın Oran'a yakınsar. 1,618… sayısı olan Altın Oran doğadaki canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında karşımıza çıkan uyum açısından en yetkin boyutları veren özel bir orandır.

Örneğin; ayçiçeğinin sağdan sola doğru ve soldan sağa doğru merkezinden dışarı doğru çıkıldığında tane sayılarının birbirine oranında, papatyada yaprakların sayılarında, çam kozalağında, tütün bitkisinde, salyangozun kabuğunda, deniz kabuğunda, Süleymaniye ve Selimiye camide, insan vücudunda, Mekke ve Kâbe'de de görülmektedir.

Fibonacci sayı dizisi sayılar teorisinde büyük öneme sahip olmasının yanında farklı bilim dallarında da sıklıkla kullanılmakta ve daha birçok yerde uygulanmaktadır.

İtalyan matematikçi olan Edouardo Lucas (1842-1891) Fibonacci sayı dizisinin başlangıç şartlarını değiştirerek ve Fibonacci sayılarında kullanılan bir terim kendisinden önceki iki terimin toplamına eşittir kuralını uygulamış ve Lucas sayı dizileri diye adlandırdığı yeni bir sayı dizisi tanımlamıştır. Bu sayı dizisi $n \geq 1$ için L_0=2 ve L_1=1 olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

yineleme bağıntısıyla elde edilir.

Bu dizilerden faydalanarak elde edilen ve bilim dünyasında ilgi uyandıran başka sayı dizileri de vardır.

Hoggatt (1965) kitabında Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni bağıntılar bulup ispatlamıştır.

Horadam (1971) dizilerle ilgili yaptığı çalışmalarda, Pell ve Pell Lucas sayı dizilerinin tanımlarını yapmış ve bu dizinin terimlerinin isimlerini Pell ve Pell Lucas sayıları diye ifadelendirmiştir. Ayrıca Jacobstal ve Jacobstal Lucas sayılarının genel formülünü ve karakteristik köklerini vermiştir.

Ivie (1972) çalışmasında, genelleştirilmiş Fibonacci dizileri için Q-matris formunun genel şeklinin tanımını vererek Q-matrisinin bazı özelliklerine yer vermiştir.

Hoggatt ve Bicknell (1973) Fibonacci polinomları üzerine yaptıkları çalışmalarında, Fibonacci polinomlarını Pascal üçgeniyle ilişkilendirmişlerdir.

Gould (1981) Fibonacci dizilerinde yaptığı çalışmalarda, Fibonacci dizisinde Q-matrisinin genel formunun şeklini tanımlayarak Q-matrisi ile ilgili bazı özellikleri açıklamıştır.

Spickerman (1982) çalışmasında, Tribonacci-Lucas sayılarının binet formüllerine yer vermiştir.

Vajda (1989) çalışmasında, Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine bazı özellikler bulmuştur.

Horadam (1996) Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini araştırmış, bu dizileri açıklamış ve bu dizilerin arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca, tanımladığı bu dizilerin bazı özelliklerini bulup ispatlamıştır.

Koshy (1998) Fibonacci dizisi ile ilgili yaptığı çalışmasında, Fibonacci sayılarında birçok bağıntılar bulmuştur.

Melham (1999) Pell ve Pell-Lucas sayıları üzerine yaptığı araştırmasında, Pell ve Pell-Lucas sayıları ile ilgili eşitlikleri açıklamış, Fibonacci sayıları ve Pell sayılarını toplam formülü ile göstermiştir.

Koshy (2001) yayınında, Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine özellik ve formül bulunmaktadır.

Catalani (2002) makalesinde, Fibonacci matrisini uzatan Tribomatrix adlı bir matris tanımlamıştır.

Özkan vd. (2003) adlı çalışmalarında, 3-adım Fibonacci dizilerinin Wall sayılarına ilişkin iki yeni teorem ispatlamışlardır. Bununla birlikte 3-adım Fibonacci dizileriyle ilgili beş varsayım vermişlerdir. Ayrıca 5×10^{5} den küçük asal sayılar için bu varsayımların bilgisayar doğrulamasını vermişlerdir.

Özkan (2003) makalesinde, nilpotent grubunda nilpotent sınıfı 4 ve p üslü(p asal sayı) olmak üzere 3 adım Genel Fibonacci dizileri elde etmiş ve elde edilen bu dizinin terimini veren bağıntılar bulmuştur.

Özkan (2004) makalesinde, bir nilpotent grubunda nilpotent sınıfı n ve p üslü (p asal sayı) olmak üzere 3 adım Genel Fibonacci dizilerini oluşturmuş ve dizinin α. terimini bulan formüller elde edip kanıtlamıştır.

Öcal vd. (2005) k-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine yaptıkları çalışmalarında, bu sayıların bazı temsillerine yer vermişlerdir. Elde edilen temsillerle Binet formülünü bu sayılar içinde elde etmişlerdir.

Stakhov ve Rozin (2006) araştırmalarında, Fibonacci ve Lucas p-sayılarına ulaşmış bu dizileri tanımlandırmış ve Binet formüllerini elde etmişlerdir. Binet formülünü p'nin farklı değerleri için de bulmuşlardır.

Kılıç vd. (2006) genelleştirilmiş k-mertebeli Pell sayıları üzerine yaptıkları çalışmalarında, bu sayılar üzerine k-dizilerini tanımlamış ve matris gösterimini yapmışlardır. Buldukları formüllerle doğrudan dizinin elemanlarının elde edilebileceğine ulaşmışlardır.

Özkan (2007) Fibonacci dizileri üzerine yaptığı çalışmasında, kısıtlanmış Fibonacci dizilerinde teoremler elde edip kanıtlamıştır.

Falcon ve Plaza (2007) Fibonacci sayıları üzerine yaptıkları çalışmalarında, bu sayılardan yeni bir genelleştirilmesi olarak k-Fibonacci sayı dizisini tanımlamışlardır bu tanımladıkları dizinin, Fibonacci ve Pell sayılarının genelleştirilmesi olduğunu bulmuşlardır.

Kılıç ve Taşcı (2008) Lucas ve genelleştirilmiş *k basamak* Fibonacci sayıları üzerine yaptıkları çalışmalarında, genelleştirilmiş Lucas sayıları için yeni bir tanımlama yapmışlardır. Genelleştirilmiş k basamak Lucas ve k basamak Fibonacci fonksiyonlarını ve bu fonksiyonlar arasında yeni bağıntılar bulmuşlardır.

Mikkawy ve Sogabe (2010) araştırmalarında, yeni bir aile k -Fibonacci sayılarında tanımlamışlardır.

Özkan vd. (2017) araştırmaları sonucunda, Lucas sayıları ve Fibonacci ailesi arasında bir bağıntı bulmuşlardır. k-Lucas sayı ailesi için yeni bir tanım yapıp elde edilen yeni sayı ailesinin Lucas ve Lucas sayı ailesine bağlı özelliklerini incelemişlerdir.

Özkan vd. (2017) çalışmalarında, Fibonacci ve Lucas sayı ailesinde bazı özellikler bulup ispatlamışlardır. Fibonacci ve Lucas sayı ailesi arasında bazı bağıntılara yer vermişlerdir.

Yang ve Zang (2018) Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine yaptıkları çalışmalarında, iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları için yeni bir kavram bulmuşlardır. İki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları arasında bu kavram ile bağıntılara ulaşmışlardır. Binet ve toplam formüllerini genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları içinde incelemişlerdir.

Özkan vd. (2018) araştırmalarında, 2- Fibonacci polinomları diye yeni bir polinom tanımlamışlardır ve 2- Fibonacci polinomların da yeni formüller bulmuşlardır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Fibonacci Sayıları

Tanım 2.1.1. F_0=0, F_1= 1 olmak üzere,

$n \geq 0$ için

$$F_{n+2=}\ F_n + F_{n+1} \tag{2.1}$$

bağıntısıyla tanımlanan sayılar Fibonacci sayıları olarak adlandırılır (Koshy, 2001).

Fibonacci sayı dizisi $n \geq 0$ için $\{F_n\} = \{0,1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...\}$ şeklindedir.

(2.1)'den

$$F_{n=}\ F_{n+2} - F_{n+1}$$

elde edilir.

Yani,

$$F_{-1}=F_1\text{-}F_0\ , \qquad F_{-2}=F_0\text{-}F_{-1}\ , \ldots$$

olup

$n \geq 0$ için $\{F_{-n}\} = \{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, 13,...\}$ şeklindedir.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olmak üzere α ve β bu denklemin kökleri olsun. Denklem sistemi çözüldüğünde

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ve\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olur.

O halde genel terimi bu dizinin,

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = A(\alpha)^n + B(\beta)^n$$

dir.

A ve B sabitlerinin eşiti,

$n = 0$ için

$$F_0 = A + B = 0$$

$n = 1$ için

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1 \text{ dir.}$$

Elde edilen denklem sistemi çözüldüğünde

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ve } B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Elde edilen A ve B sabitleri yerine yazıldığında Fibonacci sayıları,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu yazılış literatürde Fibonacci sayılarının Binet formülü olarak yer alır.

Teorem 2.1.2.

$n \geq 1$ için

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \tag{2.2}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

İspat:

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]$$

$$=F_{n+2}-1$$

elde edilmiş olur.■

2.2. Fibonacci Sayılarında Özdeşlikler

Fibonacci sayılarının bazı özellikleri şu şekildedir:

a) $n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1}F_s^2=F_nF_{n-1}, \tag{2.3}$$

b) $n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1}F_sF_{s-1}=\begin{cases}F_{n-1}^2, & n \text{ tek ise}\\ F_{n-1}^2-1, & n \text{ çift ise}\end{cases} \tag{2.4}$$

c) $n\in\mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1}F_{s-1}^2=F_{n-2}F_{n-1}+1, \tag{2.5}$$

d) $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \tag{2.6}$$

e) $m,n \in \mathbb{Z}^{+}$ için

$$F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{m+n+1}, \tag{2.7}$$

f) $m,n,r \in \mathbb{Z}^{+}$için

$$F_{m+n-2} F_{m+r-1} - F_{m+n-1} F_{m+r-2} = (-1)^{m+r-2} F_{n-r}, \tag{2.8}$$

(Koshy, 2001)

2.3. Q- Matrisi

Tanım 2.3.1.

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matris gösterimine Q- matrisi adı verilir (Koshy, 2001).

Teorem 2.3.2. $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$Q^n=\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

İspat: İspatı tümevarım yöntemiyle yaparsak,

$n = 1$ için

$$Q^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q$$

olup $n = 1$ için doğrudur.

$n = k$ için doğru kabul olsun.

Buradan,

$$Q^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bu takdirde $Q^{k+1} = Q^k Q^1$ olduğundan,

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

$n = k + 1$ için de

$$Q^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$$

olup

$n = k + 1$ için de doğrudur. İspat tamamlanır.■

Sonuç 2.3.3. $n \geq 1$ olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

İspat: $|Q| = (-1)$ ve $|Q^n| = (-1)^n$ dir. Teorem 2.3.2.den

$$|Q^n| = F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 \text{ dir.}$$

O halde,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

şeklindedir.■

2.4. Lucas Sayıları

Tanım 2.4.1.

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.9}$$

bağıntısıyla ifade edilen sayılara Lucas sayıları denir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için Lucas sayılarının Binet formülü

$$x^2 - x - 1 = 0$$

denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)\ ve\ \beta = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)$$

olmak üzere,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde yazılmaktadır.

Böylece kapalı form

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olarak verilir.

Negatif Lucas sayıları,

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

eşitliği ile bulunur.

Lucas sayıları için bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

$n \in \mathbb{Z}^+$ için ardışık Lucas sayılarının toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i = L_{n+1} - 1$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ için ardışık Lucas sayılarının kareleri toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i^2 = L_{n-1} L_n + 2$$

şeklindedir.

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ için, Lucas sayılarının ardışık terimlerinin çarpımının toplamı

$$L_{n+1}L_m + L_n L_{m-1} = 5F_{m+n}$$

dir.

Teorem 2.4.2.

$n \geq 1$ için

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n \tag{2.10}$$

eşitliği Fibonacci ve Lucas sayıları arasında vardır (Koshy, 2001).

İspat: Lucas sayılarının Binet formülünü yerine yazarsak,

$$L_{n-1} + L_{n+1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$$

$$= \alpha^n(\alpha^{-1} + \alpha) + \beta^n(\beta^{-1} + \beta)$$

$\alpha.\beta = -1$ olduğu için

$$= \alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\beta - \alpha)$$

$$= (\alpha - \beta)(\alpha^n - \beta^n)$$

$(\alpha-\beta)=\sqrt{5}$ olduğu için

$$(\alpha-\beta)^2\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha-\beta)}=5F_n$$

elde edilir.■

Teorem 2.4.3.

Lucas sayıları arasında $n\geq 1$ için

$$L_nL_{n+1}=L_{2n+1}+(-1)^n \tag{2.11}$$

eşitliği vardır (Hoggatt, 1965).

İspat: : Lucas sayılarının Binet formülünü yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}L_nL_{n+1}&=(\alpha^n+\beta^n)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})\\&=(\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}+(\alpha\beta)^n\beta+(\alpha\beta)^n\alpha)\\&=(L_{2n+1}+(-1)^n\beta+(-1)^n\alpha)\\&=\left(L_{2n+1}+(-1)^n(\beta+\alpha)\right)\\&=L_{2n+1}+(-1)^n\end{aligned}$$

elde edilir. ■

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Pell Sayı Dizisi

Tanım 3.1.1. $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve $n > 1$ olmak üzere $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n\epsilon N}^{\infty}$ şeklinde tanımlanan diziye Pell sayı dizisi denir.

Pell sayı dizisi $n \in \mathbb{N}$ için $\{P_n\} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \dots\}$ şeklindedir (Horadam, 1971).

$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ şeklindedir. α ve β bu karakteristik denklemin kökleri olsun,

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

dir.

Pell sayı dizisinin Binet formülü $P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklinde yazılmaktadır.

Pell sayı dizisinin negatif indislileri

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

şeklinde gösterilmektedir.

Ayrıca,

$$\alpha + \beta = 2, \alpha - \beta = 2\sqrt{2}, \alpha\beta = -1$$

dir.

Teorem 3.1.1. (Cassini Formülü)

$n \geq 1$ olmak üzere,

$$P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n$$

eşitliği vardır.

İspat: Pell sayısının Binet formülünü yerine yazarsak

$$P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} . \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \frac{(\alpha^n - \beta^n)^2}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \beta^{n-1}\alpha^{n+1} - \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} - \frac{(\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n - \beta^{2n})}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{2n} - (\alpha\beta)^n \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) - \beta^{2n} - \alpha^{2n} + 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$, $\alpha + \beta = 2$, $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$, $\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$= \frac{-(-1)^n \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\right) + 2(-1)^n}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{8(-1)^n}{8}$$

$$= (-1)^n$$

olur ve ispat tamamlanmıştır ■

Teorem 3.1.2. (Honsberger Formülü)

$m \geq 1 , n \geq 1$ için

$$P_{n+m} = P_{n-1}P_m + P_nP_{m+1}$$

eşitliği ile elde edilir.

İspat: Eşitliğin sağ tarafını kullanarak sol tarafına eşit olduğunu gösterelim.

$$P_{n-1}P_m + P_nP_{m+1} = \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right) + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{\alpha^n \beta - \beta^n \alpha}{(\alpha\beta)(\alpha - \beta)} \right) \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (-\alpha^{n+m}\beta + \alpha^n \beta^{m+1} + \beta^n \alpha^{m+1} - \beta^{m+n}\alpha + \alpha^{n+m+1} - \alpha^n \beta^{m+1} - \beta^n \alpha^{m+1} + \beta^{m+n+1})$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left(\alpha^{n+m}(\alpha - \beta) - \beta^{n+m}(\alpha - \beta) \right)$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^{n+m} - \beta^{n+m})}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha^{n+m} - \beta^{n+m})}{(\alpha - \beta)}$$

$$= \; P_{n+m}$$

olup ispat tamamlanmış olur.■

3.2. Pell-Lucas Sayı Dizisi

Tanım 3.2.1. $Q_0 = 2,\ Q_1 = 2$ ve $n > 1$ olmak üzere $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}^{\infty}$ şeklinde tanımlanan tamsayı dizisine Pell-Lucas sayı dizisi denir.

Pell-Lucas sayı dizisi $n \in \mathbb{N}$ için $\{Q_n\} = \{2,\ 2,\ 6, 14,\ 34,\ 82,\ 198,\ 478,\ 1154,\ \ldots\}$ şeklinde gösterilmektedir (Horadam, 1971).

Pell-Lucas sayı dizisinin Binet formülü

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

olmak üzere $Q_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklinde gösterilmektedir.

Teorem 3.2.1.

$n \geq 1$ için

$$Q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

eşitliği mevcuttur (Horadam, 1971).

İspat:

$$P_{n+1} + P_{n-1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} - \alpha^n\beta + \beta^n\alpha}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

$$= (\alpha^n + \beta^n)$$

$$= Q_n$$

olur ve ispat tamamlanmıştır.■

Teorem 3.2.2.

$n \geq 1$ için

$$P_{2n} = P_n Q_n$$

eşitliği mevcuttur (Horadam, 1971).

İspat: Teorem 3.1.2. de

$m = n$ alınırsa

$$P_{n+n} = P_{n-1}P_n + P_nP_{n+1}$$

$$P_{2n} = P_n(P_{n-1} + P_{n+1})$$

olur. Teorem 3.2.1. den

$$P_{2n} = P_n Q_n$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.■

3.3. Jacobsthal Sayı Dizisi

Tanım 3.3.1. J_0= 0 , J_1 = 1 ve $n > 1$ olmak üzere

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir (Horadam, 1996).

3.4. Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi

Tanım 3.4.1. j_0= 2 ve j_1 = 1 olmak üzere $n > 1$ için

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanan $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ sayı dizisine Jacobsthal-Lucas sayı dizisi denir (Horadam, 1996).

Teorem 3.4.1. $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = 2,\ x_2 = -1$ olmak üzere Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü

$$J_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

$$j_n = x_1^n + x_2^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir (Horadam, 1996).

İspat:

$$x_1 > x_2, \qquad x_2 < 0 < x_1, \qquad |x_2| < x_1$$

eşitsizlikleri ve

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 x_2 = -2, \qquad x_1 - x_2 = 3$$

eşitlikleri sağlanır.

$$J_n = Ax_1^n + Bx_2^n$$

şeklinde yazılır.

A ve B değerlerini bulalım. $n = 0,\ n = 1$ için değerler yazılırsa $A = \frac{1}{x_1 - x_2} = -B$ elde edilir. Böylece Jacobsthal sayılarının Binet formülü, $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $x_1 = 2, x_2 = -1$ ise

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülü $j_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ şeklinde yazılıp buradan A ve B değerlerini bulalım: $n = 0, n = 1$ için değerler yazılırsa

$$A = \frac{3}{x_1 - x_2} = 2 - B$$

elde edilir.

$x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $x_1 = 2, x_2 = -1$ ise,

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

olup ispat tamamlanmış olur.■

Tamsayı dizilerinin birçok özelliği, Binet formülleri kullanılarak elde edilebilir.

Teorem 3.4.2. m, n herhangi iki tamsayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için

a) $J_{n+1} = 2^n - J_n$

b) $J_{n-1} + J_n = 2^{n-1}$

c) $j_{n+1} = J_n + 2J_{n-1} = 2J_n + (-1)^n$

d) $j_{n+1} = 2j_n - 3(-1)^n$

e) $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$

f) $3J_n + j_n = 2^{n+1}$

g) $J_{m-n} = (-2)^{-n}(J_m j_n - j_{m+n})$

(Horadam, 1996).

İspat: a ve b seçeneklerini Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formüllerini kullanarak ispatlayalım. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilir.

a)

$$J_{n+1} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} = \frac{3.2^n - 2^n + (-1)^n}{3}$$

$$= \frac{3.2^n}{3} - \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)$$

$$= 2^n - J_n$$

olup ispat tamamlanmış olur. ■

b)

$$J_{n-1} + J_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} + \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

$$= \frac{2^{n-1} + (-1)^n + 2^n - (-1)^n}{3}$$

$$= \frac{2^{n-1} + 2^n}{3}$$

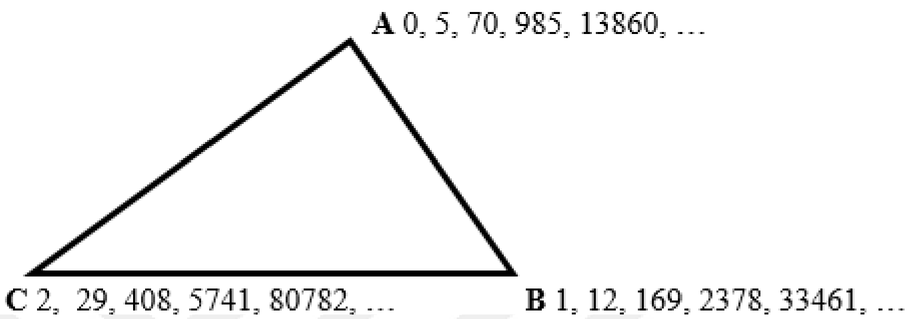
$$= 2^{n-1}$$

olup ispat tamamlanmış olur.■

4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

4.1. Pell Sayılarında Yeni Tekrarlı Bağıntılar

Pell sayıları, üçgenin köşelerine ve her bir köşeye denk gelecek şekilde saat yönünde ilerleyerek Şekil 4.1. deki gibi yerleştirilebilir.

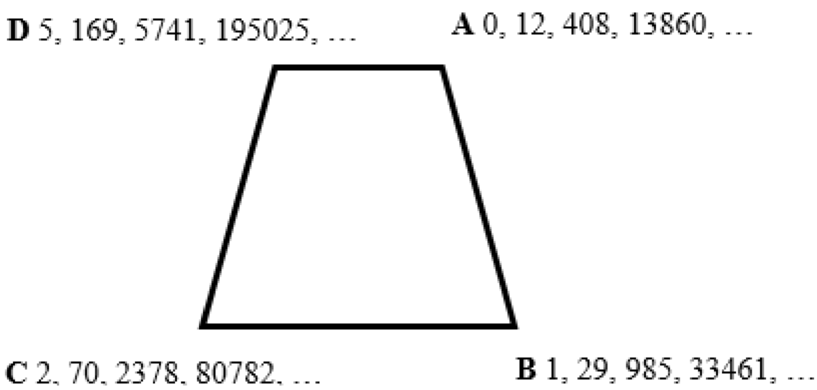


Şekil 4.1. Üçgenin köşelerine dizilen Pell sayıları

Üçgenin köşelerinden herhangi birine denk gelen sayılar arasındaki ilişki ilk iki terim hariç bir terim kendisinden önceki ilk iki terimin sırası ile 14 ve 1 ile çarpılıp toplanmasıyla bulunabilir. Gerçekten de A köşesindeki terimler incelendiğinde

$13860 = 985.14 + 1.70$ eşitliğini sağladığı görülür.

Aynı işlemleri dörtgen için de aşağıdaki Şekil 4.2. deki gibi yaptığımızda



Şekil 4.2. Dörtgenin köşelerine dizilen Pell sayıları

Dörtgende de ilk iki terim hariç herhangi bir terim kendisinden önceki ilk iki terimin sırası ile 34 ve -1 ile çarpılıp toplanmasıyla bulunabilir. Gerçekten de B köşesindeki terimler incelendiğinde
$985.34 - 1.29 = 33461$ eşitliğini sağladığı görülür.

Bu işlemler nokta, doğru parçası ve diğer bazı çokgenler için tekrarlandığında Tablo 4.1. deki sonuçlar elde edildi.

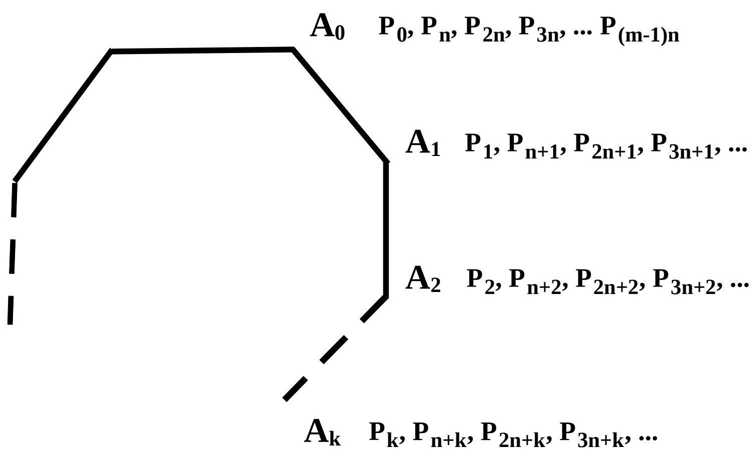
Tablo 4.1. Her biri çokgen için kullanılan sayıların sıralı ikilileri

Nokta	Doğru parç.	Üçgen	Dörtgen	Beşgen	Altıgen	Yedigen
(2,1)	(6,-1)	(14,1)	(34,-1)	(82,1)	(198,-1)	(478,1)

Tablo 4.1. de birinci bileşenler incelendiğinde $\{2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \dots\}$ Pell-Lucas sayı dizisinin sayıları olduğu görülür. Burada bir n-gende kullanılan Pell-Lucas sayısına Q_n denirse; üçgende Q_3, dörtgende Q_4, … benzer şekilde n-gende $\boldsymbol{Q_n}$ olur.

İkinci bileşenlere denk gelen sayı dizisinin sayıları $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$'dir.

Bundan sonra çalışmaya, elde edilen bağıntının n-gene genelleştirilmesiyle devam edildi. Bunun için $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ şeklinde n-genin köşeleri saat yönünde ilerleyerek isimlendirildi.



.

Şekil 4.3. Bir n-genin köşelerine dizilen Pell sayıları

Şekil 4.3. te A_k köşesine denk gelen m. terim $P_{(m-1)n+k}$ olup aşağıdaki Teorem 4.1.1. de eşiti bulunmuştur.

Teorem 4.1.1. P_n Pell sayısı, Q_n Pell-Lucas sayısı olmak üzere $n > 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için bir n-gende A_k köşesine denk gelen m. terim

$$P_{(m-1)n+k} = P_{(m-2)n+k}Q_n - (-1)^n P_{(m-3)n+k}$$

bağıntısıyla elde edilir.

İspat: Eşitliğin sağ tarafını kullanarak sol tarafını elde edeceğiz.

Bağıntının sağ tarafında Pell ve Pell-Lucas sayılarının Binet formüllerini yerine yazalım.

$$P_{(m-2)n+k}Q_n - (-1)^n P_{(m-3)n+k}$$

$$= \frac{\alpha^{(m-2)n+k} - \beta^{(m-2)n+k}}{\alpha - \beta}.(\alpha^n + \beta^n) - (-1)^n.\frac{\alpha^{(m-3)n+k} - \beta^{(m-3)n+k}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{(m-1)n+k} - \beta^{(m-1)n+k}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{(m-2)n+k}.\beta^n}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^n.\beta^{(m-2)n+k}}{\alpha - \beta}$$

$$-\frac{(-1)^n.\alpha^{(m-3)n+k}}{\alpha - \beta} + \frac{(-1)^n.\beta^{(m-3)n+k}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{(m-1)n+k} - \beta^{(m-1)n+k}}{\alpha - \beta} + \alpha^{(m-3)n+k}\left(\frac{\alpha^n\beta^n - (-1)^n}{\alpha - \beta}\right)$$

$$-\beta^{(m-3)n+k}\left(\frac{\beta^n\alpha^n - (-1)^n}{\alpha - \beta}\right)$$

$\alpha.\beta = -1$ olduğundan

$$= \frac{\alpha^{(m-1)n+k} - \beta^{(m-1)n+k}}{\alpha - \beta} + \alpha^{(m-3)n+k}\left(\frac{(-1)^n - (-1)^n}{\alpha - \beta}\right)$$

$$-\beta^{(m-3)n+k}\left(\frac{(-1)^n-(-1)^n}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\frac{\alpha^{(m-1)n+k}-\beta^{(m-1)n+k}}{\alpha-\beta}$$

$$=P_{(m-1)n+k}$$

eşitliği elde edilip ispat tamamlanmış olur.■

Yukarıda Teorem 4.1.1. de elde ettiğimiz bağıntı

$k=0$ için

$$P_{(m-1)n}=P_{(m-2)n}Q_n-(-1)^nP_{(m-3)n} \tag{4.1}$$

olur.

(4.1)'deki bağıntıda n tek sayı olmak üzere

$m=3$ için $P_{2n}=P_nQ_n+P_0$ ($P_0=0$ olduğundan)

$P_{2n}=P_nQ_n$ (Teorem 3.2.2. den)

$m=4$ için $P_{3n}=P_{2n}Q_n+P_n$

$P_{3n}=P_n(Q_n^2+1)$

$m=5$ için $P_{4n}=P_{3n}Q_n+P_{2n}$

$P_{4n}=P_n(Q_n^2+1)Q_n+P_nQ_n$

$P_{4n}=P_n(Q_n^3+2Q_n)$

$m=6$ için $P_{5n}=P_{4n}Q_n+P_{3n}$

$P_{5n}=P_n(Q_n^3+2Q_n)Q_n+P_n(Q_n^2+1)$

$P_{5n}=P_n(Q_n^4+3Q_n^2+1)$

olur.

Benzer şekilde,

$$P_{6n} = P_n(Q_n^5 + 4Q_n^3 + 3Q_n)$$

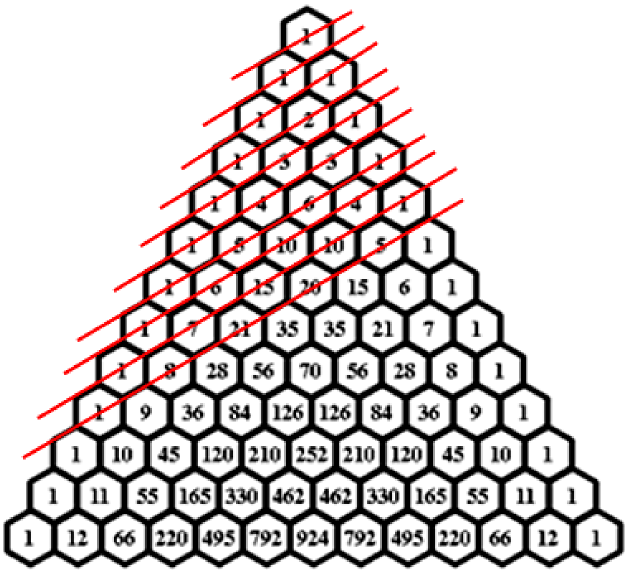
$$P_{7n} = P_n(Q_n^6 + 5Q_n^4 + 6Q_n^2 + 1)$$

$$P_{8n} = P_n(Q_n^7 + 6Q_n^5 + 10Q_n^3 + 4Q_n)$$

$$P_{9n} = P_n(Q_n^8 + 7Q_n^6 + 15Q_n^4 + 10Q_n^2 + 1)$$

elde edilir.

Yukarıda elde ettiğimiz P_{mn} şeklindeki Pell sayıları için Q_n lerin derecesi $m-1$ ile başlayıp ikişer ikişer azalmaktadır.



Şekil 4.4. Pascal Üçgeni

Ayrıca $P_{2n}, P_{3n}, P_{4n}, ..., P_{9n}$ nin katsayıları incelendiğinde Şekil 4.4.deki gibi çapraz duruyor. Pascal üçgeninde her bir sayının kombinasyon olarak bir eşiti vardır.

Örneğin: P_{9n} deki katsayılar 1, 7, 15, 10, 1 olup

$$1=\binom{8}{0},\quad 7=\binom{7}{1},\quad 15=\binom{6}{2},\quad 10=\binom{5}{3},\quad 1=\binom{4}{4}$$

şeklinde yazılabilir. Kombinasyonların üst satırındaki doğal sayılar birer azalırken, alt satırındaki doğal sayılar birer artmaktadır.

O halde P_{mn} deki ilk katsayı $\binom{m-1}{0}$ ile başlar ve $\binom{m-2}{1},\binom{m-3}{2},\binom{m-4}{3},\dots,\binom{m-t}{t-1}$ şeklinde devam eder.

Buradan n tek tamsayı olmak üzere,

$$P_{mn}=P_n\left(\sum_{t=0}^{\frac{2m-3-(-1)^m}{4}}\binom{m-t-1}{t}Q_n^{m-2t-1}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer n çift tamsayı ise

$$P_{mn}=P_n\left(\sum_{t=0}^{\frac{2m-3-(-1)^m}{4}}(-1)^t\binom{m-t-1}{t}Q_n^{m-2t-1}\right)$$

şeklindedir.

Bu iki bağıntıyı birleştirirsek aşağıdaki Teorem 4.1.2. deki bağıntı elde edilir.

Teorem 4.1.2. Bir n- gende Pell sayıları saat yönünde her köşeye bir sayı denk gelecek şekilde yerleştirildiğinde A_0 köşesine denk gelen sayılar arasında $m\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$P_{mn} = P_n\left(\sum_{t=0}^{\frac{2m-3-(-1)^m}{4}} (-1)^{(n+1)t} \binom{m-t-1}{t} Q_n^{m-2t-1}\right)$$

bağıntısı vardır.

İspat: Tümevarım yöntemi ile ispatlarsak

$m = 1$ için

$$P_n = P_n\left(\sum_{t=0}^{0}(-1)^{(n+1)t} \binom{-t}{t} Q_n^{-2t}\right) = P_n\left((-1)^0 \binom{0}{0} (Q_n)^0\right)$$

$$= P_n . 1$$

$$= P_n$$

olur. $m = 1$ için doğrudur.

$m = 2$ için

$$P_{2n} = P_n\left(\sum_{t=0}^{0}(-1)^{(n+1)t} \binom{1-t}{t} Q_n^{1-2t}\right) = P_n\left((-1)^0 \binom{1}{0} Q_n\right)$$

$$= P_n Q_n \qquad \text{(Teorem 3.2.2. den)}$$

$$= P_{2n}$$

olur. $m = 2$ için de doğrudur.

$k \geq 3$ olmak üzere $m = k$ için

$$P_{kn} = P_n\left(\sum_{t=0}^{\frac{2k-3-(-1)^k}{4}} (-1)^{(n+1)t} \binom{k-t-1}{t} Q_n^{k-2t-1}\right) \qquad (4.2)$$

doğru olsun.

$m = k + 1$ için

$$P_{(k+1)n} = P_n \left(\sum_{t=0}^{\frac{2k-1-(-1)^{k+1}}{4}} (-1)^{(n+1)t} \binom{k-t}{t} Q_n^{k-2t} \right)$$

doğru mudur?

Bunun için (4.1)'deki bağıntıyı kullanırsak

$$P_{(k+1)n} = P_{kn}Q_n - (-1)^n P_{(k-1)n}$$

olur.

Bu bağıntının sağ tarafına (4.2)'deki eşitliği yazarsak

$$P_{(k+1)n} = P_{kn}Q_n - (-1)^n P_{(k-1)n}$$

$$= P_n \left(\sum_{t=0}^{\frac{2k-3-(-1)^{k}}{4}} (-1)^{(n+1)t} \binom{k-t-1}{t} Q_n^{k-2t-1} \right) . Q_n$$

$$-(-1)^n P_n \left(\sum_{t=0}^{\frac{2k-5-(-1)^{k-1}}{4}} (-1)^{(n+1)t} \binom{k-t-2}{t} Q_n^{k-2t-2} \right)$$

olur.

$k = 2r$ olsun,

$$= P_n \left(\sum_{t=0}^{r-1} (-1)^{(n+1)t} \binom{2r-t-1}{t} Q_n^{2r-2t} \right)$$

$$+P_n\left(\sum_{t=0}^{r-1}(-1)^{(n+1)(t+1)}\ \binom{2r-t-2}{t}\ Q_n^{2r-2t-2}\right)$$

$$\begin{aligned}=P_n\Bigg[&\binom{2r-1}{0}Q_n^{2r}+(-1)^{n+1}\binom{2r-2}{1}Q_n^{2r-2}+\binom{2r-3}{2}Q_n^{2r-4}+\cdots\\&+(-1)^{(n+1)(r-1)}\binom{r}{r-1}Q_n^{2}+(-1)^{n+1}\binom{2r-2}{0}Q_n^{2r-2}\\&+\binom{2r-3}{1}Q_n^{2r-4}+\cdots+(-1)^{(n+1)(r-1)}\binom{r}{r-2}Q_n^{2}\\&+(-1)^{(n+1)r}\binom{r-1}{r-1}\Bigg]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Buradan,

$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}=\binom{n}{r}$$

Pascal eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}=P_n\Bigg(&Q_n^{2r}+(-1)^{n+1}\binom{2r-1}{1}Q_n^{2r-2}+\binom{2r-2}{2}Q_n^{2r-4}+\cdots\\&+(-1)^{(n+1)(r-1)}\binom{r+1}{r-1}Q_n^{2}+(-1)^{(n+1)r}\Bigg)\end{aligned}$$

$$=P_n\left(\sum_{t=0}^{r}(-1)^{(n+1)t}\ \binom{2r-t}{t}\ Q_n^{2r-2t}\right)$$

$$=P_n\left(\sum_{t=0}^{\frac{2k-1-(-1)^{k+1}}{4}}(-1)^{(n+1)t}\ \binom{k-t}{t}\ Q_n^{k-2t}\right)$$

elde edilir.

$k=2r-1$ olsun

$$= P_n\left(\sum_{t=0}^{r-1}(-1)^{(n+1)t}\binom{2r-t-2}{t}Q_n^{2r-2t-1}\right)$$

$$+P_n\left(\sum_{t=0}^{r-2}(-1)^{(n+1)(t+1)}\binom{2r-t-3}{t}Q_n^{2r-2t-3}\right)$$

$$= P_n\left(\binom{2r-2}{0}Q_n^{2r-1} + (-1)^{n+1}\binom{2r-3}{1}Q_n^{2r-3} + \binom{2r-4}{2}Q_n^{2r-5} + \cdots\right.$$

$$+ (-1)^{(n+1)(r-1)}\binom{r-1}{r-1}Q_n + (-1)^{n+1}\binom{2r-3}{0}Q_n^{2r-3}$$

$$\left.+\binom{2r-4}{1}Q_n^{2r-5} + \cdots + (-1)^{(n+1)(r-1)}\binom{r-1}{r-2}Q_n\right)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan,

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

Pascal eşitliği kullanılarak

$$= P_n\left[Q_n^{2r-1} + (-1)^{n+1}\binom{2r-2}{1}Q_n^{2r-3} + \binom{2r-3}{2}Q_n^{2r-5} + \cdots\right.$$
$$\left.+ (-1)^{(n+1)(r-1)}\binom{r}{r-1}Q_n\right]$$

$$= P_n\left(\sum_{t=0}^{r-1}(-1)^{(n+1)t}\binom{2r-t-1}{t}Q_n^{2r-2t-1}\right)$$

$$= P_n\left(\sum_{t=0}^{\frac{2k-1-(-1)^{k+1}}{4}}(-1)^{(n+1)t}\binom{k-t}{t}Q_n^{k-2t}\right)$$

elde edilir.

O halde $m = k + 1$ için de doğrudur. İspat tamamlanmış olur. ■

Sonuç olarak; $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere Teorem 4.1.2. deki bağıntı Pell sayıları için elde edilmiş genel bir bağıntıdır.

Teorem 4.1.3. Q_n Pell-Lucas sayısı olmak üzere $n > 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için bir n-gende A_k köşesine denk gelen m. terim

$$Q_{(m-1)n+k} = Q_{(m-2)n+k}Q_n - (-1)^n Q_{(m-3)n+k}$$

bağıntısıyla elde edilir.

İspat: Bağıntıda eşitliğin sağ tarafını kullanarak sol tarafını elde edeceğiz. Bunun için eşitliğin sağ tarafında Pell-Lucas sayılarının Binet formülünü yerine yazalım.

$$Q_{(m-2)n+k}Q_n - (-1)^n Q_{(m-3)n+k} = \left(\alpha^{(m-2)n+k} + \beta^{(m-2)n+k}\right)(\alpha^n + \beta^n)$$
$$-(-1)^n\left(\alpha^{(m-3)n+k} + \beta^{(m-3)n+k}\right)$$

$$= \alpha^{(m-1)n+k} + \beta^{(m-1)n+k} + \alpha^{(m-2)n+k}\beta^n + \alpha^n\beta^{(m-2)n+k}$$
$$- (-1)^n\left(\alpha^{(m-3)n+k} + \beta^{(m-3)n+k}\right)$$

$$= \alpha^{(m-1)n+k} + \beta^{(m-1)n+k} + (\alpha\beta)^n\left(\alpha^{(m-3)n+k} + \beta^{(m-3)n+k}\right)$$
$$- (-1)^n\left(\alpha^{(m-3)n+k} + \beta^{(m-3)n+k}\right)$$

$\alpha\beta = -1$ olduğundan eşitlikte yerine yazılırsa

$$= \alpha^{(m-1)n+k} + \beta^{(m-1)n+k} + (-1)^n\left(\alpha^{(m-3)n+k} + \beta^{(m-3)n+k}\right)$$
$$- (-1)^n\left(\alpha^{(m-3)n+k} + \beta^{(m-3)n+k}\right)$$

$$= \alpha^{(m-1)n+k} + \beta^{(m-1)n+k}$$

$$= Q_{(m-1)n+k}$$

eşitliği elde edilip ispat tamamlanmış olur. ■

4.2. Jacobsthal Sayılarında Yeni Tekrarlı Bağıntılar

Jacobsthal sayıları da Pell sayılarına benzer şekilde üçgen, dörtgen,…, n-genin köşelerine her bir köşeye bir sayı denk gelecek şekilde saat yönünde ilerleyerek yerleştirildiğinde bu köşelere denk gelen sayılar arasında da bağıntılar bulundu.

Teorem 4.2.1. J_n Jacobsthal sayısı, j_n Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere $n > 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için bir n-gende A_k köşesine denk gelen m. terim

$$J_{(m-1)n+k} = J_{(m-2)n+k} j_n - (-2)^n J_{(m-3)n+k}$$

bağıntısıyla elde edilir.

İspat: Bağıntıda eşitliğin sağ tarafını kullanarak sol tarafını elde edeceğiz. Bunun için eşitliğin sağ tarafında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülünü yerine yazalım.

$$J_{(m-2)n+k} j_n - (-2)^n J_{(m-3)n+k} = \left(\frac{2^{(m-2)n+k} - (-1)^{(m-2)n+k}}{3}\right)(2^n + (-1)^n)$$

$$-(-2)^n \left(\frac{2^{(m-3)n+k} - (-1)^{(m-3)n+k}}{3}\right)$$

$$= \frac{2^{(m-1)n+k} - (-1)^{(m-1)n+k}}{3} + \frac{(-1)^n 2^{(m-2)n+k} - 2^n(-1)^{(m-2)n+k}}{3}$$

$$- \frac{(-1)^n 2^{(m-2)n+k} - 2^n(-1)^{(m-2)n+k}}{3}$$

$$= \frac{2^{(m-1)n+k} - (-1)^{(m-1)n+k}}{3}$$

$$= J_{(m-1)n+k}$$

eşitliği elde edilip ispat tamamlanmış olur.■

Teorem 4.2.2. j_n Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere $n > 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için bir n-gende A_k köşesine denk gelen m. terim

$$j_{(m-1)n+k} = j_{(m-2)n+k}j_n - (-2)^n j_{(m-3)n+k}$$

bağıntısıyla elde edilir.

İspat: Bunun için eşitliğin sağ tarafında Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet formülünü yerine yazalım.

$$j_{(m-2)n+k}j_n - (-2)^n j_{(m-3)n+k} = \left(2^{(m-2)n+k} + (-1)^{(m-2)n+k}\right)(2^n + (-1)^n)$$

$$-(-2)^n\left(2^{(m-3)n+k} + (-1)^{(m-3)n+k}\right)$$

$$= 2^{(m-1)n+k} + (-1)^{(m-1)n+k} + (-1)^{(m-2)n+k}2^n + (-1)^n 2^{(m-2)n+k}$$

$$-(-1)^{(m-2)n+k}2^n - (-1)^n 2^{(m-2)n+k}$$

$$= 2^{(m-1)n+k} + (-1)^{(m-1)n+k}$$

$$= j_{(m-1)n+k}$$

eşitliği elde edilip ispatlanmıştır.■

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas sayıları çokgenlerin köşelerine saat yönünde yerleştirildi. Bu sayıların $n > 2,\ n \in \mathbb{N}$ için bir üçgende, dörtgende,… n −gende A_k köşesine denk gelen m. terimi veren bağıntılar bulundu. Öneri olarak her bir köşeye denk gelen terimler arasında yeni bağıntılar bulunup bu bağıntılar arasında yeni bulgulara ulaşılabilir.

KAYNAKLAR

Catalani, M. (2002) “*Identities for Tribonacci-related Sequences*”, ***Cornell University Library***, 1-6.

El-Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010) “A New Family of k-Fibonacci Numbers”, ***Applied Mathematic and Computation,*** 215, 4456-4461.

Falcon, S. and Plaza, A. (2007) “On the Fibonacci k-numbers” ,***Chaos Solitions and Fractals***, 32,1615-1624.

Gould, H. W. (1981) “A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem”, ***Fibonacci Quarterly***, 19(3).

Hoggatt, Jr. V. E. (1965) “Problem B-60”, ***The Fibonacci Quarterly,*** 3:3 (Oct.), 238.

Hoggatt, Jr. and Bicknell, M. (1973) “Generalized Fibonacci Polynomials and Zeckendorf Theorem”, ***The Fibonacci Quarterly,*** 11(4), 399-419.

Horadam, A.F. (1971) “ Pell Identities ”, ***Fibonacci Quarterly,*** 9(3),245-252.

Horadam, A.F. (1996) “Jacobsthal representation numbers ”, ***Fibonacci Quarterly,*** 34, 40-54.

Ivie, J. (1972) “A General Q-Matrix”, ***Fibonacci Quarterly,*** Vol. 10, No. 3, pp. 255-261.

Kiliç, E., Altunkaynak, B. and Taşçi, D. (2006) “ On the Computing of the Generalized Order- k Pell Numbers”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 181,511-515.

Kiliç, E. and Tasci, D. (2008) “Generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers”, ***Rocky Mountain J. Math***. 38.

Koshy, T.(1998) “New Fibonacci and Lucas identities”, ***The Mathematical Gazette,*** 82 (Nov.), 481-184.

Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, ***Wiley-Interscience publishing,*** Canada.

Melham, R. (1999) “Sums involving Fibonacci and Pell numbers”, ***Portugaliae Mathematica,*** 56(3),309-317.

Öcal, A.A., Tuğlu, N. and Altinişik, E. (2005) “On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers”, ***Applied Mathematics and Computations,*** 170(1).

Özkan, E. (2003) “On General Fibonacci sequences in groups”, ***Turkısh Journal of Mathematıcs,*** 27, 525-537.

Özkan, E., Aydın, H. and Dikici, R. (2003) “3-step Fibonacci series modulo m ”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 143, 165-172.

Özkan, E. (2004) “Fibonacci sequences in nilpotent groups with class n”, ***Chiang Mai Journal of Science,*** 31, 205-212.

Özkan, E. (2007) “On truncated Fibonacci sequences”, ***Indıan Journal of Pure Mathematıcs,*** 38(4), 241-251.

Özkan, E., Altun, İ. and Göçer, A. (2017) “On relationship among a new family of k-Fibonacci, k-Lucas numbers, Fibonacci and Lucas numbers”, ***Chiang Mai Journal of Scıence,*** 44, 1744-1750.

Özkan, E., Aydoğdu, A. and Altun, İ. (2017) “Some identities for a family of Fibonacci and Lucas numbers”, ***Journal of Mathematics and Statistical Science,*** 3, 295-303.

Özkan, E., Taştan, M. and Aydoğdu, A. (2018) “2-Fibonacci polynomials in the family of Fibonacci numbers. ”, ***Notes on Number Theory and Discrete Mathematics,*** 24, 47-55.

Stakhov, A. and Rozin, B. (2006) “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers”, ***Chaos, Solitons & Fractals,*** 27 (5), 1162–1177.

Vajda, S. (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood, Chichester***.

W.R. Spickerman (1982) “*Binet’s formula fort he Tribonacci sequence*”, ***The Fibonacci Quarterly,*** 20(2),pp.118-120.

Yang, J. and Zhang, Z. (2018) “Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 339, 451–458.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Erzincan'da doğdu. İlkokul, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 1997 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2001 yılında mezun oldu. 2001 yılında MEB Bakanlığı bünyesinde öğretmenliğe başladı. Erzincan Sosyal Bilimler Lisesinde öğretmenliğe devam etmektedir.2015-2016 bahar döneminde Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.