T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REEL KUATERNİYONLARIN HAMİLTON MATRİSLERİNİN SPİNORLAR İLE İFADESİ

Emrah YILDIRIM

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2020

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Reel Kuaterniyonların Hamilton Matrislerinin Spinorlar ile İfadesi" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 05/08/2020

Emrah YILDIRIM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL KUATERNİYONLARIN HAMİLTON MATRİSLERİNİN SPİNORLAR İLE İFADESİ

Emrah YILDIRIM

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, reel kuaterniyonlar ve spinorlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tezin temelini oluşturan reel kuaterniyonların Hamilton matrisleri tanıtılmıştır ve bu matrisler ile ilgili bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca spinorların reel kuaterniyonlar ile ilişkisinden kısaca bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm bu tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölüm üç alt başlıktan oluşmaktadır. Öncelikle reel kuaterniyonlar ile spinorlar arasında bir dönüşüm verielerek bu dönüşümün bazı özellikleri incelenmştir. Daha sonra, reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrislerinin spinor matrisleri ile ifadesi verilmiştir. Ayrıca, Hamilton matrisleri ile ilişkili spinor matrislerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Üçüncü alt başlıkta ise reel kuaterniyonların Hamilton matrislerine karşılık gelen spinor matrislerinin özdeğer ve özvektörleri hakkında bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölüm ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2020, 62 Sayfa
Anahtar Kelimeler: Hamilton matrisleri, Reel kuaterniyonlar, Spinorlar

ABSTRACT

Master Thesis

EXPRESSION OF HAMILTON MATRICES OF REAL QUATERNIONS WITH SPINORS

Emrah YILDIRIM

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tülay ERİŞİR

This thesis consists of five section. The first section has been designated for introduction. In the second section, the basic definitons and theorems interested in real quaternions and spinors have been given. In the third chapter, Hamilton matrices of real quaternions which form the basis of this thesis have been introduced and some definitons and theorems interested in these matrices have been expressed. Moreover, the relationship between real quaternions and spinors have been briefly mentioned.

The fourth section constitutes the original part of this thesis. This section has three subsections. Firstly, a transformation between real quaternions and spinors has been given and some properties of this transformation have been analyzed. Moreover, the representation with spinor matrices of Hamilton matrices corresponding to Hamilton operators of real quaternions has been given. Then, some properties of spinor matrices related with Hamilton matrices of real quaternions have been obtained. In the third subsection, some theorems and conclusions about the eigenvalues and eigenvectors of these spinor matrices corresponding to Hamilton matrices of real quaternions have been given. The fifth section has been designated for conclusion and propositions.

2020, 62 Pages
Keywords: Hamilton matrices, Real Quaternions, Spinors

TEŞEKKÜR

Yazmış olduğum bu tezde sürekli destek veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerilerini esirgemeyen hocam Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR' e, manevi desteklerinden dolayı annem, babam ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Emrah YILDIRIM

Ağustos, 2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^3$	Üç Boyutlu Reel Vektör Uzayı
$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$	$\mathbb{R}^3$ ün Baz Vektörleri
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar Cümlesi
$q,\, p$	Kuaterniyon
q_0, q_1, q_2, q_3	Kuaterniyon Bileşenleri
$\times$	Kuaterniyon Çarpımı
S_q	q Kuaterniyonun Skaler Kısmı
V_q	q Kuaterniyonun Vektörel Kısmı
q^*	Kuaterniyon Eşleniği
$N(q)$	Kuaterniyon Normu
h^+, h^-	Hamilton Operatörleri
$H^+(q)$	Sol Hamilton Matrisi
$H^-(q)$	Sağ Hamilton Matrisi
P_1, P_2, P_3	Pauli Matrisleri
$\mathbb{S}$	Spinorlar Uzayı
φ, ρ, γ	Spinorlar
t	Matrisin Transpozu
$f,\, f^*$	Bir Kuaterniyonu Spinora Karşılık Getiren Dönüşüm
φ_L	Hamilton Sol Spinor Matrisi
φ_R	Hamilton Sağ Spinor Matrisi
$\overline{\gamma}$	γ Spinorunun Kompleks Eşleniği
γ	γ Spinorunun Eşleniği

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar (dördeyler) ilk olarak 1843 yılında İrlandalı Matematikçi Hamilton tarafından tanıtılmıştır (Hamilton, 1853). Hamilton'un amacı kompleks sayıları genelleştirerek yeni bir sayı sistemi elde etmekti. Bu amaçla, Hamilton yeni bir çarpma işlemini vektör cebirine dahil ederek, bölümün de mümkün olabileceği, kuaterniyonları elde etmiştir. Dolayısıyla kuaterniyonlar bir bölüm cebiridir. Hatta keşfedilmiş ilk bölüm cebiridir (Hacısalihoğlu, 1983; Kantar ve Solodovnikov, 1989). Reel kuaterniyonlar cümlesi $\mathbb{H}$ ile gösterilmek üzere

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

olacak şekilde tanımlanır. Buradan görüldüğü üzere bir kuaterniyon biri skaler diğeri vektörel olmak üzere iki bileşenin toplamından oluşur. Burada $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ imajiner birimler olmak üzere bu birimler arasındaki ilişkiler

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = -1$$

ve

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}$$

şeklindedir (Hamilton, 1899; Hacısalihoğlu, 1983). Buradan görüldüğü üzere reel kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliği yoktur. Ayrıca kuaterniyon çarpımı skaler ile çarpma, Öklidyen iç çarpım ve vektörel çarpımın bir kombinasyonudur. Böylece, reel kuaterniyonlar cümlesi, kompleks sayılar cümlesi üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayı olup reel sayılar cümlesi üzerinde dört boyutlu bir vektör uzayıdır.

Günümüzde birçok bilim dalında matrisler kullanılmakta olup büyük bir öneme sahiptir. Bu sebeple matrislerin kuaterniyonlarla ilişkisi çok fazla dikkat çekmiştir. Kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından kuaterniyonun diğer bir kuaterniyon ile sağdan çarpımı ile soldan çarpımı birbirine eşit değildir. Bu iki ayrı çarpım ile birlikte kuaterniyonlar 4×4 tipinde matrisler ile bir dönüşüm sayesinde eşleştirilmiştir. Böylece sol çarpım ile bir kuaterniyonun sol matris gösterimi, sağ çarpım ile bir kuaterniyonun sağ matris gösterimi ifade edilir. Bu matris gösterimlerine reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri denir. (Artman, 1988; Ward, 1997). Diğer taraftan elemanları kuaterniyonlardan oluşan matrisler ile ilgili çok fazla çalışma yapılmıştır. Kuaterniyonlar ile ilgili yapılan çalışmalar 1936 yılına kadar dayanır. Wolf, elemanları reel kuaterniyonlardan oluşan matrisler için benzerlik kavramını vermiştir (Wolf, 1936). Daha sonra kuaterniyon matrislerinin özdeğeri ve köşegenleştirilmesi ile ilgili Lee tarafından bir çalışma yapılmıştır (Lee, 1949). Ayrıca, Brenner kare olmak üzere her kuaterniyon matrisinin bir karakteristik kökü olduğunu ve ek olarak benzer matrislerin aynı karakteristik köke sahip olduğunu göstermiştir (Brenner, 1951). Kuterniyon matrisleri ile ilgili yapılan en önemli çalışmalardan biri Zhang tarafından verilmiştir (Zhang, 1997). Zhang çalışmasında kuaterniyon matrisleri ile ilgili bilinen sonuçlara ek olarak yeni ispatlar vermiştir.

1843 yılında Hamilton'un tanıtmasıyla kuaterniyonlar günümüze gelene kadar kendine birçok kullanım alanı bulmuştur. Geometri ve cebir dışında mühendislik alanlarında da büyük kolaylıklar sağlayan kuaterniyonlar günümüz teknolojisinin matematiğinde de büyük öneme sahiptir. Bilgisayar grafikleri, fizik, mekanik, kinematik, bilgisayar oyunları, animasyonlar, digital görüntüleme alanlarında da kullanım sıklığı fazladır (Vince, 1978; Ickes, 1970). Geometride ise özellikle 3-boyutlu uzayda cisimlerin dönme ve yönelmesinin temsilinde kuaterniyonlar büyük bir öneme sahiptir (Shepperd, 1978; Meister, 2005). Fizikte de kuaterniyonlar birçok kullanım alanına sahiptir. Kompleks sayıların mekanik ve elektriksel uygulamalarında, özellikle de devre analizlerinde kullanılması iki boyutlu olduğu için uygulamalara sınırlandırma getirmektedir. 3-boyutlu uygulamalarda ise vektörlerin bazı uygulamalarda yetersiz kaldığı durumlarda kuaterniyonlar uygulamalara dördüncü bir boyut kattığından, büyük kolaylık sağlamaktadır. Kuaterniyonların fizikte uygulama bulduğu alanlardan en önemlisi de Einstein'ın özel ve genel rölativite teorileridir. Kuantum mekaniğinde de elektron spinini tanımlarken kuaterniyonlar kullanılmaktadır. Bir spinor üzerinde işlem yapan kuantum operatörleri, 2×2 matrislerin kuaterniyonlarla ilişkisi göz önüne alınarak kuaterniyonlarla gösterilebilir. Bu yaklaşım yardımıyla spinorların matematiksel formülü 1930'da B. L. Van der Waerdan tarafından geliştirilmiştir. Fiziksel olarak elektron spininin tanımını yapmak için spinor eşitliklerini 1927'de Pauli ve 1938'de Dirac göstermiştir.

Spinorların en genel matematiksel formu basit grupların lineer gösterimleri araştırılırken Cartan (1913) tarafından geliştirilmiştir. Geometrik anlamda ise spinorları ilk kez tanıtan yine Cartan olmuştur (Cartan, 1966). Cartan (1966) bu çalışmasında spinorların sadece geometrik tanımını vererek spinor teorisini geometrik olarak geliştirmiştir. Daha sonra Torres del Castillo ve Barrales (2004) tarafından üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin Frenet vektörleri göz önüne alınarak eğrilerin spinor formülasyonu verilmiştir. Bu çalışma diferansiyel geometride eğri teorisi ile spinorlar arasında kurulan ilişki için önemli bir çalışmadır. Bu çalışmadan yola çıkarak Kişi ve Tosun (2015) üç boyutlu Öklid uzayında verilen yönlendirilmiş bir yüzeyin Darboux çatısının arasındaki ilişkinin spinor denklemini vermiştir. Ayrıca, bir diğer çalışmada, yine üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin spinor Bishop denklemleri elde edilmiştir (Ünal vd., 2013). Bu çalışmadan yola çıkarak Erişir vd. üç boyutlu Minkowski uzayında eğrilere karşılık gelen ve onların hiperbolik spinor olarak adlandırdıkları spinorları tanıtmıştır (Erişir vd., 2015; Ketenci vd., 2015; Balcı vd., 2015). Daha sonra Erişir ve Kardağ Öklid uzayında İnvolüt-Evolüt eğrilerin spinor formülasyonunu vermiştir.

$SU(2)$ nin bir bazı olan Pauli matrisleri ile iki kompleks bileşene sahip olan spinorlar cebiri üç boyutlu reel uzayda dönmelerin güzel bir ifadesinin verilmesini sağlar. Bu bağlamda Vivarelli (1984) kuaterniyonlar ile spinorlar arasında yeni bir ilişki kurarak kuaterniyon kinematiğini spinorlar ile ifade etmiştir. Vivarelli'nin çalışmasında spinorlar ile reel kuaterniyonlar arasında birebir ve lineer bir ilişki kurularak reel kuaterniyonlar ile temsil edilen dönmelerin spinor formülasyonu ve dolayısıyla spinor kinematiği elde edilmiştir (Vivarelli, 1984). Diğer taraftan Woit (2017) $SO(3)$ ile $SU(2)$ arasında bir ilişki kurarak kuantum mekaniğinde kuaterniyonlar ile spinorları incelemiştir. Dechant (2013), çalışmasında reel kuaterniyonlarla spinorlar arasındaki izomorfizmi göz önüne alarak kuaterniyonların 2×2 matrisler ile başlıca bir ifadesini elde etmiştir. Yine Torres del Castillo (2003), bir çalışmasında reel kuaterniyonların ile spinor matrisleri ile ifadesinden kısaca bahsetmiştir. Tarakçıoğlu vd., reel kuaterniyonlarla spinorlar arasındaki ilişkiyi kullanarak split kutareniyonlarla hiperbolik spinorlar arasında ilişki kurup Minkowski uzayında dönmelerin hiperbolik spinor kinematiğini elde etmiştir (Tarakçıoğlu, 2018).

Bu tezin amacı reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrislerinin yeni ve daha kolay bir gösterimini elde etmektir. Bunun için matematik ve özellikle fizikte kullanım alanına sahip olan spinorlar kullanılmıştır. Bu tezde öncelikle spinorlar ve kuaterniyonlar arasındaki izomorfizm göz önüne alınarak reel kuaterniyonların sağ ve sol Hamilton matrislerine karşılık gelen spinor matrisleri oluşturulmuştur. Kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından iki kuaterniyon çarpımına karşılık gelen iki ayrı Hamilton matrisine benzer olarak bu Hamilton matrislerine karşılık gelen iki ayrı spinor matrisi oluşur. Bu matrisler spinor Hamilton matrisleri olarak adlandırılmıştır. Bu sağ ve sol spinor matrislerinin öncelikle bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra bu spinor matrislerinin özdeğer ve özvektörleri ile ilgili bazı teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Böylelikle Hamilton matrisleri spinor matrisleri ile ifade edilerek daha basit ve daha kolay bir gösterim elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1.Kuaterniyonlar

Bu bölümde reel kuaterniyonlar ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir q reel kuaterniyonu

$$q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

veya

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q reel kuaterniyonun bileşenleri, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ birimlerine ise üç boyutlu reel vektör uzayının baz vektörleri denir. Bu baz vektörleri arasında

$$i)\ \ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = -1,$$

$$ii)\ \ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$iii)\ \ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

ilişkileri mevcuttur. Reel kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{H} = \{q \,|\, q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3, \quad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3 \}$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Ayrıca $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun skaler kısmı $S_q = q_0$ ve vektörel kısmı

$\boldsymbol{V}_q = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ ile gösterilirse q reel kuaterniyonu

$$q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2. $p, q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu sadece vektörel kısımdan oluşuyorsa $\left(q = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}_q\right)$ q reel kuaterniyonuna pür kuaterniyon denir (Hacısalihoğlu, 1983). $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cümlesi üzerinde bazı cebirsel işlemler aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.3. $p, q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyon olsun. $p = S_p + \boldsymbol{V}_p$, $q = S_q + \boldsymbol{V}_q$ olmak üzere $\mathbb{H}$ cümlesi üzerinde toplama işlemi,

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ (p,q) &\to p \oplus q = \left(S_p + \boldsymbol{V}_p\right) \oplus \left(S_q + \boldsymbol{V}_q\right) \\ &= \left(S_p + S_q\right) + \left(\boldsymbol{V}_p + \boldsymbol{V}_q\right) \end{aligned}$$

veya $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ ve $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ olmak üzere bu iki reel kuaterniyonun toplamı

$$p \oplus q = \left(p_0 + q_0\right) + \boldsymbol{i}\left(p_1 + q_1\right) + \boldsymbol{j}\left(p_2 + q_2\right) + \boldsymbol{k}\left(p_3 + q_3\right)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983). Bu işlem ile birlikte $(\mathbb{H}, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur. Bu işleme göre $\mathbb{H}$ kümesinin etkisiz (birim) elemanı

$$\left(0,0,0,0\right) = 0 + \boldsymbol{i}0 + \boldsymbol{j}0 + \boldsymbol{k}0$$

şeklindeki sıfır kuaterniyonudur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar cümlesi üzerinde skaler ile çarpma işlemi (dış işlem), $q = S_q + \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda \odot \left(S_q + \boldsymbol{V}_q\right) = \lambda S_q + \lambda \boldsymbol{V}_q$$

veya

$$\lambda \odot q = \lambda \odot \left(q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3\right) = \left(\lambda q_0\right) + \boldsymbol{i}\left(\lambda q_1\right) + \boldsymbol{j}\left(\lambda q_2\right) + \boldsymbol{k}\left(\lambda q_3\right)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Ayrıca $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\lambda \odot (p \oplus q) = \left(\lambda \odot p\right) \oplus \left(\lambda \odot q\right)$,

ii) $(\lambda + \mu) \odot q = (\lambda \odot q) \oplus (\mu \odot q)$,

iii) $(\lambda . \mu) \odot q = \lambda \odot (\mu \odot q)$,

iv) $1 \odot q = q$.

Böylece $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ altılı sistemi bir reel vektör uzayıdır. Ayrıca $\mathbb{H} = S_p\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ olduğundan $\text{boy}\left(\mathbb{H}\right) = 4$ dür (Hacısalihoğlu, 1983). Bundan sonra bu uzay kısaca $\mathbb{H}$ ile ve kuaterniyonlardaki toplama ve skalerle çarpma işlemleri, sırasıyla, $"+"$ ve $"."$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.5. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar cümlesi üzerinde, $p, q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı;

$$\times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$(p, q) \to p \times q$$

olarak tanımlanır. Burada $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ ve $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ olmak üzere,

$$p \times q = p_0 q_0 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + \boldsymbol{i}(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)$$
$$+ \boldsymbol{j}(p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3) + \boldsymbol{k}(p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)$$

veya

$$p = S_p + \boldsymbol{V}_p \qquad \text{ve} \qquad q = S_q + \boldsymbol{V}_q$$

olmak üzere

$$p \times q = S_p S_q - \langle \boldsymbol{V}_p, \boldsymbol{V}_q \rangle + S_p \boldsymbol{V}_q + S_q \boldsymbol{V}_p + \boldsymbol{V}_p \wedge \boldsymbol{V}_q \qquad (2.1)$$

şeklindedir. Burada " $\langle \, , \rangle$ " Öklidyen iç çarpım ve " $\wedge$ " Öklidyen vektörel çarpımdır (Vicci, 2001). Ayrıca kuaterniyon çarpımının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülebilir.

i) İki kuaterniyon çarpımı yine bir kuaterniyondur,

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir,

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişme özelliğine sahip değildir. Bu özellikler sayesinde $\{\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir ve kısaca $\mathbb{H}$ ile gösterilir.

Önerme 2.1. $p, q \in \mathbb{H}$ iki reel kuaterniyon göz önüne alınsın. Özel olarak bu iki reel kuaterniyon sadece skaler kısımdan oluşuyorsa $(p = S_p, q = S_q)$ veya bu iki reel kuaterniyonun vektörel kısımları orantılı $(\boldsymbol{V}_q = \lambda \boldsymbol{V}_p)$ ise

$$p \times q = q \times p$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla bu durumda kuaterniyon çarpımı değişmeli olur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.6. $p = S_p + \boldsymbol{V}_p,\ q = S_q + \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyon olsun. O halde

$$p = q \Leftrightarrow S_p = S_q \text{ ve } \boldsymbol{V}_p = \boldsymbol{V}_q$$

önermesi geçerliyse bu şekilde tanımlanan bu iki reel kuaterniyona eşittir denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.7. $q = S_q + \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu verilsin

$$\begin{aligned} {}^{*} :\ & \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ & q \to q^{*} = S_q - \boldsymbol{V}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme bir q reel kuaterniyonun eşleniği denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$\forall p, q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı için eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $(p+q)^{*} = p^{*} + q^{*}$,

ii) $\left(p \times q\right)^{*} = q^{*} \times p^{*}$,

iii) $\left(q^{*}\right)^{*} = q$,

iv) $\left(\lambda q\right)^{*} = \lambda q^{*}$,

v) $q = S_q \in \mathbb{R}$ ise $q^{*} = q$,

vi) $q = \boldsymbol{V}_q \in \mathbb{R}^3$ ise $q^{*} = -q$,

vii) $S_q = \dfrac{q + q^{*}}{2}, \quad \boldsymbol{V}_q = \dfrac{q - q^{*}}{2}$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Ayrıca $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} q \times q^* &= (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \times (q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$q \times q^* = q^* \times q > 0, \qquad q \neq 0$$

$$q \times q^* = q^* \times q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0$$

dır.

Tanım 2.8. Bir $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun normu

$$\begin{aligned} N(\ ):\ & \mathbb{H} \to \mathbb{R} \\ & q \to N(q) = \sqrt{q \times q^*} = \sqrt{q^* \times q} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlayan $N(q)$ reel sayısı ile tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.9. Bir $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için $N(q) = 1$ ise q reel kuaterniyonuna birim reel kuaterniyon denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Önerme 2.2. $\forall p, q \in \mathbb{H}$ için

$$N(p \times q) = N(p)N(q)$$

eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.10. Bir $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonunun tersi

$$
\begin{aligned}
(\ )^{-1} : \mathbb{H}-\{0\} &\rightarrow \mathbb{H}-\{0\} \\
q &\rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{N^2(q)}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

işlemi ile tanımlanır. Burada q^{-1} reel kuaterniyonuna q reel kuaterniyonunun tersi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Önerme 2.3. $\forall q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için

$$q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$$

eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Önerme 2.4. $\forall p, q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonları için

$$\left(p \times q\right)^{-1} = q^{-1} \times p^{-1}$$

eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.11. $\forall q \neq 0 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonunun birimleştirilmesi (normlanışı)

$$r = \frac{q}{N(q)} = \frac{q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada r birim reel kuaterniyondur (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.11 da verilen r birim kuaterniyonunun reel eksen ile yaptığı açı θ olsun. Bu durumda r birim kuaterniyonu

$$r = \cos\theta + \boldsymbol{w}\sin\theta$$

şeklinde yazılır. Burada $N(q) \neq 0$ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

ve

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

şeklindedir. Ayrıca burada $\boldsymbol{w}$ birim vektörüne r birim kuaterniyonunun ekseni denir (Ward, 1997).

2.2. Spinorlar

Bu bölümde spinorlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

$\mathbb{C}^3$ üç boyutlu kompleks vektör uzayı olsun. Bu durumda $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ izotropik bir vektör olarak seçilirse $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ eşitliği elde edilir. O halde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ olur. $\mathbb{C}^3$ uzayında izotropik vektörler cümlesi, $\mathbb{C}^2$ uzayında iki boyutlu bir yüzeye karşılık gelir. Karşılık gelen bu iki boyutlu yüzey γ_1 ve γ_2 tarafından parametrelendirilirse

$$x_1 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2$$
$$x_2 = \mathrm{i}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$
$$x_3 = -2\gamma_1^2\gamma_2^2$$

şeklinde alınabilir. Burada i kompleks birim olmak üzere $\mathrm{i}^2 = -1$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ dir. O halde buradan

$$\gamma_1 = \pm\sqrt{\frac{x_1 - \mathrm{i}x_2}{2}},$$
$$\gamma_2 = \pm\sqrt{\frac{-x_1 - \mathrm{i}x_2}{2}},$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan görüldüğü üzere; $\mathbb{C}^3$ kompleks vektör uzayında her bir izotropik vektör, (γ_1, γ_2) ve $(-\gamma_1, -\gamma_2)$ olacak şekilde $\mathbb{C}^2$ uzayında iki vektöre karşılık gelir. Tersine; $\mathbb{C}^2$ uzayında bu şekilde verilen her iki vektöre tek bir $\boldsymbol{x}$ izotropik vektörü karşılık gelir. Cartan, bu şekilde tanımlanan $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ şeklindeki iki boyutlu komplek vektörleri spinor olarak isimlendirmiştir (Cartan, 1966). Ayrıca Cartan bir spinorun eşleniğini

$$\gamma = \mathrm{i}C\overline{\gamma} \tag{2.4}$$

olarak vermiştir. Cartan spinorların sadece iki boyutlu kompleks vektörler değil aynı zamanda üç boyutlu komplex izotropik vektörlerin bir gösterimi olduğunu söylemiştir (Cartan, 1966).

$\mathbb{R}^3$, üç boyutlu reel vektör uzayında orjin etrafında dönmelerin grubu olan $SO(3)$ grubu ve 2×2 boyutlu üniter matrisler grubu olan $SU(2)$ grubu göz önüne alınsın. Bilindiği üzere $SO(3)$ grubu, $SU(2)$ grubuna homomorfiktir. $SO(3)$ grubunun elemanları $\mathbb{R}^3$ vektör uzayındaki vektörleri hareket ettirirken $SU(2)$ grubunun elemanları iki kompleks bileşenli vektörleri yani spinorları hareket ettirir (Goldstein, 1980; Sattinger ve Weaver, 1986; Torres del Castillo ve Barrales, 2004). Bu homomorfizm yardımıyla Torres del Castillo ve Barrales (2004), $\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\boldsymbol{b}$ izotropik vektörünü

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir spinor ile eşleştirmiştir. Burada $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ dür. Bilindiği üzere 2×2 boyutlu üniter matrisler için baz oluşturan Pauli matrisleri

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \ P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},\ \ P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Torres del Castillo ve Barrales (2004) tarafından Pauli matrisleri ve $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi göz önüne alınarak

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \ \sigma_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix},\ \ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilmiştir. Dolayısıyla $\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^3$ izotropik vektörü bir spinor denklemi cinsinden

$$\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\boldsymbol{b} = \gamma^t \sigma \gamma$$

olarak yazılmıştır. Ek olarak $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri ile ortagonal bir $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ vektörü göz önüne alınırsa

$$\boldsymbol{c} = -\overset{\vee}{\gamma}\sigma\gamma$$

olarak verilmiştir. Burada " $\vee$ " işareti bir $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$ spinorunun eşi olmak üzere

$$\overset{\vee}{\gamma} = -C\gamma \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlıdır (Torres del Castillo ve Barrales , 2004).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde öncelikle reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrislerinin bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra Hamilton matrislerinin özdeğer ve öz vektörlerinden kısaca bahsedilmiştir. Ayrıca, reel kuaterniyonlar ile spinorlar arasında baz ilişkiler verilmiştir.

3.1. Reel Kuaterniyonların Hamilton Operatörleri ve Özellikleri

Tanım 3.1. $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olsun. O halde

$$\begin{aligned} h^+ &: \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ p &\to h^+(p) = q \times p \end{aligned} \tag{3.1}$$

lineer dönüşümü yardımıyla

$$h^+(\boldsymbol{1}) = (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \times \boldsymbol{1} = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$$

$$h^+(\boldsymbol{i}) = (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \times \boldsymbol{i} = -q_1 + \boldsymbol{i}q_0 + \boldsymbol{j}q_3 - \boldsymbol{k}q_2$$

$$h^+(\boldsymbol{j}) = (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \times \boldsymbol{j} = -q_2 - \boldsymbol{i}q_3 + \boldsymbol{j}q_0 + \boldsymbol{k}q_1$$

$$h^+(\boldsymbol{k}) = (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \times \boldsymbol{k} = -q_3 + \boldsymbol{i}q_2 - \boldsymbol{j}q_1 + \boldsymbol{k}q_0$$

eşitlikleri ile $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bazına karşılık gelen matris

$$H^+(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için

$$
\begin{aligned}
h^{-}(q) &: \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\
p &\to h^{-}(p) = p \times q
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

lineer dönüşümü ile

$$h^{-}(\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{1} \times (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$$

$$h^{-}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \times q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 = -q_1 + \boldsymbol{i}q_0 - \boldsymbol{j}q_3 + \boldsymbol{k}q_2$$

$$h^{-}(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j} \times (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) = -q_2 + \boldsymbol{i}q_3 + \boldsymbol{j}q_0 - \boldsymbol{k}q_1$$

$$h^{-}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \times (q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) = -q_3 - \boldsymbol{i}q_2 + \boldsymbol{j}q_1 + \boldsymbol{k}q_0$$

eşitlikleri yardımıyla $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bazına karşılık gelen matris

$$H^{-}(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

olarak bulunur. Burada $H^{+}(q)$ ve $H^{-}(q)$ matrislerine q reel kuaterniyonun h^{+} ve h^{-} Hamilton operatörlerine karşılık gelen sol ve sağ Hamilton matrisleri denir (Ward, 1997).

$\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cümlesi ile $\mathbb{M}_{4\times 1}$ matrisleri cümlesi arasında

$$\Upsilon : \mathbb{H} \to \mathbb{M}_{4\times 1}$$

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \to \Upsilon\left(q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3\right) = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanırsa bu Υ dönüşümü bir cebir izomorfizmidir. O halde

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \cong \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = Q$$

yazılabilir. Buradan tanımlanan bu izomorfizm yardımıyla $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ ve $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ reel kuaterniyonların kuaterniyon çarpımının matris formu

$$q \times p \cong \begin{bmatrix} q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 \\ q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_3 p_2 + q_2 p_3 \\ q_2 p_0 + q_3 p_1 + q_0 p_2 - q_1 p_3 \\ q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2 + q_0 p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$= H^{+}(q)P$$

şeklinde verilir (Ward, 1997). Burada $P \in \mathbb{M}_{4\times 1}, \Upsilon$ dönüşümü yardımıyla p reel kuaterniyonuna karşılık gelen 4×1 boyutlu matristir.

$$p \times q \cong \begin{bmatrix} q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 \\ q_1 p_0 + q_0 p_1 + q_3 p_2 - q_2 p_3 \\ q_2 p_0 - q_3 p_1 - q_0 p_2 + q_1 p_3 \\ q_3 p_0 + q_2 p_1 - q_1 p_2 + q_0 p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$= H^{-}(q)P$$

eşitliği verilir (Ward, 1997). Ayrıca

$$\mathbb{M}=\left\{\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \middle| \, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}_4^4$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} H^+ : \mathbb{H} &\to \mathbb{M} \\ q &\to H^+(q) \end{aligned}$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Benzer şekilde

$$\mathbb{N}=\left\{\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \middle| \, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}_4^4$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} H^- : \mathbb{H} &\to \mathbb{N} \\ q &\to H^-(q) \end{aligned}$$

dönüşümü lineer izomorfizmdir (Ward, 1997). O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1. $q \in \mathbb{H}$ birim kuaterniyon olmak üzere h^+ ve h^- operatörlerinden üretilen H^+ ve H^- Hamilton matrisleri ortagonaldir (Ward, 1997).

Teorem 3.2. H^+ ve H^- Hamilton matrislerinin çarpımı değişmelidir. Dolayısıyla $H^+(q)H^-(p)=H^-(p)H^+(q)$ eşitliği vardır (Ward, 1997).

Teorem 3.3. $p, q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere H^{+} ve H^{-} Hamilton matrisleri aşağıdaki özellikleri sağlar;

$$i) \quad p = q \Leftrightarrow H^{+}(p) = H^{+}(q) \Leftrightarrow H^{-}(p) = H^{-}(q),$$

$$ii) \quad H^{+}(p+q) = H^{+}(p) + H^{+}(q), \quad H^{-}(p+q) = H^{-}(p) + H^{-}(q),$$

$$iii) \quad H^{+}(p \times q) = H^{+}(p)H^{+}(q), \quad H^{-}(p \times q) = H^{-}(q)H^{-}(p),$$

$$iv) \quad H^{+}(\lambda q) = \lambda H^{+}(q), \quad H^{-}(\lambda p) = \lambda H^{-}(q), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$v) \quad det\left[H^{+}(q)\right] = N^{2}(q), \quad det\left[H^{-}(q)\right] = N^{2}(q),$$

$$vi) \; H^{+}(q^{-1}) = \left(H^{+}(q)\right)^{-1}, \quad H^{-}(q^{-1}) = \left(H^{-}(q)\right)^{-1}, \qquad N(q) \neq 0.$$

3.2 Hamilton Matrislerinin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Bu bölümde reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen sağ ve sol Hamilton matrislerinin bazı özellikleri ile özdeğer ve özvektörleri verilecektir.

$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olsun. Bu durumda $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\mathbb{M}_{4\times 1}$ sütun matrisi olarak

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \cong Q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $q^* = q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3$ kuaterniyonu $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun eşleniği olmak üzere q^* reel kuaterniyonuna karşılık gelen sütun matris

$$q^* \cong \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = CQ$$

şeklindedir (Grob vd., 2001).

Şimdi $q = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ reel kuaterniyonunun h^+ ve h^- Hamilton operatörlerine karşılık gelen sol ve sağ Hamilton matrisleri, sırasıyla, $H^+(q)$ ve $H^-(q)$ olsun. O halde bu matrisler arasında

$$H^-(q) = C\left(H^+(q)\right)^t C$$

ilişkisi mevcuttur. Burada $"t"$ matrisin transpozudur ve $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir (Grob vd., 2001). Ayrıca $H^+(q)$ ve $H^-(q)$ Hamilton matrisleri için $H(q^*) = \left(H^+(q)\right)^t$ ve $H^-(q^*) = \left(H^-(q)\right)^t$ eşitlikleri geçerlidir (Grob vd., 2001). Şimdi $q = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen sağ ve sol Hamilton matrislerinin özdeğerleri ve özvektörleri hesaplansın. O halde $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonunun $H^+(q)$ ve $H^-(q)$ Hamilton matrisleri için $\vartheta \neq 0$ olmak üzere

$$H^+(q)\,\vartheta = \lambda\vartheta$$

ve

$$H^{-}(q)\,\vartheta=\lambda\vartheta$$

eşitliklerinden $\lambda\in\mathbb{C}$ özdeğerleri ve $\vartheta\neq 0\in\mathbb{C}^4$ özvektörleri bulunabilir (Grob vd., 2001). O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.4. $q\in\mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol Hamilton matrisi, $H^{+}(q)$ olsun. Bu durumda Hamilton matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=q_0+\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ ve $\lambda_2=q_0-\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ dır. Burada $\boldsymbol{q}$, q reel kuaterniyonunun vektörel kısmıdır (Grob vd., 2001).

Teorem 3.5. $q\in\mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol Hamilton matris, $H^{+}(q)$ olmak üzere bu Hamilton matrislerinin özdeğerleri $\lambda_1=q_0+\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ ve $\lambda_2=q_0-\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ olsun. Bu durumda bu özdeğerlere karşılık gelen öz uzaylar, sırasıyla,

$$\left\{H^{+}(q)y\,\middle|\,y\in\mathbb{C}^4\right\} \text{ ve } \left\{H^{+}(h)y\,\middle|\,y\in\mathbb{C}^4\right\}$$

dir. Burada $g=\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})e_1+\boldsymbol{q}$ ve $h=-\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})e_1+\boldsymbol{q}$ olmak üzere $\boldsymbol{q}\cong\begin{bmatrix}0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{e}_1\cong\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ dır

(Grob vd., 2001).

3.3. Reel Kuaterniyonlar ve Spinorlar

Bu bölümde, reel kuaterniyonların 2×2 kompleks matrisler ile çeşitli gösterimleri verilmiştir. Ayrıca reel kuaterniyonların spinorlar ile ilişkisinden kısaca bahsedilmiştir.

Bir $q\in\mathbb{H}$ reel kuaterniyonu göz önüne alınsın. Bu durumda q reel kuaterniyonu

$$q=q_0+\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3=\left(q_0+\mathrm{i}q_1\right)+\left(\,q_2+\boldsymbol{i}q_3\right)\boldsymbol{j}$$

olarak yazılırsa $\mathbb{H}$ cümlesi

$$\mathbb{H} = \left\{ q = z_1 + z_2 \boldsymbol{j},\; z_1 = q_0 + \boldsymbol{i} q_1,\; z_2 = q_2 + \boldsymbol{i} q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda q kuaterniyonu $z_1 + z_2 \boldsymbol{j} \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı ile eşleştiğinden $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ ye izomorftur denir (Ward, 1997; Hacısalihoğlu, 1983).

$$q = q_0 + \boldsymbol{i} q_1 + \boldsymbol{j} q_2 + \boldsymbol{k} q_3 = \left(q_0 + \mathrm{i} q_1 \right) + \left(q_2 - \boldsymbol{i} q_3 \right) \boldsymbol{j}$$

olmak üzere

$$q = z_1 + \boldsymbol{j} \bar{z}_2$$

olarak da yazılabilir. Bu durumda ise $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{H} = \left\{ q = z_1 + \boldsymbol{j} \bar{z}_2,\; z_1 = q_0 + \boldsymbol{i} q_1,\; \bar{z}_2 = q_2 - \boldsymbol{i} q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\mathbb{H}$ nın bir bazı $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{j}\}$ olur.

Ayrıca $q = z_1 + z_2 \boldsymbol{j}$ olarak alınırsa $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{j}\}$ bazına göre

$$\begin{aligned} T : \mathbb{H} &\rightarrow Ham(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \\ q &\rightarrow T_q \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall q \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} T_q : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ p &\rightarrow T_q(p) = p \times q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm lineerdir. Böylece bu lineer dönüşüme bir matris karşılık gelir. O halde $q = z_1 + z_2\boldsymbol{j} \in \mathbb{H}$

$$\begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_1 & q_2 + \mathrm{i}q_3 \\ -q_2 + \mathrm{i}q_3 & q_0 - \mathrm{i}q_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde 2×2 kompleks matrisi elde edilir (Hacısalihoğlu, 1983).

$\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cebiri $\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{i}\}$, $\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{j}\}$, $\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{k}\}$,...... gibi bazlardan üretilen sonsuz tane alt cebir içerir (Delphenich, 2012).

Dolayısıyla $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cümlesi birçok baza göre yazılabilir. $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}^2$ üzerinde bir reel cebirdir. Dolayısıyla, $\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{j}\}$ bazına göre bir reel kuaterniyon

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 = (q_0 + \mathrm{i}q_1) + (q_2 + \boldsymbol{i}q_3)\,\boldsymbol{j}$$

olmak üzere $q = z_1 + z_2\boldsymbol{j}$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{i}\}$ bazına göre bir reel kuaterniyon

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 = (q_0 + \boldsymbol{j}q_2) + \boldsymbol{i}\,(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)$$

olacak şekilde $q = z_3 + \boldsymbol{i}z_4$ şeklinde yazılabilir (Delphenich, 2012).

O halde bu iki alt cebirden yola çıkılarak, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_1 & q_2 + \mathrm{i}q_3 \\ -q_2 + \mathrm{i}q_3 & q_0 - \mathrm{i}q_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} q_0 + \boldsymbol{j}q_1 & -q_1 + \boldsymbol{j}q_3 \\ q_1 + \boldsymbol{j}q_3 & q_0 - \boldsymbol{j}q_2 \end{bmatrix}$$

kompleks matrisleri elde edilir (Delphenich, 2012).

Vivarelli, reel kuaterniyonlar ile spinor arasında

$$f:\mathbb{H}\to\mathbb{S}$$
$$q\to\varphi$$

şeklinde birebir ve lineer bir ilişki kurmuştur (Vivarelli, 1984).
Burada,bu dönüşüm sayesinde bir q kuaterniyonu bir φ spinoru ile

$$q\to f(q)=f(q_0+\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3)\cong\varphi=\begin{bmatrix} q_3+\mathrm{i}q_0 \\ q_1+\mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

şeklinde vermiştir (Vivarelli, 1984).
Şimdi $p,q\in\mathbb{H}$ iki reel kuaterniyon göz önüne alınsın. Bu durumda $q\times p$ kuaterniyon çarpımına karşılık gelen spinor matrisi

$$q\times p\to H^{+}(q)P\to-\mathrm{i}\varphi P \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Burada P spinoru (3.5) denklemi yardımıyla p reel kuaterniyonuna karşılık gelen spinor olmak üzere φ spinor matrisi

$$\varphi=\begin{bmatrix} q_3+\mathrm{i}q_0 & q_1-\mathrm{i}q_2 \\ q_1+\mathrm{i}q_2 & -q_3+\mathrm{i}q_0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

dır (Vivarelli, 1984). Bu durumda $-\mathrm{i}\varphi$ spinor matrisi

$$-\mathrm{i}\varphi=\begin{bmatrix} q_0-\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1 \\ q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olarak hesaplanır (Vivarelli, 1984; Torres del Castillo, 2013; Woit, 2017).
$\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ kuaterniyon baz vektörleri bir izomorfizm vasıtasıyla Pauli matrisleri cinsinden

$$1 \rightarrow \boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{i} \rightarrow \mathrm{i}P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{j} \rightarrow \mathrm{i}P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{k} \rightarrow \mathrm{i}P_3 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (3.8) spinor matrisi

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 = q_0 I_2 + q_1(-\boldsymbol{i}P_1) + q_2(-\boldsymbol{i}P_2) + q_3(-\boldsymbol{i}P_3)$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir (Vivarelli, 1984; Woit, 2017).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde; reel kuaterniyonlar ve spinorlar arasında ilişkiler göz önüne alınarak reel kuaterniyonlara karşılık gelen sağ ve sol Hamilton matrisleri, spinorlar cinsinden yazılmıştır. Bu sağ ve sol Hamilton matrislerine karşılık gelen spinor matrisleri sırasıyla, sağ ve sol Hamilton spinor matrisleri olarak adlandırılmıştır. Ayrıca bu Hamilton spinor matrislerinin bazı özellikleri verildikten sonra özdeğer ve özvektörleri hesaplanmıştır. Ek olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Reel Kuaterniyonların Spinorlar İle İfadesi

Bu bölümde reel kuaterniyonların spinorlar ile ifadesi verilmiştir. Ayrıca reel kuaterniyonlara karşılık gelen spinorların bazı cebirsel özellikleri elde edilmiştir.

$\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar cümlesi olmak üzere $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu göz önüne alınsın. O halde bu reel kuaterniyon $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}\}$ bazına göre

$$q = \boldsymbol{k}\left(q_3 + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}q_0\right) + \boldsymbol{i}\left(q_1 + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}q_2\right)$$

şeklinde kolayca yazılabilir. Burada $\mathrm{i} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$ olarak göz önüne alınırsa q reel kuaterniyonu

$$q = \boldsymbol{k}\left(q_3 + \mathrm{i}q_0\right) + \boldsymbol{i}\left(q_1 + \mathrm{i}q_2\right) \tag{4.1}$$

olarak elde edilir. Burada $\mathrm{i}^2 = -1$ olduğundan kompleks birim olarak alınabilir. Böylece bir $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\varphi_1 = q_3 + \mathrm{i}q_0$, $\varphi_2 = q_1 + \mathrm{i}q_2 \in \mathbb{C}$ olacak şekilde iki kompleks sayı cinsinden ifade edilebilir. O halde aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.1. $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cümlesi iki kompleks sayı cinsinden

$$\mathbb{H} = \left\{ q = \boldsymbol{k}\varphi_1 + \boldsymbol{i}\varphi_2 \mid \varphi_1 = q_3 + \mathrm{i}q_0,\ \varphi_2 = q_1 + \mathrm{i}q_2 \in \mathbb{C} \right\} \tag{4.2}$$

olacak şekilde tanımlanır.

Şimdi $\varphi_1 = q_3 + \mathrm{i}q_0, \varphi_2 = q_1 + \mathrm{i}q_2 \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları $\varphi \in \mathbb{S}$ spinorunu

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluştursun. Bu durumda Vivarelli (1984) tarafından da verilen kuaterniyonlar ile spinorlar arasındaki dönüşüm aşağıdaki gibi verilebilir.

$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\varphi \in \mathbb{S}$ spinoru ile eşleştiren dönüşüm

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{H} \to \mathbb{S} \\ q &\to f(q) = f(q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \cong \varphi = \begin{bmatrix} q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ q_1 + iq_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak verilir.

Diğer taraftan (4.1) denklemine benzer şekilde $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}\}$ bazına göre sağdan çarpım ile

$$q = (q_3 + \mathrm{i}q_0)\boldsymbol{k} + (q_1 - \mathrm{i}q_2)\boldsymbol{i} \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathrm{i} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$ ve $\mathrm{i}^2 = -1$ dir. Böylece bir $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu (4.2) eşitliğine benzer olarak

$$\mathbb{H} = \left\{ q = \varphi_1 \boldsymbol{k} + \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i} \;\middle|\; \varphi_1 = q_3 + \mathrm{i}q_0,\ \overline{\varphi_2} = q_1 - \mathrm{i}q_2 \in \mathbb{C} \right\} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanabilir. O halde (4.3) dönüşümüne benzer şekilde reel kuaterniyonlar ve spinorlar için

$$\begin{aligned} & f_* : \mathbb{H} \to \mathbb{S} \\ & q \to f_*(q) = f(q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) \cong \varphi_* = \begin{bmatrix} q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir.

Önerme 4.1. $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar uzayı $\mathbb{S}$ spinorlar uzayına izomorftur.

İspat: $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu φ spinoru ile (4.3) denklemindeki $f : \mathbb{H} \to \mathbb{S}$ dönüşümü ile $f(q) \cong \varphi = \begin{bmatrix} q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$ şeklinde eşleşsin. Bu durumda $p, q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyon olmak üzere $p + q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonunun f dönüşümü altındaki görüntüsü

$$f(p+q) = \begin{bmatrix} (p_3 + q_3) + \mathrm{i}(p_0 + q_0) \\ (p_1 + q_1) + \mathrm{i}(p_2 + q_2) \end{bmatrix}$$

yardımıyla

$$f(p+q) = \begin{bmatrix} p_3 + \mathrm{i}p_0 \\ p_1 + \mathrm{i}p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} = f(p) + f(q)$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q \in \mathbb{H}$ olmak üzere λq kuaterniyonu

$$\lambda q = \lambda(q_0) + \boldsymbol{i}(\lambda q_1) + \boldsymbol{j}(\lambda q_2) + \boldsymbol{k}(\lambda q_3)$$

olarak bulunur. Bu durumda λq kuaterniyonun f dönüşümü altındaki görüntüsü

$$f(\lambda q)=\begin{bmatrix}\lambda q_3+\mathrm{i}\lambda q_0\\ \lambda q_1+\lambda q_2\end{bmatrix}$$

$$=\lambda\begin{bmatrix}q_3+\mathrm{i}q_0\\ q_1+\mathrm{i}q_2\end{bmatrix}=\lambda f(q)$$

elde edilir. Böylece f dönüşümü $\mathbb{R}$ - lineerdir. $\mathbb{C}$ -lineer değildir.

Şimdi f dönüşümünün birebir ve örten olduğu gösterilsin. Bunun için $p,q\in\mathbb{H}$ reel kuaterniyonları için $f(p)=f(q)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix}p_3+\mathrm{i}p_0\\ p_1+\mathrm{i}p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_3+\mathrm{i}q_0\\ q_1+\mathrm{i}q_2\end{bmatrix}$$

eşitşiği elde edilir. Buradan iki matrisin eşitliğinden $p_3+\mathrm{i}p_0=q_3+\mathrm{i}q_0$ ve $p_1+\mathrm{i}p_2=q_1+\mathrm{i}q_2$ olduğu görülür. Dolayısıyla iki kompleks sayının eşitliğinden $p=q$ bulunur. Böylece f dönüşümü birebirdir. Son olarak örtenliğe bakmak gerekirse $\forall\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\in\mathbb{S}$ için $f(q)=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\in\mathbb{S}$ olacak şekilde $\exists q=\boldsymbol{k}\varphi_1+\boldsymbol{i}\varphi_2\in\mathbb{H}$ vardır. O halde f dönüşümü bir izomorfizmdir.

(4.3) dönüşümü ile verilen reel kuaterniyonlar ve spinorlar arasındaki ilişkiden yola çıkılarak eşlenik ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 4.2. $q=q_0+\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3\in\mathbb{H}$ bir reel kuaterniyon olmak üzere bu reel kuaterniyon (4.3) dönüşümü yardımıyla $\varphi\in\mathbb{S}$ spinoru ile eşleşsin. Bu durumda $\varphi_1=q_3+\mathrm{i}q_0,\varphi_2=q_1+\mathrm{i}q_2\in\mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki dört ayrı eşlenik tanımı verilebilir;

i) $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}$ spinorunun kompleks eşleniği $\overline{\varphi}$ olmak üzere

$$\overline{\varphi} = \begin{bmatrix} \overline{\varphi_1} \\ \overline{\varphi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 - \mathrm{i}q_0 \\ q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlıdır.

ii) $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun $q^* = q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3$ kuaterniyon eşleniğine karşılık gelen spinor φ^* olmak üzere

$$\varphi^* = \begin{bmatrix} -\overline{\varphi_1} \\ -\varphi_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_3 - \mathrm{i}q_0 \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

şeklindedir.

iii) Cartan (1966) tarafından verilen (2.4) denklemindeki bir spinorun eşleniği göz önüne alınırsa $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen $\varphi \in \mathbb{S}$ spinorunun spinor eşleniği φ olmak üzere

$$\varphi = \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\varphi_1} \\ \overline{\varphi_2} \end{bmatrix} = \mathrm{i}\begin{bmatrix} \overline{\varphi_2} \\ -\overline{\varphi_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ -q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

iv) Torres del Castillo ve Barrales (2004) tarafından verilen (2.5) denklemindeki bir spinorun eşi göz önüne alınırsa $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen $\varphi \in \mathbb{S}$ spinorunun spinor eşi $\check{\varphi}$ olmak üzere

$$\overset{\vee}{\varphi} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\varphi_1} \\ \overline{\varphi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\varphi_2} \\ \overline{\varphi_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 + \mathrm{i}q_2 \\ q_3 - \mathrm{i}q_0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlıdır.

O halde Tanım 4.2 göz önüne alınırsa aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.2. $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere bu kuaterniyona karşılık gelen spinor φ olsun. φ spinorunun eşi ve spinor eşleniği arasında

$$\overset{\vee}{\varphi} = \mathrm{i}\varphi$$

ilişkisi vardır.

İspat: $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere bu kuaterniyona karşılık gelen spinor φ olsun. Ayrıca $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $C^2 = -I_2$ olmak üzere (4.9) ve (4.10) denklemlerinden $\overline{\varphi} = \mathrm{i}C\varphi$ ve $C\overset{\vee}{\varphi} = \overline{\varphi}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\overset{\vee}{\varphi} = \mathrm{i}\varphi$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat biter.

Şimdi q reel kuaterniyonun normuna karşılık gelen spinor denklemi araştırılsın. Bu durumda $\varphi_1 = q_3 + \mathrm{i}q_0, \varphi_2 = q_1 + \mathrm{i}q_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\overline{\varphi^t}\varphi = \begin{bmatrix} \overline{\varphi_1} & \overline{\varphi_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \overline{\varphi_1}\varphi_1 + \overline{\varphi_2}\varphi_2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

bulunur. O halde Tanım 2.7. den $N(q) = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ olmak üzere $N^2(q)$ reel sayısının spinor denklemi $\overline{\varphi^t}\varphi == \overline{\varphi_1}\varphi_1 + \overline{\varphi_2}\varphi_2$ eşitliği ile verilir. Bu durumda

$$N^2(\varphi) \to N(\varphi) = \overline{\varphi^t}\varphi$$

olmak üzere aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere bu kuaterniyona karşılık gelen spinor $\varphi \in \mathbb{S}$ olsun. O halde q reel kuaterniyonun normuna karşılık gelen spinor denklemi

$$N(\varphi) = \overset{\vee}{\varphi}^{t} C^{t} \varphi = \mathrm{i}\varphi^{t} C^{t} \varphi \tag{4.11}$$

şeklindedir.

İspat: $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere bu kuaterniyona karşılık gelen spinor $\varphi \in \mathbb{S}$ olsun. O halde aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\overset{\vee}{\varphi}\right)^{t} C^{t} \varphi = \begin{bmatrix} -\overline{\varphi_2} & \overline{\varphi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \varphi_1 \overline{\varphi_1} + \varphi_2 \overline{\varphi_2} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N(\varphi)$$

ve

$$\mathrm{i}(\varphi)^{t} C^{t} \varphi = \mathrm{i}\left(\mathrm{i}C\overline{\varphi}\right)^{t} C^{t} \varphi = -\overline{\varphi}^{t} C^{t} C^{t} \varphi = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N(\varphi)$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

4.2. Hamilton Spinor Matrisleri

Bu bölümde; reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen 4×4 boyutlu Hamilton matrisleri, Hamilton spinor matrisleri cinsinden ifade edilecektir. Kuaterniyonlar cebirinde kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından sağ ve sol çarpıma karşılık gelen Hamilton matrisleri farklıdır. Dolayısıyla, bu bölümde sağ ve sol Hamilton matrisleri için ayrı ayrı sağ ve sol Hamilton spinor matrisleri elde edilecektir. Daha sonra bu spinor matrisleri için bazı özellikler verilecektir.

(4.2) ve (4.5) eşitliklerinden bilindiği üzere $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cümlesi $\varphi_1 = q_3 + \text{i}q_0,\ \varphi_2 = q_1 + \text{i}q_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\mathbb{H} = \left\{ q = \boldsymbol{k}\varphi_1 + \boldsymbol{i}\varphi_2 \mid \varphi_1 = q_3 + \text{i}q_0,\ \varphi_2 = q_1 + \text{i}q_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$\mathbb{H} = \left\{ q = \varphi_1\boldsymbol{k} + \overline{\varphi_2}\boldsymbol{i} \,\middle|\, \varphi_1 = q_3 + \text{i}q_0,\ \overline{\varphi_2} = q_1 - \text{i}q_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (3.1) ve (3.3) denklemlerindeki operatörler birer lineer dönüşüm olduğundan bu lineer dönüşümlere birer matris karşılık gelir. O halde aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.2 $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon $q = \boldsymbol{k}\varphi_1 + \boldsymbol{i}\varphi_2$ olarak göz önüne alınsın. Burada $\varphi_1 = q_3 + \text{i}q_0,\ \varphi_2 = q_1 + \text{i}q_2 \in \mathbb{C}$ dir. O halde bu reel kuaterniyonun sol Hamilton matrisine karşılık gelen sol Hamilton spinor matrisi

$$\varphi_L = \begin{bmatrix} q_0 - \text{i}q_3 & -q_2 - \text{i}q_1 \\ q_2 - \text{i}q_1 & q_0 + \text{i}q_3 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

şeklinde verilir.

İspat: $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\mathbb{H} = Sp\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}\}$ olmak üzere $q = \boldsymbol{k}\varphi_1 + \boldsymbol{i}\varphi_2$ olarak göz önüne alınsın. O halde (3.1) denklemindeki Hamilton operatörü göz önüne alınırsa

$$h^+(\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}\varphi_1 + \boldsymbol{i}\varphi_2) \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\varphi_1 \times \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}\varphi_2 \times \boldsymbol{k}$$

elde edilir. Burada $\varphi_1\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\varphi_1$ ve $\varphi_2\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\varphi_2$ olduğu dikkate alınırsa

$$h^{+}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\varphi_1)+\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{k}\varphi_2) \tag{4.13}$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde

$$h^{+}(\boldsymbol{i})=(\boldsymbol{k}\varphi_1+\boldsymbol{i}\varphi_2)\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\varphi_1\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\varphi_2\times\boldsymbol{i}$$

bulunur. Burada $\varphi_1\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\overline{\varphi_1}$ ve $\varphi_2\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\overline{\varphi_2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$h^{+}(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{k}\overline{\varphi_2}\right)+\boldsymbol{i}\times\left(-\boldsymbol{k}\overline{\varphi_1}\right) \tag{4.14}$$

olarak bulunur. O halde (4.13) ve (4.14) denklemlerinin matris formu

$$\varphi_L=\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\varphi_1 & -\mathrm{i}\overline{\varphi_2} \\ -\mathrm{i}\varphi_2 & \mathrm{i}\overline{\varphi_1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\varphi_L=\begin{bmatrix} q_0-\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1 \\ q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (4.12) denklemindeki φ_L matrisine $q\in\mathbb{H}$ reel kuaterniyonun sol Hamilton matrisine karşılık gelen *sol Hamilton spinor matrisi* denir. Böylece ispat biter.

Ayrıca (4.12) denklemindeki φ_L, sol Hamilton spinor matrisi için

$$q\times p\rightarrow H^{+}(q)P\rightarrow\varphi_L\rho$$

yazılabilir. Burada ρ, p kuaterniyonuna f dönüşümü yardımıyla karşılık gelen spinordur.

Sonuç 4.3. $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon $q = \varphi_1 \boldsymbol{k} + \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i}$ olarak göz önüne alınsın. Burada $\varphi_1 = q_3 + \mathrm{i} q_0$, $\overline{\varphi}_2 = q_1 - \mathrm{i} q_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere bu reel kuaterniyonun sağ Hamilton spinor matrisi

$$\varphi_R = \begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i} q_3 & q_2 - \mathrm{i} q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i} q_1 & q_0 + \mathrm{i} q_3 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

şeklinde verilir.

İspat: $q = q_0 + \boldsymbol{i} q_1 + \boldsymbol{j} q_2 + \boldsymbol{k} q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $\mathbb{H} = Sp\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}\}$ olmak üzere $q = \varphi_1 \boldsymbol{k} + \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i}$ olarak göz önüne alınsın. O halde (3.4) denklemindeki Hamilton operatörü yardımıyla

$$h^{-}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \times \left(\varphi_1 \boldsymbol{k} + \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i} \right) = \boldsymbol{k} \times \varphi_1 \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k} \times \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i} = (\boldsymbol{k} \varphi_1) \times \boldsymbol{k} + \left(\boldsymbol{k} \overline{\varphi_2} \right) \times \boldsymbol{i} \tag{4.16}$$

ve benzer şekilde

$$h^{-}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \times \left(\varphi_1 \boldsymbol{k} + \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i} \right) = \boldsymbol{i} \times \varphi_1 \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i} \times \overline{\varphi_2} \boldsymbol{i} = (\varphi_2 \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{k} + \left(-\overline{\varphi_1} \boldsymbol{k} \right) \times \boldsymbol{i} \tag{4.17}$$

bulunur. O halde (4.16) ve (4.17) denklemlerinin matris formu

$$\varphi_R = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \varphi_1 & -\mathrm{i} \varphi_2 \\ -\mathrm{i} \overline{\varphi_2} & \mathrm{i} \overline{\varphi_1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\varphi_R = \begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (4.15) denklemindeki φ_R matrisine $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun sağ Hamilton matrisine karşılık gelen *sağ Hamilton spinor matrisi deni*r. Böylece ispat biter.

Ayrıca (4.15) denklemindeki φ_R, sağ Hamilton spinor matrisi için

$$p \times q \to H^{-}(q)P \to \varphi_R \rho_*$$

yazılabilir. Burada ρ_*, f_* dönüşümü yardımıyla p kuaterniyonuna karşılık gelen spinordur.

Sonuç 4.4. φ_L ve φ_R, sırasıyla, $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri olsun. Bu durumda bu spinor matrisleri arasında

$$\varphi_R = \varphi_L^t$$

ilişkisi vardır.

Şimdi φ_L ve φ_R spinor matrisinin Pauli matrisleri ile ilişkisi verilsin. O halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.5. $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere bu reel kuaterniyona karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri, sırasıyla, φ_L ve φ_R, Pauli matrisleri cinsinden

$$\varphi_L = q_0 I_2 - q_1 \mathrm{i} P_1 - q_2 \mathrm{i} P_2 - q_3 \mathrm{i} P_3$$

ve

$$\varphi_R = q_0 I_2 - q_1 \mathrm{i} P_1 + q_2 \mathrm{i} P_2 - q_3 \mathrm{i} P_3$$

şeklinde yazılabilir. Burada $I_2 \in \mathbb{C}_2^2$ birim matris olup $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}_2^2$ Pauli matrisleridir.

İspat: Öncelikle $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonun φ_L sol Hamilton spinor matrisi göz önüne alınsın. Bu durumda (4.12) denkleminden

i) $q = 1$ için

$$\varphi_L^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ii) $q = \boldsymbol{i}$ için

$$\varphi_L^{\boldsymbol{i}} = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} P_1$$

iii) $q = \boldsymbol{j}$ için

$$\varphi_L^j = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} P_2$$

iv) $q = \boldsymbol{k}$ için

$$\varphi_L^k = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} P_3$$

bulunur. Bu durumda $\varphi_L = q_0 I_2 - q_1 \mathrm{i} P_{11} - q_2 \mathrm{i} P_2 - q_3 \mathrm{i} P_3$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.15) denkleminden

i) $q = 1$ için

$$\varphi_R^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ii) $q = \boldsymbol{i}$ için

$$\varphi_R^{\boldsymbol{i}} = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} P_1$$

iii) $q = \boldsymbol{j}$ için

$$\varphi_R^j = \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{i} P_2$$

iv) $q = \boldsymbol{k}$ için

$$\varphi_R^k = -\mathrm{i} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathrm{i} P_3$$

bulunur. Bu durumda $\varphi_R = q_0 I_2 - q_1 \mathrm{i} P_1 + q_2 \mathrm{i} P_2 - q_3 \mathrm{i} P_3$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 4.1. $p,q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri, sırasıyla, ρ_L, ρ_R ve φ_L, φ_R olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler geçerlidir;

i) $(\varphi+\rho)_L = \varphi_L + \rho_L$, $(\varphi+\rho)_R = \varphi_R + \rho_R$,

ii) $(\lambda\varphi)_L = \varphi_L \Lambda$, $(\lambda\varphi)_R = \Lambda\varphi_R$,

iii) $1_L = I_2$, $1_R = I_2$,

iv) $(\varphi)_L = \mathrm{i}\varphi_L P_1$, $(\varphi)_R = \mathrm{i}\varphi_R P_1$,

v) $(\varphi_L\rho)_L = \varphi_L\rho_L$, $(\varphi_R\rho)_R = \varphi_R\rho_R$.

Burada $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$ dir.

İspat: ρ_L, ρ_R ve φ_L, φ_R, sırasıyla, $p,q \in \mathbb{H}$ iki reel kuaterniyonun sol ve sağ Hamilton matrislerine karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri olsun. O halde aşağıdaki ispatlar yapılabilir.

i) $p,q \in \mathbb{H}$ herhangi iki reel kuaterniyona karşılık gelen spinorlar, sırasıyla, $\rho,\varphi \in \mathbb{S}$ olsun. Bu durumda

$$p+q=(p_0+q_0)+\boldsymbol{i}\left(p_1+q_1\right)+\boldsymbol{j}\left(p_2+q_2\right)+\boldsymbol{k}\left(p_3+q_3\right)$$

olmak üzere $p+q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonuna karşılık gelen spinor (4.3) dönüşümü yardımıyla

$$\rho+\varphi=\begin{bmatrix} p_3+q_3+\mathrm{i}\left(p_0+q_0\right) \\ p_1+q_1+\mathrm{i}\left(p_2+q_2\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $\rho+\varphi$ spinorunun sol Hamilton spinor matrisi için

$$(\rho+\varphi)_L=\begin{bmatrix}(p_0+q_0)-\mathrm{i}(p_3+q_3) & -(p_2+q_2)-\mathrm{i}(p_1+q_1)\\(p_2+q_2)-\mathrm{i}(p_1+q_1) & (p_0+q_0)+\mathrm{i}(p_3+q_3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}p_0-\mathrm{i}p_3 & -p_2-\mathrm{i}p_1\\p_2-\mathrm{i}p_1 & p_0+\mathrm{i}p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q_0-\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1\\q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3\end{bmatrix}=\rho_L+\varphi_L$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.6) dönüşümü yardımıyla tanımlanan spinorun sağ Hamilton spinor matrisi için

$$(\rho+\varphi)_R=\begin{bmatrix}(p_0+q_0)-\mathrm{i}(p_3+q_3) & (p_2+q_2)-\mathrm{i}(p_1+q_1)\\-(p_2+q_2)-\mathrm{i}(p_1+q_1) & (p_0+q_0)+\mathrm{i}(p_3+q_3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}p_0-\mathrm{i}p_3 & p_2-\mathrm{i}p_1\\-p_2-\mathrm{i}p_1 & p_0+\mathrm{i}p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q_0-\mathrm{i}q_3 & q_2-\mathrm{i}q_1\\-q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3\end{bmatrix}=\rho_R+\varphi_R$$

eşitliği bulunur.

ii) $q\in\mathbb{H}$ kuaterniyonu ile ilişkili spinor φ olsun. Bu durumda $\lambda=a+\mathrm{i}b\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$\lambda\varphi=(a+\mathrm{i}b)\begin{bmatrix}q_3+\mathrm{i}q_0\\q_1+\mathrm{i}q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(aq_3-bq_0)+\mathrm{i}(aq_0+bq_3)\\(aq_1-bq_2)+\mathrm{i}(aq_2+bq_1)\end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\lambda\varphi\in\mathbb{S}$ spinoruna karşılık gelen sol Hamilton spinor matrisi

$$(\lambda\varphi)_L=\begin{bmatrix}aq_0+bq_3-\mathrm{i}(aq_3-bq_0) & -aq_2-bq_1-\mathrm{i}(aq_1-bq_2)\\aq_2+bq_1-\mathrm{i}(aq_1-bq_2) & aq_0+bq_3-\mathrm{i}(-aq_3+bq_0)\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. O halde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\lambda\varphi\right)_L = \begin{bmatrix} \left(q_0 - \mathrm{i}q_3\right) & \left(-q_2 - \mathrm{i}q_1\right) \\ \left(q_2 - \mathrm{i}q_1\right) & \left(q_0 + \mathrm{i}q_3\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(a + \mathrm{i}b\right) & 0 \\ 0 & \left(a - \mathrm{i}b\right) \end{bmatrix}$$

matris çarpımı elde edilir. O halde $\lambda = a + \mathrm{i}b$ için $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ olarak alınırsa $\left(\lambda\varphi\right)_L = \varphi_L \Lambda$ eşitliği bulunur. Burada "$\overline{\ }$" kompleks eşleniktir. Benzer şekilde (4.6) dönüşümü yardımıyla tanımlanan spinorunun sağ Hamilton spinor matrisi

$$\left(\lambda\varphi\right)_R = \begin{bmatrix} aq_0 + bq_3 - \mathrm{i}\left(aq_3 - bq_0\right) & aq_2 + bq_1 - \mathrm{i}\left(aq_1 - bq_2\right) \\ -aq_2 - bq_1 - \mathrm{i}\left(aq_1 - bq_2\right) & aq_0 + bq_3 + \mathrm{i}\left(aq_3 - bq_0\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Gerekli düzenlemeler sonucunda

$$\left(\lambda\varphi\right)_R = \begin{bmatrix} \left(a + \mathrm{i}b\right) & 0 \\ 0 & \left(a - \mathrm{i}b\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}$$

olduğu bulunur. O halde $\lambda = a + \mathrm{i}b$ için $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ olarak alınırsa $\left(\lambda\varphi\right)_R = \Lambda\varphi_R$ eşitliği elde edilir.

iii) $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ reel kuaterniyonun özel bir hali olarak $q_0 = 1$ $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ olsun. O halde $q = 1$ olur. Bu durumda $1 \in \mathbb{H}$ kuaterniyonuna karşılık gelen spinor

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere bu spinor ile ilişkili sol Hamilton spinor matrisi

$$\varphi_L = 1_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$\varphi_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

spinorunun sağ Hamilton matrisi

$$\varphi_R = 1_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

elde edilir.

iv) $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen spinor φ olmak üzere φ spinoru ile ilişkili sol Hamilton spinor matris φ_L olsun. Bu durumda φ spinorunun spinor eşleniği φ olmak üzere φ spinorunun sol Hamilton spinor matrisi

$$\left(\varphi\right)_L = \begin{bmatrix} q_1 - \mathrm{i}q_2 & q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ -q_3 + \mathrm{i}q_0 & q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla P_1, Pauli matrisi olmak üzere

$$\mathrm{i}\varphi_L P_1 = \mathrm{i}\begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(\varphi\right)_L$$

bulunur. Benzer şekilde (φ_*) spinorunun sağ Hamilton spinor matrisi için

$$(\varphi_*)_R = \begin{bmatrix} q_1 + \mathrm{i}q_2 & q_3 + \mathrm{i}q_0 \\ -q_3 + \mathrm{i}q_0 & q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathrm{i}\varphi_R P_1 = \mathrm{i}\begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\varphi_*)_R$$

bulunur.

v) $p, q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonları ile ilişkili ρ ve φ spinorları için

$$\varphi_L \rho = \begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_3 + \mathrm{i}p_0 \\ p_1 + \mathrm{i}p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2 + \mathrm{i}(q_0 p_0 - q_3 p_3 - q_2 p_2 - q_1 p_1) \\ q_2 p_3 + q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_3 p_2 + \mathrm{i}(q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_0 p_2 + q_3 p_1) \end{bmatrix}$$

eşitliği vardır. Burada $\varphi_L \rho \in \mathbb{S}$ spinoruna karşılık gelen Hamilton spinor matrisi

$$(\varphi_L \rho)_L = \begin{bmatrix} (q_0 - \mathrm{i}q_3)(p_0 - \mathrm{i}p_3) + (-q_2 - \mathrm{i}q_1)(p_2 - \mathrm{i}p_1) & (q_0 - \mathrm{i}q_3)(-p_2 - \mathrm{i}p_1) + (-q_2 - \mathrm{i}q_1)(p_0 + \mathrm{i}p_3) \\ (q_2 - \mathrm{i}q_1)(p_0 - \mathrm{i}p_3) + (q_0 + \mathrm{i}q_3)(p_2 - \mathrm{i}p_1) & (q_2 - \mathrm{i}q_1)(-p_2 - \mathrm{i}p_1) + (q_0 + \mathrm{i}q_3)(p_0 + \mathrm{i}p_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 - \mathrm{i}p_3 & -p_2 - \mathrm{i}p_1 \\ p_2 - \mathrm{i}p_1 & p_0 + \mathrm{i}p_3 \end{bmatrix} = \varphi_L \rho_L$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde sağ Hamilton spinor matrisi φ_R olmak üzere

$$(\varphi_R\rho_*)_R=\begin{bmatrix}(q_0-\mathrm{i}q_3)(p_0-\mathrm{i}p_3)+(-q_2-\mathrm{i}q_1)(p_2-\mathrm{i}p_1) & (q_0-\mathrm{i}q_3)(-p_2-\mathrm{i}p_1)+(-q_2-\mathrm{i}q_1)(p_0+\mathrm{i}p_3)\\ (q_2-\mathrm{i}q_1)(p_0-\mathrm{i}p_3)+(q_0+\mathrm{i}q_3)(p_2-\mathrm{i}p_1) & (q_2-\mathrm{i}q_1)(-p_2-\mathrm{i}p_1)+(q_0+\mathrm{i}q_3)(p_0+\mathrm{i}p_3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}q_0-\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1\\ q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0-\mathrm{i}p_3 & -p_2-\mathrm{i}p_1\\ p_2-\mathrm{i}p_1 & p_0+\mathrm{i}p_3\end{bmatrix}=\varphi_R\rho_R$$

bulunur. Burada ρ_*, f_* dönüşümü ile p reel kuaterniyonuna karşılık gelen spinordur. Böylece ispat biter.

Önerme 4.3. φ_L ve φ_R, q reel kuaterniyonun karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisler olsun. Bu durumda φ_L,φ_R Hamilton spinor matrisleri normaldir.

İspat: $q\in\mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyonun sol matris gösterimine karşılık gelen sol spinor matrisi φ_L olsun. O halde

$$\overline{\varphi_L^t}\varphi_L=\begin{bmatrix}q_0+\boldsymbol{i}q_3 & q_2+\boldsymbol{i}q_1\\ -q_2+\boldsymbol{i}q_1 & q_0-\boldsymbol{i}q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0-\boldsymbol{i}q_3 & -q_2-\boldsymbol{i}q_1\\ q_2-\boldsymbol{i}q_1 & q_0+\boldsymbol{i}q_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 0\\ 0 & q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}=N^2(q)I_2$$

ve

$$\varphi_L\overline{\varphi_L^t}=\begin{bmatrix}q_0-\boldsymbol{i}q_3 & -q_2-\boldsymbol{i}q_1\\ q_2-\boldsymbol{i}q_1 & q_0+\boldsymbol{i}q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0+\boldsymbol{i}q_3 & q_2+\boldsymbol{i}q_1\\ -q_2+\boldsymbol{i}q_1 & q_0-\boldsymbol{i}q_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 & 0\\ 0 & q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}=N^2(q)I_2$$

olmak üzere $\overline{\varphi_L^t}\varphi_L=\varphi_L\overline{\varphi_L^t}$ olduğu görülür. Benzer şekilde φ_R spinor matrisi için aynı sonuç elde edilir. Şöyle ki $q\in\mathbb{H}$ herhangi bir reel kuaterniyonun sağ matris gösterimine karşılık gelen sağ spinor matrisi φ_R olsun. O halde

$$\overline{\varphi_R^t}\varphi_R = \begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & -q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 - \boldsymbol{i}q_3 & q_2 - \boldsymbol{i}q_1 \\ -q_2 - \boldsymbol{i}q_1 & q_0 + \boldsymbol{i}q_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} = N^2(q)I_2$$

ve

$$\varphi_R\overline{\varphi_R^t} = \begin{bmatrix} q_0 - \boldsymbol{i}q_3 & q_2 - \boldsymbol{i}q_1 \\ -q_2 - \boldsymbol{i}q_1 & q_0 + \boldsymbol{i}q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & -q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} = N^2(q)I_2$$

olmak üzere $\overline{\varphi_R^t}\varphi_R = \varphi_R\overline{\varphi_R^t}$ olduğu görülür. İspat biter.

Şimdi Hamilton spinor matrislerinin determinantları göz önüne alınsın. Bu durumda (4.12) ve (4.15) denklemlerinden

$$\det(\varphi_L) = \begin{vmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{vmatrix} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N^2(q)$$

ve

$$\det(\varphi_R) = \begin{vmatrix} q_0 - \mathrm{i}q_3 & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & q_0 + \mathrm{i}q_3 \end{vmatrix} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = N^2(q)$$

olduğu görülür. O halde aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.6. $q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu sıfır kuaterniyondan farklı herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere φ_L ve φ_R, sırasıyla, q reel kuaterniyonunun sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri olmak üzere bu matrisler regülerdir.

Sonuç 4.7. φ_L, φ_R spinor matrisleri $q \neq 0 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu ile ilişkili sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri olmak üzere φ_L, φ_R spinor matrislerinin tersi vardır ve

$$\varphi_L^{-1} = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix},$$
$$\varphi_R^{-1} = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & -q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

şeklindedir.

Bir q reel kuaterniyonun eşleniği $q^* \in \mathbb{H}$ göz önüne alınsın. O halde q^* reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri φ_L^*, φ_R^* olmak üzere

$$\varphi_L^* = \begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\varphi_R^* = \begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & -q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

şeklinde yazılır. Buradan Sonuç 4.7 dikkate alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.8. $q \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu sıfır kuaterniyonundan farklı herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere φ_L ve φ_R spinor matrislerinin tersi

$$\varphi_L^{-1} = \frac{1}{N^2(q)}\varphi_L^* \tag{4.19}$$

$$\varphi_R^{-1} = \frac{1}{N^2(q)}\varphi_R^* \tag{4.20}$$

şeklinde yazılır.

(4.19) ve (4.20) denklemlerinden görüldüğü üzere q reel kuaterniyonu birim kuaterniyon olarak alınırsa $\varphi_L^{-1} = \varphi_L^*$ ve $\varphi_R^{-1} = \varphi_R^*$ eşitlikleri elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.9. $q \in \mathbb{H}$ herhangi bir birim reel kuaterniyon olsun. O halde q reel kuaterniyonu ile ilişkili φ_L, φ_R Hamilton spinor matrisleri üniterdir.

İspat: φ_L ve φ_R spinor matrisleri için

$$\overline{\varphi_L^t} = \begin{bmatrix} \overline{q_0 - \mathrm{i}q_3} & \overline{-q_2 - \mathrm{i}q_1} \\ \overline{q_2 - \mathrm{i}q_1} & \overline{q_0 + \mathrm{i}q_3} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} = \varphi_L^* = \varphi_L^{-1}$$

eşitliğinden elde edilir. Benzer şekilde

$$\overline{\varphi_R^t} = \begin{bmatrix} q_0 + \mathrm{i}q_3 & -q_2 + \mathrm{i}q_1 \\ q_2 + \mathrm{i}q_1 & q_0 - \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} = \varphi_R^* = \varphi_R^{-1}$$

Böylece Hamilton spinor matrisleri üniterdir. İspat biter.

Sonuç 4.9 göz önüne alındığında $q \in \mathbb{H}$ birim reel kuaterniyonu için $\varphi_L, \varphi_R \in SU(2)$ olduğu aşikardır.

4.3. Hamilton Spinor Matrislerinin Özdeğer ve Özvektörleri

Bu bölümde reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen Hamilton matrisleri ile eşleşen sol ve sağ spinor matrislerin özdeğer ve özvektörleri elde edilecektir. Bunun için $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu göz önüne alınsın. Bu durumda bu reel kuaterniyona karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrisleri φ_L ve φ_R olmak üzere bu spinor matrisleri (4.12) ve (4.15) denklemlerinden biliniyor.

O halde $q=\boldsymbol{q}$ reel kuaterniyonu pür kuaterniyon olarak göz önüne alınırsa $q_0=0$ olacağından bu pür kuaterniyona karşılık gelen Hamilton spinor matrisleri $\boldsymbol{\varphi_L}$ ve $\boldsymbol{\varphi_R}$ olarak gösterilsin. Bu durumda bu spinor matrisleri

$$\boldsymbol{\varphi_L}=\begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1 \\ q_2-\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

ve

$$\boldsymbol{\varphi_R}=\begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & q_2-\mathrm{i}q_1 \\ -q_2-\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

şeklinde elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.10. $q=q_0+\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3$ herhangi bir reel kuaterniyona karşılık gelen sol Hamilton spinor matris φ_L (sağ Hamilton spinor matris φ_R) ve $q=\boldsymbol{q}=\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3$ pür kuaterniyonuna karşılık gelen sol Hamilton spinor matris ise $\boldsymbol{\varphi_L}$ (sağ Hamilton spinor matris $\boldsymbol{\varphi_R}$) olsun. O halde bu Hamilton spinor matrisleri arasındaki ilişki

$$\varphi_{L,R}=q_0 I_2+\boldsymbol{\varphi_{L,R}}$$

şeklindedir.

İspat: $q=\boldsymbol{q}=\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3$ pür kuaterniyonuna karşılık gelen sol Hamilton spinor matris $\boldsymbol{\varphi_L}$ olmak üzere

$$\varphi_L=\begin{bmatrix} q_0-\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1 \\ q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1 \\ q_2-\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}$$

$$=q_0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & -q_2-\mathrm{i}q_1 \\ q_2-\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}=q_0I_2+\boldsymbol{\varphi_L}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde φ_R sağ Hamilton spinor matrisi için

$$\varphi_R=\begin{bmatrix} q_0-\mathrm{i}q_3 & q_2-\mathrm{i}q_1 \\ -q_2-\mathrm{i}q_1 & q_0+\mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & q_2-\mathrm{i}q_1 \\ -q_2-\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix}=q_0I_2+\boldsymbol{\varphi_R}$$

eşitliğinden ispat biter.

Şimdi q reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol ve sağ Hamilton spinor matrislerinin özdeğer ve özvektörleri elde edilsin. O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.2. $q=q_0+\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3$ herhangi bir reel kuaterniyona karşılık gelen φ_L sol Hamilton spinor matrisin (φ_R sağ Hamilton spinor matrisin) özdeğerleri $\lambda_1=q_0+\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ ve $\lambda_2=q_0-\mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ dir. Burada $\boldsymbol{q}$, pür kuaterniyondur.

İspat: $q=q_0+\boldsymbol{i}q_1+\boldsymbol{j}q_2+\boldsymbol{k}q_3$ herhangi bir reel kuaterniyona karşılık gelen φ_L sol Hamilton spinor matrisin özdeğerleri $\varphi_L\vartheta=\lambda\vartheta$ denklemindeki $\lambda\in\mathbb{C}$ değerleridir. O halde $\det(\varphi_L-\lambda I_2)=0$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\det(\varphi_L-\lambda I_2)=\begin{bmatrix} q_0-\lambda-iq_3 & -q_2-iq_1 \\ q_2-iq_1 & q_0-\lambda+iq_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\lambda^2-2\lambda q_0+q_2^2+q_1^2+q_0^2+q_3^2=0$$

karakteristik polinomu elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemin çözümünden

$$\lambda_1 = q_0 + \mathrm{i}N(\boldsymbol{q}), \qquad \lambda_2 = q_0 - \mathrm{i}N(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{C} \tag{4.23}$$

elde edilir. φ_R sağ Hamilton spinor matrisinin özdeğerleri için $\det(\varphi_R - \lambda I_2) = 0$ denkleminden aynı karakteristik polinom elde edileceğinden aynı özdeğerler bulunur. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.11. Herhangi bir reel kuaterniyon $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ olarak göz önüne alınsın. Bu reel kuaterniyona karşılık gelen sol Hamilton spinor matris φ_L ve $q = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ pür kuaterniyonuna karşılık gelen sol spinor matris ise $\boldsymbol{\varphi_L}$ olsun. O halde φ_L spinor matrisinin özdeğeri $\boldsymbol{\varphi_L}$ spinor matrisinin özdeğerine q_0 eklenerek bulunur. Benzer şekilde φ_R spinor matrisinin özdeğeri $\boldsymbol{\varphi_R}$ spinor matrisinin özdeğerine q_0 eklenerek bulunur.

İspat: Herhangi bir reel kuaterniyon $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ olarak göz önüne alınsın. Bu reel kuaterniyona karşılık gelen sol Hamilton spinor matris φ_L (sağ Hamilton matris φ_R) ve $q = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ pür kuaterniyonuna karşılık gelen sol Hamilton spinor matris ise $\boldsymbol{\varphi_L}$ ($\boldsymbol{\varphi_R}$) olsun. O halde $\det(\boldsymbol{\varphi_L} - \lambda I_2) = 0$ denkleminden

$$\det(\boldsymbol{\varphi_L} - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda - \mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & -\lambda + \mathrm{i}q_3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + q_3^2 + q_2^2 + q_1^2 = 0$$

elde edilir. Bu karaktersitik polinomun kökleri hesaplandığında

$$\lambda_1 = \mathrm{i}N(\boldsymbol{q}), \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}N(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{C} \tag{4.24}$$

özdeğerleri hesaplanır. O halde (4.23) ve (4.24) denklemlerinden görüldüğü üzere φ_L spinor matrisinin özdeğerleri $\boldsymbol{\varphi_L}$ spinor matrisinin özdeğerlerine q_0 eklenmiş halidir.

φ_R spinor matrisi için aynı karakteristik polinom elde edildiğinden φ_R ve $\boldsymbol{\varphi}_R$ spinor matrisleri için de aynı sonuç elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 4.3. $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ herhangi bir reel kuaterniyona karşılık gelen sol Hamilton spinor matris φ_L ve $q = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ pür kuaterniyonuna karşılık gelen spinor matris ise $\boldsymbol{\varphi}_L$ olsun. O halde $\boldsymbol{\varphi}_L$ spinor matrisinin özdeğeri μ olarak alınırsa $\boldsymbol{\varphi}_L^2$ spinor matrisinin özdeğeri μ^2 dir.

İspat: : $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ herhangi bir reel kuaterniyona karşılık gelen sol Hamilton spinor matris φ_L ve $q = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ pür kuaterniyonuna karşılık gelen sol spinor matris ise $\boldsymbol{\varphi}_L$ olsun. Bu durumda $\boldsymbol{\varphi}_L^2$ spinor matrisinin özdeğerlerini hesaplamak için φ_L^2 spinor matrisi elde edilsin. O halde

$$\boldsymbol{\varphi}_L^2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i}q_3 & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 & 0 \\ 0 & -q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 \end{bmatrix} = -N(\boldsymbol{q}) I_2$$

elde edilir. Buradan $\det(\varphi_L^2 - \lambda I_2) = 0$ karakteristik polinomun kökleri μ_1 ve μ_2 olmak üzere

$$\mu_{1,2} = -N^2(\boldsymbol{q}) \tag{4.25}$$

özdeğerleri bulunur. Buradan (4.24) ve (4.25) denklemleri göz önüne alındığında φ_L spinor matrisinin özdeğeri μ ise φ_L^2 spinor matrisinin özdeğeri μ^2 dir. Benzer şekilde φ_R^2 spinor matrisi φ_L^2 ile aynı karakteristik polinoma sahip olduğundan aynı ifade φ_R^2 spinor matrisi için geçerlidir. Böylece ispat biter.

Sonuç 4.12. φ_L ve φ_R Hamilton spinor matrisleri kusurlu olmayan (nondefective) matristir.

İspat: $\varphi_L\left(\varphi_R\right)$ nin özdeğer sayısı (2) boyut sayısına (2) eşit olduğundan dolayı kusurlu olmayan bir matristir.

Teorem 4.4. φ_L sol Hamilton spinor matrisinin $\lambda_1 = q_0 + \mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ ve $\lambda_2 = q_0 - \mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ özdeğerlerine karşılık gelen öz uzaylar, sırasıyla,

$$\{\varsigma_L\alpha \mid \alpha \in \mathbb{S}\} \text{ ve } \{\delta_L\alpha \mid \alpha \in \mathbb{S}\}$$

şeklindedir. Burada $\varsigma = \begin{bmatrix} q_3 - N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$ ve $\delta = \begin{bmatrix} q_3 + N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$ spinorlarının sol Hamilton spinor matrisleri, sırasıyla, ς_L ve δ_L dir.

İspat: $q \in \mathbb{H}$ spinoruna karşılık gelen $\varphi \in \mathbb{S}$ spinorunun sol Hamilton spinor matrisi φ_L olsun. Bu durumda φ_L spinor matrisinin $\lambda_1 = q_0 + \mathrm{i}N(\boldsymbol{q})$ özdeğeri için öz uzayı elde edilsin. O halde $\varsigma = \begin{bmatrix} q_3 - N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 + \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}$ spinoru göz önüne alınsın. Bu durumda ς spinorunun sol Hamilton spinor matrisi

$$\varsigma_L = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) - q_3\right) & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi $\alpha \in \mathbb{S}$ spinoru $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \mathrm{i}\alpha_0 \\ \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2 \end{bmatrix}$ olacak şekilde herhangi bir spinor olsun. Bu durumda $\varsigma_L\alpha \in \mathbb{S}$ spinoru

$$\varsigma_L\alpha = \begin{bmatrix} q_3\alpha_0 - q_2\alpha_1 + q_1\alpha_2 + N(\boldsymbol{q})\alpha_3 + \mathrm{i}\left(-q_3\alpha_3 - q_2\alpha_2 - q_1\alpha_1 + N(\boldsymbol{q})\alpha_3\right) \\ q_2\alpha_3 + q_1\alpha_0 - q_3\alpha_2 - N(\boldsymbol{q})\alpha_2 + \mathrm{i}\left(q_2\alpha_0 - q_1\alpha_3 + q_3\alpha_1 + N(\boldsymbol{q})\alpha_1\right) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan φ_L sol Hamilton spinor matrisi için

$$\varphi_L - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(-N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

eşitliği geçerlidir. O halde (4.26) ve (4.27) denklemlerinden

$$\left(\varphi_L-\lambda_1 I_2\right)\varsigma_L\alpha=\begin{bmatrix}\left(\alpha_3+\boldsymbol{i}\alpha_0\right)\left(N^2(\boldsymbol{q})-q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)\\ \left(\alpha_1+\boldsymbol{i}\alpha_2\right)\left(N^2(\boldsymbol{q})-q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)\end{bmatrix} \tag{4.28}$$

elde edilir. Bu durumda $N^2(\boldsymbol{q})=q_1^2+q_2^2+q_3^2$ olduğundan $\lambda_1=q_0+\mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğeri için $\left(\varphi_L-\lambda_1 I_2\right)\varsigma_L\alpha=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0$ elde edilir. O halde $\lambda_1=q_0+\mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğeri için φ_L spinor matrisinin öz uzayı $\varsigma_L\alpha\in\mathbb{S}$ spinorlarından oluşur.

Benzer şekilde φ_L sol Hamilton spinor matrisinin $\lambda_2=q_0-\mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğeri için öz uzay elde edilsin. Bunun için $\delta=\begin{bmatrix}q_3+N(\boldsymbol{q})\\ q_1+\mathrm{i}q_2\end{bmatrix}\in\mathbb{S}$ spinoru göz önüne alınsın. Bu durumda $\delta\in\mathbb{S}$ spinorunun sol Hamilton spinor matrisi

$$\delta_L=\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q})+q_3\right) & -q_2-\mathrm{i}q_1\\ q_2-\mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(-N(\boldsymbol{q})+q_3\right)\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi $\alpha\in\mathbb{S}$ spinoru $\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_3+\mathrm{i}\alpha_0\\ \alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2\end{bmatrix}$ olacak şekilde dikkate alınsın. Öyleyse $\delta_L\alpha\in\mathbb{S}$ spinoru için

$$\delta_L\alpha=\begin{bmatrix}q_3\alpha_0-q_2\alpha_1+q_1\alpha_2+N(\boldsymbol{q})\alpha_0+\mathrm{i}\left(-q_3\alpha_3-q_2\alpha_2-q_1\alpha_1+N(\boldsymbol{q})\alpha_3\right)\\ q_2\alpha_3+q_1\alpha_0-q_3\alpha_2+N(\boldsymbol{q})\alpha_2+\mathrm{i}\left(q_2\alpha_0-q_1\alpha_3+q_3\alpha_1+N(\boldsymbol{q})\alpha_1\right)\end{bmatrix}$$

eşitliği vardır. Diğer taraftan

$$\varphi_L - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) - q_3\right) & -q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) \end{bmatrix}$$

olmak üzere (4.28) denklemine benzer şekilde

$$\left(\varphi_L - \lambda_1 I_2\right)\delta_L \alpha = 0$$

eşitliği bulunur. O halde $\lambda_2 = q_0 - \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğeri için φ_L spinor matrisinin öz uzayı $\delta_L \alpha \in \mathbb{S}$ spinorlarından oluşur. Böylece ispat biter.

Teorem 4.5. φ_R sağ Hamilton spinor matrisinin $\lambda_1 = q_0 + \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ ve $\lambda_2 = q_0 - \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğerlerine, sırasıyla, karşılık gelen öz uzaylar

$$\left\{\varsigma_R \alpha_* \mid \alpha_* \in \mathbb{S}\right\} \text{ ve} \left\{\delta_L \alpha_* \mid \alpha_* \in \mathbb{S}\right\}$$

cümlelerinden oluşur. Burada ς_R ve δ_*, sırasıyla $\varsigma_* = \begin{bmatrix} q_3 - N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$ ve $\delta_* = \begin{bmatrix} q_3 + N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix}$ spinorlarının sağ Hamilton spinor matrisleridir.

İspat: q reel kuaterniyonuna sağ çarpım ile karşılık gelen spinor $\varphi_* \in \mathbb{S}$ olmak üzere φ_R, bu spinorun sağ Hamilton spinor matrisi olsun. Bu durumda $\lambda_1 = q_0 + \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğerine karşılık gelen öz uzayını elde etmek için $\varsigma_* = \begin{bmatrix} q_3 - N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}$ spinoru göz önüne alınsın. Bu durumda ς_* spinorunun sağ Hamilton spinor matrisi

$$\varsigma_R = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) - q_3\right) & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi herhangi bir $\alpha_* = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \mathrm{i}\alpha_0 \\ \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}$ spinoru göz önüne alınsın. O halde $\varsigma_R \alpha_* \in \mathbb{S}$ spinoru için

$$\delta_R \alpha_* = \begin{bmatrix} q_3\alpha_0 + q_2\alpha_1 - q_1\alpha_2 - N(\boldsymbol{q})\alpha_0 + \mathrm{i}\left(-q_3\alpha_3 - q_2\alpha_2 - q_1\alpha_1 + N(\boldsymbol{q})\alpha_3\right) \\ -q_2\alpha_3 + q_1\alpha_0 + q_3\alpha_2 + N(\boldsymbol{q})\alpha_2 + \mathrm{i}\left(-q_2\alpha_0 - q_1\alpha_3 + q_3\alpha_1 + N(\boldsymbol{q})\alpha_1\right) \end{bmatrix}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca φ_R sağ Hamilton spinor matrisi için

$$\varphi_R - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) +_3\right) & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(-N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(\varphi_R - \lambda_1 I_2\right)\varsigma_R \alpha_* = \begin{bmatrix} \left(\alpha_3 + \boldsymbol{i}\alpha_0\right)\left(N^2(\boldsymbol{q}) - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right) \\ \left(\alpha_1 - \boldsymbol{i}\alpha_2\right)\left(N^2(\boldsymbol{q}) - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right) \end{bmatrix} = \left(N^2(\boldsymbol{q}) - N^2(\boldsymbol{q})\right)\alpha_* = 0$$

bulunur. Öyleyse $\lambda_1 = q_0 + \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğeri için φ_R spinor matrisinin öz uzayı $\varsigma_R \alpha_* \in \mathbb{S}$ spinorlarından üretilir.

Benzer şekilde $\lambda_2 = q_0 - \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğeri için; $\delta_* = \begin{bmatrix} q_3 + N(\boldsymbol{q}) \\ q_1 - \mathrm{i}q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}$ spinoru göz önüne alınırsa

$$\delta_R = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\left(N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) & q_2 - \mathrm{i}q_1 \\ -q_2 - \mathrm{i}q_1 & \mathrm{i}\left(-N(\boldsymbol{q}) + q_3\right) \end{bmatrix}$$

Hamilton matrisi elde edilir. Herhangi bir $\alpha_* = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \mathrm{i}\alpha_0 \\ \alpha_1 - \mathrm{i}\alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}$ spinoru için

$$\delta_R\alpha_* = \begin{bmatrix} q_3\alpha_0 + q_2\alpha_1 - q_1\alpha_2 - N(\boldsymbol{q})\alpha_0 + \mathrm{i}\left(-q_3\alpha_3 - q_2\alpha_2 - q_1\alpha_1 + N(\boldsymbol{q})\alpha_3\right) \\ -q_2\alpha_3 + q_1\alpha_0 + q_3\alpha_2 + N(\boldsymbol{q})\alpha_2 + \mathrm{i}\left(-q_2\alpha_0 - q_1\alpha_3 + q_3\alpha_1 + N(\boldsymbol{q})\alpha_1\right) \end{bmatrix}$$

spinoru dikkate alınırsa $\left(\varphi_R - \lambda_2 I_2\right)\varsigma_R\alpha_* = 0$ bulunur. Bu durumda φ_R sağ Hamilton spinor matrisinin $\lambda_2 = q_0 - \mathrm{i}N\left(\boldsymbol{q}\right)$ özdeğerine karşılık gelen öz uzay $\varsigma_R\alpha_* \in \mathbb{S}$ spinorlarından üretilir. Böylece ispat biter.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde reel kuaterniyonların Hamilton operatörlerine karşılık gelen 4×4 boyutlu Hamilton matrisleri için Hamilton spinor matrisleri elde edilmiştir. Daha sonra bu 2×2 boyutlu spinor matrislerinin bazı özellikleri verilmiştir ve özdeğer ve özvektörleri elde edilmiştir. Dolayısıyla, bu tezde, birçok alanda çok fazla kullanım alanına sahip kuaterniyonların Hamilton matrisleri daha sade bir şekilde ifade edilerek bu matrislerin daha kullanışlı bir hali elde edilmiştir. Bu yüzden, bu tez kullanılarak şuana kadar kuaterniyonlar ile ilgili yapılan çalışmaların spinor ifadeleri elde edilebilir. Ayrıca, split kuaterniyonların spinorlar ile nasıl ifade edileceği araştırılıp, split kuaterniyonların Hamilton matrislerinin spinor matrisleri çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Artman B. (1988) The Concept of Number: ***From Quternions to Monads and Topological Fileds*** , Ellis Horward ,Chicester ,UK.

Balcı, Y., Erişir, T. and Güngör, M. A. (2015) “Hyperbolic Spinor Darboux Equations of Spacelike Curves in Minkowski 3-Space”, ***Journal of the Chungcheong Mathematical Society***, 28(4), 525-535.

Brenner J. L, (1951) Matrices of Quaternions ,***Pasific Journal of Matematics***, 1 , 329-335.

Cartan, É. (1913) “Les Groupes Projectifs qui ne Laissent Invariante Aucune Multiplicite Plane”, ***Bulletin de la Société Mathématique de France***, 41, 53-96.

Cartan, É. (1966) “The Theory of Spinors”, ***Dover Publications***, New York, 1-157.

Dechant P.P, (2013) Clifford Algebra Unveils a Suprising Geometric Significance of Quaternions Root System of Coxeter Groups, ***Adv.Appl. Clifford Algebras,*** 23, 301-321.

Delphenich, D.H. (2012) The Representation of Physical Motions by Various Types of Quaternions, Arxiv:1205,4440.

Erişir, T. and Kardağ, N. C. (2019) “Spinor Representations of Involute Evolute Curves in E^3”, ***Fundam. J. Math. Appl***, 2-2, 148-155.

Erişir, T., Güngör, M. A. and Tosun, M. (2015) “Geometry of the Hyperbolic Spinors Corresponding to Alternative Frame”, ***Advances in Applied Clifford Algebras***, 25(4), 799-810.

Goldstein, H. (1980) “Classical Mechanics”, 2 ed, ***Addison-Wesley, Reading, Mass***

Grob J, Trenkler G, Troschke S.O, (2001) Quaternions: further contributions to a matrix oriented approach, ***Lineer Algebra and its Applications,*** 326, 205-213

Hacısalihoğlu, H.H. (1983) Hareket Geometrisi ve Kuatemiyonlar Teorisi, ***Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Yayınları***, Math. No.2 .

Hamilton, W. R. (1844) On A New Spaces of Imaginary Quantities Connected with A Theory of Quaternions,***Proceedings of the Royal Irısh Academy*** , 2, 424-434 .

Hamilton W. R. (1853).Lectures on Quternions , ***Hodges and Smith***, Dublin.

Hamilton.W.R , (1899) ‘’Elements of Quaternions’’, ***Chelsea***, Newyork .

Hernandez A-Galeana , R. Lopez –Vazquez, J.Lopez-Bonilla, G.R. Perez-Teruel (2015), Faraday Tensor and Maxwell spinor (Part I), **Prespacetime Journal**, 6, 88-97

Ickes B.P, (1970) A New Method for Performing Digital Control Sytem Attitude Computations Using Quaternions , ***AIAA J*** , 8 ,1 ,13-17.

Kantar I.L ,Solodovnikov A.S. (1989) Hypercomplex Numbers , ***An Elementary Introduction to Algebres*** , Springer Verlag , New York

Ketenci, Z., Erişir, T. and Güngör, M. A. (2015) "A Construction of Hyperbolic Spinors According to Frenet Frame in Minkowski Space", ***Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories***, 13(2), 179-193.

Kılıç.A , ''Kuaterniyonların kuantum fiziğine uygulanması'' , Yüksek Lisans Tezi , ***Anadolu Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü*** ,1999.

Kişi, İ. and Tosun, M. (2015) "Spinor Darboux Equations of Curves in Euclidean 3-Space", ***Mathematica Moravica***, 19(1), 87-93.

Lee H.C. (1949) Eigenvalues and Cananical Forms of Matrices with Quuaternion Coefficients , ***Proc. R. I. A*** ,52.

Mesiter L. , Schaeben H. , A Concise. (2005) Quaternion Geometry of Rotations , ***Math. Meth. Appl. Sci***. , 28 , 101-126.

Sattinger, D. H. and Weaver, O. L. (1986) "Lie Groups and Algebras with Applications to Physics", ***Geometry and Mechanics***, Springer-Verlag, Newyork.

Shepperd S.W. (1978) Quaternion from Rotation Matris , ***Journal of Guidance and Control*** ,1, 3 , 223-224.

Tarakçıoğlu.M, Erişir T, Güngör. M.A and Tosun. M. The Hyperbolic Spinor Representation of Transformations in R_1^3 by means of Split Quaternions, ***Adv. Appl.Cliff. Algebr***. 28(1) (2018) 26.

Torres del Castillo, G. F. T. and Barrales, G. S. (2004) "Spinor Formulation of the Differential ***Geometry of Curves, Revista Colombiana de Matemáticas***, 38, 27-34.

Torres del Castillo, G. F. Torres. (2003) 3-D Spinors, Spin-Weighted Functions and Their Applications, ***Birkhäuser, Cambridge,NA***, 2003.

Ünal, D., Kişi, İ. and Tosun, M. (2013) "Spinor Bishop Equation of Curves in Euclidean 3-Space", **Advances in Applied Clifford Algebras**, 23(3), 757-765.

Vicci L, Quaternions and Rotetions in 3-Space: The Algebra and Its Geometric Interpretetion, ***University of North Caroline at Chapel Hill***, TR 01-04 Department of Computer Science

Vince J , (2011) Quaternions for Computers Graphics , ***Springer*** , New York.

Vivarelli, M. D. (1984) "Development of Spinor Descriptions of Rotational Mechanics from Euler's Rigid Body Displacement Theorem", ***Celestial mechanics***, 32, 193-207.

Ward J.P. (1997) Quternions and Coyley Numbers Algebra and Applications , ***Kuuwer Academic Publishes*** , London,54-102.

Wolf L.A. (1936) Similarity of Matrices in Whihc the Elements are Real Quaternions ,***Bull.Amer. Math. Soc***. , 42 ,737-743.

Woit, P. (2017) Quantum Theory, Groups and Represantation, ***Springer,*** 2017.

Zhang F. (1997) Quternions and Matrics of Quternions, ***Lineer Algebra and İts Applications*** , 251 21-57.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Erişir, T. and Yıldırım E. (2019) "Hamilton Matrices of Real Quaternions and Spinors", ***Icmase-2020 International Conference on Mathematics and Its Aplication in Science and Engineering,*** Ankara, 9-10 Jully.

ÖZGEÇMİŞ

Emrah YILDIRIM, 1984 yılında Erzurum' da doğdu. İlk öğrenimini Erzurum Şehitler ilkokulunda, orta öğrenimini 50. Yıl İlköğretim okulunda ve lise öğrenimini aynı ilde bulunan Cumhuriyet Lisesi'nde tamamladı. 2001 yılında girdiği Atatürk Üniversitesinden 2005 yılında mezun oldu. 2018 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. Şuan Erzurum'da Necip Fazıl İmam Hatip Ortaokulu'da öğretmenlik yapmaktadır.