T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k −PELL SAYILARI VE POLİNOMLARI

Aysun AKTAŞ

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

ERZİNCAN
2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$\boldsymbol{k}-$ PELL SAYILARI VE POLİNOMLARI

Aysun AKTAŞ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu tezde, Pell sayı dizilerinin yeni bir ailesi tanımlanmıştır. Sonra $k = 2$ için yeni ailenin geren fonksiyonu bulunmuştur. k −Pell sayıları ile bilinen Pell sayıları arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca, k −Pell sayı dizisinin polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomların bazı özellikleri elde edilmiştir. k −Pell polinomları ile bilinen Pell polinomları arasındaki ilişki verilmiştir. Son olarak, yeni ailenin ve polinomlarının matris temsilleri bulunmuştur.

2021, 36 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Geren fonksiyon, k −Pell sayıları, k −Pell polinomları, Pell sayıları, Pell polinomları.

ABSTRACT

Master Thesis

k −PELL NUMBERS AND POLINOMIALS

Aysun AKTAŞ

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this thesis, a new family of k −Pell numbers has been defined. Then the generating function of the new family has been found for $k = 2$. The relationship between the family of k −Pell numbers and the known Pell numbers has been given. Also, the polynomials of k −Pell numbers have been defined. Some properties of the polynomials have been given. The relationship between $k-$ Pell polynomials and known Pell polynomials has been given. Lastly, the new generalizations of these families and the polynomials in matrix representation have been found.

2021, 36 Pages

Keywords: Generating function, k −Pell numbers, k −Pell polynomials, Pell numbers, Pell polynomials.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü çalışmalarımın her safhasında beni cesaretlendiren ve desteğini veren kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca tez çalışmam boyunca yardımlarını sunan arkadaşım Merve TAŞTAN'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Aysun AKTAŞ
Ocak, 2021

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
F_n	n. Fibonacci sayısı
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
L_n	n. Lucas sayısı
$\{P_n\}$	Pell dizisi
P_n	n. Pell sayısı
$\{Q_n\}$	Pell Lucas dizisi
Q_n	n. Pell Lucas sayısı
$\{P_n(x)\}$	Pell Polinomu
$P_n(x)$	n. Pell Polinomu

1.GİRİŞ

Matematiğin temelini oluşturan sayıların tarihi insanlığın tarihi kadar eskidir. İlkçağlarda insanlar sayıların yerine mağara duvarlarına çizgi çizmek, ağaç dallarına çentik atmak gibi bazı yöntemler kullanmıştır. Zamanla doğadaki olaylar gözlenerek yeni sayı sistemleri tanımlanmış, bu tanımlar üzerinde çalışılarak daha da geliştirilmiş, matematiğin ve diğer bilimlerin konuları ile tanımlanan sayı dizileri ilişkilendirilerek sayı sistemlerinin daha başka özelliklerinin ortaya çıkması sağlanmıştır. Bu çalışmada daha önce bilinen ve son yıllarda üzerinde çokça çalışılan ve çalışıldıkça her defasında yeni özellikleri ortaya çıkarılan bazı özel sayı dizileri incelenmiştir.

Tam sayı dizileri arasında en bilinen sayı dizisin Fibonacci dizisidir. Başlangıç terimleri 1,1 olmak üzere, ilk iki terim hariç sonraki her terim kendisinden önceki iki terim toplanarak bulunur. Buna göre Fibonacci sayıları 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, … şeklinde elde edilir.

Fibonacci sayılarından sonra en çok bilinen ve kullanılan sayı dizisi Lucas sayı dizileridir. Başlangıç terimleri 2,1 olmak üzere, ilk iki terim hariç sonraki her terim kendisinden önceki iki terim toplanarak bulunur. Buna göre Lucas sayıları 2,1,3, 4, 7, 11, 18, 29, … şeklinde elde edilir.

Bu sayı dizilerinin genelleştirilmesiyle birçok sayı dizi daha tanımlanmıştır. Bunlardan biriside Pell sayı dizisidir.

Biz bu çalışmamızda Pell sayı dizisi ve polinomlarının genelleştirmelerini tanımlayıp özellikleri inceleyeceğiz.

Pell sayıları adını İngiliz Matematikçi John Pell (1611-1685)'den alır. John Pell, d pozitif tam kare olmayan bir tam sayı olmak üzere,

$$x^2 - dy^2 = (-1)^n$$

eşitliği üzerindeki çalışmalarından dolayı söz konusu dizi Pell dizisi ismini almıştır.

Bu bağlamda; Pell dizisini verecek şekilde matrisler tanımlanmıştır. Bunun yanında Pell polinomu üzerinde çalışılmış ve matrisler yardımıyla bazı yeni özellikler elde edilmiştir..

Pell dizileri P_n ile gösterilirse, $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere,$n \geq 2$ için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

yenileme bağıntısı ile bulunur. Buna göre Pell dizileri $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ 985,\ 2378,\ 5741,\ 13860,\ 33461, 80782, 195025,\ 470832, 1136689,\ 2744210, \ldots$ şeklindedir.

Fibonacci dizisi başta olmak üzere sayı dizilerinin matematiğin hemen hemen her alanında uygulaması olması yanında Fizik, Kimya, Biyoloji, Mühendislik, İktisat ve hatta sosyal bilimler de bile uygulama alanı bulabildiği için bir çok araştırmacının dikkatini çekmiştir.

Bunlardan bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

Hoggatt (1965); Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni bağıntılar bulup kitabında ispatlamıştır.

Horadam (1971); dizilerle ilgili yaptığı çalışmalarda, yeni bir kaç sayı dizisi tanımlamış ve bunların özelliklerini incelemiştir.

Ivie (1972); genelleştirilmiş Fibonacci dizileri üzerine çalışarak Fibonacci matrisinin genel halini vermiştir. Ayrıca, bu matrisin çok önemli özelliklerini sunmuştur.

Hoggatt ve Bicknell (1973); sayı dizilerinin polinomları ve Pasgal üçgeni üzerine çalışmış ve çalışmalarında özellikle, Fibonacci polinomlarının Pascal üçgeni ile ilişkisini vermişlerdir.

Horadam (1996); Başka bir sayı dizisi olan Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizilerini tanımlamıştır. Bu dizilerin bir biri ile ilişkisini çalışmasında özellikler ve teoremler ile göstermiştir.

Koshy (1998); yaptığı çalışmasında Fibonacci dizisinin çok kullanışlı bir çok bağıntısını vermiştir.

Melham (1999); Pell ve Pell-Lucas dizileri üzerine çalışarak, Pell ve Pell-Lucas dizileri ile ilgili bağıntıları göstermiş. Ayrıca Fibonaci ve Pell dizilerinin toplam formülleriyle ilgilenmiştir.

Koshy (2001) kitabında, Fibonacci ve Lucas dizileri başta olmak üzere sayı dizileri üzerine verilmiş teorem ve özellikler yer almaktadır.

Catalani (2002); Fibonacci matrisini uzatan Tribomatrix adlı bir matris tanımlamıştır.

Özkan vd. (2003); $3-$basamak Fibonacci dizileri üzerine çalışarak, bu dizinin periyodikliğini ve periyod ile Wall sayısı arasındaki ilişkileri veren birkaç hipotezi 5.10^5 den küçük asal sayılar bilgisayar doğrulamasını vermişlerdir.

Özkan (2003); p asal sayı olmak üzere nilpotent sınıfı 4 ve üssü p olan nilpotent grupta 3-basamak genel Fibonacci üslü(p asal sayı) olmak üzere 3 adım Genel Fibonacci dizileri oluşturmuştur.

Özkan (2004); p asal sayı olmak üzere nilpotent sınıfı n ve üssü p olan nilpotent grupta 3 basamak Genel Fibonacci dizilerini elde ederek bu dizinin genel terimini vermiştir.

Öcal vd. (2005); Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirmesini vermiş ve elde edilen yeni dizilerin özelliklerini ve Binet formüllerini sunmuşlardır.

Stakhov ve Rozin (2006); yeni sayı dizileri tanımlarayak bunların özelliklerini ve Binet formüllerini bulmuşlardır.

Kılıç vd. (2006); Pell dizilerinin genelleştirmeleri üzerine çalışmışlardır. Genelleştirmeleri matris gösterimi ile de vermişler.

Falcon ve Plaza (2007); Fibonacci dizisi bir genelleştirmesini tanımlamış ve bunu yeni bir ailesi olarak $k-$Fibonacci sayı dizisi olarak adlandırmışlardır. Bu yeni dizinin özelliklerini ifade etmişlerdir.

Kılıç ve Taşcı (2008); Lucas dizilerinin yeni bir genelleştirmesini tanımlamışlar ve n basamak Fibonacci dizisi ile elde ettikleri yeni dizler arasındaki bağıntıları vererek ispatlamışlardır.

Mikkawy ve Sogabe (2010); k −Fibonacci sayılarının yeni bir ailesini tanımlamışlardır.

Özkan vd. (2017); araştırmaları sonucunda, Fibonacci ve Lucas sayılarının yeni ailelerini tanımlamışlar ve bu dizilerin bir çok özelliği yanında bu dizileri ile bilinen Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiyi formulüze ederek ispatlamışlardır.

Yang ve Zang (2018); Fibonacci ve Lucas dizilerinin yeni bir genelleştirmesini yaparak iki periyotlu Fibonacci ve Lucas dizileri tanımlamışlardır. Bu dizilerinin birçok özellikleri yanında bu dizilerin Binet formüllerini göstermişlerdir.

Özkan vd. (2018); Fibonacci polinomların yeni bir ailesini, 2 −Fibonacci polinomları ismiyle tanımlamışlar ve bu polinom ailelerinin bilinen Fibonacci ailesiyle olan ilşkisini ve bu polinomların bir çok temel özelliklerini vermişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Fibonacci Sayıları

2.1.1. Tanım

Fibonacci dizisi, $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+2=}F_n + F_{n+1}, n \geq 0$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir.

Fibonacci dizisi $n \geq 0$ için $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0,1,\ 1,2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,...\}$ şeklindedir. Fibonacci genel terim tanımından

$$F_{n=}\ F_{n+2} - F_{n+1}$$

elde edilir.

Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindeki ikinci dereceden bir denklem ile verilir. α ve β bu denklemin kökleri olmak üzere,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ve\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir.

Böylece Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = A(\alpha)^n + B(\beta)^n$$

dir.

$n = 0$ için

$$F_0 = A + B = 0$$

$n = 1$ için

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$

olur. Buradan

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ve } B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Böylece Binet formülümüz

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir (Koshy, 2001).

2.1.2.Teorem

$n \geq 1$ için

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

İspat:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]$$

$$= F_{n+2} - 1$$

elde edilmiş olur.■

2.1.3. Fibonacci Sayılarında Özdeşlikler

1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\textstyle\sum_{s=0}^{n-1} F_s^2 = F_n F_{n-1}.$$

2. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_s F_{s-1} = \begin{cases} F_{n-1}^2, & n \text{ tek ise} \\ F_{n-1}^2 - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}.$$

3. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_{s-1}^2 = F_{n-2} F_{n-1} + 1.$$

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

5. $m,n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{m+n-2} F_{m+r-1} - F_{m+n-1} F_{m+r-2} = (-1)^{m+r-2} F_{n-r}$$

(Koshy,2001).

2.1.4. $Q -$ Matrisi

Fibonacci matrisi olarak tanımlanan Q matrsi

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

2.1.5. Teorem

$n \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

İspat:

Tümevarım yöntemi ile,

$n = 1$ için

$$Q^1 = \begin{pmatrix}F_2 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = Q$$

dır. Yani $n = 1$ için ispat doğrudur.

Kabul edelim ki $n = k$ için doğru olsun.

Yani,

$$Q^k = \begin{pmatrix}F_{k+1} & F_k\\ F_k & F_{k-1}\end{pmatrix}$$

olur.

$n = k$ için teoremin doğruluğunu gösterelim.

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{pmatrix}F_{k+1} & F_k\\ F_k & F_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

olur.

Buradan,

$$Q^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

2.1.6. Teorem (Cassini's Teoremi)

$n \geq 1$ olmak üzere,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

İspat: $|Q| = (-1)$ ve $|Q^n| = (-1)^n$ dir.

$$|Q^n| = F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 \text{ dir.}$$

O halde,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

şeklindedir.■

2.2. Lucas Sayıları

2.2.1. Tanım

Lucas sayıları, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere

$$L_{n=}L_{n-1} + L_{n-2}\,, n \geq 2$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir.

Lucas dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri α ve β olsun. Böylece

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \text{ ve } \beta = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$$

elde edilir. Buradan Lucas dizisinin Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde yazılır. Negatif Lucas dizisi ise

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

eşitliği ile bulunur (Koshy,2001).

2.2.2 Lucas Dizisinin Bazı Özdeşlikleri

1. $n \in Z^+$ için ardışık Lucas dizisinin toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i = L_{n+1} - 1.$$

2. $n \in Z^+$ için,

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_i^2 = L_{n-1} L_n + 2$$

dir.

3. $m, n \in Z^+$ için,

$$L_{n+1}L_m + L_n L_{m-1} = 5F_{m+n}$$

dır (Koshy,2001).

2.2.3. Teorem

$n \geq 1$ için

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

dır (Koshy, 2001). ■

2.2.4. Teorem

$n \geq 1$ için

$$L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$$

dır (Hoggatt, 1965). ■

2.2.5. Tanım

$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$RQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Özkan,2017).

2.2.6. Teorem (Cassini's Teoremi)

$n \geq 1$ olmak üzere,

$$L_{n-1} L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

eşitliği vardır (Koshy, 2001).

İspat:

$|Q| = (-1)$ ve $|Q^n| = (-1)^n$ ve $|R| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$ dir.

O halde,

$$RQ^n = -5(-1)^n$$

$$= 5(-1)^{n-1}$$

şeklindedir. ■

2.3. k −Fibonacci Dizisi

2.3.1. Tanım (k −Fibonacci Dizisi)

k −Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü;

$$F_n^{(k)} := \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r,\ k \neq 0$,0≤r<k ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

$k = 2,3$ için k −Fibonacci dizisinin bazı terimleri

$$\{F_n^{(2)}\}_{n=0}^{10} = \{1,1,1,2,4,6,9,15,25,40,64\}$$

$$\{F_n^{(3)}\}_{n=0}^{10} = \{1,1,1,1,2,4,8,12,18,27,45\}$$

dir.

k −Fibonacci dizisi ile bilinen Fibonacci dizisi arasında

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k-r}(F_{m+1})^r$$

bağıntısı elde edilir (El-Mikkawy, M. ve Sogabe, T., 2010).

2.3.2. Teorem

$k, m \in \{1,2,3 \dots\}$ olmak üzere k −Fibonacci ile bilinen Fibonacci arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilir: (El-Mikkawy, M. ve Sogabe, T., 2010)

i. $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} F_m F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)},$

ii. $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = F_m F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = F_m (F_{m+2})^{k-1},$

iii. $\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \frac{F_m}{F_{m-1}}[(F_{m+1})^k - (F_m)^k] = \frac{F_m}{F_{m-1}}\left[F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{(k)}\right]$. ■

2.4. $k -$ Lucas Dizisi

2.4.1. Tanım

$k -$Lucas sayı dizisinin Binet formülü;

$$L_n^{(k)} := \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})^r(\alpha^m + \beta^m)^{k-r}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r,\ k \neq 0, 0 \leq r < k$ ve

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

$k = 2,3$ için $k -$Lucas dizisinin bazı terimleri

$$\{L_n^{(2)}\}_{n=0}^{10} = \{4,2,1,3,9,12,16,28,49,77,121\}$$

$$\{L_n^{(3)}\}_{n=0}^{10} = \{8,4,2,1,3,9,27,36,48,64,112\}$$

dir.

$k -$Lucas dizisi ile bilinen Lucas dizisi arasında

$$L_n^{(k)} = (L_m)^{k-r}(L_{m+1})^r$$

bağıntısı elde edilir (Özkan,2017).

2.4.2. Teorem

$k -$Lucas ile bilinen Lucas arasında aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

i. $L_{2n+1}^{(2)} = L_n L_{n+1}$,

ii. $L_{2n}^{(2)} = L_n^2$ (Özkan,2017).

İspat:

i. $k = 2, r = 1$ alınırsa $n = mk + r = 2m + 1$ elde edilir. Buradan

$$L_n^{(2)} = (L_m)^{2-1}(L_{m+1})^1$$

$$L_n^{(2)} = (L_m)^1(L_{m+1})^1$$

$$L_{2n+1}^{(2)} = L_n L_{n+1}.$$

ii. $k = 2, r = 0$ alınırsa $n = mk + r = 2m$ elde edilir. Buradan

$$L_n^{(2)} = (L_m)^{2-0}(L_{m+1})^0$$

$$L_n^{(2)} = (L_m)^2(L_{m+1})^0$$

$$L_{2n+1}^{(2)} = L_n^2. \ \blacksquare$$

2.4.3. Teorem

$k \in \{1,2,\ldots\}$; $k -$Lucas dizisi için

$$L_{nk+k-1}^{(k)} + L_{nk+k}^{(k)} = L_{nk+k+1}^{(k)}$$

dir (Özkan,2017).

İspat:

$$\begin{aligned} L_{nk+k-1}^{(k)} + L_{nk+k}^{(k)} &= [(L_n)^1(L_{n+1})^{k-1}] + [(L_{n+1})^k] \\ &= (L_{n+1})^{k-1}[L_n + L_{n+1}] \\ &= (L_{n+1})^{k-1}L_{n+2} \\ &= L_{nk+k+1}^{(k)}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

2.4.4. Teorem

$2 -$Fibonacci ve $2 -$Lucas dizileri arasında

$$2L_{2n-1}^{(2)} + L_{2n}^{(2)} = 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)}]$$

bağıntısı vardır (Özkan,2017).

İspat:

$$2L_{2n-1}^{(2)} + L_{2n}^{(2)} = 2(L_n)(\,L_{n-1}) + (L_n)^2$$

$$= L_n(2L_{n-1} + L_n)$$

$$= L_n(L_{n-1} + L_{n+1})$$

$$= L_n 5F_n$$

$$= 5F_n L_n$$

$$= 5F_{2n}$$

$$= \mathbf{5}(\boldsymbol{F_n F_{n+1}} + \boldsymbol{F_n F_{n-1}})$$

$$= 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)}). \blacksquare$$

2.4.5. Teorem

2 −Fibonacci ve 2 −Lucas dizileri arasında

$$F_{4n+1}^{(2)} = L_{2n+1}^{(2)} F_{2n}^{(2)}$$

eşitliği vardır (Özkan, 2017).

İspat:

$$F_{4n+1}^{(2)} = F_{2n} F_{2n+1}$$

$$= F_{2n}[F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1}]$$

$$= F_{2n} F_n [F_{n+1} + F_{n-1}]$$

$$= F_{2n} F_n L_{n+1}$$

$$= F_n L_n F_n L_{n+1}$$

$$= (F_n)^2 L_n L_{n+1}$$

$$= F_{2n}^{(2)} L_{2n+1}^{(2)}. \blacksquare$$

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Pell Sayı Dizisi

3.1.1. Tanım

Pell dizisi, $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, n > 1$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir.

Pell sayı dizisi; $\{P_n\}_{n \epsilon N}^{\infty} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ...\}$ şeklindedir.

$x^2 - 2x - 1 = 0$ ikinci dereceden denklemi Pell sayı dizisinin karakteristik denklemidir. α ve β bu denklemin kökleri olmak üzere

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

bulunur.

Pell sayı dizisinin Binet formülü

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde elde edilir.

Pell sayı dizisinin negatif terimleri

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

eşitliğinden elde edilir.

Pell dizisinin terimleri

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi ile de elde edilebilir (Horadam, 1971).

3.2. Pell-Lucas Sayı Dizisi

3.2.1. Tanım

Pell-Lucas dizisi, $Q_0 = 2,\ Q_1 = 2$ olmak üzere

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, n > 1$$

şeklinde tanımlı bir sayı dizisidir.

Pell-Lucas sayı dizisi; $\{Q_n\}_{n\epsilon N}^{\infty} = \{2,2,6,14,34, 82,198,478,1154, \dots\}$ şeklindedir.

$x^2 - 2x - 1 = 0$ denklemi Pell-Lucas sayı dizisinin karakteristik denklemidir. α ve β karakteristik denklemin kökleri olmak üzere

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

bulunur.

Pell-Lucas sayı dizisinin Binet formülü

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde elde edilir.

Pell-Lucas matrisinin terimlerinin matris yardımıyla ifadesi

$$FM^n = \begin{bmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $F = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ dir (İvie, 1972).

3.2.2. Teorem

$n \geq 1$ için

$$Q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

eşitliği mevcuttur (Horadam, 1971). ■

Teorem 3.2.3.

$n \geq 1$ için

$$P_{2n} = P_n Q_n$$

dir (Horadam, 1971).

İspat: 3.1.3. Teoremde $m = n$ alınırsa

$$P_{n+n} = P_{n-1}P_n + P_n P_{n+1}$$

$$P_{2n} = P_n(P_{n-1} + P_{n+1})$$

olur. 3.2.1.Teoremden

$$P_{2n} = P_n Q_n$$

elde edilir.■

3.3. Pell Polinomu ve Pell -Lucas Polinomu

3.3.1. Tanım

Pell-Lucas Polinomu;

$n \geq 2$ olmak üzere $P_0(x) = 0$ ve $P_1(x) = 1$ olmak üzere

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$$

şeklinde tanımlı bir polinomdur.

Pell polinomunun Binet formülü

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$\alpha(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ dir.

Pell polinomunun matris yardımıyla terimlerinin bulunması

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $M = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir (Hoggat, 1973).

3.3.2. Tanım

Pell-Lucas Polinomu;

$n \geq 2$ olmak üzere $Q_0(x) = 2$ ve $Q_1(x) = 2x$ olmak üzere

$$Q_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

$\alpha(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ dir.

Pell-Lucas polinomunun terimlerinin matris yardımıyla bulunması

$$\begin{bmatrix} Q_{n+1}(x) \\ Q_n(x) \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 2x \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $M = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir (Hoggat, 1973).

4. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

4.1. k −Pell Sayı Dizisi

4.1.1 Tanım

k −Pell sayı dizisinin Binet formülü;

$$P_n^{(k)} := \frac{1}{(2\sqrt{2})^k}(\alpha^m - \beta^m)^{k-r}(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N$, $n = mk + r$, $k \neq 0$,$0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{k}$ ve $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ dir. Binet formülü yukarıdaki gibi tanımlanan k −Pell sayı dizisinin matris yardımıyla ifadesi *M* matrisi ile

$$P_n^{k-1} M^n = \begin{bmatrix} P_{kn+1}^{(k)} & P_{kn}^{(k)} \\ P_{kn}^{(k)} & P_{kn-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada M matrisi $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir (Özkan vd., 2021).

k −Pell sayı dizisinin bazı terimleri Tablo 4.1’ de verilmiştir.

Tablo 4.1 $P_n^{(k)}$ için bazı değerler

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$P_0^{(k)}$	0	0	0	0	0	0
$P_1^{(k)}$	1	0	0	0	0	0
$P_2^{(k)}$	2	1	0	0	0	0
$P_3^{(k)}$	5	2	1	0	0	0
$P_4^{(k)}$	12	4	2	1	0	0
$P_5^{(k)}$	29	10	4	2	1	0
$P_6^{(k)}$	70	25	8	4	2	1
$P_7^{(k)}$	169	60	20	8	4	2
$P_8^{(k)}$	408	144	50	16	8	4
$P_9^{(k)}$	985	348	125	40	16	8
$P_{10}^{(k)}$	2378	841	300	100	32	16

k −Pell sayı dizisinin bilinen Pell dizisi ile ilişkisi

$$P_n^{(k)} := (P_m)^{k-r}(P_{m+1})^r \tag{4.1}$$

$n,k,m,r \in N,\ n = mk + r$ ve $k \neq 0$ eşitliği ile verilebilir.

Bu eşitlikte $k = 1, m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $P_n^{(1)} = P_n$.

k −Pell sayı dizisi ile Pell sayı dizisi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem yardımıyla da gösterebiliriz.

4.1.2. Teorem

$k, m \in N$ ve $k \neq 0$

$$[(P_{m+1})^k - (P_m)^k] = [P_{(m+1)k}^{(k)} - P_{mk}^{(k)}]$$

dir(Özkan vd.2021).

İspat:

(4.1) eşitliği kullanılarak

$$P_{(m+1)k}^{(k)} - P_{mk}^{(k)} = [(P_m)^{k-k}(P_{m+1})^k] - [(P_m)^{k-0}(P_{m+1})^0]$$

$$= (P_{m+1})^k - (P_m)^k. \blacksquare$$

4.1.3. Teorem

2 −Pell dizisi için geren fonksiyon

$$G_n^{(2)}(z) = \frac{1}{-z^4 - 2z^3 - 2z + 1}$$

Şeklindedir (Özkan vd.2021).

İspat: 4.1.1 tanımını kullanarak $P_n^{(2)}(z)$;

$$P_n^{(2)}(z) = \sum_{i=1}^{n} P_i^{(2)} z^i$$

$$P_n^{(2)}(z) = z + z^2 + z^3 + 3z^4 + 9z^5 + 15z^6 + 25z^7 + \cdots \tag{4.2}$$

$$2zP_n^{(2)}(z) = 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + 6z^5 + 18z^6 + 30z^7 + 50z^8 + \cdots \tag{4.3}$$

$$2z^3P_n^{(2)}(z) = 2z^4 + 2z^5 + 2z^6 + 6z^7 + 18z^8 + 30z^9 + 50z^{10} + \cdots \tag{4.4}$$

$$z^4 P_n^{(2)}(z) = z^5 + z^6 + z^7 + 3z^8 + 9z^9 + 15z^{10} + 25z^{11} + \cdots \tag{4.5}$$

Buradan; $[-(4.3) - (4.4) - (4.5) + (4.2)]$ yazılırsa;

$$(-z^4 - 2z^3 - 2z + 1)P_n^{(2)}(z) = 1$$

ve buradan;

$$G_n^{(2)}(z) = \frac{1}{-z^4 - 2z^3 - 2z + 1}$$

elde edilir. ■

3 −Pell sayı dizisinin bilinen Pell sayı dizisi ile ilişkisi;

i. $P_{3n}^{(3)} = P_n^3$,

ii. $P_{3n+1}^{(3)} = P_n^2 P_{n+1}$,

iii. $P_{3n+2}^{(3)} = P_n P_{n+1}^2$.

Not: $P_{-1}^{(3)} = 0$. Daha genel olarak $P_{-n}^{(k)} = 0$, $k = 1,2,....$ dır.

İspat:

(4.1) eşitliğinde, $k = 3, r = 0$ yazılarak;

$$P_n^{(3)} = (P_m)^{3-0}(P_{m+1})^0$$

$$n = mk + r$$

$$n = m.3 + 0$$

$$n = 3m$$

$$P_n^{(3)} = (P_m)^{3-0}$$

$$P_{3m}^{(3)} = P_m^3.$$

Diğerleri de benzer şekilde görülür. ■

$4-$Pell sayı dizisinin bilinen Pell sayı dizisi ile ilişkisi;

i. $P_{4n}^{(4)} = P_n^4,$

ii. $P_{4n+1}^{(4)} = P_n^3 P_{n+1},$

iii. $P_{4n+2}^{(4)} = P_n^2 P_{n+1}^2,$

iv. $P_{4n+3}^{(4)} = P_n P_{n+1}^3.$

İspat:

(4.1) eşitliğinde $k = 4, r = 0$ yazılarak;

$$P_n^{(4)} = (P_m)^{4-0}(P_{m+1})^0$$

$$n = mk + r$$

$$n = m.4 + 0$$

$$n = 4m$$

$$P_n^{(4)} = (P_m)^{4-0}$$

$$P_{4m}^{(4)} = P_m^4.$$

Diğerleri de benzer şekilde görülür. ■

4.1.4. Teorem

$k, n \in N$ için $k-$Pell dizisinin genelleştirilmiş denklemi

$$P_{kn+1}^{(k)} = 2P_{kn}^{(k)} + P_{kn-1}^{(k)}$$

şeklindedir (Özkan vd. 2021).

İspat:

$$2P_{kn}^{(k)} + P_{kn-1}^{(k)} = 2P_n^k + P_{n-1}P_n^{k-1}$$

$$= P_n^{k-1}(2P_n + P_{n-1})$$

$$= P_n^{k-1}P_{n+1}$$

$$= \ P_{kn+1}^{(k)}. \ ■$$

4.1.5. Teorem

$n, s \geq 0, n + s > 1$ olsun,

$$P_{2(n+s-1)}^{(2)} - P_{n+s}P_{n+s-2} = (-1)^{n+s} \text{ (Özkan vd. 2021).}$$

İspat: $n + s = a$ olsun.

$$P_{2(a-1)}^{(2)} - P_aP_{a-2} = (-1)^a.$$

Tümevarım methodu kullanılarak;

$a = 2$ için;

$$P_{2(2-1)}^{(2)} - P_2P_{2-2} = 1 - 2.0 = 1 = (-1)^{2-2},$$

$a = k$ için doğru olsun;

$$P_{2(k-1)}^{(2)} - P_kP_{k-2} = (-1)^k.$$

$a = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim:

$P_{2(k+1-1)}^{(2)} - P_{k+1}P_{k+1-2} = (-1)^{k+1},$

$$P_{2(k+1-1)}^{(2)} = P_k^2,$$

$P_k^2 - P_{k+1}P_{k-1} = (2P_{k-1} + P_{k-2})^2 - (2P_k + P_{k-1})P_{k-1},$

$= 4P_{k-1}^2 + 4P_{k-1}P_{k-2} + P_{k-2}^2 - [2(2P_{k-1} + P_{k-2}) + 2P_{k-1}]P_{k-1}$

$= 4P_{k-1}^2 + 4P_{k-1}P_{k-2} + P_{k-2}^2 - 5P_{k-1}^2 - 2P_{k-1}P_{k-2}$

$= -P_{k-1}^2 + 2P_{k-1}P_{k-2} + P_{k-2}^2$

$= -P_{k-1}^2 + P_{k-2}(2P_{k-1} + P_{k-2})$

$= -P_{k-1}^2 + P_k P_{k-2}$

$= -(P_{k-1}^2 - P_k P_{k-2})$

$= (-1)(-1)^k$

$= (-1)^{k+1}$. ■

4.1.6. Teorem (Cassini's Teoremi)

$P_n^{(k)}$; k −Pell sayı dizisi için Cassini's teoremi;

$$P_{kn+t}^{(k)} P_{kn+t-2}^{(k)} - \left(P_{kn+t-1}^{(k)}\right)^2 = \begin{cases} P_n^{2k-2}(-1)^n, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases} \text{ dir}$$

(Özkan vd.2021).

İspat: (4.1) eşitliği kullanılarak;

$$P_{kn+t}^{(k)} P_{kn+t-2}^{(k)} - \left(P_{kn+t-1}^{(k)}\right)^2 = (P_n^{k-1} P_{n+t})(P_n^{k-1} P_{n+t-2}) - (P_n^{k-1} P_{n+t-1})^2$$

$$= (P_n^{k-1})^2 (P_{n+t} P_{n+t-2} - (P_{n+t-1})^2)$$

$$= P_n^{2k-2}((P_{n+t} P_{n+t-2} - (P_{n+t-1})^2).$$

$t = 1$ için ;

$$= P_n^{2k-2}((P_{n+1} P_{n-1} - (P_n)^2)$$

$$= P_n^{2k-2}(-1)^n.$$

$t \neq 1,\ t = m$, $(m \in N - \{1\})$ için;

$$= P_n^{2k-2}((P_{n+m} P_{n+m-2} - (P_{n+m-1})^2)$$

$$= P_n^{2k-2}(P_{2n+2m-2}^{(2)} - P_{2n+2m-2}^{(2)})$$

$$= 0. \blacksquare$$

4.2.1 k −Pell polinomu

k −Pell polinomunun Binet formülü;

$$P_n^{(k)}(x) := \left(\frac{\alpha^m(x) - \beta^m(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right)^{k-r} \left(\frac{\alpha^{m+1}(x) - \beta^{m+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}\right)^r$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n, k, m, r \in N, n = mk + r,\ k \neq 0, 0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{k}$ ve $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ve $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$dir. Binet formülü yukarıdaki gibi tanımlanan k −Pell polinomunun matris yardımıyla ifadesi *P* matrisi ile

$$P_n^{k-1}(x) M^n = \begin{bmatrix} P_{kn+1}^{(k)}(x) & P_{kn}^{(k)}(x) \\ P_{kn}^{(k)}(x) & P_{kn-1}^{(k)}(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada M matrisi $M = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir(Özkan vd.2021).

k −Pell polinomunun bazı terimlerini Tablo 4.2’ de veriyoruz.

Tablo 4.2 $P_n^{(k)}(x)$ için bazı değerler

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$P_0^{(k)}(x)$	0	0	0	0
$P_1^{(k)}(x)$	1	0	0	0
$P_2^{(k)}(x)$	$2x$	1	0	0
$P_3^{(k)}(x)$	$1+4x^2$	$2x$	1	0
$P_4^{(k)}(x)$	$4x+8x^3$	$4x^2$	$2x$	1
$P_5^{(k)}(x)$	$1+12x^2+16x^4$	$2x+8x^3$	$4x^2$	$2x$
$P_6^{(k)}(x)$	$6x+32x^3+32x^5$	$1+8x^2+16x^4$	$8x^3$	$4x^2$
$P_7^{(k)}(x)$	$1+24x^2+80x^4$ $+64x^6$	$14x+24x^3$ $+32x^5$	$4x^2+16x^4$	$8x^3$
$P_8^{(k)}(x)$	$8x+80x^3+192x^5$ $+128x^7$	$16x^2+64x^4$ $+64x^6$	$2x+16x^3$ $+32x^5$	$16x^4$
$P_9^{(k)}(x)$	$1+40x^2+240x^4$ $+448x^6+256x^8$	$4x+56x^3$ $+160x^5+128x^7$	$1+12x^2$ $+48x^4+64x^6$	$8x^3$ $+32x^5$
$P_{10}^{(k)}(x)$	$10x+160x^3$ $+672x^5+1024x^7$ $+512x^9$	$1+24x^2$ $+176x^4+384x^6$ $+256x^8$	$4x+40x^3$ $+128x^5$ $+128x^7$	$4x^2$ $+32x^4$ $+64x^6$

k −Pell polinomu ile bilinen Pell polinomu arasındaki ilişki

$$P_n^{(k)}(x) \coloneqq (P_m(x))^{k-r}(P_{m+1}(x))^r, \tag{4.6}$$

$n, k, m, r \in N,\ n = mk + r$ ve $k \neq 0$ eşitliği ile verilir.

Bu eşitlikte $k = 1, m = n$ ve $r = 0$ alınırsa $P_n^{(1)}(x) = P_n(x)$.

4.2.2. Teorem

$k -$ Pell polinomu ile bilinen Pell polinomu arasındaki ilişki

$$[(P_{m+1}(x))^k - (P_m(x))^k] = \left[P_{(m+1)k}^{(k)}(x) - P_{mk}^{(k)}(x)\right]$$

şeklindedir (Özkan vd. 2021).

İspat: (4.6) eşitliği yardımıyla;

$$P_{(m+1)k}^{(k)}(x) - P_{mk}^{(k)}(x) = [(P_m(x))^{k-k}(P_{m+1}(x))^k] - [(P_m(x))^{k-0}(P_{m+1}(x))^0]$$

$$= (P_{m+1}(x))^k - (P_m(x))^k. \blacksquare$$

$k = 2,3,4$ ve $n \in N$ için k −Pell polinomunun bilinen Pell polinomu ile ilişkisi;

i. $P_{2n}^{(2)}(x) = P_n^2(x)$,

ii. $P_{2n+1}^{(2)}(x) = P_n(x)P_{n+1}(x)$,

iii. $P_{2n+1}^{(2)}(x) = 2xP_{2n}^{(2)}(x) + P_{2n-1}^{(2)}(x)$.

iv. $P_{3n}^{(3)}(x) = P_n^3(x)$,

v. $P_{3n+1}^{(3)}(x) = P_n^2(x)P_{n+1}(x)$,

vi. $P_{3n+2}^{(3)}(x) = P_n(x)P_{n+1}^2(x)$,

vii. $P_{3n+1}^{(3)}(x) = 2xP_{3n}^{(3)}(x) + P_{3n-1}^{(3)}(x)$,

viii. $P_{4n}^{(4)}(x) = P_n^4(x)$,

ix. $P_{4n+1}^{(4)}(x) = P_n^3(x)P_{n+1}(x)$,

x. $P_{4n+2}^{(4)}(x) = P_n^2(x)P_{n+1}^2(x)$,

xi. $P^{(4)}_{4n+3}(x) = P_n(x)P^3_{n+1}(x),$

xii. $P^{(4)}_{4n+1}(x) = 2xP^{(4)}_{4n}(x) + P^{(4)}_{4n-1}(x)$

şeklindedir (Özkan vd.2021).

4.2.3. Teorem

$k, n \in N$ için k −Pell polinomunun genelleştirilmiş denklemi

$$P^{(k)}_{kn+1}(x) = 2xP^{(k)}_{kn}(x) + P^{(k)}_{kn-1}(x)$$

şeklindedir (Özkan vd. 2021).

İspat:

(4.6) eşitliğini kullanarak;

$$\begin{aligned} 2xP^{(k)}_{kn}(x) + P^{(k)}_{kn-1}(x) &= 2xP^k_n(x) + P_{n-1}(x)P^{k-1}_n(x) \\ &= P^{k-1}_n(x)(2xP_n(x) + P_{n-1}(x)) \\ &= P^{k-1}_n(x)P_{n+1}(x) \\ &= P^{(k)}_{kn+1}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

4.2.3. Teorem

$P^{(k)}_n(x)$; k −Pell polinomu için Cassini's teoremi $(n, k \geq 2)$

$$P^{(k)}_{kn+t}(x)P^{(k)}_{kn+t-2}(x) - \left(P^{(k)}_{kn+t-1}(x)\right)^2 = \begin{cases} P^{2k-2}_n(x)(-1)^n, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

dir (Özkan vd.2021).

İspat:

(4.6) eşitliğinden faydalanarak;

$$P_{kn+t}^{(k)}(x)P_{kn+t-2}^{(k)}(x) - \left(P_{kn+t-1}^{(k)}(x)\right)^2$$

$= \left(P_n^{k-1}(x)P_{n+t}(x)\right)\left(P_n^{k-1}(x)P_{n+t-2}(x)\right) - (P_n^{k-1}(x)P_{n+t-1}(x))^2$

$= (P_n^{k-1}(x))^2(P_{n+t}(x)P_{n+t-2}(x) - \left(P_{n+t-1}(x)\right)^2)$

$= P_n^{2k-2}(x)((P_{n+t}(x)P_{n+t-2}(x) - \left(P_{n+t-1}(x)\right)^2)$

$t = 1$ için;

$= P_n^{2k-2}(x)((P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - \left(P_n(x)\right)^2)$

$= P_n^{2k-2}(x)(-1)^n.$

$t \neq 1,\ t = m, (m \in N)$ için;

$= P_n^{2k-2}(x)((P_{n+m}(x)P_{n+m-2}(x) - \left(P_{n+m-1}(x)\right)^2)$

$= P_n^{2k-2}(x)(P_{2n+2m-2}^{(2)}(x) - P_{2n+2m-2}^{(2)}(x))$

$= 0.$ ■

Tanımlar ve teoremler yardımıyla aşağıdaki genelleştirmeler elde edilir:

$$P_{nk+t}^{(k)} = P_n^{k-t}P_{n+1}^t$$

ve

$$P_{nk+t}^{(k)}(x) = P_n^{k-t}(x)P_{n+1}^t(x),$$

$t = 0,1,\dots,k-1.$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Pell dizilerinin ve Pell polinomlarının yeni bir ailesi olarak k −Pell dizisi ve k −Pell polinomu tanımlandı. Bu yeni ailelerin Binet formülleri, matris temsilleri ve bilinen Pell ailesiyle ilişkileri verildi. $n = 2$ için 2 −Pell ailesinin geren fonksiyonu bulundu. Pell ailesi için ispatlanan teoremler k −Pell dizisi ve k −Pell polinomu için de ispatlandı.

Öneri olarak Pell ailesinde tanımlanan bu yeni aile başka sayı dizilerine uygulanıp onlarında özellikleri de incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abd-Elhameed, W. M., & Zeyada, N. A. (2017). “A generalization of generalized Fibonacci and generalized Pell numbers, ***International Journal of Mathematical Education in Science and Technology***, 48(1), 102-107.

Catalani, M. (2002) “Identities for Tribonacci-related Sequences”, ***Cornell University***”, ***Library,*** 1-6.

Catarino, P. (2018) ‘’Bicomplex k-Pell quaternions’’, ***Computational Methods and Function Theory***, 1-12.

Catarino, P. (2018) ‘’k −Pell, k −Pell–Lucas and modified k −Pell sedenions’’, ***Asian- European Journal of Mathematics,*** 1950018.

Deveci, Ö. Artun, G. (2019) “On the Adjacency-Jacobsthal numbers”, ***Communications in Algebra***, 47(11), 4520-4532. DOI: 10.1080/00927872.2018.1541464

El-Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010) “A New Family of k-Fibonacci Numbers”, ***Applied Mathematic and Computation,*** 215, 4456-4461.

Falcon, S. and Plaza, A. (2007) “On the Fibonacci k-numbers” ,***Chaos Solitions and Fractals***, 32,1615-1624.

Gould, H. W. (1981) “A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem”, ***Fibonacci Quarterly***, 19(3).

Hoggatt, Jr. V. E. (1965) “Problem B-60”, ***The Fibonacci Quarterly*****,** 3:3 (Oct.), 238.

Hoggatt, Jr. and Bicknell, M. (1973) “Generalized Fibonacci Polynomials and Zeckendorf Theorem”, ***The Fibonacci Quarterly*****,** 11(4), 399-419.

Horadam, A.F. (1971) “ Pell Identities ”, ***Fibonacci Quarterly*****,** 9(3),245-252.

Horadam, A.F. (1996) “Jacobsthal representation numbers ”, ***Fibonacci Quarterly*****,** 34, 40-54.

Ivie, J. (1972) “A General Q-Matrix”, ***Fibonacci Quarterly,*** Vol. 10, No. 3, pp. 255-261.

Kiliç, E., Altunkaynak, B. and Taşçi, D. (2006) " On the Computing of the Generalized Order- k Pell Numbers"***Applied Mathematics and Computation*****,** 181,511-515.

Kiliç, E. and Tasci, D. (2008) "Generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers", ***Rocky Mountain J. Math***. 38.

Koshy, T.(1998) "New Fibonacci and Lucas identities" ***The Mathematical Gazette*****,** 82 (Nov.), 481-184.

Koshy, T. (2001) "Fibonacci and Lucas numbers with applications" ***Wiley-Interscience publishing*****,** Canada.

Koshy, T. (2014). Pell and Pell-Lucas numbers with applications. ***Springer***, New York.

Melham, R. (1999) "Sums involving Fibonacci and Pell numbers" ***Portugaliae Mathematica*****,** 56(3),309-317.

Öcal, A.A., Tuğlu, N. and Altinişik, E. (2005) "On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers", ***Applied Mathematics and Computations*****,** 170(1).

Özkan, E. (2003) "On General Fibonacci sequences in groups", ***Turkısh Journal of Mathematıcs*****,** 27, 525-537.

Özkan, E., Aydın, H. and Dikici, R. (2003) "3-step Fibonacci series modulo m ", ***Applied Mathematics and Computation*****,** 143, 165-172.

Özkan, E. (2004) "Fibonacci sequences in nilpotent groups with class n", ***Chiang Mai Journal of Science*****,** 31, 205-212.

Özkan, E. (2007) "On truncated Fibonacci sequences", ***Indıan Journal of Pure Mathematıcs*****,** 38(4), 241-251.

Özkan, E., Altun, İ. and Göçer, A. (2017) "On relationship among a new family of k-Fibonacci, k-Lucas numbers, Fibonacci and Lucas numbers", ***Chiang Mai Journal of Scıence*****,** 44, 1744-1750.

Özkan, E., Aydoğdu, A. and Altun, İ. (2017) “Some identities for a family of Fibonacci and Lucas numbers”, ***Journal of Mathematics and Statistical Science*****,** 3, 295- 303.

Özkan, E., Taştan, M. and Aydoğdu, A. (2018) “2-Fibonacci polynomials in the family of Fibonacci numbers. ”, ***Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*****,** 24, 47-55.

Özkan, E., Taştan, M. and Aktaş, A. (2021) “On the new families of k−pell numbers and k−pell-lucas numbers and their polynomials”,***Journal of Contemporary Applied Mathematics,*** 11(1).

Stakhov, A. and Rozin, B. (2006) “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers”, ***Chaos, Solitons & Fractals*****,** 27 (5), 1162–1177.

Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2016) ‘’The Pell quaternions and the Pell octonions’’, ***Advances in Applied Clifford Algebras***, 26(1), 435-440.

Vajda, S. (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood, Chichester***.

Włoch, I. (2008) ‘’On generalized Pell numbers and their graph representations'', ***Commentationes Mathematicae***, 48(2), 169-175