T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI POST KUANTUM EŞİTSİZLİKLER

ESRA GÖV

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HATAY
KASIM-2018

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI POST KUANTUM EŞİTSİZLİKLER

ESRA GÖV

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HATAY
KASIM-2018

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI POST KUANTUM EŞİTSİZLİKLER

Esra GÖV

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN danışmanlığında hazırlanan bu tez **23/11/2018** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN
Başkan

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Üye

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Prof. Dr. Alaattin ESEN
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Erdal SERTKAYA
Enstitü Müdürü

23.11.2018

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Esra GÖV

ÖZET

KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI POST KUANTUM EŞİTSİZLİKLER

Bu tezde, literatürde sıkça kullanılan bazı integral eşitsizliklerin $(p,q)-$ benzerleri ve bu eşitsizliklerin, konveks fonksiyonlar üzerine bazı uygulamaları ele alındı.

Tezin birinci bölümü olan giriş bölümünde amacından bahsedildikten sonra tez içeriği hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde ise genel kavramlar, konveks küme ve konveks fonksiyon ve (p,q) $-$analizi ile ilgili bilgilere yer verildi.

Üçüncü bölümde, literatürde büyük öneme sahip olan ve tezde kullanılacak olan bazı Opial, Ostrowski, Hermite-Hadamard, Simpson ve Hadamard-Simpson tipli literatürde var olan integral eşitsizlikleri ele alınmıştır.

Tezin esas kısmı olan dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde verilen Opial tipli eşitsizliklerin $(p,q)-$ benzerleri elde edildi. Ayrıca konveks ve $tgs-$ konveks fonksiyonlar için (p,q) $-$tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edildi. Uygun koşullar altında, elde edilen eşitsizliklerin literatürde var olan eşitsizliklere indirgendiği gözlendi.

Tezin son kısmında ise tezden çıkarılacak sonuç ve tez konusunun devamlılığı için neler yapılabileceği tartışıldı.

2018, 95 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Konveks Fonksiyon, İntegral Eşitsizlikler, Kuantum analiz, (p,q) $-$analiz.

ABSTRACT

SOME POST QUANTUM INEQUALITIES FOR CONVEX FUNCTIONS

In this thesis, (p,q)-analogue of frequently used integral inequalities and some applications on convex functions of these inequalities are studied.

In the begining of the thesis, the purpose and information about the content of the thesis is given.

In the second part, comman concepts, convex sets, convex function and (p,q)-calculus are mentioned.

In the third part, some Opial, Ostrowski , Hermite-Hadamard, Simpson and Hadamard-Simpson type integral inequalities which has great importance in the literature are given.

In the main part of the thesis, (p,q)-analoque of Opial type inequalities given in the third part are proved. Futhermore, new integral inequalities are obtained for convex and tgs-convex functions via Ostrowski and Hadamard-Simpson type. Under special conditions, the results reduce the inequalities in the literature.

In the last part of the thesis, the conclusions and finding gained in this thesis are presented.

2018, 95 Pages

Key Words: Convex functions, integral inequalities, quantum analysis, (p,q)-calculus.

TEŞEKKÜR

Doktora tezim için yaptığım çalışmaların ilerlemesi ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmaların takip edilmesinde değerli yardımını esirgemeyen ve bana güvenen, cesaretlendiren Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a ayrıca bu süreçteki yardım ve desteklerinden ötürü Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ ve Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN'e içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen ve beni her koşulda destekleyen eşim İbrahim GÖV'e ve ailelerimize sabır ve anlayışlarından ötürü çok teşekkür ederim. Ayrıca bu doktora tez çalışmasını oğlum Emre'ye ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:Reel Sayılar Kümesi
J	: Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
J°	: J Aralığının İçi
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\Gamma(x)$	: Euler-Gama Fonksiyonu
$\beta(x,y)$	: Euler-Beta Fonksiyonu
D_q	: q Türev Operatörü
$D_{p,q}$	: (p,q)- Türev Operatörü
$\int_a^b \ {}_a d_q t$	: q İntegral Operatörü
$\int_a^b \ {}_a d_{p,q} t$	: (p,q)- İntegral Operatörü
$[n]_{p,q}$	:(p,q)- Tamsayılar

1. GİRİŞ

Bütün bilimsel çalışmalar aslında insanın içinde yaşadığı evreni anlamlandırma çabasına yöneliktir. Yapılan her yeni keşif, farklı açılardan bakmak, düşünmek, hissetmek ve bunları farklı biçimde aktarmakla oluşur. Olguları anlamak için farklı yöntemler kullanılır. Matematikçilerin çalışmalarındaki asıl amacı, doğayı *analiz* etmek ve bunu matematiksel yollarla açıklamaktır. Bu nedenle, evreni bazı matematiksel ifadelerle açıklarken en iyi bilinen yol alfabemiz haline gelen analizdir.

Kuantum analiz $q \rightarrow 1$ durumunda klasik analize indirgenen matematiksel formülleri araştıran bir çalışma alanıdır. Kuantum analizin tarihi 18.yüzyılda Euler'in 'Introductio' adlı eserinde ünlü bilim adamı olan Newton'un sonsuz serilerinin çözümlenmesinde ürettiği q ifadesine kadar uzanır. 20. yüzyılda ise Jackson, 1910 yılında kendi adıyla anılan bir integral tanımı verdi ve q-analiz teorisi hızlı bir şekilde gelişmeye başladı.

Son yıllarda, istek uyandıran bir çalışma alanı olduğundan birçok araştırmacı $q-$analiz ile ilgilenmeye başladı. Literatüre bakıldığında, hemen hemen her gün yeni bir çalışma yapıldığı ve uygulama alanının genişlediği görülmektedir. Çünkü q-analiz sadece matematikle değil aynı zamanda fizik, analitik sayılar teorisi ve bilgisayar bilimi ile de yakından ilişkilidir. Bu kavram matematikte daha çok kesirli analiz, diferansiyel denklemler, optimal kontrol problemler ve integral eşitsizlikler teorilerinde öne çıkar. Bu kavram ile ilgili daha fazla bilgi için Heine (1846), Jackson (1908), Jackson (1909), Jackson (1910), Ernst (2000;2003;2012), Kac ve Cheung (2002), Gauchman (2004) çalışmaları incelenebilir.

$q-$analiz ile ilgili yapılan çalışmalar hızla artarken iki bağımsız değişkene bağlı $(p, q)-$tamsayıları içeren $(p, q)-$analiz ilk olarak Chakrabarti ve Jagannathan (1991), Bromidas ve ark. (1991), Wachs ve White (1991), Arık ve ark. (1991) tarafından eş zamanlı ve bağımsız olarak çalışılmıştır. $(p, q)-$ sayıları fizikte iyi bilinen tek parametreli kuantum cebirlerinin gösterimi ile bağlantılı olarak $q-$osilatör cebirlerini genelleştirmek ya da sadeleştirmek üzere Chakrabarti ve Jagannathan (1991) tarafından tanımlandı. $(p, q)-$sayıları, Bromidas ve ark. (1991) çalışmalarında $(p, q)-$Harmonik osilatöri, Wachs ve White (1991) çalışmalarında $(p, q)-$Stirling Sayılarını ve Arık ve ark. (1991) çalışmalarında Fibonacci osilatörlerini elde etmede kullanıldı. Açıkça görülmektekdir ki birçok fiziksel ve matematiksel problemin çözümünde (p,q) −analize ihtiyaç duyulmaktadır. (p,q) −analizin gelişimi, yukarıdaki çalışmaları temel kabul eden tarihten günümüze kadar uzanmaktadır. Bunların bazıları; Burban ve Klimyk (1994) $(p,q)-$ hipergeometrik fonksiyonlar, Corcino (2008) binom katsayılarının (p,q) −genelleştirmesi, Jagannathan ve Srinivasa (2005) (p,q) −seriler ve (p,q) −hipergeometrik seriler, Mursaleen ve ark (2015a;2015b) (p,q) −Bernstein operatörleri üzerine çalışmalar yaptı. Sadjang (2013) (p,q) −türev ve (p,q) −integralin özelliklerini incelemiş ve (p,q) −türev için uygun olan iki polinom baz tanımlayıp, bu bazlar için çeşitli özellikler verdi. Aynı çalışmada polinomlar için $(p,q)-$Taylor formülünün yanı sıra (p,q) −analizin temel teoremi ispatlandı ve (p,q) −kısmi integral formülü de tanımlandı. Sadjang (2015)'ın bir diğer çalışmasında ise $(p,q)-$gama, $(p,q)-$beta fonksiyonları ile bu fonksiyoların çeşitli özellikleri de yer almaktadır. Bunlara ek olarak, Smirnov ve Wehrhahn (1992), Milovanovic ve ark. (2016), Duran ve ark. (2016) çalışmaları da bu alanda yapılan çalışmalardan bazılarıdır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar da matematiğin tüm alanlarında aktif bir çalışma alanı olmasından dolayı, son yıllarda bu alanda yapılan çalışmalar artış göstermiştir. Endüstri, iş alanları, tıp, sanat gibi dalların nümerik uygulamalarında karşılaşılan konvekslik kavramı aslında hayatın her alanında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin ayakta duruş pozisyonumuzdan tutun şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında dahi konvekslikten söz edilebilir.

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu nedenle, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin, özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulundu. Bu eşitsizliklerden bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapıldı. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı kaynakta yer almaktadır. Bu konu ile ilgili yapılan çalışmalar; Hardy ve ark. (1952), Mitrinović (1970), Mitrinović ve ark. (1974;1990;1993), Hudzik ve Maligranda (1994), Dragomir ve Pearce (2000), Niculescu ve Persson (2006), Pachpatte (2005), Cerone ve Dragomir (2011) ve Tunç ve ark. (2015a;2015b) şeklinde sıralanmaktadır.

Son yıllarda, kuantum analizin birçok alanda rastlanılması, konveks fonksiyonlar içeren eşitsizlikler için büyük önem kazanmıştır. Birçok araştırmacı, farklı türden konveks fonksiyonları içeren integral eşitsizliklerinin $q-$ benzerleri üzerine genelleştirmeler yapmakta ve bu alana önemli katkılar sağlamaktadır. $q \to 1$ durumunda klasik hale indirgenebilen integral eşitsizliklerin yanı sıra yeni tipte quantum integral eşitsizlikleri de elde edilmektedir. Stankovic ve ark. (2006), Ntouyas (2013; 2014), Taf ve ark. (2014), Sudsutad ve ark. (2015), Tariboon ve Noor ve ark. (2015), Alp ve ark. (2018) çalışmaları bu alanda yapılan önemli çalışmalardır. Tunç ve ark. (2018) ise çalışmalarında konveks fonksiyonlar için $q-$Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde etti ve bazı özel fonksiyonlar için çeşitli uygulamalara yer verdi.

Son yıllarda (p,q) $-$analizin çeşitli integral eşitsizlikler üzerine uygulamaları da q $-$analizdeki sonuçların genelleştirilmesi açısından önem kazandı. Bu konuda Tunç ve Göv (2016a)'ün çalışmalarında çok kullanılan bazı integral eşitsizliklerinin kısıtlanmış aralıkta $(p,q)-$ benzerleri elde edildi. Tunç ve Göv (2016b,2016c,2016d) çalışmalarında kapalı ve sonlu aralık üzerinde yeni $(p,q)-$integral, $(p,q)-$türev tanımı verdi ve bunların bazı özelliklerini inceleyip çeşitli eşitsizliklerin $(p,q)-$ benzerlerini elde ettiler. Aynı zamanda konveks fonksiyonlar için yeni (p,q) $-$Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri de tanımladılar. Benzer olarak Kunt ve ark. (2018) çalışmalarında (p,q) $-$tipli yeni integral eşitsizlik uygulamaları göze çarpmaktadır.

Bu tezde, sonlu aralıklar üzerinde tanımlı (p,q) -türev ve (p,q) -integrali kullanarak, bazı eşitsizliklerin (p,q) $-$benzerleri ve farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli eşitsizlikler elde edildi.

Tezin önceki çalışmalar isimli bölümünde ilk olarak matematikteki temel tanım ve genel kavramlara yer verildi. İkinci olarak konveks fonksiyonlarla ilgili tanım, teorem ve kavramlar üzerinde duruldu. Son olarak ise (p, q) −analiz ile ilgili temel bilgiler incelendi.

Materyal ve yöntem kısmında ise daha önceden literatürde var olan ve tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan Opial tipli, Ostrowski tipli, Hermite-Hadamard tipli, Simpson tipli ve Hadamard-Simpson tipli integral eşitsizlikler ve bunların q −benzerleri ele alındı.

Tezin ana bölümü olan araştırma bulguları ve tartışma kısmında ise materyal yöntem kısmında sunulan eşitsizliklerin (p, q) −benzerlerinin yanı sıra, (p, q) −Opial, (p, q) − Ostrowski, (p, q) − Hadamard-Simpson tipli yeni integral eşitsizlikler elde edildi. Ayrıca farklı türden konveks fonksiyonlar için uygulamalara yer verildi. Son bölümde ise de çalışma ile ilgili sonuçlar yazıldı.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Artan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) \geq 0$ oluyorsa f fonksiyonuna monoton artan fonksiyon, $(x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) > 0$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin artan fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Tanım 2.1.2 (Azalan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesine ait $x_1 \leq x_2$ için $(x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) \leq 0$ oluyorsa f fonksiyonuna monoton azalan fonksiyon, $(x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) < 0$ oluyorsa f fonksiyonuna kesin azalan fonksiyon denir (Mitrinović, 1970).

Özellik 2.1.3. (Artan ve Azalan Fonksiyonların Özellikleri):

1) f ve g J üzerinde azalmayan fonksiyonlar ise $f + g$ aynı özelliğe sahiptir.

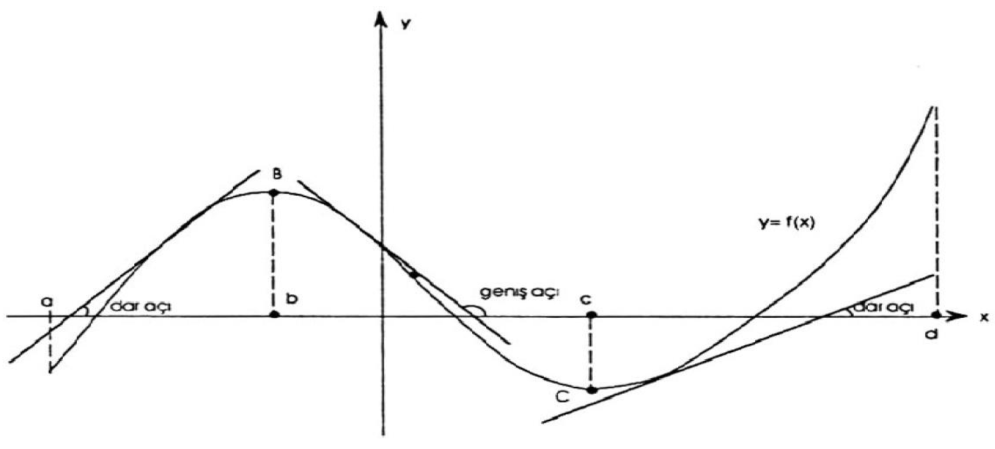
2) f azalmayan ve α negatif olmayan bir reel sayı ise αf de azalmayandır.

3) f ve g negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon ise $f.g$ de azalmayandır.

4) f pozitif ve azalmayan ise $\frac{1}{f}$ artmayan fonksiyondur.

5) f ve g monoton ise $f + g$ nin monoton olduğu sonucu her zaman çıkarılamaz.

Çünkü f monoton artan, g monoton azalan iken $f + g$ için bir şey söylenemez (Mitrinović, 1970). Şekil 2.1. de bir f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar gösterilmektedir.



Şekil 2.1. f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar

Teorem 2.1.4. (Chebyshev Eşitsizliği): $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel sayıların azalmayan veya artmayan iki dizisi olsun. Bu durumda

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

$$\geq \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}$$

ya da $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ reel sayıların negatif olmayan bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$$

eşitliği vardır. Eşitlik durumu sadece a ve b dizilerinden en az birinin sabit olması ile sağlanır. Özel olarak $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ seçilirse

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$$

eşitsizliği elde edilir (Mitrinović ve ark., 1993).

Teorem 2.1.5. (Chebyshev İntegral eşitsizliği): $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında aynı anda artan ya da aynı anda azalan, integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Ayrıca $p: [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \qquad (2.1.1)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Mitrinovic ve Vasic, 1974; Mitrinovic ve Pecaric, 1990).

L. Euler (1707-1783) gama fonksiyonunu $n! = 1.2 \dots . (n-1)n$ faktöriyeller için ara değer fonksiyonu olarak kullandı, daha sonra ise bu fonksiyona dair farklı sonuçlar ve fonksiyonun integral gösterimini tanımladı. Gama fonksiyonu pozitif n tamsayıları için $\Gamma(1) = 1$ ve $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ özelliği ile birlikte

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitliğin pozitif reel sayılar için doğal bir genişlemesi olarak her $x > 0$ için

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliği yazılır (Niculescu ve Persson, 2006).

Gama fonksiyonunun genelleştirilmiş integral ile gösterimi ise $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (2.1.2)$$

olarak ifade edilir (Kannappan, 2009).

Tanım 2.1.6. Beta fonksiyonu her $x, y > 0$ için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (2.1.3)$$

olarak tanımlanır. Bu eşitlik Euler tip Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Kannappan, 2009).

Tanım 2.1.7. $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (birinci çeyrek düzlemde tanımlı reel değerli fonksiyon) bir y değişkenine bağlı olarak x değişkeni için monoton (x in değeri için monotonluk şartı yeterli) olsun,

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y), \qquad x,y \in (0,\infty)$$

$$\beta(1,y) = \frac{1}{y}$$

şartları ile birlikte β fonksiyonuna Euler tip Beta fonksiyonu denir (Kannappan, 2009). Beta fonksiyonun özellikleri

i. $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt, \;\; x,y > 0$

ii. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \;\; x,y > 0$ (2.1.4)

iii. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

biçimindedir (Jeffrey and Dai, 2008).

Tanım 2.1.8. A, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in A$ için $x \leq M$ oluyorsa $M \in \mathbb{R}$ sayısına A'nın üst sınırı, $m \leq x$ oluyorsa $m \in \mathbb{R}$ sayısına A'nın alt sınırı denir. A kümesine, üst sınırı varsa üstten sınırlı, alt sınırı varsa alttan sınırlı, hem üst hem alt sınırı varsa da sınırlıdır denir (Hunter ve Nachtergaele, 2000).

Tanım 2.1.9. A, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olsun. M, A nın bir üst sınırı ve A kümesinin diğer bütün M' üst sınırları için $M \leq M'$ oluyorsa M sayısına supremum, yani en küçük üst sınır denir ve $\sup A$ ile gösterilir. Ayrıca $M \in A$ ise M sayısına A kümesinin maksimum elemanı denir. m, A nın bir alt sınırı ve A kümesinin diğer bütün m' üst sınırları için $m \leq m'$ oluyorsa m sayısına infimum, yani en büyük alt sınır denir ve $\inf A$ ile gösterilir. Ayrıca $m \in A$ ise m sayısına A kümesinin minimum elemanı denir (Hunter ve Nachtergaele, 2000).

Tanım 2.1.10. $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, a)$ varsa

f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A noktasının her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir (Hunter ve Nachtergaele, 2000).

Teorem 2.1.11. (İntegraller için Ortalama Değer Teoremi): f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{2.1.5}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ vardır (Thomas ve Finney, 1992).

2.2. Konveks Küme ve Konveks Fonksiyon

Konvekslik kavramı birçok problemin çözümünde kullanılır. Konveks fonksiyonlar optimizasyon problemleri için pek çok önemli özelliklere sahiptir. Örneğin, konveks fonksiyon üzerinde herhangi bir lokal minimum global minimumdur.

Tanım 2.2.1. L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L\times L\to L$ ve $\cdot : K\times L\to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye K cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir (Anton, 1994).

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur.

G1) Her $x,y\in L$ için $x+y\in L$ dir.

G2) Her $x,y\in L$ için Her $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir.

G3) Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta\in L$ vardır.

G4) Her $x\in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x\in L$ vardır.

G5) Her $x,y\in L$ için $x+y=y+x$ dir.

A) $x,y\in L$ ve $a,b\in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $a.x\in L$ dir.

L2) $a.(x+y)=a.x+a.y$

L3) $(a+b).x=a.x+b.x$

L4) $(ab).x=a.bx$

L5) $1.x=x$ dir (1, K'nın birim elemanıdır).

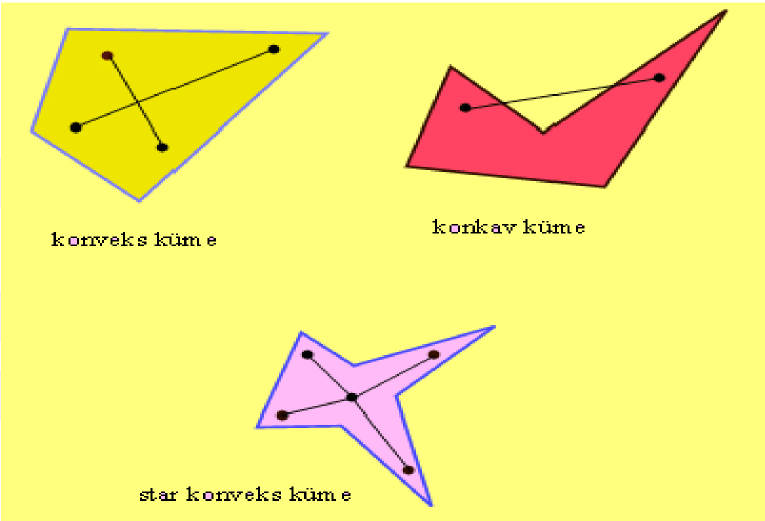
$K=\mathbb{R}$ ise L ye reel vektör uzayı denir (Anton, 1994).

Tanım 2.2.2. $C\subseteq\mathbb{R}^n$ olsun

$tx+(1-t)y\in C,\ \ \forall x,y\in C,\forall t\in[0,1]$

şartı sağlanıyorsa C' ye konveks küme denir (Bertsekas ve ark., 2003).

Boş küme konveks küme olarak düşünülür. Bunların tersine eğer bir küme konveks değil ise konkav küme olarak ifade edilir. Ayrıca A reel veya kompleks lineer uzayın bir alt kümesi olmak üzere, eğer bir $x_0 \in A$ noktasından herhangi bir $x \in A$ noktasına çizilen bütün doğrular yine bu A kümesinin içinde kalıyorsa bu kümeye star konveks küme denir. Şekil 2.2 de konveks, konkav ve star konveks kümelere birer örnek verildi.



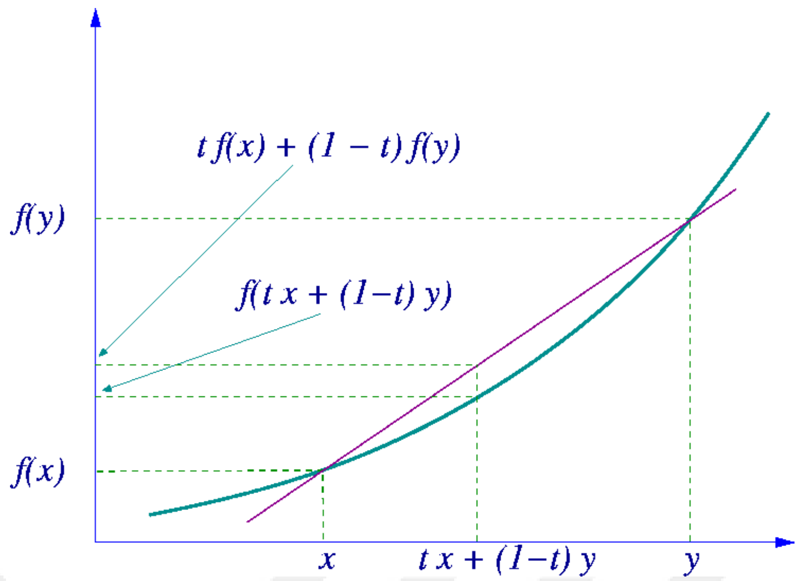
Şekil 2.2 Konveks, konkav ve star konveks küme

Tanım 2.2.3. $f: I \to \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için f fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad (2.2.1)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $-f$ fonksiyonu konveks ise o zaman f fonksiyonuna konkav denir (Pecaric ve ark., 1992).

Şekil 2.3 de verilen bir aralıkta üzerinde konveks fonksiyonun grafiği verildi.



Şekil 2.3. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Tanım 2.2.4. Reel değerli fonksiyonlar için $0 < s \leq 1$ olmak üzere $s-$konveksliğin birinci ve ikinci anlamı olmak üzere aşağıdaki gibi iki tanım vardır.

1- Her $\alpha, \beta \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.2.2}$$

eşitsizliğini sağlayan $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir ve birinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^1 ile gösterilir (Orlicz, 1961).

2- Yukarıdaki tanımda $\alpha + \beta = 1$ olarak alınırsa bu durumda f'ye ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir ve kısaca $f \in K_s^2$ ile gösterilir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Tanım 2.2.5. $f: I \to \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t} \tag{2.2.3}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfından fonksiyon denir (Godunova ve Levin, 1985).

Tanım 2.2.6. $f: I \to \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y) \tag{2.2.4}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna P fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfından fonksiyon denir (Dragomir ve ark., 1995).

Tanım 2.2.7. $f: I \to \mathbb{R}$, $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için f fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq t(1-t)[f(x) + f(y)] \tag{2.2.5}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $tgs -$ konveks fonksiyon denir. $-f$ fonksiyonu konveks ise o zaman f fonksiyonuna $tgs -$konkav denir (Tunç ve ark., 2015).

Tanım 2.2.8. $h: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. f negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere · $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1-\lambda)f(y) \tag{2.2.6}$$

şartını sağlıyorsa $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $h -$konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfından fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonuna $h -$ konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfından fonksiyon denir (Varošanec, 2007).

Burada $h(\lambda) = \lambda$, $h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(\lambda \neq 0)$, $h(\lambda) = 1$, $h(\lambda) = \lambda^s$, $h(\lambda) = \lambda(1-\lambda)$ seçilirse sırasıyla konveks, Godunova-Levin, $P(I)$ fonksiyonu, $s -$konveks ve $tgs -$konveks fonksiyon elde edilir.

2.3. (p, q) −Analiz

Matematiğin ve fiziğin bir çok alanı ile ilişkili önemli bir konu olan kuantum analizin temeli 18. yüzyıla dayanmaktadır. $q -$analizin bir genişlemesi olarak ortaya çıkan post kuantum olarak adlandırılan $(p, q) -$ analiz, üzerinde çok yeni çalışmaların yapıldığı ve birçok araştırmacının dikkatini çeken oldukça yeni bir alandır. $(p, q) -$ analizde $p = 1$ olması durumunda sonuçlar q formuna indirgenir. Yakın zamanda, Chakrabarti ve Jaganatthan (1991), $(p, q) -$eksponansiyel, $(p, q) -$integral ve $(p, q) -$ türev ile ilgili temel çalışmalar yapmışlardır. Sadjang (2013;2015) çalışmalarında $(p, q) -$ integral ve $(p, q) -$ türev için bazı özellikler vermiş, $(p, q) -$türeve uygun iki polinom örneklemiş ve bununla ilgili çeşitli özellikler elde etmiştir.

Aşağıda $(p, q) -$analiz ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

$(p, q) -$tamsayılar $0 < q < p \leq 1$ için

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q} \tag{2.3.1}$$

biçiminde tanımlanır (Chakrabarti ve Jaganatthan, 1991). (p, q) -binom ve (p, q) -faktöriyel, her $k, n \in N$ ve $n \geq k \geq 0$ için

$$[n]_{p,q}! = \prod_{k=1}^{n}[k]_{p,q},\ n \geq 1, [0]_{p,q}! = 1$$

$$[n|k]_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!\,[k]_{p,q}!}$$

şeklinde verilir (Cornico, 2008).

Bir f fonksiyonunun (p,q)-türevi

$$D_{p,q}f(x) = \frac{f(px) - f(qx)}{p-q}, x \neq 0 \tag{2.3.2}$$

biçimindedir. Burada $D_{p,q}f(0) = f'(0)$ dır (Chakrabarti ve Jaganatthan, 1991).

$f: [0,a] \rightarrow R$ olmak üzere (p,q)-integral

$$\int_0^a f(t)d_{p,q}t = (q-p)a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{q^{n+1}}f\left(\frac{p^n}{q^{n+1}}a\right), \left|\frac{p}{q}\right| < 1 \tag{2.3.3}$$

$$\int_0^a f(t)d_{p,q}t = (p-q)a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}a\right), \left|\frac{p}{q}\right| > 1 \tag{2.3.4}$$

olarak tanımlanır (Sadjang, 2013). (p,q)-kısmi integrasyon ise

$$\int_a^b f(pt)D_{p,q}g(t)d_{p,q}t = f(t)g(t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b g(qt)D_{p,q}f(t)d_{p,q}t \tag{2.3.5}$$

ile verilir (Sadjang, 2013). $p = 1$ durumunda, formüllerin tamamı q-benzerlerine indirgenir (Kac ve Cheung, 2002).

Tunç ve Göv (2016a) çalışmalarında kısıtlı (restricted) $q-$integral kavramını genelleştirmiş ve kısıtlı (p,q)-integraller yardımıyla, yukarıda verilen (p,q) tanım ve ifadeler kullanılarak $b > 0$ ve $a = b\frac{q^n}{p^n}$ olmak üzere $I = [a,b]_{p,q} = \left\{b\frac{q^k}{p^k} : 0 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\right\}$ aralığı üzerinde aşağıda verilen bazı (p,q) $-$integral eşitsizlikleri elde etti.

Teorem 2.3.1. ((p,q)-Hölder İntegral Eşitsizliği): f ve g fonksiyonları $I = [a,b]_{p,q}$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar, $0 < q < p \leq 1$ ve $s_1, s_2 > 1$ olmak üzere $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_I |f(t)g(t)|d_{p,q}t \leq \left(\int_I |f(t)|^{s_1}d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\int_I |g(t)|^{s_2}d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s_2}} \tag{2.3.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016a).

Sonuç 2.3.2. Teorem 1 in koşulları altında $s_1 = s_2 = 2$ olarak alınırsa

$$\int_I |f(t)g(t)|d_{p,q}t \leq \left(\int_I |f(t)|^2 d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g(t)|^2 d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

(p,q) −Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir (Tunç ve Göv, 2016a).

Teorem 2.3.4.((p,q) −Minkowski İntegral Eşitsizliği): f ve g fonksiyonları $I = [a,b]_{p,q}$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|^{s_1}, |g|^{s_1}$ ve $|f+g|^{s_1}$ aynı aralık üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda $0 < q < p \leq 1$ ve $s_1 > 1$ olmak üzere

$$\int_I |f(t)+g(t)|d_{p,q}t \leq \left(\int_I |f(t)|^{s_1} d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s_1}} + \left(\int_I |g(t)|^{s_1} d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s_1}} \tag{2.3.7}$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016a).

Teorem 2.3.5. ((p,q) − Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $a = b\frac{q^n}{p^n}$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{p+q}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{p,q}t$$

$$\leq \frac{1}{p+q}\left(q\frac{b(p+q)-(a+b)}{bq-a}f\left(\frac{pa}{q}\right) + \frac{q(a+b)-a(p+q)}{bq-a}f(b)\right) \tag{2.3.8}$$

gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016a).

Teorem 2.3.5 de $p = 1$ olarak alınırsa (2.3.8) eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, Marinkovic ve ark. (2008) çalışmasında yer alan kısıtlı (restricted) q −integraller için elde edilen kuantum analoguna indirgenir.

Teorem 2.3.6. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, (p,q) −diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $D_{p,q}f$ sürekli olsun. $0 < q < p \leq 1$olmak üzere

$$\left|p\int_a^b f(qt)d_{p,q}t - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|$$

$$\leq \|D_{p,q}f\|\left(\frac{(1-p)(a+b)^2}{2p} - \frac{(a+b)^2}{2p(p+q)} + \frac{a^2+b^2}{p+q}\right) \tag{2.3.9}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016a).

Teorem 2.3.7. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, iki kez (p,q) −diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $D^2_{p,q}f$sürekli olsun. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(q^2t)d_{p,q}t - \left(\frac{bq-ap}{p+q}f(qb) + \frac{bp-aq}{p+q}f(qa)\right)\right|$$

$$\leq \left\|D_{p,q}^2 f\right\| \frac{p}{p+q}\left(\frac{(b^3-a^3)pq^2}{(p^2+pq+q^2)(p+q)} - \frac{(b-a)qab}{p+q}\right) \tag{2.3.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016a).

Teorem 2.3.8. ($(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})-$ Ostrowski Eşitsizliği): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(p,q)-$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $D_{p,q}f$ sürekli olsun. $0<q<p\leq 1$ olmak üzere

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)d_{p,q}t\right|$$

$$\leq \left\|D_{p,q}f\right\|(b-a)$$

$$\times\left(\frac{2(p+q-1)}{1+q}\left(\frac{x-\frac{(a+b)(p+q)}{4(p+q-1)}}{b-a}\right)^2 - \frac{(p+q)^2(a+b)^2}{16(p+q-1)^2(b-a)^2} + \frac{a^2+b^2}{(p+q)(b-a)^2}\right) \tag{2.3.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016a).

Yukarıda verilen bütün teoremler $p=1$ ve $q\to 1$ durumunda klasik biçimlerine indirgenmektedir (Cerone ve Dragomir, 2011).

Yine Tunç ve Göv (2016b) çalışmalarında, $(p,q)-$türev ve integral tanımlarını kısıtlı aralık üzerinden sonlu aralık üzerine genelleştirerek yeni bir $(p,q)-$türev ve $(p,q)-$integral tanımı ve bu tanımların bazı temel özellikleri sağlandığı tespiti üzerine bir inceleme yaptılar. Bu çalışmada elde edilen ve tezin araştırma bulguları bölümünde temel olarak alınan önemli sonuçlardan bazıları aşağıda verildi. Burada $I_k \coloneqq [u_k, u_{k+1}]$ aralığı ve $0<q_k<p_k\leq 1$ sabitleri kullanıldı.

Tanım 2.3.9. $f: I_k\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $u\in I_k$ olsun. Bu durumda

$$D_{p_k,q_k}f(u) = \frac{f(p_k u + (1-p_k)u_k) - f(q_k u + (1-q_k)u_k)}{(p_k-q_k)(u-u_k)}, u\neq u_k \tag{2.3.12}$$

$$D_{p_k,q_k}f(u_k) = \lim_{u\to u_k} D_{p_k,q_k}f(u)$$

formüllerine f fonksiyonunun u noktasındaki (p_k,q_k) -türevi denir (Tunç ve Göv, 2016b).

$D_{p,q}f(t)$ dönüşümü her $t\in[a,b]$ için tanımlı ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde (p,q)-diferansiyellebilirdir denir (Tunç ve Göv, 2016b). (2.3.12) formülünde $I_k=[a,b]$ olarak seçilir ve $a=0$ olarak alınırsa f fonksiyonun $t\in[a,b]$ noktasındaki

$$D_{p,q}f(t) = \frac{f(pt)-f(qt)}{(p-q)t}, t\neq 0$$

$(p,q)-$türevi elde edilir (Sadjang, 2013). Ayrıca burada $p=1$ olarak alınırsa f fonksiyonun $t \in [a,b]$ noktasındaki

$$D_q f(t) = \frac{f(t)-f(qt)}{(1-q)t}, t \neq 0$$

biçiminde tanımlanan q-türevi elde edilir (Kac ve Cheung, 2002).

Örnek 2.3.10. $u \in I_k$için $f(u) = (u-u_k)^n$ nın (p_k, q_k)-türevi

$$[n]_{p_k,q_k} = \frac{p_k^n - q_k^n}{p_k - q_k}$$

olmak üzere

$$D_{p_k,q_k} f(u) = [n]_{p,k}(u-u_k)^{n-1}$$

biçiminde hesaplanır (Tunç ve Göv, 2016b).

Teorem 2.3.11. $f, g: I_k \to \mathbb{R}$, (p_k, q_k)-diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıda verilen bağıntılar gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016b).

a) $f+g: I_k \to \mathbb{R}$, (p_k, q_k)-diferansiyellenebilir ise

$$D_{p_k,q_k}[f(u)+g(u)] = D_{p_k,q_k} f(u) + D_{p_k,q_k} g(u)$$

olur.

b) $\lambda f: I_k \to \mathbb{R}$, (p_k, q_k)-diferansiyellenebilir ise herhangi bir λsabiti için

$$D_{p_k,q_k}[\lambda f(u)] = \lambda D_{p_k,q_k} f(u)$$

olur.

c) $fg: I_k \to \mathbb{R}$, (p_k, q_k)-diferansiyellenebilir ise çarpımın (p_k, q_k)-türevi

$$\begin{aligned} D_{p_k,q_k}[(fg)(u)\,] &= g(p_k u + (1-p_k)u_k) D_{p_k,q_k} f(u) \\ &\quad + f(q_k u + (1-q_k)u_k) D_{p_k,q_k} g(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{p_k,q_k}[(fg)(u)] &= f(p_k u + (1-p_k)u_k) D_{p_k,q_k} g(u) \\ &\quad + g(q_k u + (1-q_k)u_k) D_{p_k,q_k} f(u) \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

biçiminde bulunur.

d) $g(p_k u) g\left(q_k u + \left(1 - \frac{q_k}{p_k}\right) u_k\right) \neq 0$ olmak üzere $f/g: I_k \to \mathbb{R}$, (p_k, q_k) - diferansiyellenebilir ise bölümün (p_k, q_k)-türevi

$$D_{p_k,q_k}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(u)\right]$$

$$= \frac{g(p_k u + (1-p_k)u_k) D_{p_k,q_k} f(u) - f(q_k u + (1-q_k)u_k) D_{p_k,q_k} g(u)}{(p_k - q_k)(u-u_k)} D_{p_k,q_k} f(u)$$

(2.3.14)

biçiminde bulunur.

Tanım 2.3.12. $f: I_k \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere

$$\int_{u_k}^{u} f(s) d_{p_k,q_k} s$$

$$= (p_k - q_k)(u - u_k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_k^n}{p_k^{n+1}} f\left(\frac{q_k^n}{p_k^{n+1}} u + \left(1 - \frac{q_k^n}{p_k^{n+1}}\right) u_k\right) \tag{2.3.15}$$

ifadesine $u \in I_k$için f fonksiyonunun (p_k, q_k)-integrali denir (Tunç ve Göv, 2016b).

(2.3.15) formülünde $I_k = [a, b]$ olarak seçilir ve $a = 0$ olarak alınırsa f fonksiyonun $t \in [a, b]$ için

$$\int_{0}^{t} f(s) d_{p,q} s = (p - q)t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{p^{n+1}} f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}} t\right)$$

(p, q)-integrali elde edilir (Sadjang, 2013). Ayrıca burada $p = 1$ olarak alınırsa f fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki

$$\int_{a}^{b} f(s) d_q s = (1 - q)(b - a) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b + (1 - q^n)a) \tag{2.3.15}$$

biçiminde verilen q-integrali elde edilir (Tariboon ve Ntouyas, 2013).

Teorem 2.3.13. $f: I_k \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, $u \in I_k$için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016b):

a) $D_{p_k,q_k} \int_{u_k}^{u} f(s) d_{p_k,q_k} s = f(u)$

b) $\int_{u_k}^{u} D_{p_k,q_k} f(s) d_{p_k,q_k} s = f(u)$ (2.3.16)

c) $\int_{a}^{u} D_{p_k,q_k} f(s) d_{p_k,q_k} s = f(u) - f(a), a \in (u, u_k)$.

Teorem 2.3.14. $f, g: I_k \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $u \in I_k$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

a) $\int_{u_k}^{u} [f(s) + g(s)] d_{p_k,q_k} s = \int_{u_k}^{u} f(s) d_{p_k,q_k} s + \int_{u_k}^{u} g(s) d_{p_k,q_k} s$

b) $\int_{u_k}^{u} \lambda f(s) d_{p_k,q_k} s = \lambda \int_{u_k}^{u} f(s) d_{p_k,q_k} s$

c) $\int_{u_k}^{u} f(q_k s + (1 - q_k)u_k) D_{p_k,q_k} g(p_k s) d_{p_k,q_k} s = (fg)(s)_{u_k}^{u} - \int_{u_k}^{u} g(p_k s +$
$(1 - p_k)u_k) D_{p_k,q_k} f(s) d_{p_k,q_k} s$ (2.3.17)

ya da

$$\int_{u_k}^{u} f(p_k s + (1 - p_k)u_k) D_{p_k,q_k} g(q_k s) d_{p_k,q_k} s$$

$$= (fg)(s)_{u_k}^{u} - \int_{u_k}^{u} g(q_k s + (1-q_k)u_k) D_{p_k,q_k} f(s) d_{p_k,q_k} s$$

bağıntıları sağlanır (Tunç ve Göv, 2016b).

Teorem 2.3.14-c (p_k, q_k)-kısmi integrasyonu belirtmektedir.

$p = 1$ durumunda Tanım 2.3.9 ve Teorem2.3.14 arası bütün ifadeler Tariboon ve Ntouyas (2013)'ın çalışmasında verilen $q -$benzerlerine indirgenir. Aynı çalışmada Tunç ve Göv kısıtlı $(p, q) -$integral yardımıyla elde edilen Hölder, Cauchy-Schwarz ve Minkowksi integral eşitsizliklerini sonlu aralık üzerine genişletti.

$[a, b]$ aralığı üzerinde $(p, q) -$Hölder İntegral Eşitsizliği:

Teorem 2.3.15. f ve g fonksiyonları $I = [a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar, $0 < q < p \leq 1$ ve $s_1, s_2 > 1$ olmak üzere $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \, {}_a d_{p,q} t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^{s_1} \, {}_a d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\int_a^b |g(t)|^{s_2} \, {}_a d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{s_2}} \qquad (2.3.18)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016c).

Sonuç 2.3.16. Teorem 1 in koşulları altında $s_1 = s_2 = 2$ olarak alınırsa

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \, {}_a d_{p,q} t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, {}_a d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(t)|^2 \, {}_a d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3.19)$$

$[a, b]$ aralığı üzerinde $(p, q) -$Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir(Tunç ve Göv, 2016c).

$[a, b]$ aralığı üzerinde (p, q)-Minkowski İntegral Eşitsizliği:

Teorem 2.3.17. f ve g fonksiyonları $I = [a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|^{s_1}, |g|^{s_1}$ ve $|f + g|^{s_1}$ aynı aralık üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda $0 < q < p \leq 1$ ve $s_1 > 1$ olmak üzere

$$\int_a^b |f(t) + g(t)| \, {}_a d_{p,q} t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^{s_1} \, {}_a d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{s_1}} + \left(\int_a^b |g(t)|^{s_1} \, {}_a d_{p,q} t \right)^{\frac{1}{s_1}} \qquad (2.3.20)$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016c).

Teorem 2.3.15 ve Teorem 2.3.17'de $p = 1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizliklerde sırasıyla Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinin $q -$benzerleri ve klasik formu elde edilir (Tariboon ve Ntouyas, 2014; Cerone ve Dragomir, 2011).

Elde edilen bu özelliklere dayanarak yine Tunç ve Göv (2016c) bir diğer çalışmalarında klasik tanım için incelen kısıtlı $(p, q) -$integral yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikleri Tanım 2.3.9 ve Tanım 2.3.12 kullanılarak sonlu aralık üzerine genelleştirdiler.

Teorem 2.3.18. $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (p, q) −diferansiyellenbilir ve $0 < q < p \leq 1$ için ${}_aD_{p,q}$ sürekli olmak üzere

$$\left|\int_a^b p|f(qt + (1-q)a)|\, {}_ad_{p,q}t - (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}\right|$$

$$\leq \| {}_aD_{p,q}f\| \frac{(b-a)^2}{2p} + \frac{p + q - pq + p^2 - 1}{p + q} \tag{2.3.21}$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016c).

Teorem 2.3.18'de $p = 1$ olarak alınırsa,

$$\left|\int_a^b |f(qt + (1-q)a)|\, {}_ad_qt - (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}\right| \leq \| {}_aD_{p,q}f\| \frac{(b-a)^2}{2(1+q)}$$

eşitsizliğine indirgenir (Tariboon ve Ntouyas, 2014). Buradan da (2.3.21) eşitsizliği $q \to 1$ için

$$\left|\int_a^b f(t)dt - (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}\right| \leq \|f'\| \frac{(b-a)^2}{4}$$

biçiminde verilen trapezoid eşitsizliğine indirgenir (Cerone ve Dragomir, 2011).

Teorem 2.3.19. $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu iki kez (p, q) −diferansiyellenbilir ve $0 < q < p \leq 1$ için ${}_aD_{p,q}^2$ sürekli olmak üzere

$$\left|\int_a^b |f(q^2t + (1-q^2)a)|\, {}_ad_{p,q}t - \frac{(b-a)p}{p+q}\left[\frac{q}{p}f(qb + (1-q)a) + f(a)\right]\right|$$

$$\leq \| {}_aD_{p,q}^2f\| \frac{(b-a)^3p^2q^2}{(p+q)(p^3 + 2p^2q - 2pq^2 + q^3)}$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016c).

Teorem 2.3.19'da $p = 1$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik Tariboon ve Ntouyas (2014)'ın çalışmasında verilen ikinci mertebeden trapezoid integral eşitsizliğine; $q \to 1$ için klasik anlamda ikinci mertebeden trapezoid integral eşitsizliğine indirgenir (Cerone ve Dragomir, 2011).

Teorem 2.3.20. $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (p, q) −diferansiyellenbilir ve $0 < q < p \leq 1$ için ${}_aD_{p,q}$ sürekli olmak üzere

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, {}_ad_{p,q}t\right|$$

$$\leq \left\| {}_aD_{p,q}f \right\|(b-a)$$

$$\times\left[\frac{2(p+q-1)}{(p+q)}\left(x-\frac{\frac{(3p-3q-4)a+(p+q)b}{4(p+q-1)}}{b-a}\right)^2-\frac{(-8p-8q+2pq+p^2+q^2+8)}{8(p+q-1)(p+q)}\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016c).

Teorem 2.3.20'de $p=1$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik Tariboon ve Ntouyas (2014)'ın çalışmasında verilen $q-$Ostrowski integral eşitsizliğine; $q \to 1$ için klasik anlamda Ostrowski integral eşitsizliğine indirgenir (Cerone ve Dragomir, 2011).

Teorem 2.3.21. $f,g: I=[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $0<q<p\leq 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2}\iint_a^b f(x,y)g(x,y)\ {}_ad_{p,q}x\ {}_ad_{p,q}y$$

$$\leq \left(\iint_a^b f^2(x,y)\ {}_ad_{p,q}x\ {}_ad_{p,q}y\right)^{1/2}\left(\iint_a^b g^2(x,y)\ {}_ad_{p,q}x\ {}_ad_{p,q}y\right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3.21'de $p=1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik sırasıyla Cauchy-Bunyakowski-Schwarz integral eşitsizliğinin $q-$benzerine ve klasik formuna indirgenir (Tariboon ve Ntouyas, 2014; Cerone ve Dragomir, 2011).

Teorem 2.3.22. $f,g: I=[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $0<q<p\leq 1$ olmak üzere her $x \in I$ ve $\phi, \Phi, \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ için $\phi \leq f(x) \leq \Phi$, $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\ {}_ad_{p,q}x-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\ {}_ad_{p,q}x\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)(\Gamma-\gamma)$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016c).

Teorem 2.3.22'de $p=1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik sırasıyla Grüss integral eşitsizliğinin $q-$benzerine ve klasik formuna indirgenir (Tariboon ve Ntouyas, 2014; Cerone ve Dragomir, 2011).

Teorem 2.3.23. $f,g: I=[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $0<q<p\leq 1$ olsun. L_1ve L_2, her $x,y \in I$ için I da $|f(x)-f(y)| \leq L_1|x-y|$ ve $|g(x)-g(y)|$

$\leq L_2|x-y|$ koşullarını sağlayan Lipschitzian sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\ {}_ad_{p,q}x-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\ {}_ad_{p,q}x\right)\right|$$

$$\leq 2pq\frac{(b-a)^2}{(p+q)^2(p^2+pq+q^2)}L_1L_2$$

eşitsizliği sağlanır (Tunç ve Göv, 2016c).

Teorem 2.3.23'de $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa yukarıdaki eşitsizlik sırasıyla Grüss-Chebyshev integral eşitsizliğinin $q-$benzerine ve klasik formuna indirgenir (Tariboon ve Ntouyas, 2014; Cerone ve Dragomir, 2011).

Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin elde edilmesinde sık kullanılan Dragomir ve Agarval'ın 1998 çalışmasında yer alan

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|=\frac{(b-a)}{2}\int_0^1(1-2t)f'(t)dt$$

eşitliğinin $(p,q)-$ benzerlerinden biri Tunç ve Göv (2016d)'ün çalışmalarında aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

Lemma 2.3.24. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0<q<1\ ve\ 0<t<p\leq 1$ olsun. ${}_aD_{p,q}f,(a,b)$ aralığında integrallenebilir ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}t-\frac{pqf(a)+(p+q-pq)f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{b}{p}\right)}{p+q}\right|$$

$$=\frac{q(b-a)}{p+q}\int_0^1\left(1-(p+q)\frac{t}{p}\right)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_ad_{p,q}t$$

eşitliği gerçeklenir (Tunç ve Göv, 2016d).

Lemma 2.3.24 de $p=1$ olarak alınırsa eşitlik Sudsutad ve ark. (2015) çalışmasında verilen Lemma 3.1'e; $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa Dragomir ve Agarval (1998)'ın çalışmasında verilen Lemma 2.1'e indirgenir.

Aynı çalışmada Lemma 2.3.24 kullanılarak konveks fonksiyonlarda mutlak değer, Hölder ve power mean eşitsizlikleri yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

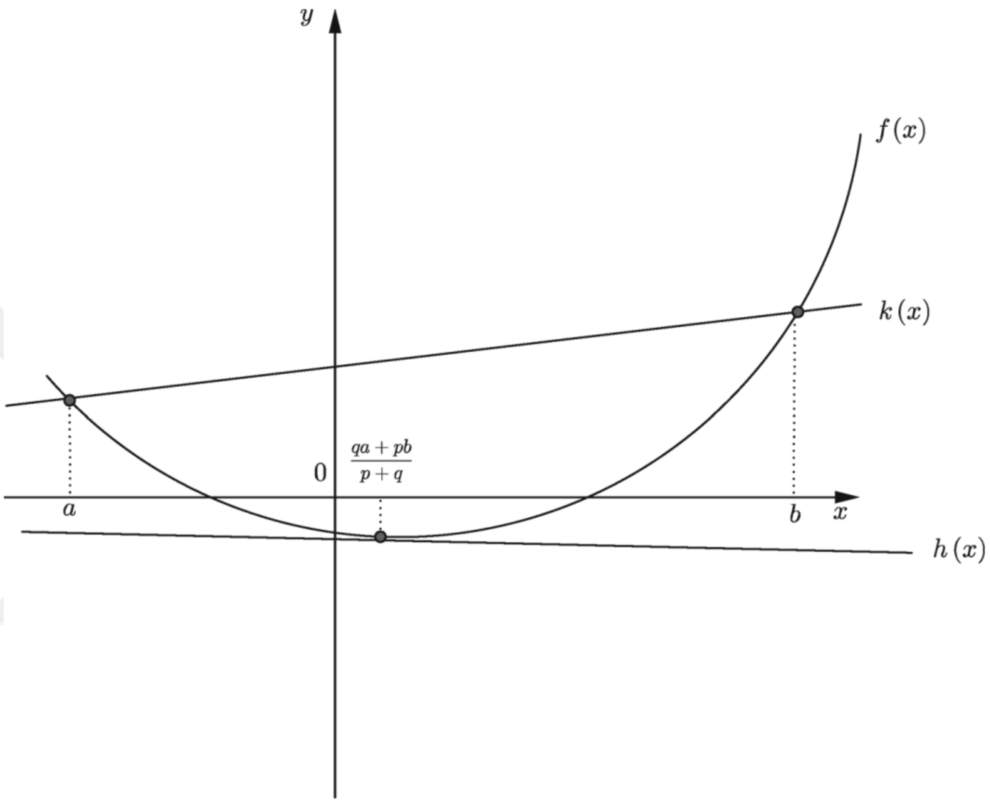
Kunt ve ark. (2017), $[a,b]$ aralığı üzerinde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin $(p,q)-$benzerini aşağıdaki teoremle ifade etmiştir:

Teorem 2.3.25. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<p\leq 1$ olmak üzere

$$f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{p(b-a)}\int_{a}^{pb+(1-p)a} f(t)\ {}_{a}d_{p,q}t \leq \frac{qf(a)+pf(b)}{p+q}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Aşağıdaki şekilde konveks bir fonksiyonun tanjant ve chord doğrusu gösterilmiştir (Kunt ve ark., 2017).



Şekil 2.4. Konveks bir fonksiyonun tanjant ve chord doğrusu

Yine Kunt ve ark. (2017) çalışmalarında $(p,q)-$diferansiyellenebilir konveks ve quasi-konveks fonksiyonlar için $(p,q)-$ midpoint tipli integral eşitsizlikler elde etmişlerdir.

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Opial Tipli İntegral Eşitsizlikler

1960 yılında Opial bir fonksiyonun kendisi ve türevinin çarpımını ihtiva eden bir integral eşitsizlik elde etti (Opial, 1960). En bilinen ve kullanılan formları aşağıdaki teoremlerde belirtilmiştir:

Teorem 3.1.1. f fonksiyonu $[0,a]$ aralığında mutlak sürekli ve $f(0) = f(a) = 0$ olsun. Her $t \in (0,h)$ için $f(t) > 0$ olmak üzere

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|dt \le \frac{a}{4}\int_0^a [f'(t)]^2 dt \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\frac{a}{4}$ sabiti en iyisidir (Opial, 1960).

Teorem 3.1.2. w fonksiyonu $[0,a]$ aralığında negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu $[0,a]$ aralığında mutlak sürekli ve $f(0) = f(a) = 0$ olmak üzere

$$\int_0^a w(t)|f(t)^2|dt \le \frac{a}{4}\left(\int_0^a w(t)dt\right)\left(\int_0^a |f'(t)|^2\, dt\right) \tag{3.1.2}$$

ve

$$\int_0^a w(t)|f(t)f'(t)|dt \le \frac{a}{4}\left(\int_0^a w^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a |f'(t)|^2\, dt\right) \tag{3.1.3}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Traple, 1971).

Teorem 3.1.3. f fonksiyonu $[0,a]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f(0) = f(a) = 0$ olsun. $m \ge 0,\ n \ge 1\ ve\ \lambda \ge 1$ olmak üzere

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}dt \le \left((m+n)^\lambda R(\lambda)\right)^n \int_0^a |f(s)|^{\lambda m}|f'(s)|^{\lambda n}ds \tag{3.1.4}$$

ve

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}dt \le \left((m+n)^\lambda R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a |f'(s)|^{\lambda(m+n)}ds \tag{3.1.5}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Burada $R(\lambda)$ fonksiyonu

$$R(\lambda) = \int_0^a \left(t^{1-\lambda} + (a-t)^{1-\lambda}\right)^{-1} dt$$

biçimindedir (Pachpatte, 1999).

Teorem 3.1.4. f fonksiyonu $[0, a]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f(0) = f(a) = 0$ olsun. $m \geq 0,\ n \geq 1,\ k \geq 0\ ve\ \lambda \geq 1$ olmak üzere

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}|f'(t)|^{\lambda k}dt \leq \left((m+n)^\lambda R(\lambda)\right)^n \int_0^a |f(t)|^{\lambda m}|f'(t)|^{\lambda(n+k)}dt \quad (3.1.6)$$

ve

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}|f'(t)|^{\lambda k}d_{p,q}t \leq \left((m+n)^\lambda R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a |f'(t)|^{\lambda(m+n+k)}dt \quad (3.1.7)$$

eşitsizlikleri sağlanır (Pachpatte, 1999).

3.2. Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikler ve Kuantum Benzerleri

Teorem 3.2.1. $f: \mathrm{J} = [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $|f'|$, J° üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve her $x \in J$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{x - \frac{a+b}{2}}{(b-a)^2}\right] \quad (3.2.1)$$

eşitsizliği vardır (Ostrowski, 1937).

Lemma 3.2.2. $f: \mathrm{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J°üzerinde $a, b \in J$, $a < b$ için diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon ise her $x \in J$ için

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t\, f'(tx + (1-t)a)dt - \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t\, f'(tx + (1-t)b)dt \quad (3.2.2)$$

eşitliği gerçeklenir (Alomari ve ark., 2010).

Lemma 3.2.3. $f: \mathrm{J} = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J° üzerinde $q-$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. ${}_aD_q f$ dönüşümü, J üzerinde sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x \in J$ için

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_q x$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 qt\ {}_aD_q f(tx + (1-t)a)\ {}_0d_q t$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 qt\ {}_aD_q f(x+(1-t)b\ )\ {}_0d_q t \tag{3.2.3}$$

eşitliği gerçeklenir (Noor ve ark., 2016).

Teorem 3.2.4. $f\colon \mathrm{J}=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, J°üzerinde $q-$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<1$ olmak üzere ${}_aD_q f$ dönüşümü, J aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\left|{}_aD_q f\right|$ fonksiyonu konveks ve $\left|{}_aD_q f(x)\right|\le M$ ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_q x\right|\le\frac{qM[(x-a)^2+(b-x)^2]}{(b-a)(1+q)} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Noor ve ark., 2016).

Teorem 3.2.5. $f\colon \mathrm{J}\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$, J°üzerinde $a,b\in J$, $a<b$ için diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve f' , J üzerinde integrallenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $s\in(0,1]$ için $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve her $x\in J$ için $|f'(x)|\le M$ ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{(s+1)(b-a)} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve ark., 2010).

Teorem 3.2.6. $f\colon \mathrm{J}\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$, J°üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b\in J$, $a<b$ için f', J üzerinde integrallenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. $s\in(0,1]$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'(x)|\le M$ ise her $x\in J$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le\frac{M}{(1+p)^{1/p}}\left(\frac{2}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a} \tag{3.2.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve ark. 2010).

Teorem 3.2.7. $f\colon \mathrm{J}=[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, J°üzerinde $q-$diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<1$ olmak üzere ${}_aD_q f$ dönüşümü, J aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Her $r,s>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ için$\left|{}_aD_q f\right|^r$ fonksiyonu konveks ve $\left|{}_aD_q f(x)\right|\le M$ ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x\right| \le qM\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1-q}{1-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.2.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Noor ve ark., 2016).

Teorem 3.2.8. $f\colon \mathrm{J} \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, J°üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in J$, $a < b$ için f', J üzerinde integrallenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve $q \ge 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve $|f'(x)| \le M$ ise her $x \in J$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le M\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right] \tag{3.2.8}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve ark., 2010).

3.3. Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler ve Kuantum Benzerleri

Hermite-Hadamard eşitsizliği analizin temel eşitsizliklerinden biri olup, ilk kez 1893 yılında J. Hadamard tarafıdan verildi. Günümüzde hala bir çok araştırmacı tarafından incelenmekte, farklı alanlarda çeşitli güncellemeleri verilmektedir. Bu tezde de Hermite-Hadamard eşitsizliğine ilişkin kuantum güncellemeler yapılıp yeni ve kullanışlı integral eşitsizlikler elde edildi.

Lemma 3.3.1. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü için aşağıdakiler eş değerdir

i- f, $[a,b]$ aralığı üzerinde konvekstir

ii- $\forall x, y \in [a,b]$ için $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(tx+(1-t)y)$ dönüşümü $[0,1]$ aralığı üzerinde konvekstir (Pecaric ve Dragomir, 1991).

Teorem 3.3.2. f dönüşümü $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise

i- f, (a,b) aralığında süreklidir

ii- f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Teorem 3.3.3. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): J, $\mathbb{R}$ üzerinde bir aralık $a, b \in J$ ve $a < b$ olmak üzere $f\colon \mathrm{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.3.1}$$

olur (Hadamard, 1893).

Lemma 3.3.4. $f\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in J$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)dt \quad (3.3.2)$$

eşitliği vardır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 3.3.5. $f\colon \mathrm{J}\to\mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a,b\in J$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le(b-a)\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{8} \quad (3.3.3)$$

eşitsizliği vardır (Dragomir ve Agarwal, 1998).

Teorem 3.3.6. $f\colon \mathrm{J}\to\mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a,b\in J$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le(b-a)\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{8} \quad (3.3.4)$$

eşitsizliği vardır (Kırmacı, 2004).

Lemma 3.3.7. $f\colon J^{\circ}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a,b\in J^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. $f'\in L[a,b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=(b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t\,f'(ta+(1-t)b)dt+\int_0^{\frac{1}{2}}(t-1)\,f'(ta+(1-t)b)dt\right] \quad (3.3.5)$$

eşitsizliği vardır (Kırmacı, 2004).

Sonuç 3.3.8. $f\colon \mathrm{J}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a,b\in J$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ve $r\ge 1$ için $|f'|^r$, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le(b-a)\frac{1}{2^{3-\frac{3}{r}}}\left[\left(\frac{|f'(b)|^r}{24}+\frac{|f'(a)|^r}{12}\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\frac{|f'(b)|^r}{12}+\frac{|f'(a)|^r}{24}\right)^{\frac{1}{r}}\right] \quad (3.3.6)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alp ve ark., 2018).

Sonuç 3.3.9. $f\colon \mathrm{J}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a,b\in J$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ve $|f'|^r$, $[a,b]$ aralığı üzerinde quasi-konveks ise $r\ge 1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{4} sup\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \tag{3.3.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alp ve ark., 2018).

Sonuç 3.3.10. $f: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in J$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|^r, [a,b]$ aralığı üzerinde quasi-konveks ise $r \ge 1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{4} sup\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \tag{3.3.8}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve ark., 2009b).

3.4. Simpson Tipli İntegral Eşitsizlikler ve Kuantum Benzerleri

Lemma 3.4.1. $f: J \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. ${}_aD_q f$, J° üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}\left(qt-\frac{1}{6}\right)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1\left(qt-\frac{5}{6}\right)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt \tag{3.4.1}$$

eşitliği gerçeklenir (Tunç ve ark., 2018).

Lemma 3.4.2. $f: J \to \mathbb{R}, J^{\circ}$ üzerinde mutlak sürekli bir dönüşüm $a, b \in J$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{6}\right)f'\big((1-t)a+\ tb\big)dt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{5}{6}\right)f'\big((1-t)a+\ tb\big)dt \tag{3.4.2}$$

eşitliği gerçeklenir (Alomari ve ark., 2009a).

Teorem 3.4.3. $f: J \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. ${}_aD_q f$, J° üzerinde integrallenebilir ve sürekli, $\left|{}_aD_q f\right|$ konveks bir fonksiyon olmak üzere

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12}\left(\frac{6q^3+4q^2+4q+1}{3(1+q)(1+q+q^2)}\left|{}_aD_qf(a)\right|+\frac{2q^2+2q+1}{(1+q)(1+q+q^2)}\left|{}_aD_qf(b)\right|\right) \tag{3.4.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve ark., 2018).

Sonuç 3.4.4. $f: J \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $f' \in L[a,b]$, $a, b \in J$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\frac{5(|f'(a)|+|f'(b)|)}{72} \tag{3.4.4}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve ark., 2009a).

Teorem 3.4.5. $f: J \to \mathbb{R}$, J° üzerinde q −diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < q < 1$ olsun. ${}_aD_qf$, J üzerinde integrallenebilir ve sürekli, her $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_qf\right|^r$ konveks bir fonksiyon olmak üzere

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{6q-1}{36(q+1)}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{36q^3+12q^2+12q+1}{(1+q)(1+q+q^2)}\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\right.$$

$$\left.+\frac{18q^2+18q-7}{(1+q)(1+q+q^2)}\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right)$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{5}{36(q+1)}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{12q^2+12q+5}{(1+q)(1+q+q^2)}\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\right.$$

$$\left.+\frac{18q^2+18q+25}{(1+q)(1+q+q^2)}\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right) \tag{3.4.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tunç ve ark., 2018).

Sonuç 3.4.6. $f: J \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm, $f' \in L(a,b)$, $a, b \in J$ ve $a < b$ olsun. Eğer $p > 1$ için $|f'|^{r/(r-1)}$, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|)$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{61}{6}\left|f'^{(a)}\right|^{r}+\frac{29}{6}\left|f'^{(b)}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\frac{61}{6}\left|f'^{(b)}\right|^{r}+\frac{29}{6}\left|f'^{(a)}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \quad (3.4.6)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu sonuç Alomari ve ark. 2009a da yer alan Teorem 7 nin $s=1$ olması sonucu ile aynıdır.

Teorem 3.4.7. $f\colon \mathrm{J}\to\mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a,b\in J$ ve $a<b$ için $f'\in L(a,b)$olsun. $q\geq 1$ için $|f'|^{q}$, $[a,b]$ aralığı üzerinde quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x\right|$$

$$\leq \frac{5(b-a)}{36}\left(max\{|f'(a)|^{q},|f'(b)|^{q}\}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.4.7)$$

eşitsizliği vardır (Set ve ark., 2012).

3.5. Hadamard-Simpson Tipli İntegral Eşitsizlikler

Lemma 3.5.1. $K\subset\mathbb{R}$ kümesi inveks alt küme olmak üzere $\eta\colon K\times K\to\mathbb{R}$, $a,b\in K$ ve $\eta(b,a)>0$ olsun. $0\leq\lambda,\ \mu<1$ için $c=a+\eta(b,a)$olmak üzere $\eta-yoluyla$ P_{ac} üzerinde $f\colon \mathrm{K}\to\mathbb{R}$, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve f' integrallenebilir ise

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx-\left[(\lambda-\mu)f\left(a+\frac{\eta(b,a)}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)\right.$$

$$\left.+\mu f\big(a+\eta(b,a)\big)\right]$$

$$=\eta(b,a)\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-t)\,f'\big(a+\ t\eta(b,a)\big)dt$$

$$+\eta(b,a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mu-t)\,f'\big(a+\ t\eta(b,a)\big)dt \quad (3.5.1)$$

eşitsizliği sağlanır (Li ve ark., 2016)

Lemma 3.5.1 de tezde kullanılmak üzere özel olarak $\eta(b,a)=b-a$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.5.2. $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $f' \in L(a,b)$, $a,b \in J$ ve $a < b$ olsun. $0 \leq \lambda, \mu < 1$, her $x \in [a,b]$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f(b)\right]$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-t)\, f'\big((1-t)a+\ tb\big)dt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mu-t)\, f'\big((1-t)a+\ tb\big)dt \tag{3.5.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.5.3. $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm, $a,b \in J^{\circ}$ için $0 < a < b$ ve $0 \leq \lambda,\ \mu \leq 1$ olmak üzere $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left(\frac{8\lambda^3 - 15\lambda + 8\mu^3 - 3\mu + 10}{24}\right)|f'(a)|\right.$$

$$\left.+\,|f'(b)|\left(\frac{-8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 21\lambda - 8\mu^3 + 24\mu^2 - 9\mu + 8}{24}\right)\right) \tag{3.5.3}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.5.4. $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, J° üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm, $a,b \in J^{\circ}$ için $0 < a < b$ ve $0 \leq \lambda,\ \ \mu \leq 1$ olmak üzere $f' \in L[a,b]$ olsun. $r \geq 1$ için $|f'|^r$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\lambda^2 - \frac{3\lambda}{2} + \frac{5}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left[|f'(a)|^r\left(\frac{\lambda^3}{3} - \frac{5\lambda}{8} + \frac{3}{8}\right) + |f'(b)|^r\left(-\frac{\lambda^3}{3} + \lambda^2 - \frac{7\lambda}{8} + \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$+(b-a)\left(\frac{\mu^2}{3} - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left[|f'(a)|^r\left(\frac{\mu^3}{3} - \frac{\mu}{8} + \frac{1}{24}\right) + |f'(b)|^r\left(-\frac{\mu^3}{3} + \mu^2 - \frac{3\mu}{8} + \frac{1}{12}\right)\right] \tag{3.5.4}$$

eşitsizliği vardır.

Yukarıda verilen Teorem 3.5.2. ve Teorem 3.5.3. deki bağıntı ve eşitsizlikler Li ve ark. (2016)'nın çalışmasında yer alan Lemma 2.1., Teorem 3.1. ve Teorem 3.2. de $\eta(a,b) = b - a$ ve $s = m = 1$ olarak alınması ile elde edilmiştir (Li ve ark., 2016).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde çalışmada elde edilen bulgular alt başlıklar halinde verildi. Bazı Opial tipli integral eşitsizliklerinin klasik anlamda (p,q) −benzerleri verildikten sonra konveks fonksiyonlar için Simpson ve Ostrowski eşitsizliğine ilişkin yeni eşitsizlikler teşkil edildi. Son olarak ise konveks fonksiyonlar için Hadamard-Simpson tipli yeni integral eşitsizliklere yer verildi.

4.1. Opial Tipli (p,q)-İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. f fonksiyonu $[0,a]_{p,q}$ aralığında mutlak sürekli ve artmayan bir fonksiyon ve $f(0) = f(a) = 0$, $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere

$$\int_0^a \left|f(pt)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t \leq \frac{a}{4}\int_0^a \left[D_{p,q}f(t)\right]^2 d_{p,q}t \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere

$$y(t) = \int_0^t \left|D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s \tag{4.1.2}$$

ve

$$z(t) = \int_t^a \left|D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s \tag{4.1.3}$$

olsun. Burada açık olarak

$$D_{p,q}y(t) = \left|D_{p,q}f(t)\right| = -D_{p,q}z(t)$$

ve $|f(t)| \leq y(t)$, $|f(t)| \leq z(t)$ olur. Dolayısıyla

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \left|f(pt)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t \leq \int_0^{\frac{a}{2}} y(pt)D_{p,q}y(t)\, d_{p,q}t \tag{4.1.4}$$

olur. Teoremin koşulları altında ve kısmi integrasyon yardımı ile

$$\int_0^{\frac{a}{2}} y(pt)D_{p,q}y(t)\, d_{p,q}t \leq y^2\left(\frac{a}{2}\right) - \int_0^{\frac{a}{2}} y(qt)D_{p,q}y(t)\, d_{p,q}t$$

$$\leq y^2\left(\frac{a}{2}\right) - \int_0^{\frac{a}{2}} y(pt)D_{p,q}y(t)\, d_{p,q}t = \frac{1}{2}y^2\left(\frac{a}{2}\right) \tag{4.1.5}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left|f(pt)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t \leq -\int_{\frac{a}{2}}^{a} z(pt)D_{p,q}z(t)\, d_{p,q}t = \frac{1}{2}z^2\left(\frac{a}{2}\right) \tag{4.1.6}$$

olur. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitsizliklerinden

$$\int_{0}^{a} \left|f(pt)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t \leq \frac{1}{2}y^2\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}z^2\left(\frac{a}{2}\right) \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden ve Cauchy-Schwarz integral eşitsizliğinden

$$y^2\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\int_{0}^{\frac{a}{2}} \left|D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t\right)^2 \leq \frac{a}{2}\int_{0}^{\frac{a}{2}} \left|D_{p,q}f(t)\right|^2 d_{p,q}t$$

$$z^2\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left|D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t\right)^2 \leq \frac{a}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left|D_{p,q}f(t)\right|^2 d_{p,q}t$$

elde edilir. Eşitsizliklerin (4.1.7) de yerine yazılması ile

$$\int_{0}^{a} \left|f(pt)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t \leq \frac{a}{4}\int_{\frac{a}{2}}^{a} \left|D_{p,q}f(t)\right|^2 d_{p,q}t$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.2. $p = 1$ olması durumunda (4.1.1) eşitsizliği

$$\int_{0}^{a} \left|f(t)D_{\ q}f(t)\right| d_{\ q}t \ \leq \ \frac{a}{4}\int_{0}^{a} \left[D_q f(t)\right]^2 d_q t$$

formuna ve $q \to 1$ iken

$$\int_{0}^{a} |f(t)f'(t)|dt \ \leq \ \frac{a}{4}\int_{0}^{a} [f'(t)]^2 dt$$

bilinen formuna indirgenir

Teorem 4.1.3. $r(t)$ fonksiyonu $[0, a]_{p,q}$ aralığında sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon ve f fonksiyonu $[0, a]_{p,q}$ aralığında (p, q)-diferensiyellenebilir olsun. $f(0) = f(a) = 0$, $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere

$$\int_{0}^{a} r(t)|f(t)|^2 d_{p,q}t \ \leq \ \frac{a}{4}\left(\int_{0}^{a} r(t)d_{p,q}t\right)\left(\int_{0}^{a} \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d_{p,q}s\right) \tag{4.1.8}$$

ve

$$\int_{0}^{a} r(t)\left|f(t)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t \leq \frac{a}{4}\left(\int_{0}^{a} r^2(t)d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{0}^{a} \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d_{p,q}s\right) \tag{4.1.9}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat: : $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere

$$y(t)=\int_0^t \left|D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s \tag{4.1.10}$$

ve

$$z(t)=\int_t^a \left|D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s \tag{4.1.11}$$

olsun. Burada açık olarak

$$D_{p,q}y(t)=\left|D_{p,q}f(t)\right|=-D_{p,q}z(t) \tag{4.1.12}$$

ve $|f(t)|\leq\ y(t)$, $|f(t)|\leq\ z(t)$ olur. Dolayısıyla

$$f(t)\leq\frac{y(t)+z(t)}{2}=\frac{1}{2}\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\int_0^a r(t)|f(t)|^2 d_{p,q}t\leq\frac{1}{4}\int_0^a r(t)\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s\right)^2 d_{p,q}t$$

$$\leq\frac{1}{4}\left(\int_0^a r(t)d_{p,q}t\right)\left(\int_0^a d_{p,q}t\right)\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d_{p,q}s\right)$$

$$=\frac{a}{4}\left(\int_0^a r(t)d_{p,q}t\right)\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d_{p,q}s\right)$$

sonucu bulunur ve böylece (4.1.8) eşitsizliği elde edilir. Şimdi (4.1.8) eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^a r(t)\left|f(t)D_{p,q}f(t)\right| d_{p,q}t\leq\left(\int_0^a r^2(t)|f(t)|^2 d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(t)\right|^2 d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\frac{a}{4}\left(\int_0^a r^2(t)d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d_{p,q}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(t)\right|^2 d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{a}{4}\left(\int_0^a r^2(t)d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d_{p,q}s\right)$$

sonucu bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.3 ün koşulları altında $p=1$ olarak alınırsa

$$\int_0^a r(t)|f(t)^2| d\,_q t\leq\frac{a}{4}\left(\int_0^a r(t)d\,_q t\right)\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d\,_q s\right) \tag{4.1.13}$$

ve

$$\int_0^a r(t)\left|f(t)D_{p,q}f(t)\right| d\,_q t\leq\frac{a}{4}\left(\int_0^a r^2(t)d\,_q t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^2 d\,_q s\right) \tag{4.1.14}$$

eşitsizliklerinin q −benzerleri elde edilir.

Uyarı 4.1.5. Teorem 4.1.3 ün koşulları altında hem $p = 1$ hem de $q \to 1$olarak alınırsa (3.1.2) eşitsizlikleri (3.1.3) eşitsizliklerine indirgenir.

Teorem 4.1.6. f fonksiyonu $[0,a]_{p,q}$ aralığında (p,q) -diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $f(0) = f(a) = 0,\ 0 < q < p\ \leq 1$ olsun. $m\ \geq 0,\ n \geq 1\ ve\ \lambda \geq 1$ olmak üzere

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}t$$
$$\leq \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{n} \int_0^a |f(s)|^{\lambda m} \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda n} d_{p,q}s \tag{4.1.15}$$

ve

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}t$$
$$\leq \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s \tag{4.1.16}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Burada $R(\lambda)$ fonksiyonu

$$R(\lambda) = \int_0^a \left(t^{1-\lambda} + (a-t)^{1-\lambda}\right)^{-1} d_{p,q}t \tag{4.1.17}$$

biçimindedir.

İspat: (p,q)-integral tanımından her $t \in [0,a]$ için

$$f^{m+n}(t) = \frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q} \int_0^t f^{m+n-1}(s) D_{p,q}f(s) d_{p,q}s \tag{4.1.18}$$

ve

$$f^{m+n}(t) = -\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q} \int_t^a f^{m+n-1}(s) D_{p,q}f(s) d_{p,q}s \tag{4.1.19}$$

olarak yazılabilir. (4.1.18) ve (4.1.19) eşitliklerine $\lambda,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}$ indisleri ile Hölder integral eşitsizliği uygulanarak

$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} \left(\int_0^t \left|f^{m+n-1}(s) D_{p,q}f(s)\right| d_{p,q}s\right)^{\lambda}$$
$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} \left(\int_0^t d_{p,q}s\right)^{\lambda-1} \left(\int_0^t |f(s)|^{\lambda(m+n-1)} \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda} d_{p,q}s\right)$$

$$=\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}(t)^{\lambda-1}\left(\int_0^t |f(s)|^{\lambda(m+n-1)}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}d_{p,q}s\right) \tag{4.1.20}$$

ifadesi elde edilir. Benzer olarak

$$|f(t)|^{\lambda(m+n)} \leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}\left(\int_t^a \left|f^{m+n-1}(s)D_{p,q}f(s)\right|d_{p,q}s\right)^{\lambda}$$

$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}\left(\int_t^a d_{p,q}s\right)^{\lambda-1}\left(\int_t^a |f(s)|^{\lambda(m+n-1)}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}d_{p,q}s\right)$$

$$=\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}(a-t)^{\lambda-1}\left(\int_t^a |f(s)|^{\lambda(m+n-1)}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}d_{p,q}s\right) \tag{4.1.21}$$

sonucu bulunur. (4.1.20) eşitsizliği, $t^{1-\lambda}$ ile (4.1.21) eşitsizliği ise $(a-t)^{1-\lambda}$ ile çarpılır ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\left(t^{1-\lambda}+(a-t)^{\lambda-1}\right)|f(t)|^{\lambda(m+n)}$$

$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n-1)}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}d_{p,q}s\right) \tag{4.1.22}$$

ifadesi bulunur. Dolayısıyla

$$|f(t)|^{\lambda(m+n)} \leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}\left(t^{1-\lambda}+(a-t)^{\lambda-1}\right)^{-1}$$

$$\times\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n-1)}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}d_{p,q}s\right)$$

$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}\left(t^{1-\lambda}+(a-t)^{\lambda-1}\right)^{-1}$$

$$\times\left(\int_0^a |f(s)|^{\frac{\lambda m}{n}}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}|f(s)|^{\lambda(m+n-1)-\frac{\lambda m}{n}}d_{p,q}s\right) \tag{4.1.23}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.23) eşitsizliğine $n,\ \frac{n}{n-1}$ indisleri ile Hölder integral eşitsizliği uygulanarak

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}d_{p,q}t$$

$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}R(\lambda)\left(\int_0^a |f(s)|^{\frac{\lambda m}{n}}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda}|f(s)|^{\lambda(m+n-1)-\frac{\lambda m}{n}}d_{p,q}s\right)$$

$$\leq \left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda}R(\lambda)$$

$$\times\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda m}\left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda n} d_{p,q}s\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{4.1.24}$$

sonucu elde edilir. Eğer

$\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right) = 0$

ise (4.1.24) doğru olur. Fakat $\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)$ ifadesi sıfıra eşit değil ise (4.1.24) ün her iki tarafı $\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)$ ifadesine bölünüp n-inci kuvvetleri alınarak ispat tamamlanır.

(4.1.16) nın ispatı için (4.1.15) eşitsizliğine $\frac{m+n}{n}$, $\frac{m+n}{m}$ indisleri ile Hölder integral eşitsizliği uygulanarak

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}t$$
$$\leq \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^n \left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{\frac{n}{m+n}} \left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{\frac{m}{m+n}} \tag{4.1.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Her iki taraf $\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{\frac{m}{m+n}}$ ile bölünerek

$$\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{-\frac{m}{m+n}} \int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}t$$
$$\leq \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^n \left(\int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{\frac{n}{m+n}} \tag{4.1.26}$$

sonucu bulunur. (4.1.26) da her iki tarafın $\frac{m+n}{n}$ mertebeden kuvveti alınırsa

$$\left(\int_0^a |f(s)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s\right)^{-\frac{m}{n}} \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}t\right)^{\frac{m+n}{n}}$$
$$\leq \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^{m+n} \int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s$$

ifadesi bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}t$$
$$\leq \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a \left|D_{p,q}f(s)\right|^{\lambda(m+n)} d_{p,q}s \tag{4.1.27}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.9. f fonksiyonu $[0,a]_{p,q}$ aralığında (p,q)-diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $f(0)=f(a)=0, 0<q<p\leq 1$ olsun. $m\geq 0,\ n\geq 1, k\geq 0\ ve\ \lambda\geq 1$ olmak üzere

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q}t$$

$$\leq \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{n} \int_0^a |f(t)|^{\lambda m}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda(n+k)} d_{p,q}t \tag{4.1.28}$$

ve

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q}t$$

$$\leq \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a \left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda(m+n+k)} d_{p,q}t \tag{4.1.29}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: $\frac{n+k}{k}$, $\frac{n+k}{n}$ indisleri ile (4.1.28) eşitsizliğine Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q}t$$

$$= \int_0^a |f(t)|^{\lambda\left(\frac{mk}{n+k}\right)}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda k} |f(t)|^{\lambda(m+n)-\lambda\left(\frac{mk}{n+k}\right)} d_{p,q}t$$

$$\leq \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda m}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda(n+k)} d_{p,q}t\right)^{\frac{k}{n+k}} \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n+k)} d_{p,q}t\right)^{\frac{n}{n+k}}$$

$$\leq \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda m}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda(n+k)} d_{p,q}t\right)^{\frac{k}{n+k}} \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{n+k}$$

$$\times \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda m}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda(n+k)} d_{p,q}t\right)^{\frac{n}{n+k}} \tag{4.1.30}$$

ifadesi elde edilir ve (4.1.28) in ispatı tamamlanır. (4.1.29) un ispatı için ise (4.1.28) eşitsizliğine $\frac{m+n}{m}$, $\frac{m+n}{n}$ indisleri ile Hölder integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)}\left|D_{p,q}f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q}t$$

$$= \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^{n} \int_0^a |f(t)|^{\lambda m} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda\left(\frac{mk}{m+n}\right)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda(n+k)-\lambda\left(\frac{mk}{m+n}\right)} d_{p,q} t$$

$$\leq \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^{n} \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

$$\times \left(\int_0^a \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda(m+n+k)} d_{p,q} t\right)^{\frac{n}{m+n}} \qquad (4.1.31)$$

ifadesi elde edilir. (4.1.31) eşitsizliğinde her iki taraf $\left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t\right)^{\frac{m}{m+n}}$ ifadesi ile bölünürse

$$\left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t\right)^{-\frac{m}{m+n}} \int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t$$

$$\leq \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^{n} \left(\int_0^a \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda(m+n+k)} d_{p,q} t\right)^{\frac{n}{m+n}} \qquad (4.1.32)$$

sonucu bulunur. (4.1.32) nin her iki yanının $\frac{m+n}{n}$ kuvveti alınırsa

$$\left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t\right)^{-\frac{m}{n}} \left(\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t\right)^{\frac{m+n}{n}}$$

$$\leq \left[\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right]^{m+n} \int_0^a \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda(m+n+k)} d_{p,q} t \qquad (4.1.33)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.33) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{p,q} t$$

$$\leq \left(\left(\frac{p^{m+n}-q^{m+n}}{p-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a \left|D_{p,q} f(t)\right|^{\lambda(m+n+k)} d_{p,q} t$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.10. Teorem 4.1.9 un koşulları altında $p = 1$ olarak alınırsa

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_{\ q} f(t)\right|^{\lambda k} d_{\ q} t$$

$$\leq \left(\left(\frac{1-q^{m+n}}{1-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{n} \int_0^a |f(t)|^{\lambda m} \left|D_{\ q} f(t)\right|^{\lambda(n+k)} d_{\ q} t$$

ve

$$\int_0^a |f(t)|^{\lambda(m+n)} \left|D_q f(t)\right|^{\lambda k} d_q t$$

$$\leq \left(\left(\frac{1-q^{m+n}}{1-q}\right)^{\lambda} R(\lambda)\right)^{m+n} \int_0^a \left|D_q f(t)\right|^{\lambda(m+n+k)} d_q t$$

eşitsizlikleri bulunur.

Teorem 4.1.9 da (4.1.28) ve (4.1.29) ile verilen eşitsizliklerin q −benzerleri elde edilir.

Uyarı 4.1.11. $q \to 1$olması durumunda ise da (4.1.28) ve (4.1.29) ile verilen eşitsizlikler (3.1.6) ve (3.1.7) ile verilen eşitsizliklere indirgenir.

4.2. Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikler

Lemma 4.2.1. $f\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde $(p,q)-$diferansiyellenebilir ve ${}_aD_{p,q}f$, J üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ise $0<q<p\leq 1$ ve $t\in[0,1]$ için $t\leq p$ olmak üzere

$$\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t \tag{4.2.1}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: (2.3.12) ile verilen (p,q) −türev tanımından

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_bD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{f(tx+(1-t)a)-f\left(\frac{qt}{p}x+\left(1-\frac{qt}{p}\right)a\right)}{(tx+(1-t)a)-\left(\frac{qt}{p}x+\left(1-\frac{qt}{p}\right)a\right)}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{f(tx+(1-t)b)-f\left(\frac{qt}{p}x+\left(1-\frac{qt}{p}\right)b\right)}{(tx+(1-t)b)-\left(\frac{qt}{p}x+\left(1-\frac{qt}{p}\right)b\right)}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p} \frac{f(tx+(1-t)a\,) - f\left(\frac{qt}{p}x + \left(1-\frac{qt}{p}\right)a\right)}{\left(\frac{p-q}{p}\right)t(x-a)}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p} \frac{f(tx+(1-t)b) - f\left(\frac{qt}{p}x + \left(1-\frac{qt}{p}\right)b\right)}{\left(\frac{p-q}{p}\right)t(x-b)}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{x-a}{(b-a)(p-q)}\int_0^1 q\left[f(tx+(1-t)a\,) - f\left(\frac{qt}{p}x + \left(1-\frac{qt}{p}\right)a\right)\right]\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)(p-q)}\int_0^1 q\left[f(tx+(1-t)b) - f\left(\frac{qt}{p}x + \left(1-\frac{qt}{p}\right)b\right)\right]\ {}_0d_{p,q}t \qquad (4.2.2)$$

ifadesi yazılır. (4.2.2) de Tanım 2.3.12 ((p,q)-integral tanımı) kullanılarak

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x + \left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_bD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x + \left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{x-a}{(b-a)(p-q)}$$

$$\times\left[q(p-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x + \left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right) - f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x + \left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)a\right)\right]\right]$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)(p-q)}$$

$$\times\left[q(p-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x + \left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right) - f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x + \left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)b\right)\right]\right]$$

$$= \frac{x-a}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x + \left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right)\right] - q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x + \left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)a\right)\right]\right]$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x + \left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right)\right] - q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x + \left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)b\right)\right]\right]$$

(4.2.3)

sonucu bulunur. (4.2.3) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{x-a}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right)\right]-q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x+\left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)a\right)\right]\right]$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right)\right]-q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x+\left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)b\right)\right]\right]$$

$$=\frac{x-a}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right)\right]-p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x+\left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)a\right)\right]\right]$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right)\right]-p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x+\left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)b\right)\right]\right] \tag{4.2.4}$$

ifadesi elde edilir. (4.2.4) eşitliğinin sol kısmına $f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)$ terimi eklenip çıkarılırak

$$LHS=\frac{x-a}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right)\right]-p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x+\left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)a\right)\right]\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)\right]$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)}$$

$$\times\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right)\right]-p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\left[f\left(\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}x+\left(1-\frac{q^{n+1}}{p^{n+2}}\right)b\right)\right]\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)+f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)\right]$$

$$=\frac{x-a}{(b-a)}\left[(q-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right)\right]+f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)\right]$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)}\left[(q-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right)\right]+f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)\right]$$

(4.2.5)

sonucu elde edilir. (p,q)-integral tanımından (4.2.5) eşitliği

$$\frac{(x-a)(q-p)}{(b-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)a\right)\right]+\frac{x-a}{(b-a)}f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)$$

$$+\frac{(b-x)(q-p)}{(b-a)}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{p^{n+1}}\left[f\left(\frac{q^n}{p^{n+1}}x+\left(1-\frac{q^n}{p^{n+1}}\right)b\right)\right]+\frac{b-x}{(b-a)}f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)$$

$$=-\frac{1}{b-a}\int_a^x f(t)\ {}_ad_{p,q}t+\frac{x-a}{(b-a)}f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)-\frac{1}{b-a}\int_x^b f(t)\ {}_ad_{p,q}t$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)}f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)$$

$$=\frac{(x-a)f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{1}{p}x+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_{p,q}t$$

biçiminde düzenlenir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.2. Lemmada $p=1$ alınırsa (4.2.1) eşitliği Lemma 3.2.3 ile verilen eşitliğe indirgenir.

Bu ise (4.2.1) eşitliğinin q −benzeridir.

Uyarı 4.2.3. $p=1$ ve $q\to 1$ için (4.2.1) eşitliği (3.2.2) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.2.4. $f\colon J\to\mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde $(p,q)-$diferansiyellenebilir ve ${}_aD_{p,q}f$, J üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $0<q<p\leq 1$ olmak üzere $|{}_aD_{p,q}f|$, J üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{q|{}_aD_{p,q}f(x)|}{p^2(p^2+pq+q^2)}+\frac{q(p^3+p^2q+pq^2-p-q)|{}_aD_{p,q}f(a)|}{p^2(p^3+2p^2q+2pq^2+q^3)}\right]$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{q|{}_aD_{p,q}f(x)|}{p^2(p^2+pq+q^2)}+\frac{q(p^3+p^2q+pq^2-p-q)|{}_aD_{p,q}f(b)|}{p^2(p^3+2p^2q+2pq^2+q^3)}\right]\qquad(4.2.6)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma (4.2.1) den $0<q<p\leq 1$ ve $t\in[0,1]$ için $t\leq p$ olmak üzere

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right|$$

$$=\left|\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t \qquad (4.2.7)$$

ifadesi yazılır. $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$, J aralığı üzerinde konveks olduğundan (4.2.7) eşitsizliği

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left(\frac{t}{p}\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|+\left(1-\frac{t}{p}\right)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left(\frac{t}{p}\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|+\left(1-\frac{t}{p}\right)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

biçiminde düzenlenir. Burada Tanım 2.3.12 kullanılarak

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|\int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{t}{p}\ {}_0d_{p,q}t+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\int_0^1 \frac{qt}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|\int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{t}{p}\ {}_0d_{p,q}t+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\int_0^1 \frac{qt}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{q\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|}{p^2(p^2+pq+q^2)}+\frac{q(p^3+p^2q+pq^2-p-q)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|}{p^2(p^3+2p^2q+2pq^2+q^3)}\right]$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{q\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|}{p^2(p^2+pq+q^2)}+\frac{q(p^3+p^2q+pq^2-p-q)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|}{p^2(p^3+2p^2q+2pq^2+q^3)}\right]$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.2.4 ün koşulları altında $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{q(1+q)\left|{}_aD_qf(x)\right|+q^3\left|{}_aD_qf(a)\right|}{(1+q)(1+q+q^2)}\right]$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{q(1+q)\left|{}_aD_qf(x)\right|+q^3\left|{}_aD_qf(b)\right|}{(1+q)(1+q+q^2)}\right] \tag{4.2.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.6. Sonuç 4.2.5 de $q \to 1$ alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{2|f'(x)|+|f'(a)|}{6}\right]+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\left[\frac{2|f'(x)|+|f'(b)|}{6}\right]\right] \tag{4.2.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç: 4.2.7. Teorem 4.2.4 ün koşulları altında $\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right| \leq M$ ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq M\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a} \tag{4.2.10}$$

sonucu elde edilir.

Uyarı 4.2.8. Sonuç 4.2.7 de $p=1$ olarak alınırsa (4.2.6) eşitsizliği (3.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

Uyarı 4.2.9. Sonuç 4.2.8 de $q \to 1$ alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{M}{b-a}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç (3.2.5) eşitsizliğinde $s=1$ olarak alındığında elde edilen sonuç ile aynıdır.

Teorem 4.2.10. $f\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) −diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<p\leq 1$ için ${}_aD_{p,q}f, J$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. $r,s>1, \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^r, J$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+(p^2+pq-1)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s}{p(p+q)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+(p^2+pq-1)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s}{p(p+q)}\right)^{\frac{1}{s}} \quad (4.2.11)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.2.1 $0<q<1$ ve $t\in[0,1]$ için $t\leq p$ olmak üzere

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$=\left|\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t \quad (4.2.12)$$

elde edilir. $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$, J aralığı üzerinde konveks olduğundan Hölder eşitsizliği uygulanarak (4.2.12) eşitsizliği

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left(\frac{t}{p}\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left(1-\frac{t}{p}\right)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left(\frac{t}{p}\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left(1-\frac{t}{p}\right)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}} \quad (4.2.13)$$

biçiminde düzenlenir. Tanım 2.3.12 kullanılarak (4.2.13) ün sol kısmı

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\frac{p-q}{p(p^2-q^2)}+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\left(1-\frac{p-q}{p(p^2-q^2)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\frac{p-q}{p(p^2-q^2)}+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\left(1-\frac{p-q}{p(p^2-q^2)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+(p^2+pq-1)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s}{p(p+q)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+(p^2+pq-1)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s}{p(p+q)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

şeklinde hesaplanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.11. Teorem 4.2.10 un koşulları altında $\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|\leq M$ ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq M\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a} \tag{4.2.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 4.2.12. Sonuç 4.2.11 de $p=1$ olarak alınırsa (4.2.14) eşitsizliği (3.2.7) eşitsizliğine, $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırak elde edilecek eşitsizlik ise (3.2.6) eşitsizliğinin $s=1$ durumuna indirgenir.

Sonuç 4.2.13. Teorem 4.2.10 un koşulları altında $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r(1-q)}{1-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|{}_aD_qf(x)\right|^s+q\left|{}_aD_qf(a)\right|^s}{1+q}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r(1-q)}{1-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|{}_aD_qf(x)\right|^s+q\left|{}_aD_qf(b)\right|^s}{1+q}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.15}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.14. Sonuç 4.2.13 de $q \to 1$ olarak alınırsa

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f'(x)|^s + |f'(a)|^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f'(x)|^s + |f'(b)|^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.16}$$

Teorem 4.2.15. $f: \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) $-$diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < q < p \leq 1$ için ${}_aD_{p,q}f$, Jüzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. $s \geq 1$ ve $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^s$, J üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\frac{q(p+q)\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s + \left(pq(p^2+pq+q^2)-q(p+q)\right)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\frac{q(p+q)\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s + \left(pq(p^2+pq+q^2)-q(p+q)\right)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.17}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemmadan $0 < q < 1$ ve $t \in [0,1]$ için $t \leq p$ olmak üzere

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$= \left|\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left| {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right| \, {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left| {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right| \, {}_0d_{p,q}t \tag{4.2.18}$$

ifadesi elde edilir. $\left| {}_aD_{p,q}f\right|, J$ aralığı üzerinde konveks olduğundan (4.2.18) eşitsizliği power mean eşitsizliği uygulanarak

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\, {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \left| {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|^s \, {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\, {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \left| {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|^s \, {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \left(\frac{t}{p}\left| {}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left(1-\frac{t}{p}\right)\left| {}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right) {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}$$

$$\times\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \left(\frac{t}{p}\left| {}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left(1-\frac{t}{p}\right)\left| {}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right) {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.19}$$

biçiminde düzenlenir. Tanım 2.3.12 kullanılarak (4.2.19) eşitsizliğinin sol kısmı

$$LHS=\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}+\left| {}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\left(\frac{q(p-q)}{p(p^2-q^2)}-\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}+\left| {}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\left(\frac{q(p-q)}{p(p^2-q^2)}-\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\frac{q(p+q)\left| {}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left(pq(p^2+pq+q^2)-q(p+q)\right)\left| {}_aD_{p,q}f(a)\right|^s}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\frac{q(p+q)\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left(pq(p^2+pq+q^2)-q(p+q)\right)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

şeklinde elde edilerek ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.16. Teorem 4.2.15 un koşulları altında $\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|\leq M$ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq M\frac{q}{p(p+q)}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a} \tag{4.2.20}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.17. Sonuç 4.2.16 da $p=1$ alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_qx\right|\leq M\frac{q}{1+q}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}$$

sonucu elde edilir.

Uyarı 4.2.18. Sonuç 4.2.17 de $q\to 1$ olarak alınırsa (4.2.17) eşitsizliği (3.2.8) eşitsizliğinde $s=1$ olması durumuna indirgenir.

Sonuç 4.2.19. Teorem 4.2.15 in koşulları altında $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_qx\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{q(1+q)\left|{}_aD_qf(x)\right|^s+q^3\left|{}_aD_qf(a)\right|^s}{(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{q(1+q)\left|{}_aD_qf(x)\right|^s+q^3\left|{}_aD_qf(b)\right|^s}{(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.21}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.2.20. Sonuç 4.2.19 da $q\to 1$ olarak alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{2\left|f'^{(x)}\right|^s+\left|f'^{(a)}\right|^s}{6}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{2|f'(x)|^s+|f'(b)|^s}{6}\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.22}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 4.2.21. $f:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde $(p,q)-$ diferansiyellenebilir ve ${}_aD_{p,q}f$, J üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$, J üzerinde tgs $-$konveks bir fonksiyon ise $0<q<1$ ve $0<t<p\leq 1$ için

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^4-q^4)}\right)$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^4-q^4)}\right) \qquad (4.2.23)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.2.1 den $0<q<1$ ve $0<t<p\leq 1$ için

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$=\left|\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

elde edilir. $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$, J aralığı üzerinde tgs $-$konveks olduğundan

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| + \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right| \right) \int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t \right)$$

$$+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| + \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right| \right) \int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t \right)$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| + \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right| \right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)} - \frac{q(p-q)}{p^3(p^4-q^4)} \right)$$

$$+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| + \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right| \right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)} - \frac{q(p-q)}{p^3(p^4-q^4)} \right)$$

ifadesi bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.22. Teorem 4.2.21 de $p = 1$ olarak alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx \right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\left| {}_aD_qf(x) \right| + \left| {}_aD_qf(a) \right| \right)\left(\frac{q(1-q)}{(1-q^3)} - \frac{q(1-q)}{(1-q^4)} \right)$$

$$+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| + \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right| \right)\left(\frac{q(1-q)}{(1-q^3)} - \frac{q(1-q)}{(1-q^4)} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.23. Sonuç 4.2.22 de $q \to 1$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\frac{f'(x)+f'(a)}{12} + \frac{(b-x)^2}{b-a}\frac{f'(x)+f'(b)}{12}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.24. Teoremin koşullarına ek olarak her $x \in [a,b]$için $\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| \leq M$ olursa

$$\left| \frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p} + \left(1-\frac{1}{p}\right)a\right) + (b-x)f\left(\frac{x}{p} + \left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x \right|$$

$$\leq 2M\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)} - \frac{q(p-q)}{p^3(p^4-q^4)} \right)\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.2.25. Sonuç 4.2.24 de $p = 1$ alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx \right| \leq 2M\left(\frac{q(1-q)}{(1-q^3)} - \frac{q(1-q)}{(1-q^4)} \right)\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.26. Sonuç 4.2.25 de $q \to 1$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{6(b-a)}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 4.2.27. $f\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde $(p,q)-$diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<1$ ve $0<t<p\le 1$ için ${}_aD_{p,q}f$, J üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. $r,s>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^r$, J üzerinde $tgs-$konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\le \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{p(p^2+pq+q^2)-(p+q)}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s + \left|{}_aD_{p,q}f(a\,)\right|^s\right)$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{p(p^2+pq+q^2)-(p+q)}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\right.$$

$$\left.+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right) \qquad (4.2.24)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.2.1 den $0<q<1$ ve $0<t<p\le 1$ için

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_{p,q}x\right|$$

$$=\left|\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\,{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\,{}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\,{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\,{}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\le \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\,{}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\,{}_0d_{p,q}t \qquad (4.2.25)$$

elde edilir. (4.2.25) integraline Hölder eşitsizliği uygulanarak $\left|\,{}_aD_{p,q}f\right|^r$ J aralığı üzerinde tgs $-$konveksliğinden

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|\,{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|\,{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|\,{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{qt}{p}\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.26}$$

ifadesi bulunur. (p,q) $-$integral hesabından (4.2.26) ifadesinin sol kısmı

$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right)$$

$$\times\left(\frac{p-q}{p(p^2-q^2)}-\frac{p-q}{p(p^3-q^3)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right)$$

$$\times\left(\frac{p-q}{p(p^2-q^2)}-\frac{p-q}{p(p^3-q^3)}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right)$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{p(p^2+pq+q^2)-(p+q)}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{p(p^2+pq+q^2)-(p+q)}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right)$$

olarak hesaplanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.28. Teorem 4.2.27 nin koşullarına ek olarak her $x \in [a,b]$ için $\left| {}_aD_{p,q}f(x)\right| \leq M$ olursa

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq M\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r}{p^r}\frac{p-q}{p^{r+1}-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(2\frac{p(p^2+pq+q^2)-(p+q)}{p^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.2.29. Sonuç 4.2.28 de $p=1$ alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|$$

$$\leq M\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r(1-q)}{1-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{2q^2}{(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.2.30. Sonuç 4.2.29 da $q\to 1$ alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq M\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.2.31. Teorem 4.2.27 de $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q^r(1-q)}{1-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{q^2\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s}{(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q^r(1-q)}{1-q^{r+1}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{q^2\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s}{(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.2.32. Sonuç 4.2.31 de $q\to 1$ alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f'(x)|^s+|f'(a)|^s}{6}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f'(x)|^s+|f'(b)|^s}{6}\right)^{\frac{1}{s}}$$

eşitsizliği bulunur.

Teorem 4.2.33. $f\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) $-$diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<1$ ve $0<t<p\leq 1$ için ${}_aD_{p,q}f$, J üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. $s\geq 1$ ve $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^s$, J üzerinde tgs $-$konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|{}_aD_{p,q}f(a\,)\right|^s\right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^4-q^4)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^5-q^5)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|{}_aD_{p,q}f(b\,)\right|^s\right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^4-q^4)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^5-q^5)}\right)\right)^{\frac{1}{s}} \qquad (4.2.27)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.2.1 den $0<q<1$ ve $0<t<p\leq 1$ için

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$=\left|\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\ {}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1\frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t \qquad (4.2.28)$$

elde edilir. (4.2.28) integraline power mean eşitsizliği uygulanarak $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^s$'nin J aralığı üzerinde tgs −konveksliğinden

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)a\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\left|{}_aD_{p,q}f\left(\frac{t}{p}x+\left(1-\frac{t}{p}\right)b\right)\right|^s\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\int_0^1 \frac{qt}{p}\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{s}} \tag{4.2.29}$$

sonucu bulunur. (p,q) −integral hesabından (4.2.29) eşitsizliği

$$\left|\frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^s\right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^4-q^4)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^5-q^5)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}$$

$$\times\left(\left(\left|{}_aD_{p,q}f(x)\right|^s+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^s\right)\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^4-q^4)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^5-q^5)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

biçiminde hesaplanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.34. Teorem 4.2.33 ün koşullarına ek olarak her $x \in [a,b]$ için $\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right| \leq M$ olursa

$$\left| \frac{(x-a)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)a\right)+(b-x)f\left(\frac{x}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)b\right)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x \right|$$

$$\leq M\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{p(p+q)}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{q(p-q)}{p^2(p^3-q^3)}-\frac{q(p-q)}{p^3(p^4-q^4)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.2.35. Sonuç 4.2.34 de $p = 1$ alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx \right|$$

$$\leq M\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{q(1-q)}{(1-q^3)}-\frac{q(1-q)}{(1-q^4)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

sonucu bulunur.

Sonuç 4.2.36. Sonuç 4.2.35 de $q \to 1$ alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq M\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{s}}$$

sonucu bulunur.

Sonuç 4.2.37. Teorem 4.2.33 de $p = 1$ olarak alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx \right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{q(1-q)}{(1-q^3)}-\frac{q(1-q)}{(1-q^4)}\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right|^s + \left| {}_aD_{p,q}f(a) \right|^s\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{q(1-q)}{(1-q^3)}-\frac{q(1-q)}{(1-q^4)}\left(\left| {}_aD_{p,q}f(x) \right|^s + \left| {}_aD_{p,q}f(b) \right|^s\right)\right)^{\frac{1}{s}}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.2.38. Sonuç 4.2.37 de $q \to 1$ alınırsa

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{|f'(x)|^s+|f'(a)|^s}{12}\right)^{\frac{1}{s}}+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{s}}\left(\frac{|f'(x)|^s+|f'(b)|^s}{12}\right)^{\frac{1}{s}}$$

sonucu bulunur.

4.3. Hadamard-Simpson Tipli (p,q)-İntegral Eşitsizlikler

Lemma 4.3.1. $f: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) $-$diferansiyellenebilir, $0 < q < p \leq 1$ ve $t \in [0,1]$ için $t \leq p$ olmak üzere ${}_aD_{p,q}f$ dönüşümü J° üzerinde sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $0 \leq \lambda$, $\mu < 1$ olmak üzere

$$\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x - p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)\right.$$

$$\left.+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t \qquad (4.3.1)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: (2.3.12) eşitliği ile verilen (p,q) $-$diferansiyel tanımı yardımı ile

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)$$

$$\times\frac{f\left(p\left(1-\frac{t}{p}\right)a+tb+(1-p)a\right)-f\left(q\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{qt}{p}b+(1-q)a\right)}{\frac{t}{p}(b-a)(p-q)}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=\frac{p(1-\lambda)}{(b-a)(p-q)}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f\big((1-t)a+tb\big)-f\left(\left(1-\frac{qt}{p}\right)a+\frac{qt}{p}b\right)}{t}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\frac{qp}{(b-a)(p-q)}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f\big((1-t)a+tb\big)-f\left(\left(1-\frac{qt}{p}\right)a+\frac{qt}{p}b\right)\right]\ {}_0d_{p,q}t$$

eşitliği yazılır. Burada Tanım 2.3.12 ile verilen (p,q) $-$integral tanımı kullanılarak

$$I_1=\frac{p(1-\lambda)}{(b-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[f\left(\left(1-\frac{q^n}{2p^{n+1}}\right)a+\frac{q^n}{2p^{n+1}}b\right)-f\left(\left(1-\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}\right)a+\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}b\right)\right]$$

$$-\frac{qp}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{2p^{n+1}}\left[f\left(\left(1-\frac{q^n}{2p^{n+1}}\right)a+\frac{q^n}{2p^{n+1}}b\right)-f\left(\left(1-\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}\right)a+\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}b\right)\right]$$

$$=\frac{p(1-\lambda)}{b-a}\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)-f(a)\right]$$

$$-\frac{qp}{b-a}$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{2p^{n+1}}f\left(\left(1-\frac{q^n}{2p^{n+1}}\right)a+\frac{q^n}{2p^{n+1}}b\right)\right.$$

$$-\frac{p}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}f\left(\left(1-\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}\right)a+\frac{q^{n+1}}{2p^{n+2}}b\right)-\frac{1}{2q}f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)$$

$$\left.+\frac{1}{2q}f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)\right]$$

$$=\frac{p(1-\lambda)}{b-a}\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)-f(a)\right]$$

$$-\frac{qp}{b-a}\left[\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{2p^{n+1}}f\left(\left(1-\frac{q^n}{2p^{n+1}}\right)a+\frac{q^n}{2p^{n+1}}b\right)+\frac{1}{2q}f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)\right]$$

$$=\frac{p(1-\lambda)-p/2}{b-a}f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)-\frac{p(1-\lambda)}{(b-a)}f(a)$$

$$+\frac{p(p-q)}{b-a}\sum_{n=0}^{\propto}\frac{q^n}{2p^{n+1}}f\left(\left(1-\frac{q^n}{2p^{n+1}}\right)a+\frac{q^n}{2p^{n+1}}b\right)\tag{4.3.2}$$

eşitliği elde edilir. Benzer adımlar uygulanarak

$$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=\int_0^1(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=\frac{p}{(b-a)^2}$$

$$\times \int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x - \frac{p\mu}{(b-a)} f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right) - \frac{p(1-\mu)}{b-a} f(a)$$

$$-\left[\frac{p(1-\mu)-\frac{p}{2}}{b-a} f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right) - \frac{p(1-\mu)}{(b-a)} f(a)\right.$$

$$\left.+\frac{p(p-q)}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n}{2p^{n+1}} f\left(\left(1-\frac{q^n}{2p^{n+1}}\right)a + \frac{q^n}{2p^{n+1}}b\right)\right] \tag{4.3.3}$$

sonucu elde edilir. (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$I_1 + I_2 = \frac{p}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x$$

$$-\frac{p(\lambda-\mu) f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right) + p(1-\lambda)f(a) + (p\mu) f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right)}{b-a}$$

sonucu bulunur. Burada eşitliğin her iki tarafı $b-a$ ile çarpılarak

$$\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x$$

$$-p\left[(\lambda-\mu) f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right)\right]$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2. Lemma 4.3.1'in koşulları altında (4.3.1) bağıntısında $p=1$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx - \left[(\lambda-\mu) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f(b)\right]$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mu-qt)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt \tag{4.3.4}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik q −Hadamard-Simpson tipli eşitlik olarak adlandırılabilir.

Uyarı 4.3.3. (4.3.1) bağıntısında $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa eşitlik üçüncü bölümde verilen (3.5.2) eşitliğine indirgenir.

Sonuç 4.3.4. Lemma 4.3.1'in koşulları altında (4.3.1) bağıntısında

a) $\lambda = \frac{5}{6},\ \mu = \frac{1}{6}$ olarak alınırsa (p,q)-Simpson tipli;

$$\frac{1}{6}\left[pf(a) + 4pf\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{b}{2p}\right) + pf\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{b}{p}\right)\right] - \frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}} \left(qt - \frac{1}{6}\right)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(qt - \frac{5}{6}\right)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t \tag{4.3.5}$$

b) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa(p,q)-Hadamard tipli;

$$\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\left[\frac{f(a) + f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right)}{2}\right]$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - qt\right)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2} - qt\right)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t \tag{4.3.6}$$

c) $\lambda = 1,\ \mu = 0$ olarak alınırsa (p,q)-Hadamard tipli;

$$\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right)\right]$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}} (-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t \tag{4.3.7}$$

(p,q) $-$integral eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 4.3.5. Lemma 4.3.1'in koşulları altında Sonuç (4.3.4) ile verilen eşitliklerde $p = 1$ olarak alınırsa

a) $\lambda = \frac{1}{2},\ \mu = \frac{1}{2}$ için q $-$Hadamard tipli;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x - \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-qt\right)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{2}-qt\right)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt \tag{4.3.8}$$

b) $\lambda=1,\ \mu=0$ için q −Hadamard tipli;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}(-qt)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-qt)\ {}_aD_qf\big((1-t)a+\ tb\big)\ {}_0d_qt \tag{4.3.9}$$

kuantum integral eşitlikleri elde edilir.

Uyarı 4.3.6. Lemma 4.3.1'in koşulları altında

1) (4.3.5) eşitliğinde $p=1$ olarak alınırsa $\lambda=\frac{5}{6},\mu=\frac{1}{6}$ için eşitlik üçüncü bölümde verilen (3.4.1) eşitliğine indirgenir.

2) Sonuç (4.3.4) ile verilen eşitliklerde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa

a) $\lambda=\frac{5}{6},\ \mu=\frac{1}{6}$ için (4.3.5) eşitliği (3.4.2) eşitliğine indirgenir.

b) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$ için (4.3.5) eşitliği (3.3.2) eşitliğine indirgenir.

c) $\lambda=1,\mu=0$ için (4.3.5) eşitliği (3.3.5) eşitliğine indirgenir.

Lemma 4.3.7. $0<q<1$ ve $0<t<p\le 1$ için

$$\int_0^a t^u(nt-m)\ {}_0d_{p,q}t=(p-q)\left[\frac{na^{u+2}}{p^{u+2}-q^{u+2}}-\frac{ma^{u+1}}{p^{u+1}-q^{u+1}}\right] \tag{4.3.10}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: (p,q) −integral tanımından $0<q<1$ ve $0<t<p\le 1$ için

$$\int_0^a t^u(nt-m)\ {}_0d_{p,q}t=\int_0^a nt^{u+1}\ {}_0d_{p,q}t-\int_0^a mt^u\ {}_0d_{p,q}t$$

$$= n(p-q)a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}\frac{q^{(u+1)k}}{p^{(u+1)k}}a^{u+1}-m(p-q)a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}\frac{q^{uk}}{p^{uk+2}}a^u$$

$$= na^{u+2}(p-q)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k(u+2)}}{p^{k(u+2)}}-ma^{u+1}(p-q)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k(u+1)}}{p^{k(u+1)}}$$

$$= na^{u+2}(p-q)\frac{1}{1-\frac{q^{u+2}}{p^{u+2}}}\frac{1}{p^{u+2}} - ma^{u+1}(p-q)\frac{1}{1-\frac{q^{u+1}}{p^{u+1}}}\frac{1}{p^{u+1}}$$

$$= (p-q)\left[\frac{na^{u+2}}{p^{u+2}-q^{u+2}} - \frac{ma^{u+1}}{p^{u+1}-q^{u+1}}\right] \tag{4.3.11}$$

sonucu bulunur.

Yukarıdaki sonucun yardımıyla, bu bölümdeki teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı integral hesapları aşağıda verildi. Kolaylık olması açısından ise de integraller uygun parametreler yardımıyla isimlendirildi. $0 < q < 1$ ve $0 < t < p \leq 1$ için:

$$[A]_\lambda = \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda-qt| \ {}_0d_{p,q}t = \int_0^{\frac{1-\lambda}{q}} (1-\lambda-qt) \ {}_0d_{p,q}t + \int_{\frac{1-\lambda}{q}}^{\frac{1}{2}} \big(qt-(1-\lambda)\big) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{(1-\lambda)^2}{q} - \frac{\frac{(1-\lambda)^2}{q}}{(p+q)} + \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{(1-\lambda)^2}{q^2}\right)q}{(p+q)} - \frac{(1-\lambda)}{2} + \frac{(1-\lambda)^2}{q}$$

$$= \frac{2(1-\lambda)^2}{q} - \frac{(1-\lambda)}{2} + \frac{\frac{q}{4}-\frac{2(1-\lambda)^2}{q}}{(p+q)}$$

$$= \frac{8p+8q+16\lambda-16p\lambda-8\lambda^2+8\lambda^2p+8\lambda^2q+2q^2\lambda-2pq-q^2+2pq\lambda-8}{4p(p+q)} \tag{4.3.12}$$

$$[N]_\lambda = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{p}|1-\lambda-qt| \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \int_0^{\frac{1-\lambda}{q}} \frac{t}{p}(1-\lambda-qt) \ {}_0d_{p,q}t + \int_{\frac{1-\lambda}{q}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{p}\big(qt-(1-\lambda)\big) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{-\frac{(1-\lambda)^3}{q^2}}{p^2+pq+q^2} - \frac{-\frac{(1-\lambda)^3}{q^2}}{(p+q)} + \left(\frac{q\left(\frac{1}{8}-\frac{(1-\lambda)^3}{q^3}\right)}{p^2+pq+q^2} - \frac{(1-\lambda)\left(\frac{1}{4}-\frac{(1-\lambda)^2}{q^2}\right)}{(p+q)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{\left(\frac{2(1-\lambda)^3}{q^2}-\frac{(1-\lambda)}{4}\right)}{(p+q)} + \frac{\frac{q}{8}-\frac{2(1-\lambda)^3}{q^2}}{p^2+pq+q^2}\right] \tag{4.3.13}$$

$$[M]_\lambda = \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |1-\lambda-qt| \ {}_0d_{p,q}t - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{p}|1-\lambda-qt| \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{2(1-\lambda)^2}{q} - \frac{(1-\lambda)}{2} + \frac{\frac{q}{4} - \frac{2(1-\lambda)^2}{q} + \frac{(1-\lambda)}{4p} - \frac{2(1-\lambda)^3}{pq^2}}{(p+q)}$$

$$- \frac{\frac{q}{8p} - \frac{2(1-\lambda)^3}{pq^2}}{p^2+pq+q^2} \tag{4.3.14}$$

$$[A]_\mu = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1-\mu-qt| \ {}_0d_{p,q}t = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-\mu}{q}} (1-\mu-qt) \ {}_0d_{p,q}t + \int_{\frac{(1-\mu)}{q}}^{1} \big(qt-(1-\mu)\big) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{(1-\mu)^2}{q} - \frac{1-\mu}{2} - (1-\mu) - \frac{\frac{(1-\mu)^2}{q} - \frac{q}{4} - q + \frac{(1-\mu)^2}{q}}{(p+q)}$$

$$= \frac{2(1-\mu)^2}{q} - \frac{3(1-\mu)}{2} - \frac{\frac{2(1-\mu)^2}{q} - \frac{5q}{4}}{(p+q)}$$

$$= \frac{8p+8q+16\mu-16p\mu-16q\mu-8\mu^2+8\mu^2p+8\mu^2q+6q^2\mu-6pq-q^2+6pq\lambda-8}{4p(p+q)} \tag{4.3.15}$$

$$[N]_\mu = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{p} |1-\mu-qt| \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-\mu}{q}} \frac{t}{p} (1-\mu-qt) \ {}_0d_{p,q}t + \int_{\frac{1-\mu}{q}}^{1} \frac{t}{p} \big(qt-(1-\mu)\big) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{\frac{2(1-\mu)^3}{q^2} - \frac{5(1-\mu)}{4}}{p+q} + \frac{\frac{9q}{8} - \frac{2(1-\mu)^3}{q^2}}{p^2+pq+q^2} \tag{4.3.16}$$

$$[M]_\mu = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1-\mu-qt| \left(1-\frac{t}{p}\right) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1-\mu-qt| \ {}_0d_{p,q}t - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{p} |1-\mu-qt| \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{2(1-\mu)^2}{q} - \frac{3(1-\mu)}{2}$$

$$- \frac{\frac{2(1-\mu)^2}{q} - \frac{5q}{4}}{(p+q)} - \frac{1}{p}\left(\frac{-\frac{2(1-\mu)^3}{q^2} + \frac{9q}{8}}{p^2+pq+q^2} - \frac{-\frac{2(1-\mu)^3}{q^2} + \frac{5(1-\mu)}{4}}{p+q} \right)$$

$$= \frac{2(1-\mu)^2}{q} - \frac{3(1-\mu)}{2} - \frac{\frac{2(1-\mu)^2}{q} - \frac{5q}{4} + \frac{2(1-\mu)^3}{pq^2} - \frac{5(1-\mu)}{4p}}{(p+q)} - \frac{\frac{9q}{8p} - \frac{2(1-\mu)^3}{q^2}}{p^2+pq+q^2} \tag{4.3.17}$$

$$[K]_\lambda = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{p^2} |1-\lambda-qt| \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{1}{p^2}\left[\int_0^{\frac{1-\lambda}{q}} t^2(1-\lambda-qt) \ {}_0d_{p,q}t + \int_{\frac{1-\lambda}{q}}^{\frac{1}{2}} t^2\big(qt-(1-\lambda)\big) \ {}_0d_{p,q}t\right]$$

$$= \frac{p-q}{p^2}\left[\frac{\left(-q\frac{(1-\lambda)^4}{q^4}\right)}{p^4-q^4} - \frac{-(1-\lambda)\frac{(1-\lambda)^3}{q^3}}{p^3-q^3} + \left(\frac{q\left(\frac{1}{2^4}-\frac{(1-\lambda)^4}{q^4}\right)}{p^4-q^4} - \frac{(1-\lambda)\left(\frac{1}{8}-\frac{(1-\lambda)^3}{q^3}\right)}{p^3-q^3}\right)\right]$$

$$= \frac{p-q}{p^2}\left[\frac{\left(\frac{q}{16}-\frac{2q(1-\lambda)^4}{q^4}\right)}{p^4-q^4} - \frac{\frac{(1-\lambda)}{48}-\frac{2(1-\lambda)(1-\lambda)^3}{q^3}}{p^3-q^3}\right] \tag{4.3.18}$$

$$[K]_\mu = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^2}{p^2} |1-\mu-qt| \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1-\mu}{q}} \frac{t^2}{p^2}(1-\mu-qt) \ {}_0d_{p,q}t + \int_{\frac{1-\mu}{q}}^{1} \frac{t^2}{p^2}\big(qt-(1-\mu)\big) \ {}_0d_{p,q}t$$

$$= \frac{p-q}{p^2}\left[\frac{-q\left(\left(\frac{1-\mu}{q}\right)^4-\frac{1}{2^4}\right)}{p^4-q^4} - \frac{-(1-\mu)\left(\left(\frac{1-\mu}{q}\right)^3-\frac{1}{8}\right)}{p^3-q^3}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{q\left(1-\left(\frac{1-\mu}{q}\right)^4\right)}{p^4-q^4} - \frac{(1-\mu)\left(\frac{1}{8}-\left(\frac{1-\mu}{q}\right)^3\right)}{p^3-q^3}\right)\right]$$

$$= \frac{p-q}{p^2}\left[\frac{\left(\frac{17q}{16}-\frac{2(1-\mu)^4}{q^3}\right)}{p^4-q^4} - \frac{\frac{(1-\mu)}{4}-\frac{(1-\mu)^4}{2q^3}}{p^3-q^3}\right] \tag{4.3.19}$$

Teorem 4.3.8. $f: \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde $(p,q)-$diferansiyellenebilir, $0<q<p\leq 1$ için ${}_aD_{p,q}f$ dönüşümü J üzerinde sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $0 \leq \lambda$, $\mu < 1$ olmak üzere $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$, J üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x) \ {}_ad_{p,q}x - p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\Big(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\big([M]_\lambda+[M]_\mu\big)+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\big([N]_\lambda+[N]_\mu\big)\Big) \tag{4.3.20}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.3.1'den ve $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$ fonksiyonu, J aralığı üzerinde konveks olduğundan $0 < q < p \leq 1$ ve $t \in [0,1]$ için $t \leq p$ olmak üzere

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right.$$

$$\left.-\,p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$=(b-a)\left|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|(1-\lambda-qt)|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|+\frac{t}{p}\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-\mu-qt|\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|+\frac{t}{p}\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=(b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\frac{t}{p}\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-\mu-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-\mu-qt|\frac{t}{p}\ {}_0d_{p,q}t\ {}_0d_{p,q}t$$

sonucu elde edilir. (4.3.13)-(4.3.17) formüllerinden

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|[M]_\lambda+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|[N]_\lambda+\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|[M]_\mu\right.$$
$$\left.+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|[N]_\mu\right)$$
$$=(b-a)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\left([M]_\lambda+[M]_\mu\right)+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\left([N]_\lambda+[N]_\mu\right)\right)$$

ifadesi bulunarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.9. Teorem 4.3.8'in koşulları altında (4.3.20) eşitsizliğinde

a) $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|\left([M]_{\lambda,1}+[M]_{\mu,1}\right)+\left|{}_aD_qf(b)\right|\left([N]_{\lambda,1}+[N]_{\mu,1}\right)\right) \qquad (4.3.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte yer alan $[M]_{\lambda,1}$, $[M]_{\mu,1}$, $[N]_{\lambda,1}$, $[N]_{\mu,1}$ ifadelerinin değerleri, (4.3.13)-(4.3.17) formüllerindeki $[M]_\lambda$, $[M]_\mu$, $[N]_\lambda$, $[N]_\mu$ifadelerinde $p=1$ alınmasıyla

$$[M]_{\lambda,1}=\frac{11q+18\lambda+16q^2\lambda^2-26q\lambda-32\lambda^2+16\lambda^3+16q\lambda^2-26q^2\lambda+4q^3\lambda+11q^2-2q^3-2}{8(1+q)(1+q+q^2)} \qquad (4.3.22)$$

$$[M]_{\mu,1}=\frac{3q+18\mu+16q^2\mu^2-18q\mu-32\mu^2+16\mu^3+16q\mu^2-18q^2\mu+12q^3\mu+3q^2-2q^3-2}{8(1+q)(1+q+q^2)} \qquad (4.3.23)$$

$$[N]_{\lambda,1}=\frac{-q-46\lambda+2q\lambda+48\lambda^2-16\lambda^3+2q^2\lambda-q^2+14}{8(1+q)(1+q+q^2)} \qquad (4.3.24)$$

$$[N]_{\mu,1}=\frac{-q-38\mu+10q\mu+48\mu^2-16\mu^3+10q^2\mu-q^2+6}{8(1+q)(1+q+q^2)} \qquad (4.3.25)$$

biçiminde hesaplandı.

b) (4.3.20) eşitsizliğinde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$
$$\leq (b-a)$$

$$\times\left(|f'(a)|\left(\frac{8\lambda^3-15\lambda+8\mu^3-3\mu+10}{24}\right)\right.$$

$$\left.+|f'(b)|\left(\frac{-8\lambda^3+24\lambda^2-21\mu-8\mu^3+24\mu^2-9\mu+8}{24}\right)\right) \quad (4.3.26)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.3.10. Teorem 4.3.8'in koşulları altında (4.3.20) eşitsizliğinde

a) $\lambda=\frac{5}{6}, \mu=\frac{1}{6}$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[pf(a)+4pf\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{b}{2p}\right)+pf\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{b}{p}\right)\right]-\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right|$$

$$\leq (b-a)$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\left([M]_{\lambda=\frac{5}{6}}+[M]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\left([N]_{\lambda=\frac{5}{6}}+[N]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)\right) \quad (4.3.27)$$

$(p,q)-$ Simpson eşitsizliği elde edilir. Burada $[M]_{\lambda=\frac{5}{6}}$, $[M]_{\mu=\frac{1}{6}}$ ve $[N]_{\lambda=\frac{5}{6}}$, $[N]_{\mu=\frac{1}{6}}$ ifadeleri (4.3.13)-(4.3.17) formülleri kullanılarak

$$[M]_{\lambda=\frac{5}{6}}=\frac{1}{18q}-\frac{1}{12}+\frac{\frac{q}{4}-\frac{1}{18q}+\frac{1}{24p}-\frac{1}{108pq^2}}{(p+q)}-\frac{\frac{q}{8p}-\frac{1}{108pq^2}}{p^2+pq+q^2} \quad (4.3.28)$$

$$[M]_{\mu=\frac{1}{6}}=\ \frac{25}{18q}-\frac{5}{4}-\frac{\frac{25}{18q}-\frac{5q}{4}+\frac{125}{108pq^2}-\frac{25}{24p}}{(p+q)}-\frac{\frac{9q}{8p}-\frac{125}{108pq^2}}{p^2+pq+q^2} \quad (4.3.29)$$

$$[N]_{\lambda=\frac{5}{6}}=-\frac{2p+2q-18pq^3+9p^2q^2-2pq-2p^2-2q^2-18q^4}{216pq^2(p+q)(p^2+pq+q^2)} \quad (4.3.30)$$

$$[N]_{\mu=\frac{1}{6}}$$

$$=-\frac{250p+250q-18pq^3+225p^2q^2-250pq-250p^2-250q^2-18q^4}{216pq^2(p+q)(p^2+pq+q^2)} \quad (4.3.31)$$

biçiminde hesaplanır.

b) $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x-p\left[\frac{f(a)+f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)}{2}\right]\right|$$

$$\leq (b-a)$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\left([M]_{\lambda=\frac{1}{2}}+[M]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\left([N]_{\lambda=\frac{1}{2}}+[N]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)\right) \quad (4.3.32)$$

$(p,q)-$Hadamard eşitsizliği elde edilir. Burada $[M]_{\lambda=\frac{1}{2}}$, $[M]_{\mu=\frac{1}{2}}$ ve $[N]_{\lambda=\frac{1}{2}}$, $[N]_{\mu=\frac{1}{2}}$ ifadeleri (4.3.13)-(4.3.17) formülleri kullanılarak

$$[N]_{\lambda=\frac{1}{2}} = -\frac{2p+2q+p^2q^2-2pq-2p^2-2q^2}{8pq^2(p+q)(p^2+pq+q^2)} \tag{4.3.33}$$

$$[M]_{\lambda=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2q}-\frac{1}{4}+\frac{\frac{q}{4}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{8p}-\frac{1}{4pq^2}}{(p+q)}-\frac{\frac{q}{8p}-\frac{1}{4pq^2}}{p^2+pq+q^2} \tag{4.3.34}$$

$$[N]_{\mu=\frac{1}{2}} = -\frac{2p+2q-4pq^3+5p^2q^2-2pq-2p^2-2q^2-4q^4}{8pq^2(p+q)(p^2+pq+q^2)} \tag{4.3.35}$$

$$[M]_{\mu=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2q}-\frac{3}{4}-\frac{\frac{1}{2q}-\frac{5q}{4}+\frac{1}{4pq^2}-\frac{5}{8p}}{(p+q)}-\frac{\frac{9q}{8p}-\frac{1}{4pq^2}}{p^2+pq+q^2} \tag{4.3.36}$$

biçiminde hesaplanır.

c) $\lambda=1,\ \mu=0$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x-p\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\Big(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\big([M]_{\lambda=1}+[M]_{\mu=0}\big)+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\big([N]_{\lambda=1}+[N]_{\mu=0}\big)\Big)$$

$(p,q)-$Hadamard eşitsizliği elde edilir. Burada $[M]_{\lambda=1}$, $[M]_{\mu=0}$ ve $[N]_{\lambda=1}$, $[N]_{\mu=0}$ ifadeleri (4.3.13)-(4.3.17) formülleri kullanılarak

$$[N]_{\lambda=1} = \frac{q}{8p(p^2+pq+q^2)}$$

$$[M]_{\lambda=1} = \frac{q}{8}\frac{-p-q+2pq^2+2p^2q+2p^3}{p(p+q)(p^2+pq+q^2)}$$

$$[N]_{\mu=0} = -\frac{16p+16q+pq^3+10p^2q^2-16pq-16p^2-16q^2+q^4}{8pq^2(p+q)(p^2+pq+q^2)}$$

$$[M]_{\mu=0} = \frac{2}{q}-\frac{3}{2}-\frac{\frac{2}{q}-\frac{5q}{4}+\frac{2}{pq^2}-\frac{5}{4p}}{(p+q)}-\frac{\frac{9q}{8p}-\frac{2}{q^2}}{p^2+pq+q^2}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.3.11. Teorem 4.3.8'in koşulları altında Sonuç (4.3.10) ile verilen eşitsizliklerde $p=1$ olarak alınırsa;

a) $\lambda=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2}$ için;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx-\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq (b-a)$$

$$\times\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|\left(\frac{1+2q+2q^2+(2q-1)(2q^2-1)}{8(1+q)(1+q+q^2)}\right)\right.$$

$$\left.+\left|{}_aD_qf(b)\right|\left(\frac{1+(2q+3)(2q-1)}{8(1+q)(1+q+q^2)}\right)\right)$$

b) $\lambda=1,\ \mu=0$ için;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq(b-a)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|\left(\frac{q(1+q+2q^2)}{8(1+q)(1+q+q^2)}-\frac{(q-2)(2q-1)}{8(1+q+q^2)}\right)\right.$$

$$\left.+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\left(\frac{q}{8(1+q+q^2)}-\frac{q^4+q^3-6q^2}{8q^2(1+q)(1+q+q^2)}\right)\right)$$

q −Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 4.3.12. Teorem 4.3.8'in koşulları altında;

1) (4.3.20) eşitsizliğinde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa eşitsizlik (3.5.3) eşitsizliğine indirgenir.
2) Sonuç (4.3.10) ile verilen eşitsizliklerde $p=1$ olarak alınırsa $\lambda=\frac{5}{6},\ \mu=\frac{1}{6}$ için (4.3.27) eşitsizliği (3.4.3) ile verilen q −Simpson tipli eşitsizliğe indirgenir
3) Sonuç (4.3.10) ile verilen eşitsizliklerde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa

a) $\lambda=\frac{5}{6},\mu=\frac{1}{6}$ için (4.3.27) eşitsizliği (3.4.4) eşitsizliğine indirgenir.

b) $\lambda=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2}$ için (4.3.27) eşitsizliği (3.3.3) eşitsizliğine indirgenir.

c) $\lambda=1,\mu=0$ için (4.3.27) eşitsizliği (3.3.4) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.3.13. $f\colon \mathrm{J}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\overset{\circ}{J}$ üzerinde (p,q) −diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0<q<p\leq 1$ için ${}_aD_{p,q}f$ dönüşümü, J üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. $0\leq\lambda,\mu<1$ ve $r\geq 1$ için $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^r$ konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)([A]_\lambda)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_\lambda+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_\lambda\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left([A]_\mu\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_\mu+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_\mu\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.42}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.3.1 ve mutlak değer özelliğinden

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$=(b-a)\left|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t \tag{4.3.43}$$

eşitsizliği yazılır. $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^r$, J aralığı üzerinde konveks olduğundan (4.3.43) eşitsizliği $0<q<p\leq 1$ ve $t\in[0,1]$ için $t\leq p$ olmak üzere power mean eşitsizliği de kullanılarak

$$(b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq(b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right)\,{}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\frac{t}{p}\,{}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\,{}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right)\,{}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\frac{t}{p}\,{}_0d_{p,q}t\,{}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

biçiminde düzenlenir.(4.3.12)-(4.3.17) formülleri kullanılarak

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)([A]_\lambda)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_\lambda+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_\lambda\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left([A]_\mu\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_\mu+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_\mu\right)^{\frac{1}{r}}$$

sonucu bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.14. Teorem 4.3.13'ün koşulları altında (4.3.40) eşitsizliğinde

a) $p=1$ olarak alınırsa (4.3.22)-(4.3.25) formülleri yardımıyla

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}_ad_qx-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)\left([A]_{\lambda,1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_{\lambda,1}+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_{\lambda,1}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left([A]_{\mu,1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|\,{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_{\mu,1}+\left|\,{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_{\mu,1}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.44}$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca (4.3.12) ve (4.3.15) formüllerinden $p=1$ için

$$[A]_{\lambda,1}=\frac{-q-14\lambda+2q\lambda+8\lambda^2+6}{4(1+q)} \tag{4.3.45}$$

$$[A]_{\mu,1} = \frac{-q - 10\mu + 6q\mu + 8\mu^2 + 2}{4(1+q)} \tag{4.3.46}$$

biçiminde hesaplanır.

b) (4.3.40) eşitsizliğinde $p = 1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq \left(\lambda^2 - \frac{3\lambda}{2} + \frac{5}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times \left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r \frac{8\lambda^3 - 15\lambda + 9}{24} + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r \frac{-8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 21\mu + 6}{24}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+ \left(\mu^2 - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times \left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r \frac{8\mu^3 - 3\mu + 1}{24} + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r \frac{-8\mu^3 + 24\mu^2 - 9\mu + 2}{24}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.47}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.3.15. Teorem 4.3.13'ün koşulları altında (4.3.40) eşitsizliğinde

a) $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{6}$ olarak alınırsa (4.3.28)-(4.3.31) formülleri kullanılarak (p,q) −Simpson;

$$\left|\frac{1}{6}\left[pf(a) + 4pf\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{b}{2p}\right) + pf\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{b}{p}\right)\right] - \frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq (b-a)\left([A]_{\lambda=\frac{5}{6}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r [M]_{\lambda=\frac{5}{6}} + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r [N]_{\lambda=\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left([A]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r [M]_{\mu=\frac{1}{6}} + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r [N]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.48}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (4.3.12) ve (4.3.15) formüllerinden $[A]_{\lambda=\frac{5}{6}}$ ve $[A]_{\mu=\frac{1}{6}}$ ifadeleri

$$[A]_{\lambda=\frac{5}{6}} = -\frac{1}{36}\frac{-2p - 2q + 3pq - 6q^2 + 2}{q(p+q)} \tag{4.3.49}$$

$$[A]_{\mu=\frac{1}{6}} = -\frac{5}{36}\frac{-10p - 10q + 9pq + 10}{q(p+q)} \tag{4.3.50}$$

biçiminde hesaplanır.

b) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa (4.3.33)-(4.3.36) formüllerinden

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x - p\frac{f(a)+f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)}{2}\right|$$

$$\leq (b-a)\left([A]_{\lambda=\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_{\lambda=\frac{1}{2}}+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_{\lambda=\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left([A]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_{\mu=\frac{1}{2}}+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (4.3.51)$$

$(p,q)-$ Hadamard eşitsizliği elde edilir. Burada (4.3.12) ve (4.3.15) formülleri kullanılarak $[A]_{\lambda=\frac{1}{2}}$ ve $[A]_{\mu=\frac{1}{2}}$ formülleri

$$[A]_{\lambda=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{-2p-2q+pq+2}{q(p+q)} \qquad (4.3.52)$$

$$[A]_{\mu=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{-2p-2q+3pq-2q^2+2}{q(p+q)} \qquad (4.3.53)$$

biçiminde hesaplanır.

c) $\lambda = 1, \mu = 0$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x - p\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)([A]_{\lambda=1})^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_{\lambda=1}+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_{\lambda=1}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left([A]_{\mu=0}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r[M]_{\mu=0}+\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r[N]_{\mu=0}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$(p,q)-$ Hadamard eşitsizliği elde edilir. Burada (4.3.12) ve (4.3.15) formülleri kullanılarak $[A]_{\lambda=1}$ ve $[A]_{\mu=0}$ formülleri

$$[A]_{\lambda=1} = \frac{q}{4(p+q)} \qquad (4.3.54)$$

$$[A]_{\mu=0} = \frac{1}{4}\frac{-8p-8q+6pq+q^2+8}{q(p+q)} \qquad (4.3.55)$$

biçiminde düzenlenir.

Sonuç 4.3.16. Teorem 4.3.13'ün koşulları altında Sonuç (4.3.15) deki eşitsizliklerde $p=1$ olarak alınırsa

a) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ için;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{4(1+q)}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{(1+2q+2q^2)\left|{}_aD_qf(a)\right|^r+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{8(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)(2q-1)\left(\frac{q}{4q(1+q)}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{(2q^2-1)\left|{}_aD_qf(a)\right|^r+(2q+3)\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{8(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (4.3.56)$$

b) $\lambda = 1,\ \mu = 0$ için;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{q}{4(1+q)}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{q(1+q+2q^2)\left|{}_aD_qf(a)\right|^r}{8(1+q)(1+q+q^2)}+\frac{q\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{8(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(\frac{2q-q^2}{4q(1+q)}\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\frac{(2-q)(2q-1)\left|{}_aD_qf(a)\right|^r}{8(1+q+q^2)}+\frac{-(q^4+q^3-6q^2)\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{8q^2(1+q)(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (4.3.57)$$

q −Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 4.3.17. Teorem 4.3.13'ün koşulları altında

1) (4.3.42) eşitsizliğinde $p = 1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa eşitsizlik (3.5.4) eşitsizliğine indirgenir.
2) (4.3.48) eşitsizliğinde $p = 1$ olarak alınırsa $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{6}$ için eşitsizlik (3.4.5) eşitsizliğine indirgenir.
3) (4.3.42) eşitsizliğinde $p = 1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa

a) $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{6}$ için (4.3.42) eşitsizliği (3.4.6) eşitsizliğine indirgenir.

b) $\lambda = 1,\ \mu = 0$ için (4.3.42) eşitsizliği (3.3.6) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.3.18. $f\colon J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) −diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $0 < q < p \leq 1$ ve $t \in [0,1]$ için $t \leq p$ olmak üzere ${}_aD_{p,q}f$ dönüşümü, J aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $0 \leq \lambda, \mu < 1$ ve $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^r$, J aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)A_\lambda\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r,\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)A_\mu\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r,\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.58}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.3.1 ve $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$ fonksiyonu J aralığı üzerinde quasi-konveks olduğundan $0<q<p\leq 1$ ve $t\in[0,1]$ için $t\leq p$ olmak üzere için power mean eşitsizliği de kullanılarak

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|^{1-\frac{1}{r}}|1-\lambda-qt|^{\frac{1}{r}}\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|^{1-\frac{1}{r}}|1-\mu-qt|^{\frac{1}{r}}\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left(\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\right)^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.3.59}$$

sonucu bulunur. (4.3.12) ve (4.3.15) formüllerinden

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)[A_\lambda]\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r,\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)[A_\mu]\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r,\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

ifadesi bulunarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.19. Teorem 4.3.18'in koşulları altında (4.3.58) eşitsizliğinde

a) $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)\frac{-q-14\lambda+2q\lambda+8\lambda^2+6}{4(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_qf(a)\right|^r,\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\frac{-q-10\mu+6q\mu+8\mu^2+2}{4(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_qf(a)\right|^r,\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (4.3.60)$$

sonucu bulunur.

b) (4.3.58) eşitsizliğinde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)\left(\lambda^2-\frac{3\lambda}{2}+\frac{5}{8}\right)(max\{|f'(a)|^r,|f'(b)|^r\})^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(\mu^2-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{8}\right)(max\{|f'(a)|^r,|f'(b)|^r\})^{\frac{1}{r}} \quad (4.3.61)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.20. Teorem 4.3.18'in koşulları altında (4.3.58) eşitsizliğinde

a) $\lambda=\frac{5}{6},\ \mu=\frac{1}{6}$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[pf(a)+4pf\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{b}{2p}\right)+pf\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{b}{p}\right)\right]-\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right|$$

$$\leq(b-a)[A]_{\lambda=\frac{5}{6}}\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r,\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)[A]_{\mu=\frac{1}{6}}\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r,\left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

(p,q) $-$Simpson eşitsizliği elde edilir. $[A]_{\lambda=\frac{5}{6}}$ ve $[A]_{\mu=\frac{1}{6}}$ formülleri (4.3.49) ve (4.3.50) eşitlikleri ile verilmiştir.

b) $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\frac{f(a)+f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)}{2}\right|$$

$$\leq (b-a)[A]_{\lambda=\frac{1}{2}}\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r, \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)[A]_{\mu=\frac{1}{2}}\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r, \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

(p,q) $-$Hadamard eşitsizliği elde edilir. $[A]_{\lambda=\frac{1}{2}}$ ve $[A]_{\mu=\frac{1}{2}}$ formülleri (4.3.52) ve (4.3.53) eşitlikleri ile verilmiştir.

c) $\lambda=1, \mu=0$ olarak alınırsa(p,q) $-$Hadamard;

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)[A]_{\lambda=1}\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r, \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)[A]_{\mu=0}\left(max\left\{\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right|^r, \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$(p,q)-$ Hadamard eşitsizliği elde edilir. $[A]_{\lambda=1}$ ve $[A]_{\mu=0}$ formülleri (4.3.54) ve (4.3.55) eşitlikleri ile verilmiştir.

Sonuç 4.3.21. Teorem 4.3.18'in koşulları altında Sonuç (4.3.20) ile verilen eşitsizliklerde $p=1$ olarak alınırsa

a) $\lambda=\frac{5}{6}, \mu=\frac{1}{6}$ için q $-$Simpson;

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x\right|$$

$$\leq (b-a)\frac{6q-1}{36(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_q f(a)\right|^r, \left|{}_aD_q f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\frac{5}{36(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_q f(a)\right|^r, \left|{}_aD_q f(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

b) $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{2}$ için q $-$Hadamard;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx - \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_qf(a)\right|^r, \left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\frac{2q^2-q}{4q(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_qf(a)\right|^r, \left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

c) $\lambda = 1, \mu = 0$ için q −Hadamard;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)q}{4(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_qf(a)\right|^r, \left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\frac{2q-q^2}{4q(1+q)}\left(max\left\{\left|{}_aD_qf(a)\right|^r, \left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right\}\right)^{\frac{1}{r}}$$

tipli integral eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 4.3.22. Teorem 4.3.18'in koşulları altında Sonuç (4.3.20) ile verilen eşitsizliklerde $p = 1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa

a) $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{6}$ için (4.3.58) eşitsizliği (3.4.7) eşitsizliğine indirgenir.

b) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ için (4.3.58) eşitsizliği (3.3.8) eşitsizliğine indirgenir.

c) $\lambda = 1, \mu = 0$ için (4.3.58) eşitsizliği (3.3.7) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.3.23. $f: \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) −diferansiyellenebilir ve ${}_aD_{p,q}f$ dönüşümü, J üzerinde sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\left|{}_aD_{p,q}f\right|$ fonksiyonu J üzerinde tgs −konveks bir fonksiyon ise $0 < \lambda, \mu < 1$ ve $0 < q < p \leq 1$, $0 < t < p \leq 1$ için

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right| + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\left[([N]_\lambda-[K]_\lambda)+\left([N]_\mu-[K]_\mu\right)\right] \qquad (4.3.62)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.3.1 den $0 < q < 1$ ve $0 < t < p \leq 1$ için

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$=(b-a)\left|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t \qquad (4.3.63)$$

sonucu bulunur. $|{}_aD_{p,q}f|$ fonksiyonu J aralığı üzerinde $tgs-$ konveks olduğundan (4.3.63) eşitsizliğinin sol kısmı

$$LHS\leq(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right)\frac{t}{p}\left(|{}_aD_{p,q}f(a)|+|{}_aD_{p,q}f(b)|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left(1-\frac{t}{p}\right)\frac{t}{p}\left(|{}_aD_{p,q}f(a)|+|{}_aD_{p,q}f(b)|\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$=(b-a)\left(|{}_aD_{p,q}f(a)|+|{}_aD_{p,q}f(b)|\right)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\left(|{}_aD_{p,q}f(a)|+|{}_aD_{p,q}f(b)|\right)\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t$$

biçiminde elde edilir. (4.3.13), (4.3.16), (4.3.18) ve (4.3.19) eşitliklerinden

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq(b-a)\left(|{}_aD_{p,q}f(a)|+|{}_aD_{p,q}f(b)|\right)\left[\left([N]_\lambda-[K]_\lambda\right)+\left([N]_\mu-[K]_\mu\right)\right]$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.24. Teorem 4.3.23’ün koşulları altında (4.3.62) eşitsizliğinde

a) $p=1$olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x - \left[(\lambda-\mu) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda) f(a) + \mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left|{}_a D_{p,q} f(a)\right| + \left|{}_a D_{p,q} f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda,1} - [K]_{\lambda,1}\right) + \left([N]_{\mu,1} - [K]_{\mu,1}\right)\right]$$

ifadesi bulunur. Burada (4.3.18) ve (4.3.19) eşitliklerinden

$$[K]_{\lambda,1} = \frac{2q - 383\lambda + q\lambda + 576\lambda^2 - 384\lambda^3 + 96\lambda^4 + q^2\lambda + q^3\lambda + 2q^2 + 2q^3 + 95}{48(1+q)(1+q+q^2)(1+q^2)} \tag{4.3.64}$$

$$[K]_{\mu,1} = (1-q)\left[\frac{\left(\frac{17q}{16} - \frac{2(1-\mu)^4}{q^3}\right)}{1-q^4} - \frac{\frac{(1-\mu)}{4} - \frac{(1-\mu)^4}{2q^3}}{1-q^3}\right] \tag{4.3.65}$$

şeklinde hesaplanır.

b) $p = 1$ ve $q \to 1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \left[(\lambda-\mu) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (1-\lambda) f(a) + \mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left|{}_a D_{p,q} f(a)\right| + \left|{}_a D_{p,q} f(b)\right|\right)$$

$$\times \left[\left(\frac{-96\lambda^4 + 193\lambda^3 - 124\lambda + 43}{576}\right) + \left(\frac{64\mu^4 - 320\mu^3 + 576\mu^2 - 344\mu + 45}{192}\right)\right]$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.3.25. Teorem 4.3.23'ün koşulları altında (4.3.62) eşitsizliğinde

a) $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{6}$ olarak alınırsa (p,q) −Simpson

$$\left|\frac{1}{6}\left[pf(a) + 4pf\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{b}{2p}\right) + pf\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{b}{p}\right)\right] - \frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q} x\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left|{}_a D_{p,q} f(a)\right| + \left|{}_a D_{p,q} f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda=\frac{5}{6}} - [K]_{\lambda=\frac{5}{6}}\right) + \left([N]_{\mu=\frac{1}{6}} - [K]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)\right]$$

sonucu elde edilir. Burada (4.3.18) ve (4.3.19) eşitliklerinden

$$[K]_{\lambda=\frac{5}{6}}$$

$$= -\frac{1}{2592}\left(\frac{-4pq^2 - 4p^2q - 153pq^5 - 153p^2q^4 + 9p^3q^3}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{4pq + 4p^2 - 4p^3 + 4q^2 - 4q^3 - 153q^6}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right) \tag{4.3.66}$$

$$[K]_{\mu=\frac{1}{6}}$$

$$= -\frac{1}{2592}\left(\frac{-625pq^2 - 625p^2q - 2214pq^5 - 2214p^2q^4 + 540p^3q^3 + 2500pq}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{2500p^2 - 625p^3 + 2500q^2 - 625q^3 - 2214q^6}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right) \tag{4.3.67}$$

formülleri elde edilir.

b) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa (p,q) −Hadamard;

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\frac{f(a) + f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right)}{2}\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right| + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda=\frac{1}{2}} - [K]_{\lambda=\frac{1}{2}}\right) + \left([N]_{\mu=\frac{1}{2}} - [K]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)\right]$$

sonucu elde edilir. Burada (4.3.18) ve (4.3.19) eşitliklerinden

$$[K]_{\lambda=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{96}\left(\frac{-12pq^2 - 12p^2q - 5pq^5 - 5p^2q^4 + p^3q^3}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{12pq + 12p^2 - 12p^3 + 12q^2 - 12q^3 - 5q^6}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right) \tag{4.3.68}$$

$$[K]_{\mu=\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{32}\frac{-pq^2 - p^2q - 30pq^5 - 30p^2q^4 + 4p^3q^3 + 4pq + 4p^2 - p^3 + 4q^2 - q^3 - 30q^6}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)} \tag{4.3.69}$$

formülleri elde edilir.

c) λ=1,μ=0 olarak alınırsa (p,q)-Hadamard

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)\right| + \left|{}_aD_{p,q}f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda=1} - [K]_{\lambda=1}\right) + \left([N]_{\mu=0} - [K]_{\mu=0}\right)\right]$$

sonucu elde edilir. Burada (4.3.18) ve (4.3.19) eşitliklerinden

$$[K]_{\lambda=1} = \frac{1}{16}\frac{q}{p^2(p+q)(p^2+q^2)} \tag{4.3.70}$$

$$[K]_{\mu=0} = -\frac{1}{16}\left(\frac{-8pq^2 - 8p^2q - 13pq^5 - 13p^2q^4 + 4p^3q^3}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{32pq + 32p^2 - 8p^3 + 32q^2 - 8q^3 - 13q^6}{p^2q^3(p+q)(p^2+q^2)(p^2+pq+q^2)}\right) \tag{4.3.71}$$

formülleri elde edilir.

Sonuç 4.3.26. Teorem 4.3.23'ün koşulları altında (4.3.62) eşitsizliğinde $p=1$ olarak alınırsa

a) $\lambda=\frac{5}{6}, \mu=\frac{1}{6}$ için q −Simpson;

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_q f(a)\right|+\left|{}_aD_q f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda=\frac{5}{6},1}-[K]_{\lambda=\frac{5}{6},1}\right)+\left([N]_{\mu=\frac{1}{6},1}-[K]_{\mu=\frac{1}{6},1}\right)\right]$$

b) $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{1}{2}$ için q −Hadamard;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x-\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_q f(a)\right|+\left|{}_aD_q f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda=\frac{1}{2},1}-[K]_{\lambda=\frac{1}{2},1}\right)+\left([N]_{\mu=\frac{1}{2},1}-[K]_{\mu=\frac{1}{2},1}\right)\right]$$

c) $\lambda=1, \mu=0$ için q −Hadamard;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\left|{}_aD_q f(a)\right|+\left|{}_aD_q f(b)\right|\right)\left[\left([N]_{\lambda=1,1}-[K]_{\lambda=1,1}\right)+\left([N]_{\mu=0,1}-[K]_{\mu=0,1}\right)\right]$$

integral eşitsizlikleri elde edilir. Burada (4.3.18) ve (4.3.19) eşitliklerinden yukarıda verilen kısaltmalar

$$[K]_{\lambda=\frac{5}{6},1}=\frac{153q+153q^2+153q^3-5}{2592(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)} \tag{4.3.72}$$

$$[K]_{\mu=\frac{1}{6},1}=\frac{-1875q-1875q^2+85q^3+2214(q^4+q^5+q^6)-1875}{2592q^3(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)} \tag{4.3.73}$$

$$[K]_{\lambda=\frac{1}{2},1}=\frac{5q+5q^2+5q^3+11}{96(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)} \tag{4.3.74}$$

$$[K]_{\mu=\frac{1}{2},1}=\frac{3}{32}\frac{-q-q^2-q^3+10q^4+10q^5+10q^6-1}{q^3(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)} \tag{4.3.75}$$

$$[K]_{\lambda=1,1}=\frac{q}{16(1+q)(1+q^2)} \tag{4.3.76}$$

$$[K]_{\mu=0,1}=\frac{1}{16}\frac{-24q-24q^2+4q^3+13q^4+13q^5+13q^6-24}{q^3(1+q)(1+q^2)(1+q+q^2)} \tag{4.3.77}$$

biçiminde kolayca hesaplanır.

Uyarı 4.3.27. Teorem 4.3.23'ün koşulları altında (4.3.62) eşitsizliğinde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa

a) $\lambda = \frac{5}{6}, \mu = \frac{1}{6}$ için Simpson tipli;

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{151}{7776}(b-a)\left(f'(a) + f'(b)\right)$$

b) $\lambda = 1, \mu = 0$ için Hadamard tipli;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq (b-a)\frac{25}{96}(b-a)\left(f'(a) + f'(b)\right)$$

integral eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 4.3.28. $f\colon \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J° üzerinde (p,q) −diferansiyellenebilir ve $0 < q < p \leq 1$, $0 < t < p \leq 1$ için ${}_aD_{p,q}f$ dönüşümü, J aralığı üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. $0 < \lambda$, $\mu < 1$ ve $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_{p,q}f\right|^r$ fonksiyonu J aralığında tgs −konveks ise

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x - p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(a) + {}_aD_{p,q}f(b)\right|$$

$$\times\left[([A]_\lambda)^{1-\frac{1}{r}}([N]_\lambda - [K]_\lambda)^{\frac{1}{r}} + \left([A]_\mu\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_\mu - [K]_\mu\right)^{\frac{1}{r}}\right] \tag{4.3.78}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.3.1 ve mutlak değer özelliğinden

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a + \frac{1}{2p}b\right) + (1-\lambda)f(a) + \mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a + \frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$= (b-a)\left|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\lambda-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\mu-qt)\ {}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\ {}_0d_{p,q}t\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t$$

$$+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a + \frac{t}{p}b\right)\right|\ {}_0d_{p,q}t \tag{4.3.79}$$

eşitsizliği yazılır. $\left| {}_aD_{p,q}f \right|^r$ fonksiyonu, J aralığı üzerinde $tgs-$konveks olduğundan $0<q<1$ ve $0<t<p\leq 1$ için (4.3.79) eşitsizliği power mean eşitsizliği de kullanılarak

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)$$

$$\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\left|{}_aD_{p,q}f\left(\left(1-\frac{t}{p}\right)a+\frac{t}{p}b\right)\right|^r\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)+{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\int_0^{\frac{1}{2}}|1-\lambda-qt|\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\ {}_0d_{p,q}t\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)+{}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\int_{\frac{1}{2}}^1|1-\mu-qt|\frac{t}{p}\left(1-\frac{t}{p}\right)\ {}_0d_{p,q}t\right)^{\frac{1}{r}}$$

şeklinde düzenlenir. Buradan (4.3.12)-(4.3.19) formülleri yardımıyla

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right.$$

$$\left.-p\left[(\lambda-\mu)f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)(A_\lambda)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|^r([N]_\lambda-[K]_\lambda)\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+(b-a)\left(A_\mu\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|^r\left([N]_\mu-[K]_\mu\right)\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=(b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|$$

$$\times\left[([A]_\lambda)^{1-\frac{1}{r}}([N]_\lambda-[K]_\lambda)^{\frac{1}{r}}+\left([A]_\mu\right)^{1-\frac{1}{r}}([N]_\mu-[K]_\mu)^{\frac{1}{r}}\right]$$

eşitsizliği bulunurak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.29. Teorem 4.3.28’in koşulları altında (4.3.78) eşitsizliğinde

a) $p=1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left|{}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|$$

$$\left[\left([A]_{\lambda,1}\right)^{1-\frac{1}{r}}([N]_{\lambda,1}-[K]_{\lambda,1})^{\frac{1}{r}}+\left([A]_\mu\right)^{1-\frac{1}{r}}([N]_{\mu,1}-[K]_{\mu,1})^{\frac{1}{r}}\right]$$

b) $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\left[(\lambda-\mu)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(1-\lambda)f(a)+\mu f(b)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)|f'(a)+f'(b)|$$

$$\times\left[\left(\frac{8\lambda^2-12\lambda+5}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{-96\lambda^4+193\lambda^3-124\lambda+43}{576}\right)^{\frac{1}{r}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{8\mu^2-4\mu+1}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\frac{64\mu^4-320\mu^3+576\mu^2-344\mu+45}{192}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

sonuçları elde edilir.

Sonuç 4.3.30. Teorem 4.3.28’in koşulları altında (4.3.78) eşitsizliğinde

a) $\lambda=\frac{5}{6},\mu=\frac{1}{6}$ için (p,q) −Simpson;

$$\left|\frac{1}{6}\left[pf(a)+4pf\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{b}{2p}\right)+pf\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{b}{p}\right)\right]-\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x\right|$$

$$\leq (b-a)\left|\ {}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|$$

$$\times\left[\left([A]_{\lambda=\frac{5}{6}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\lambda=\frac{5}{6}}-[K]_{\lambda=\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{r}}+\left([A]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\mu=\frac{1}{6}}-[K]_{\mu=\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

b) $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$olarak alınırsa$(p,q)$ −Hadamard;

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x-p\frac{f(a)+f\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)a+\frac{1}{p}b\right)}{2}\right|$$

$$\leq (b-a)\left|\ {}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|$$

$$\times\left[\left([A]_{\lambda=\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\lambda=\frac{1}{2}}-[K]_{\lambda=\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}+\left([A]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\mu=\frac{1}{2}}-[K]_{\mu=\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

c) $\lambda=1,\mu=0$ olarak alınırsa(p,q) −Hadamard;

$$\left|\frac{p}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_{p,q}x-p\left[f\left(\left(1-\frac{1}{2p}\right)a+\frac{1}{2p}b\right)\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left|\ {}_aD_{p,q}f(a)+\ {}_aD_{p,q}f(b)\right|$$

$$\times\left[([A]_{\lambda=1})^{1-\frac{1}{r}}([N]_{\lambda=1}-[K]_{\lambda=1})^{\frac{1}{r}}+\left([A]_{\mu=0}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\mu=0}-[K]_{\mu=0}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

tipli integral eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 4.3.31. Teorem 4.3.28'in koşulları altında (4.3.78) eşitsizliğinde $p=1$ için

a. $\lambda=\frac{5}{6},\mu=\frac{1}{6}$ için q −Simpson;

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x\right|$$

$$\leq (b-a)\left|\ {}_aD_q f(a)+\ {}_aD_q f(b)\right|$$

$$\times\left[\left([A]_{\lambda=\frac{5}{6},1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\lambda=\frac{5}{6},1}-[K]_{\lambda=\frac{5}{6},1}\right)^{\frac{1}{r}}+\left([A]_{\mu=\frac{1}{6},1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\mu=\frac{1}{6},1}-[K]_{\mu=\frac{1}{6},1}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

b. $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$ için q −Hadamard;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_a d_q x-\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq (b-a)\left|\ {}_aD_qf(a)+\ {}_aD_qf(b)\right|$$

$$\times\left[\left([A]_{\lambda=\frac{1}{2},1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\lambda=\frac{1}{2},1}-[K]_{\lambda=\frac{1}{2},1}\right)^{\frac{1}{r}}+\left([A]_{\mu=\frac{1}{2},1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\mu=\frac{1}{2},1}-[K]_{\mu=\frac{1}{2},1}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

c. $\lambda=1,\mu=0$ için q −Hadamard;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)\left|\ {}_aD_qf(a)+\ {}_aD_qf(b)\right|$$

$$\times\left[\left([A]_{\lambda=1,1}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\lambda=1,1}-[K]_{\lambda=1,1}\right)^{\frac{1}{r}}+\left([A]_{\mu=0}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left([N]_{\mu=0,1}-[K]_{\mu=0,1}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

tipli integral eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 4.3.32. (4.3.78) eşitsizliğinde $p=1$ ve $q\to 1$ olarak alınırsa

a. $\lambda=\frac{5}{6},\mu=\frac{1}{6}$ için Simpson tipli;

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)|f'(a)+f'(b)|\left(\frac{5}{72}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left[\left(\frac{121}{15552}\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\frac{181}{15552}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

b. $\lambda=1,\mu=0$ Hadamard tipli;

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ {}_ad_qx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq (b-a)|f'(a)+f'(b)|\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left[\left(\frac{5}{192}\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\frac{15}{64}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

integral eşitsizlikleri elde edilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Son yıllarda matematiğin birçok alanında yapılan kuantum genelleştirmeler oldukça yaygınlaşmıştır. Bu nedenle, q- analizinin bir genişlemesi olarak ortaya çıkan (p, q) $-$analizin de kullanımı daha elverişli bir hale gelmiştir.

Eşitsizlikler matematik dışında da birçok bilim dalı ile yakından ilişkili olan bir olgudur. Bugüne kadar birçok araştırmacı konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikler üzerine sayısız çalışma yapmıştır. Böylece (p, q) $-$analizin çeşitli integral eşitsizlikler üzerine uygulamaları da $q-$ analizdeki sonuçların genelleştirilmesi açısından önem kazanmıştır.

Bu tezde, farklı türden konveks fonksiyonlar için (p, q)-tipli Ostrowski ve Hadamard-Simpson tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edildi. Ayrıca Opial tipli bazı eşitsizlikler de bulundu. Elde edilen bu yeni eşitsizliklerin bir çoğu literatürde var olan ve iyi bilinen integral eşitsizliklerin (p, q) $-$benzerleridir. (p, q) $-$benzerlerinde $p = 1$ alınması durumunda, eşitsizliklerin q benzerlerinin elde edildiği görüldü. $q \to 1$ için ise eşitsizliklerin klasik tiplerine indirgendiği de kolayca görülür.

Bu çalışmada, elde edilen bazı eşitlikler kullanılarak farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni $(p, q) -$ tipli integral eşitsizlikler elde edilebilir. Konveks fonksiyon türlerinin büyük bir kısmını içine alan preinvex fonksiyonlar üzerine yeni çalışmalar yapılabilir.

Hadamard-Simpson tipli integral eşitsizliği başlığında verilen (4.3.1) eşitliği ikinci mertebeden (p, q) $-$diferansiyellenebilir fonksiyonlara genişletilerek bu alanda yeni ve daha geniş kapsamlı integral eşitsizlikler elde edilebilir. Yeni bir çalışma olarak $(p, q) -$ analiz, matematiğin uygulama alanlarında nümerik hesaplamalara farklı bir bakış açısı ve boyut kazandırabilir.

KAYNAKLAR

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S., 2009. New inequalities of Simpson's type for s-convex functions with applications**. RGMIA Res. Rep. Coll.**, 12 (4), Art. 9.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S., 2009, Inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex functions, **RGMIA Res. Rep. Coll**., 12, Article 14.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S., Cerone, P., 2010. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. **Applied Mathematics Letters**, 23, 1071-1076.

Alp, N., Sarıkaya, Z.K., Kunt, M., İşcan, İ., 2018. q-Hermite Hadamard Inequalities and Quantum Estimates for Midpoint type Inequalities via convex and quasi-convex functions. **Journal of King Saud University-Science**, 30, 193-203.

Anastassiou G.A., 2011. Intelligent Mathematics: Computational Analysis. **Springer**, New York.

Anton, H., 1994. Elementary Linear Algebra. **Jhon Wiley&Sons**, Inc.

Arik, M., Demircan, E., Turgut, T., Ekinci, L., Mungan, M. 1991. Fibonacci oscillators. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**. **55** , 89-95.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex Functions and the Hadamard Inequality. **Rev. Colombiana Mat.**, 28, 7-12.

Bertsekas, P.D., Nedić, A. And Ozdağlar, A.E., 2003. Convex Analysis and Optimization. **Athena Sci.**, Belmont, Massachustts, 534, U.S.A.

Brodimas, G., Jannussis, A., Mignani, R., 1991. Two-parameter quantum groups. **Universita di Roma Preprint. 820**, 1-16.

Burban I., 1995. Two-parameter deformation of the oscillator algebra and (p,q) analog of two dimensional conformal field theory. **J. Nonlinear Math. Phys.** 2(3-4): 384-391

Burban I.M. and Klimyk A.U., 1994. P,Q-differentiation, P,Q-integration and P,Q-hypergeometric functions related to quantum groups, **Integral Transforms and Special Functions** 2: 15–36.

Cerone P., Dragomir S.S., 2011. Mathematical Inequalities. **CRC Press,** New York.

Chakrabarti, R., Jagannathan, R., 1991. A *(p,q)*-oscillator realization of two parameter quantum algebras. **J. Phys. A: Math. Gen.**, 24, 711-718.

Corcino, R. B. (2008). On -Binomial coefficients. **Electronic Journal of Combinatorial Number Theory. 8**, #A29.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for Differentiable and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula. **App.Math.Lett.** Vol. 11, No.5, pp. 91-95.

Dragomir S.S., Pearce C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, **RGMIA Monographs**, Victoria University.

Duran, U., Acikgoz, M., Araci, S., Srivastava, H. M. (2016). A certain (p,q)-derivative operator and associated divided differences. Accepted in **Journal of Computational and Theoretical Nanoscience.**

Ernst, T. 2000. The history of q-calculus and a new method. Report 2000: **16.U.U.D.M. Department of Mathematics**, Uppsala University, Uppsala.

Ernst T., 2003. A method for q −calculus**, J. Nonlinear Math. Phys.** 10 (4): 487525.

Ernst T., 2012. A Comprehensive Treatment of q-Calculus, **Springer Basel**.

Gauchman H., 2004. Integral inequalities in q-calculus, **Comput. Math. Appl.** 47: 281-300.

Godunova, E.K., Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii. Vycislitel. **Mat. İ. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva**, pp. 138-142.

Göv, E., Taşbozan O., 2018. Some quantum estimates of opial inequality and some of its generalizations, **New Trends in Mathematical Sciences**. NTMSCI 6, No. 1, 76-84.

Göv, E., Taşbozan O., 2018. Hadamard-Simpson type integral inequalities in (p,q)-calculus for convex functions, submitted.

Göv, E., Taşbozan O., 2018. Ostrowski type integral inequalities in (p,q)-calculus for convex functions, submitted.

Hadamard, J., 1893. Etude sur les properties des fonctions entires et en particulierd'une fonction consideree par Riemann. **J.Math.Puresapple.**, 58, 171-215.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities, 2nd Ed., **Cambridge University Press**.

Heine, E. (1846). Uber die reihe. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**. 32, 210-212.

Hudzik, H., Maligranda, l., 1994. Some remarks on s-convex functions. **Aequationes Math.**, 48, 100-111.

Hunter, J.K., Nachtergaele, B., 2000. Applied Analysis, Depertmant of Mathematics, **University of California at Davis**, 446, California.

Hounkonnou, M.N., Désiré J., Kyemba B., $R(p,q)-$calculus: differentiation and integration. **SUT Journal of Mathematics**., Vol. 49, No. 2 (2013), 145-167.

Jackson, F. H. (1908). On q-functions and a certain difference operator. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh Earth Sciences.** 46, 253-281.

Jackson, F. H. (1909). A q-form of Taylor's theorem. **Messenger of Mathematics**. **38**, 62-64.

Jackson, F. H. (1910). On q-definite integrals. **Pure and Applied Mathematics Quarterly. 41**, 193-203.

Jagannathan, R., Rao, K. S. (2005). Two-parameter quantum algebras, twin-basic numbers, and associated generalized hypergeometric series**. in Proceeding of the International Conference on Number Theory and Mathematical Physics,** Srinivasa Ramanujan Centre, Kumbakonam, India.

Jeffrey, A., Dai, H-H., 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, **Elsevier Inc. 4. Edition**, 589, UK.

Kac. V., Cheung, P. 2002. Quantum Calculus, **Springer**, New York.

Kannappan, P.l., 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications, **Springer**, 817.

Kırmacı, U.S., 2004. Inequalities for differantiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula**. Appl. Math. Comput**. 147, 137-146

Kunt, M., İşcan, İ., Alp, N., Sarıkaya, M.Z., (2018). $(p,q)-$Hermite- Hadamard Inequalities and $(p,q)-$estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi convex functions. **RACSAM**, 112, 969-992.

Li, Y., Du, T., Yu, B., 2016. Some New Integral Inequalities Of Hadamard-Simpson Type For Extended (s,m)-Preinvex Functions. **Italian Journal of Pure and Applied Math.**, 36, 583-600.

Marinković, S., Rajković, P., Stanković, M., (2008). The inequalities for some types of q-integrals, **Computers and Mathematics with Applications**, 56, 2490.2498.
Milovanovic, G. V., Gupta, V., Malik, N. (2016). $(p,q)-$ Beta functions and applications in approximation. **arXiv:1602.063007v2** [math.CA].
Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, **Springer-Verlag**, Berlin, 404, New York.
Mitrinović, D.S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, **Kluwer Academic Publishers**, 740, UK.
Mitrinović, D.S., Vasić, P.M., 1974. History, variations and generalisations of the Čebyčev inequality and the question of some priorities. **Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz**., No. 461-497, 1-30.
Mitrinović, J.E., Pečarić, J.E., 1990. History, variations and generalisations of the Čebyčev inequality and the question of some priorities **II. Rad JAZU** (Zagreb), 450, fasc. 9, 136-156.
Mursaleen, M., Ansari, K. J., Khan, A. (2015). On (p,q)-analogue of Bernstein operators. **Applied Mathematics and Computation**. **266**, 874-882.
Mursaleen, M., Nasiruzzaman, M., Nurgali, A. (2015). Some approximation results on Bernstein-Schurer operators defined by (p,q)-integer. **Journal of Inequalities and Applications. 249**, 1-12.
Niculescu, C. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, **Springer Science+Business Media**, Inc.
Noor M.A., Noor K.I., Awan M.U., 2015. Some quantum estimates for Hermite.Hadamard inequalities, **Applied Mathematics and Computation**, 251: 675-679.
Noor M.A., Awan M.U., Noor K.I., 2016. Quantum Ostrowski Inequalities for q-Differantiable Convex Functions. **Journal of Mathematical Inequalities**, 10(4), 1013-1018.
Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces. **I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.**, 9, 157-162.
Ostrowski, A., (1937). Über die Absolutabweichung einer di¤erentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert, **Comment. Math. Helv.**, 10(1), 226.227.
Pachpatte, B.G., 2005. Mathematical Inequalities, **Elsevier B.V.,** Amsterdam, The Netherlands.
Pečarić, J. E.,Dragomir, S.S., 1991. A generalization of Hadamard’s inequality for Isotonic linear functionals. **Radovi Matematicki**, 7, 103-107.
Pečarić, J. E.,Proschan, F., Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Volume 1897, **Academic Press, Inc.**, 485, USA.
Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula, **Appl. Math. Lett**. **13,** 51–55.
Sadjang, P.N., On the fundamental theorem of $(p,q)-$calculus and some $(p,q)-$ Taylor formulas. **arXiv:1309.3934v1** [math.QA], 2013.
Sadjang, P. N. (2015). On the $(p,q)-$Gamma and the $(p,q)-$Beta functions. **arXiv 1506.07394v1** [math.QA].
Set, E., Özdemir, M.E., Sarıkaya, M.Z., 2012. On New Inequalities of Simpson’s Type for Quasi-Convex Functions with Applications. **Tamkang Journal of Math.**, 43(3), 357-364.

Smirnov, Y., Wehrhahn, R. F. (1992). The Clebsch-Gordan coefficients for the two-parameter quantum algebra in the Lowdin-Shapiro approach. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. 25, 5563-5576.

Stankovic M.S., Rajkovic P.M., Marinkovic S.D., 2006. Inequalities which include q–integrals, Bulletin T. CXXXIII de l'Academie serbe des sciences et des arts, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, **Sciences Mathématiques** 31:137–146.

Sudsutad, W., Ntouyas, S.K., Tariboon J., 2015. Quantum integral inequalities for convex functions. J. **Math. Inequal.**, 9, No. 3, 781-793.

Taf S., Brahim K., Riahi L., 2014. Some results for Hadamard-type inequalities in quantum calculus, **Le Matematıche**, Vol. LXIX – Fasc. II, pp. 243–258 doi: 10.4418/2014.69.2.21.

Tariboon, J., Ntouyas, S.K., 2013. Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations. **Adv. Differ. Equ.**, 2013, 282.

Tariboon, J., Ntouyas, S.K., 2014. Quantum integral inequalities on finite intervals. **J. Inequal. Appl.**, 2014, 121.

Thomas, B. T., Finney, R.L., 1992. Calculus, **Addison-Wesley Pub. Comp.** 11. Edt.

Tunç, M., Göv E., Şanal Ü., 2015. On tgs-convex function and their inequalities. **Facta Univ. Ser. Math. Inform**., 30(5), 679-691.

Tunç, M., Şanal Ü., Göv E., 2015. Some Hermite-Hadamard Inequalities For beta-Convex And Its Fractional Applications Function And Their Inequalities.**NTMSCI**., 3(4), 18-33.

Tunç, M., Göv, E., 2016. $(p,q)-$Integral Inequalities On Finite Intervals. **RGMIA Res. Rep. Coll.** 19, Art. 96.

Tunç, M., Göv, E., 2016. Some Integral Inequalities via $(p,q)-$Calculus On Finite Intervals. **RGMIA Res. Rep. Coll.** 19, Art. 95.

Tunç, M., Göv, E., 2016. $(p,q)-$Integral Inequalities. **RGMIA Res. Rep. Coll.** 19, Art. 97.

Tunç, M., Göv, E., 2016. $(p,q)-$Integral Inequalities For Convex Functions. **RGMIA Res. Rep. Coll.** 19, Art. 98.

Tunç, M., Göv, E., Balgeçti, S., 2018. Simpson Type Quantum Integral Inequalities For Convex Functions. **Miskolc Mathematical Notes**, 19(1), 649-664.

Wachs, M., White, D., 1991. -Stirling numbers and set partition statistics, **Journal of Combinatorial Theory, Series A. 56**, 27-46.

Varošanec, S., 2007. On h – convexity**. J. Math. Anal. Appl.**, 326 (1), 303-311.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlk, orta öğrenimini burada tamamladı. 2004 yılında kazandığı Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve 2012 yılında eğitimini tamamladı. 2014 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalında doktora programına başladı. 2010'dan beri halen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı devlet okulunda Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.