T.C.

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNE BİR BAKIŞ

Atakan KONUKSEVER

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY

EKİM-2018

T.C.

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNE BİR BAKIŞ

Atakan KONUKSEVER

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
EKİM-2018

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNE BİR BAKIŞ

Atakan KONUKSEVER

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Prof. Dr. Bünyamin Yıldız danışmanlığında hazırlanan bu tez **11/10/2018** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bünyamin Yıldız
Başkan

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Üye

Dr.Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKEN
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Erdal SERTKAYA
Enstitü Müdürü

11/10/2018

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.(11/10/2018)

İmza

Atakan KONUKSEVER

ÖZET

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNE BİR BAKIŞ

Matematiksel modelleme, simülasyon ve optimizasyon, mühendislik, tıp ve yaşam bilimlerinde gelecekteki gelişmeler için temel metodolojilerdir. 50 yıldan fazladır artan bilimsel ilgiden sonra, kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanan optimal kontrol problemleri bilime ve mühendisliğe sayısız yeni uygulamalar getirerek matematikte iyi kurulmuş bir disipline dönüşmüştür. Bu alanın büyümesiyle, tanımladığı sistemlerin karmaşıklığı da artmıştır. Optimal kontrollerin sayısal olarak gerçekleşmesi gittikçe daha zor hale gelmiş ve giderek daha sofistike matematiksel araçlar gerektirmiştir.

Optimal kontrol teorisi, diferansiyel denklemlerle tanımlanan sistemler için maliyet fonksiyonlarını en aza indiren kontrol fonksiyonlarının bulunmasıyla ilgilidir. Bu çalışma, durum denkleminin hiperbolik, eliptik veya parabolik kısmi diferansiyel denklem olduğu optimal kontrol problemlerine odaklanmaktadır. Bu çalışmada optimal kontrol problemlerinin tarihsel gelişimi incelenerek, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle yönetilen sistemlerden örnekler çözümleri ile birlikte sunuldu. Çözüm yöntemleri hakkında bilgiler de derlenerek yakınlarda yapılmış çalışmalar dahil edilerek mümkün olduğunca farklı uygulamalar bir araya getirildi.

2018, 97 sayfa

Anahtar Kelimeler : Optimal Kontrol, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, ontrol Fonksiyonu, Durum Fonksiyonu, Amaç Fonksiyonu.

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS GOVERNED BY PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mathematical modelling, simulation, and optimisation are core methodologies for future developments in engineering, medicine, and life sciences. After over 50 years of increasing scientific interest, optimal control of partial differential equations has developed into a well-established discipline in mathematics with a great deal of applications to science and engineering. As the field has grown, so too has the complexity of the systems it describes; the numerical realization of optimal controls has become increasingly difficult, demanding ever more sophisticated mathematical tools.

Optimal control theory is concerned with finding control functions that minimize cost functions for systems described by differential equations. This study focuses on optimal control problems where the state equation is an elliptic, hyperbolic or parabolic partial differential equation.

In this study, the historical development of optimal control problems is examined and examples from systems governed by partial differential equations are presented together with solutions. Information about the solution methods was also compiled, incorporating recent work and incorporating as many different applications as possible.

2018, 97 pages

Keywords: Optimal Control, Partial Differential Equations, Control Function, State Function, Objective Function.

TEŞEKKÜR

Yükseklisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ'a , Enformatik Anabilimdalı Başkanı Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞEN ve Sayın Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM' a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmaların takip edilmesinde her türlü yardımı esirgemeyen Tez İzleme Komitesi üyelerine, tez çalışmaları sırasında ihtiyacım içinde olanaklardan yararlanmamı sağlayan MKÜ Sanat ve Tasarım MYO Personelerine ve isimlerini burada zikredemediğim ama yardımlarını esirgememiş herkese içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen eşim Seher KONUKSEVER'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu Yükseklisans tez çalışmasını sevgili babama ve anneme ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

u(t)	: Kontrol degiskeni
x(t)	: Durum degiskeni
e(t)	: Hata degiskeni
$u^*(t)$	:Optimal kontrol degiskeni
y(t)	:Çıkıs degiskeni
$\Delta f(t, \Delta t)$	: fonksiyonun t değişkenine bağlı artışı
J(u, t)	: Amaç(Bedel) fonksiyonu
df	: f nin diferansiyeli
$\lambda(t)$	: Lagrange çarpanı(costate fonksiyonu)
$\delta x(t)$	: Durum fonksiyonunun varyasyonu
$\delta u(t)$	: Kontrol fonksiyonunun varyasyonu
∇^2	: Laplasiyen

KISALTMALAR

H	: Hamilton denklemi (Pontryagin fonksiyonu)
L	: Lagrange denklemi
HJB	: Hamilton-Jacobi-Belmann denklemi
KTDD	: Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem
max	: Maksimum
min	: Minimum
FEM	: Sonlu eleman metodu
FDM	: Sonlu fark metodu
FVM	: Sonlu hacim metodu
BOİ	: Biyolojik Oksijen İhtiyacı
ÇO	: Çözünmüş Oksijen

1. GİRİŞ

Üretimde otomasyon ihtiyacı, insanların daha rahat ve güvenli yaşam isteği, iş adamlarının üretim aşamalarında girdileri en verimli şekilde kullanma gereksinimleri gibi nedenlerle optimum kontrol konusunu günümüzün en önemli başlıklarından biri haline gelmiştir. Optimum kontrol konusu Kontrol Teorisi olarak adlandırılan, 20.yüzyılının başından itibaren büyük gelişme kaydeden bir disiplinler arası alanın içinde önemli bir bölümdür. Rudolf E. Kalman Kontrol Teorisi'ni belirli matematiksel sistem ve proseslerin kontrolü ile uğraşan bir uygulamalı matematik dalı olarak tanımlıyor. Kontrol Teorisi çeşitli etkilere açık olan sistemlerin kontrol edilebilirliği ile uğraşan disiplinler arası bir araştırma alanı olarak tarımdan sanayiye, sağlıktan uzay araştırmalarına kadar birçok alandaki uygulamalara sahip olması nedeniyle günümüzün en ilgi çeken alanlarından biridir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerle yönlendirilen sistemlerde kontrol problemleri son yıllarda birçok araştırmanın konusu olmuştur. 1960'da Butkovskiy ve Lerner muhtemelen bu alanda basılı ilk araştırmayı yazdılar. Bu araştırmada maksimum prensibini kısmi türevli diferansiyel denklemler için genişlettiler. 1964'te Wang ve Tung öncülük eden eserlerini yayınladılar. Bu eserde dağıtılmış parametrik sistemler için daha ileri gelişmeleri formüle ettiler; kümelenmiş parametre sistemi teorisinin gelişimine paralel olarak, bir dizi kısmi türevli denklemlerle kesin matematiksel açıklama vermeyi denediler. Yazarlar kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramlarını tartıştılar. Ayrıca, optimal kontrol problemini formüle etmiş ve geniş bir dağıtılmış parametreli sistemler sınıfı için optimizasyon koşullarını türettiler. Makale ayrıca, ayrıklaştırılmış yaklaşımlarla bazı sayısal çözüm araçlarını da tartıştı. Daha sonrasında, 1966'da, ayrı bir makalede Wang, kararlılık problemini, doğrudan kısmi türevli diferansiyel denklemler çerçevesinde geri besleme denetleyicileriyle, Lyapunov tekniklerini yaklaşımlara başvurmaksızın kullanarak ele aldı (Wang, 1966).

Sakawa'nın 1966 da kaleme aldığı makale ısı denkleminin optimal kontrolü için iki metodu tartıştı. Biri Fredholm integral denklemini optimal kontrol için gerek koşul olarak veren varyasyonel metodun bir uygulamasıydı. 1967 de Kim ve Erzberger bir boyutlu dalga problemine sınır kontrolü ile verilen bir kuadratik amaç fonksiyonu olan Hamilton-Jacobi yaklaşımı önerdi (Kim ve Erzberger, 1967). 1970'de Graham bir boyutlı ısı iletim denklemi için daha basit bir formulasyon verdi. Bu Hamilton-Jacobi denklemine iki çözüm yolu getiriryordu; Ricatti matris yöntemi ve Kalman denklem metodu.

Diğer bir çalışma Goldwyn, Sriram ve Graham tarafından 1970'de yapıldı. Bu çalışmada hiperbolik sınıfı problemlerin optimal kontrolünde Laplace dönüşümünün zamanı belirlemede kullanılacağını gösterdiler (Graham, 1970). Bu çalışma optimal kontrol üzerinde kısmi türevli denklemlerin doğasını ve etkilerini göstermesi açısından önemliydi. Ayrıca çalışmada, bir bang-bang kontrol formuna ulaştırmayan alt optimal kontrol yaklaşımı da sunuluyordu.

1978'de D.L. Russell kapsamlı bir araştırma yaparak o dönemde literatürde bulunan en ilgili sonuçları ortaya koydu. Yazar kontrol problemlerindeki sorunlara çözüm olabilecek birçok araç tanımladı, bunlar kısmi diferansiyel denklemlerin kullanımını yol açan araçlardı (Russell, 1978). Daha sonra J.L. Lions 1986'da ünlü Hilbert Eşsizlik Metodunu tanıttı. Bu kontrol teorisi alanına ilgi patlamasının başlangıçıydı.

1991 de Li ve Fadali çok boyutlu optimal kontrolün Hamiltonian formülasyonuna paralel olan iki boyutlu optimal kontrol teorisinin gelişmesine yol açan bir çalışma (Li & Fadali, 1991) yayınladı. Yazarlar, durum denklemi, kostate denklemi, durağan denklem ve sınır koşullarını veren bir teorem veriyordu. Her ne kadar bu gelişme ayrı bir tam olarak PDE'ye dayalı problemleri matematiksel anlamda ele almamış olsa da, optimal kontrol tasarımı için bir araç olarak düşünülebilir.

1995'te Lasiecka kısmi türevli direfansiyel denklemlerle yönlendirilen sistemlerin tarihsel perspektifi hakkında bir çalışma yayınladı. Bu çalışma kısa olmasına rağmen, bu zamana kadar dağınık ve matematiksel olarak homojen olmayan bu alan üzerine literatürün birleşik bir özetini sağladı. Fakat, bu çalışma sınır ve nokta kontrol problemleri üzerine detaylı incelemeler veriyordu.

Choe ve Chang 1995'te optimal kontrolde kısmi türevli yaklaşım ile Integral denklemler metodlarını karşılaştıran bir çalışma yayınladılar. Yazarlar eksensel dağılımlı boru şeklinde bir reaktör problemi üzerinde yaptıkları bu karşılaştırmada kısmi türevli diferansiyel denklem yöntemini daha kullanışlı buldular. İntegral denklemin kesin çözümü, KTDD li çözümün yaklaşık çözümü vermesine rağmen bu sonuç ilgi çekiciydi çünkü yazarların gözlemledikleri, IE yaklaşımındaki zaman alıcı adımlardan biri, eşlik eden karakteristik denkleme yeterli sayıda pozitif köklerin yeterli doğrulukla belirlenmesiydi (Choe ve Chang, 1995).

1997 de Amerika Kontrol Konferansında(ACC) Banaszuk, yaptığı çalışmada Sobolev uzayında Moore-Greitzer lineer olmayan KTDD lerin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatladı (Banaszuk,Hauksson, ve Mezic, 1997). Bu çalışma ayrıca geliştirilmiş formulasyon kullanarak bir gizayn metodoloji sunuyordu.

1997 ve 1998'de Christofides, ona eşlik eden yazarlarla yayınladıkları bir seri çalışmada birçok çeşit optimal kontrol problemine çözüm aradılar. Yazarlar, uzamsal doğrusal parabolik KTDD ile güdümlü sistemlerin bir sınıfı için bir kontrol tasarım aracı önermişlerdir; bu uzamda, uzamsal diferansiyel operatörünün özspektrumu, bir sonlu boyutlu yavaş spektruma ve bir sonsuz boyutlu hızlı kararlı spektruma ayrılabilir. Önerilen metodolojide, Christofides ve ekibi KTDD dinamikleri için uygun bir adi diferansiyel denklem sistemi geliştirmek için Galerkin yaklaşımını kullandılar ve istenen tepkiyi takip ederken, kararlılığı da garanti eden doğrusal olmayan bir geri besleme kontrolörü tasarladılar.

1999'da Godasi, Karakas ve Palazoglu lineer olmayan optimal kontrol problemleri üzerinde çalıştılar ve diferansiyel sistemlerin çözümünde simetri guruplarını ve grup değişmez çözümlerini kullanan bir sistem kullanmayı düşündüler. Bu çalışmadan yola çıkarak Karakas ve Palazoglu 2000 yılında bir çalışma yayımladı (Palazoglu ve Karakas, 2000). Yaptıkları çalışmada simetri gruplarını kullanarak diferaniyel kontrol sistemlerinin grup-değişmez çözümlerini belirleyebilen hem sürekli hem de sürekli olmayan bir kontrolör tasarımı önerdiler. Bu çalışmada tüm durum geribildirimi ve hata geribildirim regülatör problemlerinin, bir çift regülatör denkleminin çözülebilir olması durumunda, stabilizasyon ve tespit edilebilirliğin standart varsayımları altında çözülebileceğini göstermiştir.

2000 yılında Byrnes, Lauko, Gilliam ve Shubov, Isidori ve Bynes tarafından tanıtılan çıktı regülasyonunun geometrik teorisini genişleterek bu yöntemi doğrusal kontrol sistemlerin çözümünde kullandılar. 2003 yılında ise Byrnes, Lauko, Gilliam ve Shubov (Gilliam, Isidori, and Shubov (2003a)), önceki çalışmalarını devam ettirerek yöntemlerini nonlineer parabolik optimal kontrol problemlerine uyguladılar.

2003 yılında ise King ve Hovakimyan, sonlu bir Linear Quadratic Gaussian (LQG) kontrolörünün, adaptif bir çıktı geri besleme elemanı ile dağıtılmış bir parametre sistemi için arttırıldığı bir makale sundu. Uyumsal parametreler, sinir ağları (neural network) ile belirlendi. Teori, doğrusal olmayan titreşimlerin kontrolüne ilişkin bir problemin çözümü için geliştirildi.

2007 yılında Smyshlyaev ve Krstic, parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır koşul kontrolleri için yaptıkları çalışmada Schrodinger denklemine ve birinci mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlere (taşıma denklemi ve türevleri) backstepping yönteminin uygulayarak sonuca ulaşmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında kaynaklar kısmında belirtilmiş olan kitap ve makalelerden yararlanılmıştır. Bu kaynaklarda belirtilen ve uygulanan yöntemler taranmış, tez konumuz olan Kısmi Türevli Denklemler İçin Optimal Kontrol Problemler hakkındaki tanım, teorem ve uygulamalar seçilerek tezimiz için uygulanabilir hale dönüştürülmüştür. Optimal kontrol problemlerinin tarihsel gelişimi, kullanılan belli başlı yaklaşımlar özetlenerek kısmi diferansiyel denklemlerin türleri tanıtılmıştır. Optimal problemlerinin türleri, çözüm yöntemleri, kısmi türevli denklemlerle çözümde kullanılan uygulanan temel yöntemlerde gerekli olan varyasyonel analizden bazı temel tanımlar ve teoremler de dahil edilmiştir. Optimal kontrolün günümüzde kullanılan alanları ile ilgili seçkin örneklerin yer aldığı bu tez çalışmasında özellikle son yıllardaki çalışmalarda uygulanan yöntemlerden ve farklı disiplindeki uygulamalardan yararlanılmıştır.

3.1.Kontrolün Amacı Nedir?

Bir kontrolün söz konusu olması için amacının önceden belirlenmesi gerekir. Kontrolde amaç sistemin istediğimiz gibi çalışmasını sağlamak olarak ifade edilir. Bunlar:

- Üretimde aynı kalitede çıktı sağlamak ve sürdürmek
- İnsan yaşamında konfor ve rahatlık sağlamak
- İnsanlar için doğabilecek tehlikeleri ortadan kaldırmak, güvenliği sağlamak
- İsrafı engellemek, kaynakları verimli kullanmak
- Sistemin çalışmasını denetlemek, dengede tutmak, tasarruf sağlamak

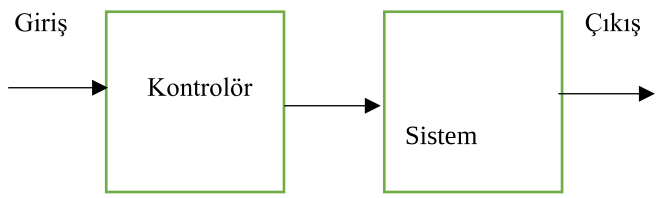
İsteklerimizin maddeler halinde yazılmasından sonra bu isteklerin gerçekleştirilmesi için sisteme konulacak sınırların neler olacağının belirtilmesi gerekir.

Kontrol edilecek bir sistemde genel olarak 3 öğe vardır.

1. Bileşenler : Girdi ve çıktıların oluşturduğu değişken değerler
2. Özellikler : Sistemin özellikleri ve çalışma parametreleri
3. Bağıntı : Sistem ile özellikleri arasındaki ilişkileri ifade eden bağıntılar

Bir sistemde kontrol edilecek bir veya birden fazla parametrenin ölçülmesi ve istenen değerlerde tutulması kontrolün temel amacıdır. Kontrol sistemleri genel olarak 2 türlüdür.

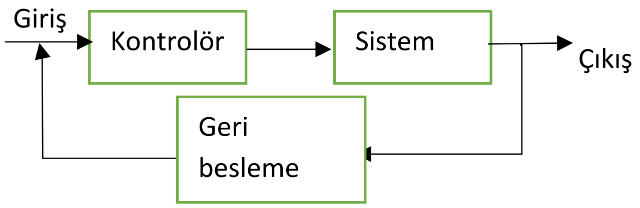
Açık Döngü Kontrol Sistemi :



Şekil 1.1. Açık Döngü Kontrol Sistemi

Açık döngü kontrol sisteminde kontrolör sistemin girişinde bulunur, girdilerin belli sınırlar içinde olmasını denetleyerek sistemin girdilerini ve çalışma parametrelerini istenen bir düzeyde tutmakla sorumludur.

Kapalı Döngü Kontrol Sistemi: Kapalı döngü kontrol sisteminde sistem bir geri besleme ünitesi içerir. Çıkıştan alınan veriler geri besleme ünitesinde değerlendirilir ve istenen giriş değeri ile karşılaştırılır. Çıkış değerleri giriş değerlerine göre düşük ya da yüksek olma durumuna göre geri besleme negatif ya da pozitif yönde olur. Sistem için kontrolör tasarımında veya seçiminde ilk adım sistem sınırlarının tanımlanmasıdır. Ardından modelleme yapılır.



Şekil 1.2. Kapalı Döngü Kontrol Sistemi

Sistemin uygulamalara nasıl cevap vereceğini önceden tahmin etmek amacı ile modelleme bir ihtiyaçtır. Uygulamada bazen deneme yanılma ile kontrol yapılmakta, modeller olmaksızın bir kontrol sistemi keşfedilmektedir. Ancak bu daha çok girdilerin kontrol edilmesi ile sistemin kontrolünün mümkün olduğu basit sistemlerde gerçekleşir. Örneğin bir uydunun yörüngeye oturtulması için alacağı yolun belirlenmesi gibi problemler deneme yanılma ile gerçekleştirilemez. Bu nedenle bilimsel tabanlı modellemelerin sanayi, tarım, ulaşım başta olmak üzere çok çeşitli alanlarda kullanım zorunluluğu vardır.

Bir sistemin modellenmesinde iki temel yaklaşım mevcuttur: Veri yönelimli modelleme ve mekanik modelleme. Veri yönelimli modelleme mevcut sistem verileri ile başlar ve verileri kullanarak giriş ile çıkış arasındaki ilişkiyi tespit etmeye çalışır. Veriden model çıkaracak yaygın olarak kullanılan yazılımlar mevcuttur. Bu işlem sistem tanımlama olarak bilinir. Buna karşın, mekanik modeller kütle ve enerji korunum kanunlarından veya sistem içinde erişilebilir değişkenler arasındaki bilinen ilişkilerden çıkarılır. Modellemenin bu şeklinde sistem hafızasını gösteren durum değişkenleri adı verilen yardımcı değişkenler bulunur. Durum değişkenleri fiziksel anlama sahip olabilirler, fakat aynı zamanda sanal matematiksel yapılarda da olabilirler.

Yeni teknolojik ve endüstriyel süreçler ile mekanizmalar yeni kontrol stratejilerine ihtiyaç duydukça kontrol problemlerinin çözümünde yeni yöntemler işlerlik kazanmaktadır. Kontrol problemleri farklı kontrol türlerine, çeşitli olası modelleme paradigmalarına ya da hassaslık derecesine göre birçok farklı yöntemle formüle edilebilir. Bunlar; optimum kontrol, kontrol edilebilirlik, stabilize edilebilirlik, açık döngüye karşı geri besleme veya yakın çevrim kontrolleri şeklinde cevap türleri gerektirir. Bu çalışmada optimum kontrol gerektiren problemlerin kısmi türevli diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilmesi, güncel kullanımı hakkında örnekler ve belli başlı çözüm yolları incelenecektir.

3.2.Optimal Kontrol Nedir?

Optimizasyon, bir sistemde var olan kaynakların (işgücü, zaman, kapital, süreçler, hammaddeler, kapasite, ekipman gibi) en verimli şekilde kullanılarak belirli amaçlara (maliyeti en aza indirme, kârın en fazla olacağı noktayı bulma, kapasite kullanımının en üst düzeye çıkartılması, verimliliğin en üst düzeyde olması gibi) ulaşmayı sağlayan bir teknoloji olarak tanımlanmaktadır. En iyi sonucu sağlamak için bir sistemin sürekli olarak denetlenip gerekli müdahalelerle önceden belirlenen hedefe ulaşacak şekilde kontrol altında tutulması işlemine de Optimal Kontrol denir.

Optimizasyon kavramı ve problemleri günlük hayatımızda da sıkça yüz yüze kaldığımız problemlerdir. Örneğin taşıtı ile bir yere ulaşacak bir kişinin yol tarifi için internet tabanlı yazılımları kullanması, bu yazılımların önerdiği güzergah alternatiflerinden kendine uygun olanı seçmesi bir optimizasyon olarak düşünülebilir. En uygun oteli arama, en uygun işi arama vb. çabalarımızda optimal kontrol tekniklerini ne kadar iyi kullanırsak ulaşacağımız sonuç bizim için en iyi durum olacaktır. Açıktır ki "en iyi" tanımlaması görecelidir ve optimal çözüm, problemi tanımlayana bağlıdır. Örneğin tesis yeri seçim problemi oldukça fazla karşılaşılan optimizasyon problemlerinden birisidir. Tesis yeri probleminin çözümünde kamu yöneticileri için kamu hizmet binaları, okullar, acil servis binaları vb. tesislerin yerleri için en iyi çözüm şehrin içinde ulaşımı en kolay olan yeri belirlemek olabilir. Özel sektör kuruluşları ise rakiplerine karşı avantaj elde etmek için, üretim merkezleri, satış noktaları ve depoların yerleri ile ilgili kritik kararlar vermek durumunda kalmaktadır (Bastı, 2012). Laboratuvarda hazırlanan bir deney düzeneğinde, elde edilecek ürünün maksimum veya minimum olması için cihazın ayarlanması ya da girdilerin uygun seçilmesi işlemi de bir optimizasyon sürecidir. Eğer süreç deneysel ise, giriş parametreleri fiziksel büyüklüklerden oluşur (Pierre, 1992).

Optimizasyonda modelleme ve çözümleme iki önemli aşama olarak belirtilmektedir. Temel bilimlerde karşılaşılan birçok problemin çözümünde; endüstriyel, finansal ve servis sistemlerinin performanslarının en iyilenmesinde sık sık kullanılan optimizasyon teknolojisi bir projede kullanıldığında genelde modelleme ve çözümleme ön plana çıkmaktadır (Hillier ve Lieberman, 2005). Optimizasyon teknolojisinin gelişiminde araştırmacılar öncelikli olarak modellemeyle ilgilenmişlerdir. Modeller bir sistemi zorlayan faktörler karşısındaki davranışlarını belirlemek ve sistemi oluşturan materyallerin karakteristik özelliklerini test etmek için de uygundur. Optimizasyon modelleri sistemin işleyişini ve özelliklerini yansıtan, sistemin içindeki ve çevresindeki diğer sistemlerle olan etkileşimleri kapsayan matematiksel ifadelerden oluşmaktadır (Williams, 1999). Modeller, temel bilimlerde ve mühendislikte yoğun olarak kullanılan, büyük kapsamlı bir sistemin tüm özelliklerini yansıtacak daha küçük boyutlardaki yapılardır. Modelleme ile belirli bir parametreyi, örneğin ürünün şeklini ya da dayanıklılığını optimize etmek te isteyebiliriz. Örneğin, tasarım aşamasında olan bir uçağın aero-dinamik yapısını incelenirken gerçek uçak yerine uçağın modeli kullanılarak rüzgâr tüneli deneyleri yapılır. Tarımda ise bir bitkinin tüm özellikleri incelenip bitkinin veriminde iyileştirme çalışmaları yapılırken, bitkinin modelleri laboratuvar ortamında değişik parametrelere göre değerlendirilip sonuçlar analiz edilir. Diğer bir deyişle modelin çözümlenmesi ile sistemin etkilere olan tepkisi de ortaya çıkarılmış olacaktır.

Bu alandaki ilk çalışmalar Leontief tarafından Amerika Birleşik Devletleri'nin dış ticaretini ve ekonomik yapısını modellemek amacıyla yaptığı yayınlar olarak kabul edilir. (Leontief, 1933;1936). Rus matematikçisi Kantorovich üretim planlamasında en sıklıkla karşılaşılan problemlerin modellenmesine ve elde edilebilecek en iyi sonuçları bulma metotlarını anlattığı makalesiyle modern üretim sistemlerinde optimizasyona olan ihtiyacı ortaya koymuştur (Kantorovich, 1939). Fakat, Kantorovich'in bu çalışması batılı bilim insanları tarafından uzun süre sonra fark edilmiştir (Kantorovich, 1960). Öte yandan, Kantorovich ve Gavurin (1940) ulaşım sektörünün verimliliğini arttırmaya yönelik modelleme çalışmaları da yapmışlardır. Ayrıca, ekonomi alanında optimum kapasite kullanımına yönelik özellikle ulaştırma sistemlerinde modelleme çalışmaları yapılmıştır (Koopmans, 1949; Koopmans, 1951; Koopmans ve Reiter, 1951; Koopmans, 1957; Koopmans ve Bausch, 1959). Bu modelleme çalışmaları bilim dünyası tarafından kabul görmüş Kantorovich ve Koopmans 1975 yılında Nobel Ekonomi Ödülü'nü paylaşmışlardır.

Optimizasyon modellerinin teorik özelliklerinin araştırılması ya da genel çözüm algoritmalarının geliştirilmesi günümüzde de süre giden çalışmalar olarak ilgi çekmeye devam etmektedir. Optimizasyon problemlerinin çözümüne yönelik olarak ilk önemli çalışma Dantzig tarafından yapılmış ve simpleks algoritması geliştirilmiştir (Dantzig, 1949). Nobel Ekonomi ödülünü 1975 yılında alan Koopmans, Dantzig'in çalışmalarının önemine inanmış ve Dantzig'in bu ödüle ortak olması gerektiğini Nobel ödül komitesine belirtmiştir. Fakat bu çağrısına cevap alamamıştır. Buna karşın Nobel ödülünün üçte birlik kısmını Uluslararası Uygulamalı Sistem Analizi Enstitüsü'nde (International Institute for Applied Systems Analysis-ILASA) George Dantzig adına kurulan burs programına bağışlamıştır (Gass ve Assad, 2004). Koopmans, optimizasyon projelerinde modelleme ve çözüm geliştirme çalışmalarının birlikte yürütülmesi gerekliliğine inanmış ve bu konunun önemini Nobel Ödülü'nü aldığının açıklanmasından hemen sonra yaptığı bu jestle ifade etmiştir. Optimizasyon teknolojisi, karar verme süreçlerini hızlandırmakta ve karar kalitesini arttırmakta kullanılarak gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin etkin, doğru ve gerçek zamanlı çözümünde yararlanılmaktadır (Winston, 2003). Optimizasyon, ekonomik açılardan getirdiği kazançların yanında müşteri, işveren ve çalışanların tercih ve kısıtlarının karar sürecinde yer almasında ve sistemde yer alan kaynakların kalitesinin yükseltilmesinde de etkin bir şekilde başvurulan bir yöntem olarak kullanılmaktadır. Optimizasyon teknolojisi kullanılarak gerçekleştirilen projelerin anlatıldığı Interfaces dergisi 1971 yılında yayın hayatına geçmiş ve düzenli olarak uygulamalı projeler için geliştirilen modeller, çözüm yöntemleri ve sonuçları yayınlanmaktadır (INFORMS, 2006). Bu derginin her yıl yayınlanan Ocak ayı sayısı bir önceki yılda tamamlanan en başarılı uygulamaları detaylarıyla tanıtmaktadır.

Optimizasyonda sistemin değişkenlerinden sadece bazıları için optimal kontrol uygulanabileceği gibi tüm değişkenlerin katılımıyla bir optimal kontrol da tasarlanabilir. Örneğin kazak üreten bir firma için üretim zamanı ve üretim fiyatı değişkenler olabileceği gibi, tüketilen enerji, ambalaj ya da kargo giderleri, reklam giderleri gibi birçok değişken dikkate alınarak optimizasyon tasarlanabilir. Optimizasyonun matematiksel olarak bir fonksiyonla ifade edilmesinden sonra en sık kullanılan yöntem maksimum ve minimum noktaların bulunmasıdır. Bunun için türev alma, türevi sıfıra eşitleyip kök bulma uygulanır. Optimizasyonda diğer bir zorluk elde edilen bir matematiksel sonucun, global veya lokal bir çözüm olup olmadığının belirlenmesidir. Örneğin türev ile bulunan kökün optimal bir çözüm olduğunu anlamak zordur. Çünkü bütün kökler, fonksiyonu sıfır yapmaktadır. Doğrusal olmayan bir fonksiyonun da minimumunu bulmak oldukça zordur. Bu tip problemler ya doğrusal bir yaklaşımla veya optimizasyon bölgesini küçük bir bölge ile sınırlamakla çözülür. Optimizasyonda kullanılan çözüm yöntemleri (algoritmalar) aşağıdaki gibi gruplandırılabilir:

- Deneme-Yanılma ile Optimizasyon
- Tek Parametreli-Çok Parametreli Optimizasyon
- Statik - Dinamik Optimizasyon
- Ayrık-Sürekli
- Sınırlı-Sınırsız
- Rastgele-Minimum Araştırarak

Örneğin; dinamik optimizasyon problemi sınırlı veya sınırsız olabilir. Bazı parametreler ayrık veya sürekli olarak tanımlanabilir (Bryson, 1965).

Deneme-Yanılma ile Optimizasyon: Sistemin işlemesini düzenleyen ünitelerden çok çıkışı etkileyen parametrelerin ayarlanmasıdır. Örneğin TV "de en iyi görüntü ve sesi elde etmek için antenin deneme yanılma yoluyla ayarlanması. Deneysel çalışmalar bu yönteme dayanır.

Tek Parametreli-Çok Parametreli Optimizasyon: Sadece bir parametre varsa, optimizasyon bir boyutludur. Birden fazla parametreye sahip bir sistemin optimizasyonu için tanımlanan fonksiyon çok boyutlu olur ve optimizasyon da çok boyutludur. Boyut sayısı artarsa, optimizasyonun zorluk derecesi de artar.

Statik - Dinamik Optimizasyon: Statik Optimizasyon sabit durum sartları altında sistem kontrolüdür. Sistem degişkenleri zamanla degişmez. Bu nedenle zaman değişken değildir, dikkate alınmaz. Statik optimizasyonda sistem cebirsel denklemlerle tanımlanır. Kullanılan teknikler Sayısal Hesaplama, Lagrange Çarpanları, Doğrusal ve Doğrusal olmayan programlamadır. Dinamik Optimizasyonda ise zaman bir değişkendir. Statik ve Dinamik optimizasyon prensibini ayırt etmek için şöyle bir örnek verebiliriz: Evden işine en kısa zamanda gitmek isteyen bir kişinin mobil bir yazılımdan bulduğu yol trafiğe göre gün içinde farklılıklar gösterecektir. Bu yol trafiğin olmadığı saatlerde uzunluğu en kısa yol, trafiğin en yoğun olduğu saatlerde ise tenha ama daha uzun bir yol olabilecektir. O halde bu problem zamana bağlıdır ve bir dinamik optimizasyon problemdir. Öyle olduğundandır ki bugün kullanılan mobil programlar yol soran kişilere hava ya da kaza gibi bir nedenle trafiğin durumuna göre optimum yolu yeniden tanımlayarak dinamiklere göre hareket etmesini sağlamaktadır. Eğer bu problemi "Evimden iş yerine olan en kısa yol hangisidir? " şeklinde oluşturursak bu problem bir statik optimizasyon problemi olacaktır. Yapılacak iş alternatif yolları ölçüp en kısasını bulmaktır. Özetle Dinamik Optimizasyon zamanla değişebilen sartlar altında sistem kontrolüdür. Sistem tanımı zamanı gerektirir. Sistem diferansiyel denklemlerle tanımlanır.

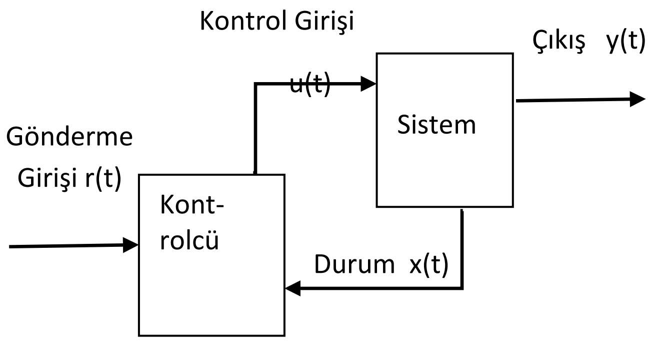
Sürekli ve Ayrık Parametreli Optimizasyon :Sürekli parametreler sonsuz değer alırken ayrık parametreler sonlu sayıda değerler alır. Ayrık parametreli optimizasyon kombinasyonel bir optimizasyon olarak da adlandırılabilir. Bir eğri üzerinde bir fonksiyonun minimum-maximum değerini bulmaya çalışmak, sürekli parametreli optimizasyon olarak tanımlanır.

Sınırlı ve Sınırsız Optimizasyon:Sınırlı optimizasyonda parametreler sınırlı bir tanım aralığında değerlendirir. Sınırsız optimizasyonda ise parametreler her hangi bir değerde olabilir. Değişkenlerin sınırları kaldırılarak sınırlı parametreler sınırsız parametrelere çevrilebilir. Örneğin bir f(x) fonksiyonu x'in $-1 \leq x \leq 1$ sınırlarında tanımlı olsun. Bu fonksiyon x = sin(u) ve u = arcsinx tanımı kullanılarak sınırsız optimizasyona dönüştürülebilir. Burada u'nun değeri ne olursa olsun x; (-1,1) aralığında değişecektir.

Rasgele ve Minimum Araştırma Algoritmaları: Bazı algoritmalar parametrelerin başlangıç değerlerini ayarlayarak uygunluk değerlerini minimize etmeye çalışır. Bu araştırma tekniği, hızlı olmakla beraber lokal minimumlara ulaşabilir. Bunlar nümerik metotlara dayanan klasik optimizasyon algoritmalarıdır. Bir parametreden hareketle diğer parametreyi tespit etmek, bazı deterministik adımlarla gerçekleştirilmektedir. İhtimaller Hesabı'na dayalı metotlar parametrelerin optimum çözümünü bulmada ihtimal hesaplarını kullanırlar. Bu metotlar yavaş olmakla birlikte global minimumu bulmada daha başarılıdırlar.

Diğer yandan optimizasyon metotları Deterministik metotlar, İstatistiksel metotlar olmak üzere iki ana gruba da ayrılabilir (Haataja, 1994). Deterministik optimizasyon metotları, lokal maksimum veya minimuma indirgenen algoritmalardır. Türev içeren hesaplamalar deterministik metotlara örnek verilebilir. İstatistiksel metotlar Nümerik Analiz ve İhtimaller Hesabına dayalıdır ve global minimum veya maksimumu bulmada bazı stratejileri ve sayısal yöntemleri kullanırlar (Palko, 1996). Son yıllarda PC'lerin hızlarındaki artış bu algoritmaların uygulama sahasında sıkça görülmesine neden olmuştur (Wurtz F. ve ark. 1997). Özetle belirtmek gerekirse optimal kontrol ya da kısaca optimizasyon süreci

- Bir kontrollü sistem ve girdi ve çıktı süreci
- Sistemin çıktılarının sürekli gözlenmesi ve geri besleme etkinliği
- Sistem için belirlenmiş bir amaç gerektirir.



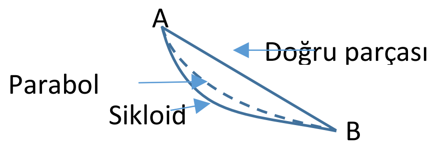
Şekil 1.3. Optimizasyon Süreci

3.3.Optimal Kontrol Problemlerinin Tarihçesi

Goldstine (1980) , Optimal kontrol problemlerinin Pierre de Fermat (1601-1665) ın 1662’de En Küçük Zaman Prensibi’ni ortaya atmasıyla başladığını söyler. Bu prensibe göre “Işık bir noktadan diğerine bu iki nokta arasında mümkün olan yollardan en kısa olanı seçerek yayılır”. Goldstein’in kastı ışığın optimizasyon kuralını kullandığını söylemesidir. Optimal kontrol proplemlerinin matematik bilminde Varyasyonlar Hesabı’nın gelişmesine sebep olan önemli etkenlerden olduğunu söylemek te yanlış olmayacaktır. Galileo Galilei (1564-1642) iki problem ortaya atar. Bunlardan biri “Brachistochrone problemi” olarak adlandırılır. Sonradan Varyasyonlar Hesabı ile çözülen ve Varyasyonlar Hesabı'nın en ilginç problemlerinden biri olarak kabul edilen bu problemin adı, Yunanca'da "en kısa zaman" anlamına gelmektedir. Problemi kısaca şu şekilde özetleyebiliriz:

Brachistochrone problemi: Sürtünmesiz ortamda, A noktasındaki bir topu B noktasına en kısa zamanda ulaştıracak yol nasıl olmalıdır? Yani zamanı en aza indirmek için yolun optimum şekli nasıl olmalıdır?

Çözüm: Farz edelim ki optimum yol için 3 seçeneğimiz var. Bunlar: AB doğru parçası, AB parabolü, AB sikloidi



Şekil 1.4. Brachistochrone Problemi: Hangi Yol En Kısa Zamanı Sağlar?

Galileo’nun 1638’de ilk olarak ortaya attığı söylenen bu problemde ilk bakışta optimum çözüm A ile B arasındaki en kısa yol olarak gözükmektedir. Çünkü iki nokta arasında en kısa çizgi bir doğru parçasıdır, top bu doğru parçası üzerinden giderse en kısa yolu kullanır ve en kısa zamanda B noktasına varır. O halde zamanın en az olması için optimum yolun AB doğru parçası olması akla yatkın gözükebilir. Bu mantıkla açıklamalar sunan Galileo'nun çözümlere ilişkin varsayımları yanlıştı. John Bernoulli (1667-1748), bu problemi 1696 yılında o günün matematikçileri için zorlayıcı bir problem olarak tekrar gündeme getirdi. Fermat'ın yöntemlerini kullanarak 1697'de bu problemi çözdü ve optimum yolun Sikloid eğrisinin yolu olacağını ispatladı. Bu çözümde ilk aşamada topu hızlandırmak için aşağıya doğru düşüş gösteren bir yol seçmek, böylece topun dönüş hızını arttırarak yolu en kısa zamanda almasını sağlamak optimum çözüm olarak ortaya çıktı. Parabol olarak gösterilen yol da optimum çözüm olamadı çünkü topun yeterince hızlanmasını sağlayamadı. Ama parabol yol da doğru parçasına göre daha az zaman alan bir yol olarak ortaya çıktı. Bu problem Johann ve Jakob Bernoulli (1654–1705) kardeşler, Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Leibniz (1646–1716) ve Marquis de L'Hospital (1661-1704) tarafından da çözülmüştür.

Isaac Newton (1642-1727), 1685'de mermi ucunun minimum sürtünme sağlayacak uç şeklini bulmak için yaptığı çalışmalarla Varyasyonlar Hesabı'nın temellerini attı, ancak yöntemini 1694 yılına kadar yayınlamadı. John Bernoulli'den ilham alan Leonard Euler (1707-1783), 1744'de "Maksimum veya Minimum Özelliği Gösteren Eğrileri Bulma Metodu" adlı bir tez yayınladı. Bu eserinde birçok özel problemin çözümünü vermişti ve Varyasyonlar Hesabı'nın başlangıcı olan birçok teoriyi ortaya koymuştu. Louis Lagrange (1736-1813) ise " Varyasyonlar" olarak bilinen yöntemi icat etti ve Euler'e gönderdi. Euler kendisi de benzer sonuçlar elde etmişti ancak Lagrange'ın yöntemlerinin daha genel olduğunu gördü ve hemen Lagrange'a cevap yazarak fikirlerini çok beğendiğini açıkça ifade etti. Euler de bu yöntemi benimsedi ve bir fonksiyonun ekstremumu için birinci dereceden gerek koşulları verdi. Böylelikle Euler-Lagrange denklemleri olarak adlandırılan denklem ortaya çıktı:

$I(x) = \int_a^b F(\, x(t), x'(t), t\,)dt$ fonksiyonu bir x_0 noktasında extremuma sahip olması için x_0 noktasının aşağıdaki Euler-Lagrange denklemini sağlaması gerekir:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), x'_0(t), t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \beta}(x_0(t), x'_0(t), t) = 0, \quad t \in [a, b] \qquad (1.1)$$

Lagrange ayrıca "Lagrange Çarpanları"metodunu da keşfetti (1762'ye kadar yayınlanmadı); modern terimlendirmede bu çarpanlar , performans indeksinin durumlardaki değişiklikleri için "hassasiyetleri" olarak kabul edilir. Bir örnekle Lagrange Çarpanlarını açıklayalım:

Örnek:

Kenar uzunlukları x ve y, çevresi 24 metre olan bir dikdörtgenin alanının maximum olması problemi klasik olarak alanı veren bağıntının tek değişkenli olarak yazılması ve türev alınıp sıfıra eşitlenerek maximum yapan değerin bulunmasıyla aşağıdaki gibi çözülür:

Alan = A(x,y) = x.y ve Çevre Ç = 2(x+y) = 24 yazılır. x+y = 12 ve y = 12-x bulunup yerine konulur.

Alan(x) = $x(12 - x)$ ve türev ile $A'(x) = 12 - 2x = 0$ yazılıp x = 6 bulunur. Alanı maximum yapan değer x = 6 dır ve maximum alan A(x) = 36 dır. Şimdi bu problemi Lagrange çarpanları ile çözelim:

A(x,y) = x.y fonksiyonunun 2x + 2y= 24 koşulu altında maximumunu bulmak istiyoruz.

Lagrange metodunda F(x, y) fonksiyonunun G(x, y) = k, kısıtı altında nasıl optimize edileceğini λ çarpanlarıyla ifade edilir.

Lagrange fonksiyonu L(x, y) = F(x, y) - λ. [G(x, y) - k] şeklinde ifade edilir ve $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\ ve\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}$ kısmi türevlerinin sıfır olması istenir.

Bizim örnek problemimizde G(x, y) = k kısıtı 2x + 2y – 24 = 0 olur ve alan fonksiyonu F(x,y) = x.y olur. Alanın maksimum değerini bulmak için $L(x, y) = x.y + \lambda(2x + 2y - 24)$ yazılır ve kısmi türev alınarak

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \text{ ve } \frac{\partial A}{\partial \lambda} = 2x + 2y - 24 = 0$$

Bu denklemler kullanılarak x = y = 6 bulunur. Maximum alan A(x, y) = 36 olur. Lagrange çarpanları kısmi türevli denklemlerin optimum problemlerde ilk kullanılması olarak görülmektedir. Bu sonuçlar, Euler'in 1766'larda Varyasyonlar Hesabı (Calculus of Variations) adını vereceği bilim dalının temellerini oluşturdu. Adrien Marie Legendre (1752-1833), Varyasyon hesabında fonksiyonun ekstremumunu bulma için yeterli sartı ikinci varyasyonu ekleyerek 1786' da açıklayan ilk kişiydi. Ancak Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), 1836 yılında daha kapsamlı bir izahat verdi ve 1836'da uç değerler için "eşlenik noktaları" keşfetti. Jacobi, performans indeksinin uç değerler ailesinin (bugün "durumlar" olarak adlandırdığımız) herbir parametresine göre kısmi türevlerinin belirli bir diferansiyel denkleme uyduğunu gösterdi. Sonradan bu şarta Legendre-Jacobi şartı denilmistir. Aşağı yukarı aynı zamanlarda William Rowan Hamilton (1805-1865) iki kısmi türevli denklem içeren, en az hareketle işleyen mekanik sistemler üzerine yaptığı çalışmasını yayınladı. Jacobi 1838'de, Hamilton'un bu çalışmasını ilerletti ve bir kısmi türevli denklem yeterli olduğunu gösterdi. Sonuçta aşağıdaki Hamilton-Jacobi denklemi ortaya çıktı:

$(x, t) \epsilon \ \mathbb{R}^n x \ \mathbb{R}^n \ ve \ \alpha \ \in \mathbb{R}^n olmak \ \text{üzere}$

$$H(x, u_x(x, \alpha, t), t) + u_t(x, \alpha, t) = K(\alpha, t) \quad (1.2)$$

Hamilton- Jacobi denklemi birinci dereceden doğrusal olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir, optimal performans endeksi tarafından belli süreklilik ve türetilebilirlik şartları altında sağlanır. Hatta Hamilton- Jacobi denkleminin bir çözümü belirli türetilebilir özelliklere sahip ise bu çözümün arzulanan performans endeksi olduğu da gösterilebilir. Fakat böyle bir çözüm var olmayabilir ya da her optimal performans endeksi bu denklemi sağlamayabilir, bu nedenle bu denklem optimal kontrol performans endeksi için gerek şartı değil yeter şartı gösterir. Bu denklemin varyasyon Hesabı'na derin etkisi olmuş ve Optimal Kontrol ve Dinamik Programlama'nın gelişimine yol açmıştır. Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) Varyasyonlar Analizi'ne daha sıkı bir temel getirdi ve artan fonksiyonlar için Bellman ve Pontryagin'in ortaya koyduğu maximum prensibinin atası olarak kabul edilen ünlü Weierstrass şartını keşfetti.

L(x, y, z) bir Langrage fonksiyonu olmak üzere;

$$E(x, y, z, w) = L(x, y, w) - L(x, y, z) - (w - z). L_z(x, y, z) \quad (1.3)$$

olarak verilen fonksiyon Weierstrass E fonksiyonu adını alır ve y'nin güçlü bir minimum olması için $E(x, y(x), y'(x), w) \geq 0$ şartını sağlamalıdır. Alfred Clebsch (1833-1872) Legendre Şartları (Legendre-Clebsch Şartları) için daha belirgin yorumlar verdi ki bu modern anlamda Hamilton denkleminin ikinci türevinin kontrol fonksiyonuna göre pozitif tanımlı olması gerektiğini iddia eder. (Aktif kontrol veya durum sınırlılıkları olmadığı varsayılarak) Legendre-Clebsch Şartları : Eğer u fonksiyonu Hamilton (H) denkleminin bir optimali ise

i. Maksimum için : $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0$

ii. Minimum için : $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0$

Oskar Bolza (1857-1942) ve Gilbert A. Bliss (1876-1951) Weierstrass'ın çalışmalarını geliştirdiler ve Varyasyonlar Analizini bugünkü matematiksel yapısına kavuşturdular. Daha önceden Bliss'in asistanlığını yapmış olan Hestenes Kontrol teorisindeki maximum prensibinin klasik teorideki Euler-Lagrange ve Weierstrass şartlarına denk olduğunu iddia etti. Tarih sürecindeki tüm bu çalışmaların doğal sonucu olan metodu Mc Shane 1939 da American Journal of Mathematics dergisinde "Lagrange Problemlerinin Çarpanları Üzerine "adlı makalesiyle sundu. Bu makale çok önemliydi fakat onun optimal kontrol teorisi ve doğrusal olmayan programlama üzerindeki derin etkisi 20 yıl sonra ortaya çıktı. Lagrange probleminin çözümü iki birinci dereceden gerek şart olarak Euler denklemlerinin ve Weierstrass şartlarının sağlanmasını gerektirir. McShane'in makalesinden önce Weierstrass koşulu ancak Euler denklemlerinin normallik şartı sağladığı varsayımıyla kurulabilirdi. McShane makalesinde Weierstrass şartını normallik varsayımı olmadan kurdu. İspat iki aşamalıydı ve alışılmadık biçimde verilmişti: Önce optimal yörüngenin kararsızlık noktalarına birinci dereceden yaklaşımlarla üretilen konveks bir koni oluşturuldu, ikinci olarak bu koninin ve belirli bir ışının bir hiperdüzlem tarafından ayrılması ile optimalliğin oluşabileceğini gösterdi. 20 yıl sonra bu fikir Lev S. Pontryagin ve arkadaşları tarafından optimal kontrolün gerek koşullarının verildiği, bugün Pontryagin Maximum Prensibi olarak bilinen teoremin ispatlanmasında kullanıldı.

Pontryagin Maximum Prensibi optimalliğin gerekli koşuludur ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\max_{(v_1,\dots v_{j})\in V} H(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), v_1, \dots, v_r)$$
$$= H(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \qquad (1.4)$$

Mc Shane (1939) ve Pontryagin (1962) Varyasyonlar Hesabı' nı kontrol değişkeni eşitsizliği sınırlarını aşmak için genişletti, Pontryagin maksimum prensibini ortaya koydu. Pontryagin, Boltyanski, Gamkrelidze ve Mischchenko bu konuda klasik bir kitap olan" The Mathematical Theory of Optimal Processes" altında tüm çalışmalarını bir araya topladılar ve Lenin ödülünü kazandılar.

Arthur E. Brysun Jr. 'a göre 20.yüzyılın başlarında Bolza ve Bliss Optimal Kontrol teorisine güçlü dokunuşlar yaptılar. R.Bellman(1920- 1984) 1957'de Hamilton-Jacobi denklemini ele aldı, düzenledi ve onlardan 100 yıl sonra yeni bir bakış getirdi. Böylece Hamilton-Jacobi-Bellman denklemi (HJB) ortaya çıktı:

f(x, t) fonksiyonu değişkenlerine göre türetilebilir bir fonksiyon olsun. v değer fonksiyonu $v(x,T) = g(x)$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ başlangıç koşulu ile HJB olarak bilinen doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümüdür. (HJB):

$$v_t(x,t) + \max_{a \epsilon A}\{f(x,a).\nabla_x v(x,t) + r(x,a)\} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T)$$

$$-v_t(x,t) = \min_{u \epsilon u(x)} \left\{ l(x,u,t) + f(x,u)^T v_x(x,t) + \frac{1}{2}\, tr(S(x,u) v_{xx}(x,t)) \right\} \qquad (1.5)$$

Ayrık duruma benzer olarak $\pi(x,t)$ şeklinde bir optimal kontrol varsa bu u' nun bir değeridir, yukarıdaki denklem minimum olur.

$$\pi(x,t) = arg \min_{u \epsilon u(x)} \left\{ l(x,u,t) + f(x,u)^T v_x(x,t) + \frac{1}{2}\, tr(S(x,u) v_{xx}(x,t)) \right\} \qquad (1.6)$$

Bu denklem Bellman'ın "Dinamik Programlama" adını verdiği alanın temeli olarak bilinir. Bu yöntemin adım adım icrası şu şekildedir:

1. ADIM: HJB denklemini çözerek v değer fonksiyonunu elde ediniz.

2. ADIM: v değer fonksiyonunu ve HJB kısmi türevli diferansiyel denklemini $\alpha^*(.)$ ile gösterilen bir optimal kontrol tasarlamak için aşağıdaki gibi kullanınız:

Her $x \in \mathbb{R}^n$ noktasını ve her t $\in [0,T]$ zamanını $\alpha(x,t) = a \in A$ ' nın HJB içinde bir parametrik değer (Öyle ki bu değer için HJB içinde maksimuma erişilmiş olsun) olması için tanımlayınız.

Diğer bir deyişle;

$\alpha(x,t)$ yi o şekilde seçiniz ki

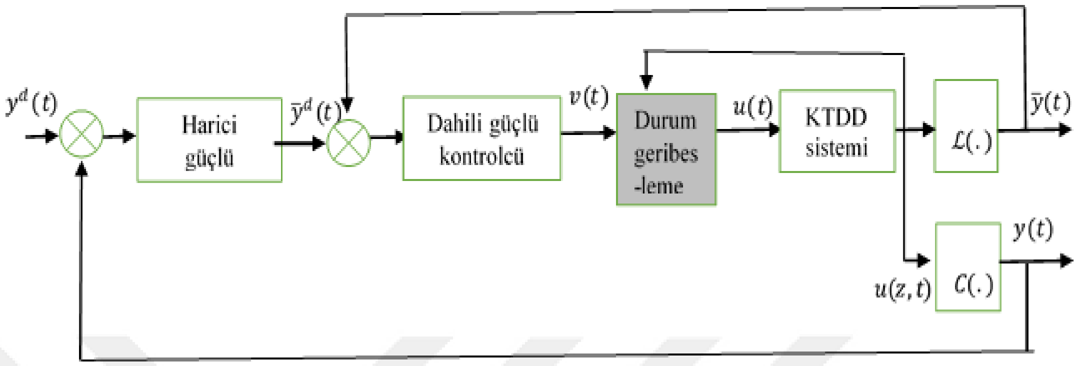
$v_t(x,t) + f\big(x,\alpha(x,t)\big).\nabla_x v(x,t) + r\big(x,\alpha(x,t)\big) = 0$ olsun.

Dinamik programlama yöntemi sayesinde bir çok optimal problemin incelenmesi mümkün olmuştur. Belman'ın Dinamik Programlama yöntemi ve Pontryagin'in

Maksimum Prensibi günümüzde Optimal Kontrol Teorisi’nin temel yöntemleri olarak kabul edilmektedir.

4.ARAŞTIRMA VE BULGULAR

4.1. Optimal Kontrol Problemlerinde Kullanılan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler



Şekil 2.1. KTDD Lerle Kontrol Stratejisi

Kısmi türevli diferansiyel denklemler genellikle bilgisayar tabanlı analizlerde ve mekanik, elektrostatik, elektrodinamik ve akustik gibi sürekli fiziksel olguların similasyonlarında kullanılırlar (Press, Flannery ve arkadaşları 1986). Son 50 yılda kısmi türevli diferansiyel denklemlerle (KTDD'lerle) modellenen optimal kontrol problemlerine artmakta olan bilimsel ilgi bu alanı bilim ve mühendislikle birçok ara yüze sahip iyi bir matematik disiplini haline getirmiştir. Bu alanın gelişmesi ile kontrol edilecek sistemlerin karmaşıklığı da önemli ölçüde artmıştır. Böylelikle günümüzde çok karmaşık gözüken sıvı-yapı etkileşimleri, manyetik, hidromekanik, elektromanyetik, kimya ya da mühendislik problemleri bile çözülebilmektedir. Genellikle karmaşık sistemlerin matematiksel modellenmesi kısmi türevli diferansiyel denklemleri doğurmaktadır. Örneğin ısı akışı, difüzyon, dalga yayılımı, hava akışının bir taşıt ya da uzay aracı üzerindeki etkisi, sıvı akışının ya da patlamalı bir motordaki reaktif türbülans akışı, elastik ya da elastik olmayan deformasyon(örneğin yüke maruz köprüler, kaza anında taşıtların defarmasyonu), kimyasal reaktörlerdeki reaktif yavaş salınım, Kuantum mekaniği ve Kuantum Teorisi, ışık veya x-ışınlarının biomedikal görüntülemedeki şiddetleri, bakterilerin kimyasallar karşısındaki davranışları, kemoterapi, borsa fiyatları vb. birçok olgu kısmi türevli diferansiyel denklemlerle modellenmektedir.

KTDD içeren sistemler iki veya daha fazla sayıda sürekli parametreye sahip olan sistemlerdir. Böyle sürekli parametreli sistemler için optimal kontrol problemleri genellikle aşağıdaki sıra ile çözülür: (Yegerov,1978; Butgovsky, 1965; Lions, 1968; Vasiliyev, 1974; Ahmedov vd. 1972; Akhiyev, 1976)

1. Önce belirli kısıtlar altında Maksimum prensibi sağlanır.
2. Sistem, onun eş problemi, ve Maksimum prensibi ayrıklaştırılır.
3. Bu üç ayrık problem birlikte ele alınıp çözülür ve optimal olası kontrol vektörleri bulunur. Bu olası vektörlerden hangisinin optimal olacağı ise yeter koşullar ya da diğer kısıtlar yardımıyla bulunur.

Sayısal Yöntemler: Son yıllarda yakalanan olağanüstü gelişmeler ve büyük çabalara rağmen bugün pratikte kullanılan sayısal yöntemler sistemlerin tanımladığı olguların hassas bir modellemesini vermezler. Bu nedenle, onların her birini diğerinden ayırmak ve optimal problem için uygun olanını seçmek gerekir. KTDD ile tanımlanan optimum problemlerinin çözümleri hakkında sayfalar dolusu bilgiler vardır. Çözümlerin etkinliği ve kesinliği sayısal modellemede en önemli basamaklardan biridir. KTDD'li optimum problemlerine uygulanan sayısal yöntemler temel olarak iki ana başlık altında toplanabilir:

1. KTDD nin ayrıklaştırmasına dayanan metodlar (Örneğin Merkezi Fark Metodu)
2. Problemin mekansal ve zaman tanım kümesinin ayrıklaştırılmasına dayanan metodlar(Sonlu eleman metodu, zaman-uzay eleman metodu gibi)

Bazen bir metod uzaya uygulanırken diğer metod zamana uygulanabilir. Birçok sadeleştirmeler içgüdüsel ve bu metodların yaklaşım dereceleri keyfi usullerle yapılsa da, bu matematiksel metodların yaklaşım geçerliliği genellikle iyi tahmin iyi düzeyde sonuçlar vermektedir. Bu nedenle çok geniş çaplı hesaplamalı araçlar, matematiksel metodlar vardır. Bunları da 3 gruba ayırabiliriz:

1. Güçlü Form : Hareket denklemlerinin tanımı uzayda ve zamanda bir KTDD'ler sistemi ile gösterilmiş, bir sınır ve başlangıç koşuluyla belirlenmiştir. Bazı hesaplamalı metodlar güçlü formları cebirsel denklemler sistemine indirger.
2. Zayıf Form : Problemin ağırlıklı bir integral denklemle sunulduğu formlardır.
3. Varyasyonal Form : Fonksiyonel formunun durumsal şartlarına bağlı olarak Zayıf Form ya da Güçlü Formlara dönüşebilen şekilde verilen problemler. Varyasyonel Analiz kuralları kullanılarak bir formdan diğerine geçiş yapılır.

Optimizasyon problerinde karşımıza çıkan KTDD'ler sayısal yöntemler olarak genellikle aşağıdaki yöntemlerin biriyle çözülür:

- Sonlu eleman metodu (FEM)
- Sonlu fark metodu (FDM)
- Sonlu hacim metodu (FVM)

KTDD'lere bu çözüm metodları uyguladığımızda çok sayıda doğrusal ya da doğrusal olmayan denklem sistemleri karşımıza çıkabilir. Çünkü 3 boyutlu sistemler yüzlerce ve hatta bazen binlerce denklem üretebilir. Bu denklem sistemlerinin nasıl çözüleceği hakkında çok çeşitli metodlar ve analizlerle baş etmek durumunda kalırız. Kısacası KTDD ile bir optimum problemi özet formda şu şekilde ifade edilir:

$$\text{(P)} \quad \min_{u \epsilon U_{ad}\ ,\ y \epsilon Y_{ad}} J(y,u) \ ,KTDD(y) = B(u) \qquad (2.1)$$

Bu yazılışta KTDD ; y durumunda olan herhangi bir kısmi türevli diferansiyel denklemi, B ise u kontrol değişkeni üzerinde hareket eden bir operatörü göstermektedir. KTDD içeren optimal problemlerinin sayısal yöntemlerle(Nümerik Analiz) çözümünde ise Direkt ve İndirekt Metod olarak bilinen iki temel yöntem vardır:

1. Direkt Metod: Önce ayrıklaştır, sonra optimize et.
2. İndirekt Metod : Önce optimize et, sonra ayrıklaştır.

Direkt metod aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\text{(Ph)} \quad \min_{u_h \epsilon {U^h}_{ad}\ ,\ y_h \epsilon {Y^h}_{ad}} J_h(y_h, u_h) \ ,\ KTDD_h(y_h) = B_h(u_h)$$

Bu yazılışta h indisi ayrık değişkenleri, ayrık operatörleri göstermektedir. Burada sonlu boyutlu uzaylar olan $U_{ad}^h \ ve \ Y_{ad}^h$ nin durum ve kontrol değişkeni için uygun seçimi kadar KTDD' in ayrıklaştırılması da önemlidir. Bu yaklaşım genel olarak büyük çaplı doğrusal olmayan bir programlama sorununun ortaya çıkmasına neden olur. Çünkü günümüzde büyük ölçekli kısıtlı doğrusal olmayan optimizasyon problemleri için tasarlanan örneğin, Ampl [AMPL Company (2012)] ve Ipopt [Laird and Wachter (2012)] standart yazılımlar bile, karmaşık boyut ayrımı yapılmadığı sürece, orta boyutlu problemler için uygulanabilirdir.

Buna karşın İndirekt Metod birinci derece gerek şartlar ister.

Daraltılmış $f(u) = J(S_u, u)$ fonksiyonu $f^{'}(u) = 0$ formunda, sonradan ayrıştırılmak üzere $Fh(u_h) = 0$ gibi bir optimal sistemin çözümünü ister. Buna ek olarak eş durum ve belli çarpanlar için uygun tahmini sonlu boyutlu uzaylar seçilmelidir. Özetle "Önce ayrıştır, sonra optimize et "sözünün anlamı sonsuz boyutlu optimizasyon probleminin tüm çoklukları yerine sonlu boyutlu parametreler yerleştir ve problem çözme teknikleriyle çözümü bul demektir :

$$\min f(u) = J(S(u), u) \ \text{ ise } \ \min f_h(u_h) = J_h(S_h(u_h), u_h)$$

Diğer yandan" Önce optimize et, sonra ayrıştır." sözünün anlamı sonsuz boyutlu sistemin optimallik şartlarının türevini al, optimallik sistemini ayrıştır ve ayrık optimallik sisteminin çözümünü bul demektir:

$$f'(u) = 0 \ \ ise \ F_h(u_h) = 0$$

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlanıp kontrol edilecek sistemlerde "Girdi"; Sınır değerde bir fonksiyon, Bir başlangıç değeri, Diferansiyel denklemde bir katsayı veya Denklemde herhangi bir parametre olabilir. "Çıktı" ise bu diferansiyel denklemin çözümüdür. Girdi kontrol değişkeni, veya kontrol olarak adlandırılırken Çıktı ise "Sistemin durumu", kısaca "Durum" olarak adlandırılır. Sistemin bir kez denetlenmesi "Durum'a bağlı bir haritalamadır. Kontrolde birçok amaç ortaya konulabilir. Bunlar:

- Durum ve Kontrol değişkenine bağlı olarak bir kriterin minimize ya da maksimize edilmesi. Bu bir optimum kontrol problemidir. Bu problemde bilinmeyen kontrol değişkenidir.
- Sistemin denetlenmesi bazı hedefler için tasarlanmış olabilir. Bu bir kontrol edilebilirlik problemidir.
- Sistemin Durum'unu ya da Durum'un bir gözlemini stabilize etmek için bir kontrol tasarlayabiliriz. Bu bir stabilizasyon problemidir.

Birinci basamaktan bir kısmi türevli diferansiyel denklem esas olarak x ve y gibi iki serbest değişken ve onlara bağlı bir u değişkeni içerir. Optimal kontrol problemi olarak düşünürsek u değişkenini problemde verilen bir kısıt, x ve y değişkenlerinin de bu kısıt şartının gerçekleşmesi için sistemdeki fiziksel büyüklükler (sıcaklık, basınç, bir maddenin miktarı vb.) olarak düşünebiliriz. Bu durumda birinci basamaktan bir kısmi türevli diferansiyel denklem aşağıdaki gibi olacaktır:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Optimal kontrol problemlerinde değişkenlerin sayısı iki veya daha fazla olunca kısmi türevli diferansiyel denklemlere ihtiyaç olur. Çünkü bu durumda bağlı değişkenler genellikle iki veya daha fazla serbest değişkenin türünden verilmiş, türevler kısmi türev olmuştur. Örneğin (x, y, z) gibi üç boyutlu bir ortamdaki(mesela dikdörtgenler prizması şeklindeki bir fabrika içindeki) sıcaklığın değişimleri incelenirken sıcaklık (u *ile gösterelim.*) odanın her bir noktasında değişecebileceği gibi zamanla (t *ile gösterelim.*) da değişecektir. Sonuç olarak u değişkeni u = u(x, y, z, t) olacak ve $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}$ türevleri sıfırdan farklı olacaktır. Daha ileri optimum problemlerinde değişken sayısı ve bağlı değişken sayısı daha fazla olacağı için (sıcaklık, basınç, aydınlatma vb.) daha yüksek basamaktan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z^2}$$

türevlerin de sistemin fiziksel büyüklüklerinin ifadesinde önemleri olabilecektir. Böyle bir optimum kontrol problemi

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde bir kısmi türevli diferansiyel denklemle ifade edilir.

Örneğin u(x, y) = 3x + 4y^2x^3 olsun .

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 12y^2\, x^2$ ve $\frac{\partial u}{\partial y} = 8y\, x^3$ olarak bulunur. İkinci mertebeden türevler de

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24y^2\, x$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x^3$ ve x ve y' ye göre art arda türevler alınırsa;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 24y\, x^2$ olur.

Örnek: Bir Patates En Optimal Biçimde Nasıl Kaynatılır?

Georg Stadler (2006) bir patatesin pişilmesinde optimum kaynatma şeklini veren örmeğiyle optimizasyon problemini şöyle açıklıyor:

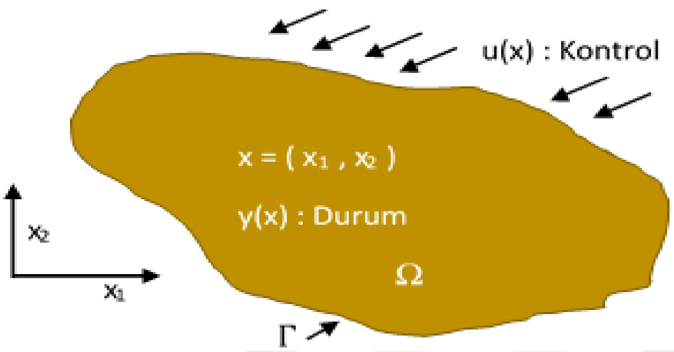
Patates : Ω

Kabuk ya da Sınır : Γ

Γ üzerinde ısı kaynağı : u(x)

Patates (Ω)içindeki sıcaklık : y(x)

olmak üzere;



Şekil 2.2. Patatesin Pişirilmesinde Optimizasyon

Durağan Isı Denklemi, termal dengede katı bir maddede sıcaklık dağılımını tanımlar. Sıcaklık zamandan bağımsızdır. Bir boyutlu Isı Denklemi: $\partial_t u(t, x) = k. \partial^2{}_x u(t, x)$ şeklindedir. (k >0, ısı iletkenlik katsayısıdır.)

Optimizasyon probleminin ifadesi : u(x) kontrol değişkenini Γ sınırında o şekilde seçiniz ki patatesin içindeki sıcaklığı gösteren y(x) (Durum değişkeni), istenen bir amaç fonksiyonu olan $y_d(x)$ ‘ e yaklaşsın.

u kontrol değişkeni ve y durum değişkeni Durağan Isı Denklemini sağlamalıdır. ($\alpha > 0$) Diferansiyel denklem:

Patates (Ω) içinde : $-\Delta y = 0$

Patatesin sınırında (Γ) (kabuğunda) $\frac{\partial y}{\partial n} = \alpha(u - y)$

$\gamma > 0$ olmak üzere amaç fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$\min J(u, y) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(y(x) - y_d(x)\right)^2 dx + \frac{\Upsilon}{2}\int_{\Gamma} u(x)^2 ds(x)$$

Kısıtları gösteren eşitsizlik te aşağıdaki gibidir:

$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$ (u_a ve u_b verilir.)

4.1.1.Kısmi Türevli Difereransiyel Denklem Türleri

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ denklemi 2.dereceden bir iki değişkenli polinomdur, kuadratik denklem olarak adlandırılır. Bu denklemde $B^2 - 4AC$ sayısı diskriminanttır ;

$B^2 - 4AC < 0$ *ise denklem elips gösterir.*

$B^2 - 4AC = 0$ *ise denklem parabol gösterir.*

$B^2 - 4AC > 0$ *ise denklem hiperbol gösterir.*

x ve y değişkenlerine bağlı bir u fonksiyonu u(x, y) olsun. Bu fonksiyonun x'e göre kısmi türevi $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve y'ye göre kısmi türevi $\frac{\partial u}{\partial y}$ olarak gösterilir. İkinci mertebeden kısmi türevlerde

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ olarak gösterilir. İkinci dereceden kısmi türevli bir diferansiyel denklem

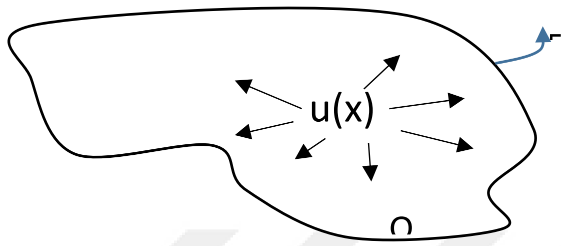
$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u) = 0$ şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde $B^2 - 4AC$ değerinin işaretine göre bu denklem eliptik, parabolik ve hiperbolik denklem olarak adlandırılır.

Denklemin derecesi, çeşiti ve doğrusallığı kısmi türevli denklemlerin sınıflandırılmasında önemli parametrelerdir. KTDD'in türü; hiperbolik, parabolik ya da eliptik olması modellenen sürecin karekteristik özelliklerini yansıtır(Logan 2004).:

- Hiperbolik denklemler, örneğin dalga denklemleri dalga benzeri olguları modellemede kullanılır. Elektromagnetizma, su ya da acustik yayılmalar dalga benzeri yayılmalardır.
- Parabolik denklemler, örneğin difüzyon denklemleri bu dağılıma benzer olguları modellemede kullanılır. Difüzyon benzeri yayılımlar partiküllerin rastgele hareketlerini içerirler.
- Eliptik denklemler, örneğin Laplace denklemi, denge durumundaki süreçleri tanımlamada kullanılır. Örneğin yeraltı suyu akışı

KTDD leri hesaplama açısından sınıflandırmak düşünülünce başlangıç değer problemi ve sınır değer problemi olarak iki sınıf olduğunu belirtmek gerekir ki bu yukarıda verilen sınıflandırmadan çok daha önemlidir. (Press, Flannery ve arkadaşları 1986) Hiperbolik ve parabolik denklemler başlangıç değer problemi sınıfına ait denklemlerdir: Onlar aynı zamanda bir süreçin zaman içinde nasıl geliştiğini gösterdikleri için gelişim denklemleri olarak ta adlandırılırlar. Eliptik denklemler ise denge denklemleridir, zaman değişkeni içermezler ve sınır değer problemi sınıfına aittirler. Kontrol, sınırın yanı sıra alanın tamamında tanımlanırsa bu kontrol türüne **dağıtılmış kontrol** denir. Sadece sınır bölgesinde bir kontrol tanımlandığında **sınır kontrol problemleri** elde ederiz.



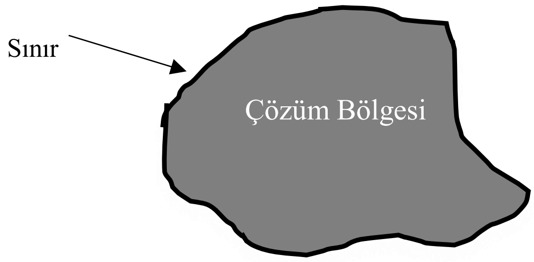
Şekil 2.3. Dağıtılmış Kontrol

4.1.2. Eliptik Diferansiyel Denklemler ile Optimal Kontrol

Eliptik denklemler genel olarak "potansiyel" adı verilen fiziksel büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil ederler. Elektrik potansiyeli, Hız potansiyeli gibi. Bu nedenle eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel denklemleri olarak da adlandırılır. 2 boyutlu eliptik kısmi türevli diferansiyel denklem :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2.3)$$

Bu yazılışta u bağımlı değişkeni u(x, y) potansiyelin herhangi bir noktada sınır değerlere bağlı olarak aldığı denge değerini veya daimi-durum değerini belirtir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler sınır şartları ile verilir. Sınır şartı u bağımlı değişken türünden verilmişse "Dirichlet tipi sınır şartı" adını alır. Eğer sınır şartı u'nun türevleri cinsinden verilmiş ise "Neumann tipi sınır şartı" adını alır. Hem u hem de u'nun türevlerini içeren sınır şartlarına "Karışık sınır şartı" denir.



Şekil 2.4. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm bölgesi ve sınır

Eliptik kısmi türevli diferansiyel denklemlerin iki standart biçimi vardır. İki boyutlu olarak;

Laplace denklemi

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(c_x\frac{\partial u}{\partial x}+c_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+au=0$$

Poisson denklemi

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(c_x\frac{\partial u}{\partial x}+c_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+au=f(x,y)$$

Burada c_x , c_y ve a sistemin parametreleri olup bunlar x, y ve u değişkenlerine bağlı da olabilir. u ise potansiyeli göstermektedir. Bu nedenle Laplace denklemine çoğu zaman potansiyel denklemi denilmektedir.

Eğer $c_x = c_y = C\ sabiti$ ve $a = 0$ olduğu özel bir durum varsa

Laplace denklemi

$$c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{2.4}$$

Poisson denklemi

$$c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y) \tag{2.5}$$

Şekline dönüşür. Parantez içlerindeki toplamlar birbirine eşittir ve çoğu zaman bu toplam $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sembolü ile gösterilir. Bu ∇^2 sembolüne **Laplasiyen** denilir.

Bu laplasiyen sembolünü kullanarak $c_x = c_y = C\ sabiti$ ve $a = 0$ olduğu özel durum için denklemleri yeniden yazarsak;

Laplace denklemi : c$\nabla^2 u = 0$

Poisson denklemi: c$\nabla^2 u = f(x,y)$ şeklinde bir forma girer.

Doğrusal-Quadratik Eliptik Dağıtılmış Kontrol Problemi: Amaç fonksiyonu J, kontrol fonksiyonu u, durum fonksiyonu y olup doğrusal eliptik kısmi türevli diferansiyel denklemlerle yöneltilen, kontrol fonksiyonu tanım kümesinde bir ısı kaynağı gibi davranan bir sistemin dağıtılmış kontrol problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Ω bir sınırlı ve konveks tanım kümesi, y_Ω istenen bir durum, $\lambda > 0$ bir belirli regulasyon parametresi olmak üzere ;

$\min J(y,u) \coloneqq \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ şeklinde tanımlanan amaç fonksiyonu aşağıdaki durum denklemine;

$\Omega\ içinde \quad -\Delta y = \beta u$

$\Gamma\ üzerinde \quad y = 0$

ve aşağıdaki kontrol kısıtlarına tabidir:

$Hemen\ her\ x \in \Omega\ için \quad u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

4.1.3. Parabolik Diferansiyel Denklemler ile Optimal Kontrol

Potansiyelin bir t zamanındaki eriştiği durum değerleri parabolik KTDD'lerle ifade edilir. Bu nedenle parabolik KTDD'lerde t zaman değişkeni bağımsız değişkenlerden biri olarak bulunur. Bu denklemler Difüzyon, Isı Transmisyonları vb. büyüklükleri tanımlarlar.

Örneğin $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u(x)}{\partial t} = f(x,t)$ bir parabolik denklemdir.

Difüzyon denklemi : $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - D\frac{\partial u(x)}{\partial t} = 0$

Parabolik diferansiyel denklemler zamana göre birinci derece, uzaya göre ikinci derece bir diferansiyel operatörü barındırırlar. Parabolik denklemlerin en temel örneği aşağıdaki ısı denklemidir:

$\frac{\partial y}{\partial t} - \sigma\Delta y = 0$

Bu denklemin termal difüzyon sabiti σ ile vücutta sıcaklığın zaman evrimini modellediği farz edilir. Laplace operatörü

$\Delta y = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Bir sıvı içinde çözülmüş maddelerin dağılımı ve yayılımı da ısı denklemi ile modellenebilir (A. Einstein. 1905). Hatta bu maddelerin kimyasal veya biyolojik reaksiyonlara katıldığı bir çok uygulamalar vardır. Doğrusal olmayan f fonksiyonunun reaksiyon dinamiğini modellediği varsayılırsa Reaksiyon – Difüzyon denklemi aşağıdaki gibidir:

$\frac{\partial y}{\partial t} - \sigma\Delta y = f(y)$

4.1.4. Parabolik Denklemlerle Belirlenen Sistemlerde Amaç Fonksiyonu

Parabolik kısmi türevli denklemlerle oluşturulan durum denklemine sahip bir kontrol sisteminin Amaç (Bedel) fonksiyonu:

$$\min J(y,u) \coloneqq \frac{1}{2}\iint_Q (y - y_d)^2 + K(u - u_d)^2 dxdt$$

Bu fonksiyon, u dağıtılmış kontrolü ile aşağıdaki parabolik tip kısmi türevli diferansiyel durum denklemine maruzdur:

$Q \coloneqq \Omega x(0,T)\ içinde\ \frac{d}{dt}y - \Delta y + c_0 y = u$

$\Sigma \coloneqq \Gamma x(0,T)$ üzerinde $\vec{n}.\nabla y = g$

$\Sigma_0 \coloneqq \Omega x\{0\}$ üzerinde $y = y_0$

Ve doğrusal türde aşağıdaki kontrol kısıtlarına da maruzdur:

$$Q\ içinde\ \ u_a(x,t) \le u(x,t) \le u_b(x,t)$$

4.1.5. Hiperbolik Diferansiyel Denklemler ile Optimal Kontrol

Hiperbolik denklemler de zamanı değişken olarak içerirler. Dinamik problemleri tanımlarlar. Örneğin

$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial u^2(x)}{\partial t^2} = f(x,t)$

bir hiperbolik denklemdir. Hiperbolik denklemler dalgaların modellenmesini sağladıklarından dalga denklemleri olarak bilinirler.

Örneğin titreşen bir yayın dalga denklemi :

T : Yaydaki gerilme

g : Yer çekimi ivmesi

w : birim uzunluk başına yay olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{Tg}{w}\frac{\partial u^2(x)}{\partial t^2} = 0$

Örneğin a(x, t), b(x, t), f(x, t), p(x) ve q(t) verilen fonksiyonlar olmak üzere kimyasal süreçleri tanımlamada kullanılan doğrusal hiperbolik denklem Darboux sınır koşullarına

z(x, 0) = p(x) , z(0, t) = q(t) maruz olarak aşağıdaki gibidir:

$$\Omega = (0,1)^2 \; \ddot{u}zerinde \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + a(x,t)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial z}{\partial t} = f(x,t)$$

İkinci mertebeden doğrusal olmayan hiperbolik denklem sistemleri için optimal kontrol problemi aşağıdaki şekilde verilmiştir (Yegerov, 1978; Ahmedov vd., 1972; Akhiyev, 1976).:

$$u_{tx}(t,x) = f\big(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),v(t,x)\big), \quad (t,x) \in G = (t_0,t_1)X(x_0,x_1)$$

$$u(t_0,x) = \alpha(x)$$

$$u(t,x_0) = \beta(t)$$

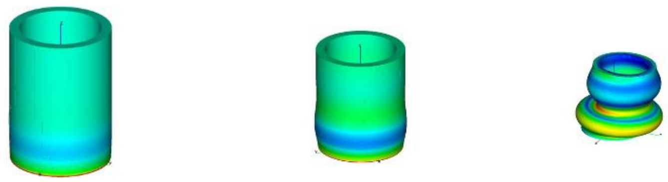
$$S(v) = \iint_G f_0\big(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),v(t,x)\big)dtdx + \varphi(u(t_1,x_1)) \rightarrow min$$

4.2. Kısmi Türevli Denklemler İçin Optimal Kontrol Problem Örnekleri

Dinamik, süreklilik içeren, zamana bağlı, mekansal(uzaysal) süreçlerin optimal kontrolü gittikçe daha önem kazanan bir olgudur. Hastalıkların yayılması (Newman 2002), insanların kitlesel seyahatleri (Brockmann, Hufnagel ve arkadaşları 2006), epidemik olmayan türlerin göçü (Seppelt 2005), ve şehirlerin genişleyerek yayılması (Li 1999) çalışmaları bu süreçlere önemli örnekler olarak sayılmaktadır. Dinamik süreçlerin matematiksel olarak modellenmesinde genellikle KTDD kullanılmaktadır. Çünkü bir kısmi türevli diferansiyel denklem birden fazla değişkene bağlı bir değişim sürecini açıklayabilen, içinde kısmi türevler barındıran bir denklemdir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler fizik, kimya ve mühendislikte süreklilik arz eden hemen her kavramı modellemede kullanılır. Mekansal süreçler de dinamik modelleme gerektiren problemler üretirler. Modeller sistemin dış kuvvetlere karşı nasıl davranacağını öngörmek için tasarlandığından bir modelde belirli parametreleri optimize ederek optimal çıkış (örneğin biçimin optimal edilmesi) amaç olarak belirlenebilir. Ya da bir modelde tahmin edilen reaksiyonu gerçek ölçümlerle karşılaştırarak bu modeldeki bilinmeyen parametreleri belirleyebiliriz (“parametre tahmini”, “invers problemler”).

KTDD ile modellenen sistemlerin belli başlıları :

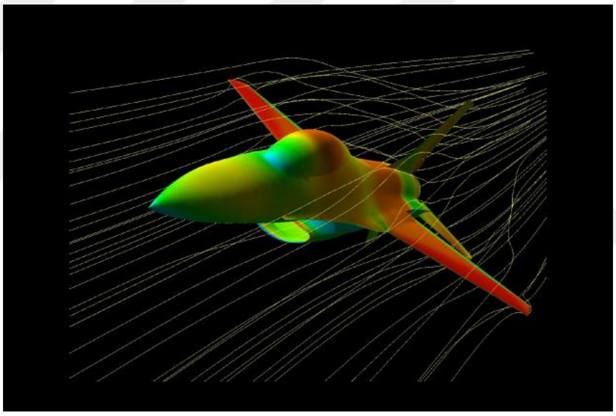
- Elastik ve elastik olmayan deformasyon, örneğin yüke maruz köprüler, kazalarda araçlar ya da basınç altında kalan cisimler



Şekil 3.1. Elastik Deformasyon Örneği

Optimizasyonun amacı mamülün üretim maliyetini minimize etmek, dayanıklılığı maximize etmek ya da basıncı minimize etmek olabilir.

- Taşıtlarının maruz kaldığı hava ya da sıvı akıntıları



Şekil 3.2. Hava Akıntısı Örneği

Optimizasyonun amacı kaldırma-sürükleme oranını maximize etmek, yakıt verimliliğini en üst düzeye çıkarmak, üretim maliyetini en aza indirmek, uçuş yörüngesini optimize etmek, güvenliği optimize etmek, işletilebilir uçuş rejimini genişletmek olabilir. İnvers problem: Modelleri kullanarak verimi artıran parametreleri bulmak olabilir.

- Reaktif akış simülasyonları (Birbiriyle reaksiyona giren sıvı veya gaz akışı modelleri) Optimizasyonun amacı kimyasal reaktör üretimini en üst düzeye çıkarmak, zararlı yan ürünleri en aza indirmek ya da verimi optimize etmek olabilir. İnvers problem: Doğrudan belirlenemeyen reaksiyon parametrelerini tanımlamak olabilir.
- Elektromanyetik dalgalar

- Kuantum mekaniği ve kuantum alan teorisi
- Biyomedikal görüntüleme (Radyasyonun vucudda yayılması modellenir)
- Kimyasal maddelere maruz bırakılan bakterilerin davranışı

Optimizasyon gelişmiş bir alan olarak birçok çeşit problemle başetmek için birçok farklı yol üretmiştir. Bu metodları bilim ve mühendislikteki gerçek hayat problemlerine uygulamak için oldukça büyük bir deneyim oluşmuştur.

KTDD ile yapılan modellemelerde notasyon:

* u: durum değişkeni(değişkenleri)

* q : kontrol değişkeni

* f : dış kuvvetler

KTDD ler genel olarak aşağıdaki formdadır:

Au = f +Bq veya A(q)u = f

Burada A ve B genel bir doğrusal olmayan differansiyel operatördür. Örneğin Laplace denklemi kullanılırsa yukardaki yazılış aşağıdaki gibi olur:

$-\Delta u =$ f +q veya $-\nabla . q\nabla u = f$

Bu denklem tanım kümesinin tüm noktalarını tutmalıdır. Her noktada bir PDE'nin tutulmasını gerektirmek yerine, tipik olarak zayıf formda ortaya çıkar. Örneğin $-\Delta u =$ f +q yerine her bir v test fonksiyonu için

$\int_\Omega \nabla u(x). \nabla v(x) dx = \int_\Omega [f(x) + q(x)] v(x) dx$ denklemine ihtiyaç duyarız.

Veya kısa yazılışla $(\nabla u. \nabla v)_\Omega = (f + q, v)_\Omega$

O zaman genel problem aşağıdaki yarı doğrusal formlardan birine indirgenir:

1) $\forall v$ $için$ A(u, v) = (f , v) + B (q , v)
2) $\forall v$ $için$ A(q; u, v) = (f , v)

Amaç(Bedel) fonksiyonu genel olarak aşağıdaki gibi doğrusal bir amaç fonksiyonu olur:

$$J(u, q) = \int_\Omega j(x) u(x) dx + \frac{\alpha}{2} \|q\|^2$$

Ya da aşağıdaki gibi quadratik bir amaç fonksiyonu formundadır:

$$J(u, q) = \frac{1}{2} \int_\Omega [\, j(x) u(x) - z(x)]^2 dx + \frac{\alpha}{2} \|q\|^2$$

Örneğin Euler sıvı dinamiğinde q şekil parametrelerinin bir fonksiyonu olarak kaldırma kuvvetinin hesaplanması

$J(u) = \int_{\partial\Omega} [\vec{n}(x). \overrightarrow{e_2}] u_p(x) dx$ u_p: $basınç$, $\vec{n}$: normal vektör

Parametrelerin tahmini yolunu kullanırsak tahmini ve gerçek ölçüler arasındaki uygunsuzluğu minimize etme problemi karşımıza çıkar:

$$J(u,q) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}[\, u(x) - z(x)]^2 dx + \frac{\alpha}{2}\|q\|^2 \qquad u : ışık\ şiddeti$$

Kural olarak KTDD lerin amaç fonksiyonları oldukça basittir. Optimizasyon problemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\min_{u,q} J(u\,,q) \;\; öyle\ ki\;\; \forall v\ için\;\; A(q,u,v) = (f\,,v\,)$$

Bazen q üzerindeki bağlı sınırlamalar eklenir. O zaman fonksiyonlara (vektörlere değil) dayalı bir Lagrange denklemi

$L(u,q,\lambda\,) = J(u\,,q) + A(q\,,u,\lambda) - (f\,,\lambda)$ olur.

Ve optimallik koşulları 3 bağlı kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilir:

$$L_u(u,q,\lambda)(v) = \; J_u(u,q)(v) + A_u(q,u,v) = 0 \qquad \forall v,$$
$$L_q(u,q,\lambda)(\rho) = \; J_q(u,q)(\rho) + A_q(q,u,\lambda)(\rho) = 0 \qquad \forall \rho,$$
$$L_\lambda(u,q,v) = \; A(q,u,v) - (\,f,v) = 0 \qquad \forall v,$$

Diğer bir örnek olarak quadratik bir amaç fonksiyonu ile optimal kontrol

$$\min_{u,q} \frac{1}{2}\int_\Omega (u-z)^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega q^2 dx \qquad öyle\ ki - \Delta u = f + q$$

O zaman Lagrange denklemi

$$L(u,q,\lambda\,) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u-z)^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega q^2 dx + (\nabla u\,,\nabla\lambda) - (f + q\,,\lambda)$$

olur.

$Bu\ durumda\ opt$imallik koşulları aşağıdaki gibidir:

$$L_u(u,q,\lambda)(v) = (u - z, v) + (\nabla\lambda, \nabla v) = 0 \qquad \forall v,$$
$$L_q(u,q,\lambda)(\rho) = \; \alpha(q,\rho) - (\lambda,\rho) = 0 \qquad \forall \rho,$$
$$L_\lambda(u,q,v) = \; (\nabla u, \nabla v) - (\,f + q, v) = 0 \qquad \forall v,$$

4.2.1.Optimal Sistem Probleminin Çözümlenmesi

Optimallik koşulları KTDD lerin oluşturduğu bir denklem sistemidir.

$$\boldsymbol{(u - z) - \nabla\lambda = 0}$$
$$\boldsymbol{\alpha q - \lambda = 0}$$
$$\boldsymbol{-\nabla u - (f + q) = 0}$$

Yukarıdaki basit doğrusal KTDD li sistem için bile çözülmesi gereken birçok soru vardır:

- Lagrange çarpanları mevcut mudur?
- Bu sistemin bir çözümü var mıdır?
- Eğer varsa analitik olarak bulunması mümkün müdür?
- Eğer yoksa bilgisayar yardımıyla yaklaşık çözümünü bulmak mümkün olabilir mi?
- Bir yaklaşık sistemin Lagrange çarpanları olabilir mi?
- Bir yaklaşık sistemin Lagrange kararlı bir çözümü olabilir mi?

Doğrusal olmayan KTDD ile modellenen bir optimal kontrol probleminde çözümü bulmak hiç te kolay olmayacaktır. Eyer noktası problemleri için etkili doğrusal çözücüler neredeyse bilinmediğinden, en basit problemleri bile çözmek, zorlayıcı bir araştırma olarak kabul edilir. Kontrollerin kısıtlarla belirlenmesi sistemin yapısını korumayı sağlar. Durum kısıtlamalarının dahil edilmesi de, farklı teknikler gerektiren ve henüz çözücüleri olmayan değişken bir eşitsizliği ortaya çıkaracaktır.

4.2.2. Biyolojik Sistemlerde Optimal Kontrol

Biyolojik ve bioteknik sistemlerin kontrolü çalışmaları on yıllar öncesine kadar gitmektedir. 1965 yılında Norbert Wiener'ın sibernetik üzerine çalışmasına, 1929'da Walter Cannon'un çalışmalarına ve hatta Claude Bernard'ın 1865 yılında erken dönem çalışmalarına kadar gidilebilir. Yine de, kontrol ve sistemlerin biyoloji alanındaki cihaz ve uygulamalar üzerindeki etkisi, ancak son yıllarda ortaya çıkmıştır. Biyolojik kontrol sistemleri bir alan olarak uzay, otomotiv, kimyasal süreç gibi alanlara göre oldukça yenidir ve son gelişmeler kardiovasküler sistemler ve endokronoloji üzerinde yoğunlaşmaktadır. (Doyle Francis J. Ve arkadaşları 2015)

KTDD’lerle optimal kontrolün kullanıldığı Biomedikal bilim ve mühendislik uygulamalarından belli başlı olanları şunlardır: Kromatografide dalga ön çözünürlülüğü VEGF anjiyogenezisi, termografik tümör yerleşimi, kan-doku nakli, iki sıvı ve membran kütle transferi, suni karaciğer destek sistemi, çapraz yayılım epidemiyolojisi, onkolitik viroterapi, glioblastomalarda tümör hücre yoğunluğu ve değişken gridler. Aşağıda bu uygulamalardan bazı örnekler verilmiştir.

4.2.3. Biomekaniksel Sistemlerin Optimal Kontrolü

Günlük yaşamımızda yaptığımız en basit hareketler, örneğin bir çantayı yerden alma, bir askıya elbise asma gibi hareketlerimizi farkında olmadan yapar, daha önceden deneyip belirlediğimiz en optimal yoldan yerine getiririz. Kasların hareketi için beynimiz daha önceden belirlediğimiz optimal modele uygun olarak sinyal gönderir. Son 20 yılda kas hareketlerinin dizisi ve hareket yörüngelerinin geometrik özellikleri vb. üzerine çok çeşitli araştırmalar yapıldı. Fakat beynin bilgi iletisini nasıl ulaştırdığı, motor hareketleri nasıl ürettiği konusu hala sırlarla dolu bir problem olarak görülmektedir.

Mühendislik penceresinden bakılınca biyolojik hareket sisteminin girdilerini merkezi sinir sisteminin kontrolünden gelen motor komutları olarak düşünülebilir. Çıktılarını ise durum değişkenlerinin bir fonksiyonu olan duyuşşsal geri besleme sinyalleri olarak düşünülebilir. Bunun bir sonucu olarak motor fonksiyon teorileri hareketlerin optimal yolla kontrol edildiği varsayımına dayanır. Bu fikri sayısal modellere dönüştürmek, optimal kontrol teorisinin iyi anlaşılmasını gerektirir. Bu tür optimallik modelleri, yalnızca birçok deneysel olgunun doğru hesaplarını sağlamakla kalmaz, aynı zamanda bu alandaki temel soruları aydınlatır. Geleneksel vurgu, istenen hareket yörüngelerinin optimizasyonu üzerinde yoğunlaşırken, son zamanlarda yapılan çalışmalar karmaşık davranış hedeflerini başarabilecek en iyi geribildirim kontrol mekanizmalarına odaklanmıştır. Bu yaklaşım, sistemin neden her zaman olduğu gibi davrandığını açıklamaya çalışmak ve çevrimiçi gözlenen davranışı üreten kontrol yasalarını belirtmek için zarif bir teorik çerçeve sunmaktadır.(Weiwei Li, 2006)

Hareketin kontrolünü anlamak sadece teorik bir çalışma değildir. Örneğin dünyada felce muzdarip birçok insan var, bunlar en basit normal kol hareketini bile yapamazlar. Bu bireylere motor fonksiyonunun geri kazandırılması, yaşam kalitelerini yükseltmek için çok önemlidir. Felçli kasların fonksiyonel elektrik stimülasyonu veya çeşitli robot protezleri ile bu mümkün olabilir. İmplante edilebilir kas stimülatörleri gibi son teknolojik gelişmeler, motor fonksiyonunun restorasyonu için büyük bir gelecek vaad etmektedir. Bu sofistike cihazlar, onları kontrol etmek için uygun yöntemleri bulursak yararlı olacaktır. Bu nedenle, bu protez cihazları için optimal kontrol yöntemleri bulmak ve bu yöntemleri modelleyip çözmek son derece önemlidir.

4.2.4. Biyolojik Hareket Sistemlerinin Özellikleri

Biyomekanik sistemlerin, kontrol teorisinde yaygın olarak incelenen sentetik sistemlerden farklı olan birçok özelliği vardır. Bu farklı özellikleri anlamak; karmaşık davranışları gerçekleştirebilmek, doğal hareketi kontrol etmek ve kontrol mimarilerini tasarlamak için çok önemlidir.

Çok yüksek boyutluluk: Biomekaniksel sistemlerin göze çarpan en farklı özelliklerinden biri durum alanının olağan dışı fazla boyutlu olmasıdır. Örneğin ikinci derece bir sistem olan 2- linkli, 6-kaslı kol modelini düşünelim. Burada durum alanı 2 eklem açısı ve 2 eklem hızı içerir. Oysa gerçekçi bir durum tanımlanırsa bu 6 kas aktivasyonu içermelidir, çünkü kaslar sinirsel aktivitenin alçak geçiren filtreleri gibi, ihmal edilemez zaman sabitiyle hareket ederler. Komple bir model kol için benzer bir sayı(el hariç), 20 dinamik durum ve 50 kas durumu üretir.

Belirsizlikler ve Gürültüler: Gürültü, biyolojik sensorimotor aşamaların modellenmesinde çok önemli bir kavramdır. 1954 yılına gelindiğinde, Fitts (P. M. Fitts. 1954.), hızlı hedeflenen hareketlerin nöromotor kanallarda rastgele gürültüye maruz kalma ihtimalini gösterdi: Motor hatalarının değişkenliği hareketin büyüklüğü ile arttı. Bu sonuç sadece gürültünün etkilerini matematiksel bilgi teorisi açısından yorumlamaktı ve rasgele hareket değişkenliğinden sorumlu mekanizmalar hakkında ayrıntılı niceliksel bir bilgi içermiyordu. Biyolojik hareketlerin belirgin değişkenliği, duyusal motor sistemin çoğunlukla dahili bozuklukların varlığında çalıştığını gösterir. Gürültü hem duyusal bilgide hem de motor komutlarında vardır. Örneğin, Duyusal girdideki gürültü cismin algılandığı konumda belirsizlik ile sonuçlanacaktır. Motor komutlarındaki gürültü, kasın ürettiği gerçek gücün belirsizliğini tarif eder ve bu da hareketin hatalı ve değişken olmasına yol açar.

Motor komutlarındaki gürültü sinyallere bağlıdır. – standart sapma motor kumanda sinyalinin (kontrol sinyali) büyüklüğü ile doğrusal olarak yükselmektedir. Bu çok önemli varsayım Fitt Kanunlarından yakalanan gözlemle tutarlıdır ve ampirik bulguyla desteklenmektedir.

Biyolojik sistemlerin optimal kontrolünde gürültü olgusu dikkate alınmalıdır, çünkü uygun bir şekilde seçilecek kontrol sinyali gürültüyü gerçekten azaltacaktır. Son zamanlarda bu model biyolojik hareketleri inceleyen çalışmalarda geniş olarak kullanılıyor.

4.2.5.Hareket Kontrolünde Optimumluk Prensipleri ve Performans Kriterleri

Yaptığımız en basit bir hareket bile çok yüksek düzeyde bilgi işleme içerir. Elimizi hareket ettirdiğimizde mümkün olan binlerce yol ve hız seçeneği içinden bir tercih yaparız ve bu tercihi bir yörünge olarak ifade ederken eklem ve kas kombinasyonları arasından da en uygun olanı seçeriz. Biomekanik alandaki bu gereksiz çokluk motor sistemin kontrolünün ne denli iyi tasarlanması gerektiğini bize anlatmaktadır. Motor alanındaki kontrolde optimumluk ilkeleri, gözlemlenen olayların doğru açıklamalarını sağlamakla kalmaz, aynı zamanda önceliğe hak kazanırlar. Bunun nedeni, sensorimotor sistemin, davranış performansını sürekli geliştiren optimizasyon işlemlerinin ürünü olmasıdır. (yani evrim, gelişme, öğrenme, adaptasyon). Bu nedenle, optimallik ilkeleri sistemin neden olduğu gibi davrandığını açıklamaya çalışmak ve gözlemlenen davranışı üreten kontrol yasalarını belirtmek için uygun bir çerçeve sağlar. Optimal kontrol probleminin çözülmesinde kontrol edilen sistemin performansını değerlendirmek için özel bir fonksiyon seçilmelidir. Bu fonksiyon hareketin kinematik ilkelerine ve açısal hızların, ivmelerin ve yüksek mertebeden türevlerin pozisyonlarının dahil olduğu değişkenlere bağlıdır. Çözümde hedef bu fonksiyonun değerini en aza indirgemektir.

x(t) ve y(t) kartezyen sistemde bir t zamanında kolun pozisyonunu göstersin. Minimum yapılacak fonksiyon

$J = \int_0^T \left(\left(\frac{d^3x}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dt^3} \right)^2 \right) dt$ şeklinde kurulur.

Burada T sembolü hareketin sürdüğü zamanı gösterir. Hareketin başlama ve bitişinde hızın ve ivmenin “0 “ olduğu kabul edilirse optimal yörünge aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$x(t) = x_0 + (x_T - x_0)(10 \left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{T}\right)^5)$$

$$y(t) = y_0 + (y_T - y_0)(10 \left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{T}\right)^5)$$

Bu yazılışta (x_0 , y_0) noktası t = 0 da başlangıç noktası, t = T de (x_T , y_T) bitiş noktasıdır. Bu denklemlerden optimal yörüngenin bir doğru olduğu, çan eğrisi şeklinde bir hızlanma profili içerdiği tahmin edilebilir. Bu modellemede x(t) ve y(t) sadece kolun başlama ve bitiş pozisyonlarına ve T zamanına bağlı olduğu için optimal yörünge sadece hareketin dinamiği ile belirlenir ve hareketi üreten kas iskelet sisteminin dinamiğinden bağımsızdır. Doğrusal olmayan optimal kontrol problemleri Bellman Optimallik prensibi ve Pontryagin Maksimun Preensibini temel alır. Bellman Optimallik Prensibi ile modellenen bir problemde global çözüm elde edilir ancak HJB denklemi bir kısmi türevli differansiyel denklemdir ve ancak düşük boyutlu sistemlerde çözülebilir.

Belmann Optimallik Prensibine göre değer fonksiyonu:

$$\boldsymbol{V(x(T),T) = \Phi(x(T),T) + \int_{T}^{T} L(x(t),u(t),t)dt}$$

Değer fonksiyonu bize sistemin t zamanında, x(T) durumunda başlamasıyla ve belirli bir kontrol kuralıyla hareketin sonuna kadar kontrol edilmesiyle ne kadar bedelin toplanacağını anlatmaktadır.

Hamiltonian denklemimi H ‘yı aşağıdaki gibi tanımlayarak

$$\mathcal{H} = L(x(t),u(t),t) + \frac{\partial V^*}{\partial x}(\,x(t))^T f(x(t),u(t),t)$$

Optimallık şartı aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$\frac{\partial V^*}{\partial t}\left(x(t)\right) = -\min_{u} \mathcal{H}\left(x(t),u(t),\frac{\partial V^*}{\partial x}\left(\,x(t)\right)\ \ ,t\right)\quad ,$$ HJB denklemidir.

$$V^*(x(T),T) = \Phi(x(T),T)$$

Bellman’ın optimallik prensibi x(t) nin tüm mümkün durumlarında V(t, x(t)) ve $u^*(t)$ yi ifade eder. Bu nedenle global bir optimal kontrolü hesaplayan bir metottur. Biyolojik hareketlerin optimal kontrol için modellenmesi doğal sürece dayalı bir başlangıç noktası sağlasa da, bu yapılar mevcut biçimleriyle modellenmede ciddi bir sınırlamaya sahiptir. Çünkü gerçekte biyomekanik sistemler büyük ağırlılıkla doğrusal değildir, bozukluklar kontrol bağımlıdır, kas aktivasyonları negatif değildir ve performans kriterleri nadiren ikinci dereceden kuadratik denklem özelliğine sahiptir.

4.2.6.Mekansal-Dinamik Şüreçlerin Optimal Kontrolü

Dinamik ya da zamana bağlı mekansal(uzaysal) süreçler günümüzde coğrafik bilgi sistemlerinde önemli süreçler olmaktadır. Mekansal süreçlere örnek olarak Newman’ın 2002 de yaptığı hastalıkların yayılması hakkındaki çalışmayı, Brockmann, Hufnagel ve arkadaşlarının 2006 da yaptığı insanların seyahatleri üzerine olan çalışmayı ya da Seppelt'in 2005 te yaptığı epidemik olmayan türlerin göçleri hakkındaki çalışmayı gösterebiliriz. Genellikle kısmi türevli denklemlerle modellenen bu dinamik süreçler olgularına göre dalga benzeri, difüzyon benzeri ve denge denklemleri olarak kabaca üç sınıfa ayırabiliriz.

Haşere istilaları yönetimi üzerine yapılan çalışmalar genellikle haşerelerin mekansal özelliklerini düşünmeden haşere mücadelesi ile haşere sayısını kontrol etmek üzerine yoğunlaşmaktadır. (Pannell, 1990) Fakat biyolojik istilaların en önemli özelliği, zaman ve mekan içinde yayılım göstermeleridir. Genellikle bir bölgeye bir veya birkaç haşerenin varmasıyla oluşum başlar. İstilacı nüfus hızla üreme ile artar. Buna ek olarak, nüfus, dağılma yoluyla alana yayılabilir, böylece işgalcilerin başlangıçtaki nüfusu bir süre sonra kolonileştirdikleri alandan uzaktaki yerleri etkileyebilir. Biyolojik istilalar bu nedenle basit dinamik süreçler yerine mekansal-dinamik süreçler olarak düşünülmelidir.

Mevcut analitik çalışmalar genellikle istilaların mekansal özelliklerinden uzaklaşmış olsa da, istilaya karşı optimum yönetiminin maliyetlere, hasarlara, iskonto oranına, büyüme ve yayılma dinamiklerine ve hatta işgalin büyüklüğüne nasıl bir şekilde bağlı olduğuna ilişkin önemli bilgiler sağlamıştır. Bu bulguların çoğu, istila yayılımının mekansal olarak örtük modelleri kullanılarak türetilmiştir; bu, ne zaman ve ne kadar kontrol edileceği hakkında sonuçlar vermektedir (Olson ve Roy, 2002). Çok az çalışmada haşerelerin mekansal karekteristikleri düşünülmüştür, bu nedenle optimal kontrolün nerede olacağı hakkında fazla bilgi yoktur. Diğer bir deyişle mekansal özelliklerin optimal kontrol seçeneklerindeki etkisi hakkında çalışmalar yetersizdir.

Haşere istilalarının mekânsal yönden yönetilmesi için mekânsal olarak açık bir istila yayılma modeline ihtiyaç vardır. Genel form olarak mekânsal bir yayılma süreci sürekli bir zaman ve uzay üzerinde bir kısmi türevli denklemle gösterilebilir. Bir sistemin optimizasyonu KTDD ile yapıldığında problemin çözümü oldukça zordur. Optimal olarak kontrol edilen kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin özellikleri üzerine ekonomi, matematik ve en uygun şekle sokma teorisinde sınırlı bir literatür vardır.

Yakın zamanlarda mekânsal-dinamik sistemlerin genel özelliklerini analitik yaklaşımlar kullanarak ortaya çıkarmak için yapılmış birkaç çalışma vardır. En geneli Brock ve Xepapadeas'ın KTDD'ler tarafından yönetilen bir sistemin optimal kontrolü için geliştirilmiş Pontryagin koşullarını türettiği çalışmasıdır.(2004, 2008) Brock ve

Xepapadeas, yöntemlerini yoğunluğa bağlı büyüme ve rastgele yerel dağılım altında balık hasatı probleminin optimal çözümüne uyguladılar. Onlar sistemin kararlı durumuna, özellikle de "Acaba kararlı durum alan üzerinde düzgün dağılımlı mı? Yoksa homojen olmayan özellik mi gösteriyor?" sorusuna yoğunlaştılar. Onlar sistemin mekânsal parçasını sadeleştirmek, alanın boyutluluğunu en aza düşürmek ve daha karmaşık sınır koşullarından kaçınmak için alanı bir boyutlu bir daire varsaydılar.

Benzer bir çalışmada, Sanchirico ve Wilen (1999, 2005, 2007) sürekli bir zaman ve ayrık uzayda yenilenebilir bir kaynak sistemini modellediler. Böylelikle genel KTDD sistemini adi diferansiyel denklem sistemine dönüşmesini sağlamış oldular. Sanchirico ve Wilen (2005) biyokütle ve hasadın denge konfigürasyonunun maliyet, fiyat ve indirim parametrelerine ve yamalar arasındaki bağlantıları belirleyen dağıtma sistemine nasıl bağlı olduğunu göstermek için sisteme optimal kontrol yöntemleri uyguladılar. Sanchirico ve arkadaşları (2010) sayısal metotlar kullanarak dengeye yaklaşma yolunu çözmek için optimal metapopülasyon hasadı modellemesini tamamladılar. Costello ve Polasky (2008), balıkçılık sistemini, zaman ve mekânda ayrık olarak karakterize ederler ve bu da onlara dinamik programlamayı metapopulasyon balıkçılık sisteminin denge özelliklerinin analitik olarak karakterize edilmesinde kullanma imkânı verir.

Sürekli Mekansal Süreçler: Mekânsal-dinamik problemlerin özellikleri difüzyon veya dispersiyon süreçleri, sınır şartları, uzaysal geometri içermeleridir. Gerçek biyofiziksel süreçler, niteliksel olarak farklı çeşitte dağılım veya difüzyon süreçleri sergiler **(**Bhat, M.G. ve Huffaker, R.G., 2007). En basit difüzyon süreci bir populasyonun(hücre, bakteri, balık, böcek, haşere vb.) mekânda rastgele yayıldığının farz edilmesi ile başlar. Mekânın (uzayın) bir doğru üzerinde bir boyutlu gösterimini düşünelim. Bir birim populasyonun N(x, t) bu doğru üzerinde sağa ya da sola yayılma olasılığını da eşit varsayalım. Bu durumda böyle bir tesadüfi difüzyon süreci aşağıdaki KTDD ile gösterilebilir:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial N}{\partial x} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \qquad (3.1)$$

Bu yazılışta zaman t ile, mekân x ile gösterilir. D, difüzyon sabitidir. Bu denklem Fick'in ünlü Difüzyon Kanunu'nu tanımlayan kısmi türevli diferansiyel denklemidir. Bu denklem bir noktada parçacıkların (bireylerin) konsantrasyonunun akışının, konsantrasyonun gradyanı ile orantılı olacak şekilde bir süreç üretecektir. Şimdi bu denklemin ürettiği şekilde bir süreç içinde olan bir populasyonumuzun var olduğunu, başlangıçta(orijinde) N_0 birim yayılma olduğunu varsayalım. Bu durumda herhangibir t zamanında ve başlangıçtan(orijinden) x uzaklığındaki konsantrasyon aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$N(x,t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\{\frac{-x^2}{4Dt}\} \qquad (3.2)$$

(3.2) denklemi aslında (3.1) denklemi için kapalı form çözümdür. (3.2) denklemi populasyonun mekan üzerinde yayıldığı bir süreçi tanımlar. Burada birim populasyon birimlerinin yüksek yoğunluklu yerlerden düşük yoğunluklu yerlere yayılması oranı difüzyon katsayısı D' ye bağlıdır. (Bhat, Huffaker ve Lenhart, 1993)

KTDD'li (1) denklemi ile tanımlanan difüzyon süreci ve onun (2) ile gösterilen çözümü temel olarak en basit mekansal dinamik süreç için yazılmıştır. Genelleştirme yapmak için boyut iki yapılarak düzlem üzerinde bir difüzyon veya 3 boyuta geçilerek küresel bir yüzeyde difüzyon tanımlanırsa denklem sistemlerine ihtiyaç duyulacaktır.

Yenilenebilir kaynak popülasyonlarını tanımlamak için özellikle önemli olan diğer bir doğal genelleme, difüzyon sürecinin birleştirilmesini içerir. (her noktada meydana gelen bir büyüme sürecinin bir şeyin uzayda bir diferansiyel denklem tanımıyla nasıl yayıldığını tanımlar). Bu çok bilinen denklem Fisher (Fisher, R.A. 1937) reaksiyon-difüzyon denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \mathrm{rN(1\text{-}N)} \qquad (3.3)$$

Bu yazılışta r gerçek büyüme oranıdır. Bu mekansal –dinamik denklem tesadüfi difüzyona maruz kalmış bir populasyonu ve mekanın(uzayın) her bir noktasında yoğunluğa bağlı büyümeyi tanımlar.

Sınırlar ve Mekansal Geometri: Mekansal-dinamik süreçin diğer bir önemli bileşeni mekanın geometrisi ve sınırlarıdır. Karasal türler için bir sınır koşulunun en basit ve doğal durumlarından biri bir adanın çevresidir. Modelleyiciler genellikle sınırları gradyanlar türünden absorbe edici, yansıtıcı veya melez karekterde tanımlarlar. Absorbe edici sınırlar durum değişkeninin sınırda sıfır olduğunu ima eder. Bu varsayım, bir zamanlar bir kıta kenarına ya da bir adanın sınırına itilen pasif dağılımlı türler için uygundur. Yansıtıcı sınırlar, yayılan parçacıkları uzaya (kapalı bir akifer) geri döndürür ve sıfır akı sınırları, bir parçacığı ortogonal veya başka bir açıda sınırda tasvir eder. Sonuç olarak mekânsal geometri ortamın homojen olup olmadığına; darboğazlar, kenarlar, düşman yamalar ve heterojen üretkenlik gibi mekansal karakter içerip içermediği konularını önemser.

Sürekli Mekansal Dinamik Süreçli Bioekonomik Modeller: Kaynak ekonomistleri, dinamik optimizasyon teorisinin adi diferansiyel denklemlerle modellenen, stoklarının dinamiklerini ifade eden geleneksel kaynak kullanım problem uygulamalarını sıkça kullanırlar. Mekansal –dinamik süreçler ile tarif edilmiş bir sistemin optimizasyonu geleneksel problemlerden farklı yapıdadır. Fisher reaksiyon difüzyon denklemi ile bir boyutlu bir doğru üzerinde yenilenebilir bir kaynak tanımlandığını düşünelim. Böyle olunca populasyon her noktadaki hasat oranı ile belirlenen bir şekilde mekan ve zaman üzerinde evrimleşir. E(x, t) gayretine, q (x, t) avlanabilirlik katsayısına ve biokütleye bağlı olacağını varsayalım.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN(x,t)\big(1 - N(x,t)\big) - q(x,t)E(x,t)N(x,t)$$

Şimdi de, bu kaynağın yaşamını sürdürebileceği uygun mekanı [x_1, x_u] türünden bazı sınırlarla tanımladığımızı varsayalım.

$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN(1 - N) - qEN \equiv D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + g\{E, N\}$ koşulu altında optimizasyon problemi aşağıdaki gibi yazılacaktır:

$$\int_{x_1}^{x_u}\int_0^{\infty} \exp(-\rho t)\,\{B[E,N]\}dtdx$$

Burada amaç, KTDD durum denklemine, uzamsal sınır koşullarına ve bir dizi başlangıç koşuluna tabi olan bazı içbükey fayda fonksiyonunu maximuma çıkarmaktır. Brock ve Xepapadeas bu problemin çözümünü karekterize ettiler. Önemli bir sonuç şudur: Altta yatan sistem sürekli bir mekansal-dinamik sistem olduğu zaman, optimize edilmiş Hamiltoniyen'in temel durum ve eş durum denklemleri, hem zaman hem de uzayda kısmi diferansiyel denklemler (KTDD'ler) olarak ifade edilen difüzyon denklemleridir.

Brock ve Xepapadeas, KTDD sisteminin her iki KTDD 'in negatif ve pozitif işaretlerle ortaya çıkan ortak bir difüzyon katsayısına sahip olması anlamında “kendine eş” olduğunu buldu. Kararlı durumda, bu özellik belirtir ki, biyokütle değişkenin belirli bir mekan parçası üzerinde akış ürettiği alanlarda (difüzyon yüksek biyokütleden düşük biyokütle alanlarına akarken) karşılık gelen eş durum değişkenleri zıt yönde akım oluşturur(örn. düşük gölge değerleri yüksek gölge değerlerine). Bu, mekansal olmayan sistemlerin bir özelliğini yansıtır, yani düşük biyokütle seviyeleri yüksek gölge değerlerine işaret eder, fakat aynı zamanda biyokütlenin başka bir birimdeki gölge değerinin, uzayda biyokütlenin nerede bulunduğuna bağlı olarak değişebileceğini gösterir. (Sanchirico, J.N., Wilen, 2005.)

Ayrık Mekânsal Dinamik Modeller: Alandaki popülasyonları modellemede, ekologlar ve popülasyon biyologları genellikle en az üç nedenden ötürü mekanda ayrık olan formülasyonları kullanırlar. Birincisi, popülasyonlar genellikle allta yatan habitatlar, akımlar ve diğer biyofiziksel koşullardaki mekânsal heterojenliği yansıtarak ayrık yamalar halinde dağılırlar. İkincisi, popülasyonlar uzayda sürekli olarak dağıtılsa bile, çözüm araçlarının ayrık değil sürekli olmak üzere geliştirilebilmesi olası değildir. Üçüncü olarak KTDD leri çözmek için matematiksel meydan okumalar neredeyse her zaman araştırmacıları "yeterince ince ağlı düzensiz çevre" yardımıyla sürekli uzaysal tanım kümesine yaklaşmaya götürmektedir. (Levin, S.A. 1976)

Sürekli Fisher reaksiyon difüzyon denklemine (3) bir ayrık yaklaşım aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{dN_j}{dt} = r_j N_j \left(1 - \frac{N_j}{K_j}\right) + \sum_{k=1}^{\Omega_j} d_{jk} N_k - q_j E_j N_j$$

Burada mekânsal(uzaysal) tanım kümesi (x) j=1,2,3,...,Ω şeklinde ayrık parçalara(yamalara) bölünür ve dağılış süreci, toplamadaki terimlerle değiştirilir. (Sanchirico, J. N. 2005). Dağılış katsayıları d_{jk} biokütlenin bir yamadan diğerine hareket etme oranını gösterir.

4.2.7. Konserve Besinlerin Optimal Sterilizasyonu

Hijyenik problemleri önlemek için konserve besinler bir termal işleme tabii tutulur. Burada amaç sıcaklığı bir zaman için bir düzeyde tutup patojenik mikroorganizmaları öldürmektir. Sıcaklığın aşırı olması besin değerinin düşmesine ve kalite özalliklerinin bozulmasına sebep olurken fazladan bir enerji bedeli de ortaya çıkar. İstenen kalitede konserve elde etmek için sterilize etme aşamasında sıcaklığın optimal düzeyini doğru belirlemek çok önemlidir. Şu anki uygulamalarda genellikle belli bir sıcaklıkta belli bir sürede buhar kullanılmakta ve ardından soğutma işlemi su ile yapılmaktadır. Bu uygulama optimal olarak görülmediği için bilim insanları optimal kontrol metodları ile bu probleme çözüm yolu üretmiştir. Konserve besinleri sterilize etme probleminin optimal çözümü için ortaya konulan düşünce şu şekildedir:

Sterilizasyon işlemi sonrasında kutu içinde istenen düzeyde mikroorganizma azaltımını mümkün kılan zaman t ile gösterilsin. Bu esnada odadaki optimal buhar sıcaklığı v(t) ile gösterilsin. Amacımız enerji tüketimini minimum düzeyde tutmak ve besin değerini maximum yapmaktır. Konserve kutularının değişken bir buhar sıcaklığına maruz kaldığını farz edebiliriz. Bu bizim (0, T) aralığında sistem kontrolümüz olarak alınabilir. Kutu içine ısı transferinin sadece iletim yoluyla olabileceğini düşünebiliriz. Bir konserve kutusunun 3 boyutlu bir cisim olduğunu düşünerek tanım kümesini Gama ile, sınırları da ters L ile gösterelim. Isı transferi aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi olarak ifade edilebilir:

$$\varrho = \Omega \mathrm{x}(0, \mathrm{T}) \text{ üzerinde } \rho(\theta)c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \nabla.(k(\theta)\nabla\theta) = 0,$$

$$\sum = \Gamma \mathrm{x}(0, T) \text{ üzerinde}, \quad k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial n} = \alpha(v - \theta),$$

$$\Omega \text{ içinde } \theta(\mathrm{x}, 0) = \theta_0(x),$$

Burada :

- θ : sıcaklığı
- ρ : yoğunluğu
- c : *sıcaklık kapasitesini*
- k : termal iletkenliğini
- α : konserve kutusunun tenekesine bağlı olarak ölçülecek sıcaklık transfer katsayısı
- v : mukabele sıcaklığı
- n : harici birim normal vektör
- θ_0 : başlangıç sıcaklığı

ρ, c, k *ve* α parametreleri gerçek sıcaklığa bağlıdır. Fakat bir ilk yaklaşım olarak şimdilik bu parametreleri sabit olarak düşünelim. Sterilizasyon ihtiyacını matematiksel bir yol ile göstermek için mikrobun ilaca direnciyle ilgili birçok parametrenin ve bu parametrelerin sıcaklığa bağlılığının bilinmesini gerektirir. Mikroorganizmaların yok edilmesi birinci derece bir süreç olarak farz edilir çünkü öldürücü düzeydeki sıcaklığa maruz kalan yaşayan hücrelerden yok olanların sayısı zamana bağlı olarak üstel bir şekilde azalacaktır. Bu gerçeği ifade eden atematiksel denklem :

$\frac{dc}{dt} = -Kc$ burada c(x, t) x noktasında ve t zamanında yaşayan organizma konsantrasyonunu gösterir. Parametre K sıcaklığın bir fonksiyonudur.

$K = K_r \exp(-\frac{E}{R}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_r}\right))$ şeklinde ifade edilir.

Burada , K_r : K'nın θ_r gibi bir referans noktasındaki değeri

E : aktivasyon enerjisi

R : evrensel gaz sabitidir.

Amaç ya da Bedel fonksiyonu

J(v) = $v\int_0^T \Phi(v)dt - \int_\Omega \; e^{-\int_0^T G(\theta)dt}dx$

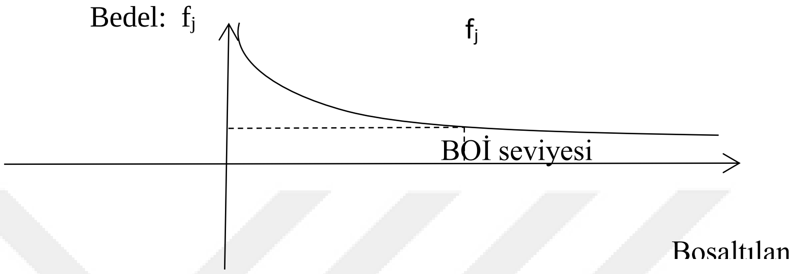
Bu yazılışta Φ ve G sürekli türetilebilir reel fonksiyonlar olduğunu farz ediyoruz. Ayrıca Φ nin konveks ve G nin de pozitif *olmasını* da farz ediyoruz. v parametresi negatif *olmayan* bir reel sayı olarak J amaç fonksiyonunda iki terimin göreceli ağırlığını temsil etmektedir. Sterilazyon probleminde $\int_0^T \Phi(v)dt$ integrali ise enerji bedelini ifade etmektedir.

4.3.Çevrebilimde Optimal Kontrol

4.3.1.Atık Suların Optimal Yönetimi

Sınırları Γ olan bir Ω tanım kümesinin sığ bir su ile dolduğunu, kirletici atık suların N_E ile gösterilen açık boşaltımlardan geldiğini ve bunların her birinin bir dağıtma sistemiyle eşleştiğini varsayalım. Ayrıca tanım kümesi içinde A_i (i = 1, 2, 3, …, N_z) şeklinde birçok korunmuş alanların olduğunu (deniz kültürü gibi), bu korunmuş alanlarda suyun kalitesinin garantilenmesinin gerekli olduğunu, kirlilik düzeyinin verilen bir maximum düzeyden düşük olması gerektiğini de varsayıyoruz.

Deniz kirliliğini kontrol etmek için su kalitesini ve suyun denizde doğal yaşamı idame durumunu gösteren (oksijen, sıcaklık, Ph gibi) bazı parametreler kullanılır. Bakteriler oksijeni organik maddeleri çözümlemede kullanır. Bu işlem, bu görevi yapmak için oksijen ihtiyacı olarak adlandırılan Biyolojik Oksijen İhtiyacı (BOİ) olarak ölçülebilir. Kirlilik seviyesi çok yüksek değilse, bu ihtiyaç Çözünmüş Oksijen (ÇO) ile karşılanabilir. Ancak, organik maddeler maksimum bir değerin ötesine geçerse ayrışmak için ÇO'nun yeterli olamaz ve bu ekosistemde önemli modifikasyonlara (anaerobik süreçler) yol açar. Bu nedenle her bir korunmuş alan A_i, i= 1,2,3,…,N_z için $BO\dot{I}\; nin\; bir\; \sigma_1$ eşik değeri geçilmemeli ve ÇO nun minimum düzey ξ_1 garanti edilmelidir. Bu kimyasal ya da biyolojik usulle atık suların denize boşaltılmasından önce yapılmalı ve kontrol edilmelidir. Her bir tesisteki temizleme bedelinin gelen atık sudaki BOİ düzeyine ve *diğer* teknolojilere bağlı olduğu farz edilir. O zaman, belirli bir tesis için maliyet, arıtmadan sonra BOİ ‘nin azalan bir fonksiyonudur. Çünkü daha düşük bir BOİ seviyesi elde edilince daha yoğun bir temizleme ve dolayısıyla daha yüksek bir maliyet olacaktır. Mutlak temizlemenin mümkün olmadığını ve minimum bir sabit maliyetin (herhangi bir işlem gerekmediğinde bile) bulunduğunu akılda tutarak , j-inci arıtma tesisinin maliyet fonksiyonu, fj, Şekil 3.3'te gösterilene benzer bir şekil alır.



Şekil3.3.Arıtma Tesisi Maliyet Fonksiyonu

O zaman problem şudur: Her tesiste ve her defasında, arıtma sonrası toplam temizleme maliyetini en aza indirgeyerek, korunan alanlardaki su kalitesi için yukarıda belirtilen kısıtlara uyarak, arıtmalardan sonra tahliyelerin BOİ seviyesini belirlemektir. Matematiksel pencereden bakarsak bu parabolik formda bir kısmi türevli diferansiyel denklem içeren, noktasal durum kısıtlamaları ve noktasal kontrol içeren optimal kontrol problemidir.

Açık boşaltımların j = 1, 2, 3, …, N_E olmak üzere $P_j \epsilon \Omega$ noktalarına yerleştirildiğini ve, j= 1, …, N_E olmak üzere m_j ile t zamanında P_j noktasından boşaltılan BOİ oranı gösterilsin. Streter-Phelps modelin dağıtılmış parametre versiyonuna göre tanım kümesindeki BOİ ve ÇO gelişimi bir kısmi türevli denklem sistemi ile açıklanabilir, yöneltilebilir. Sırasıyla bir x noktasındaki ve bir t zamanındaki BOİ ve ÇO yoğunlukları $\rho_1\,(x,t)\;ve\;\rho_2(x,t)$ ile gösterilsin O zaman bunlar aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdürler:

$$\Omega X(0,T) kümesi\ içinde \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{u}\nabla\rho_1 - \beta_1\Delta\rho_1 = -K_1\rho_1 + \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{N_E} m_j\delta(x-P_j)$$

$$\Gamma X(0,T) kümesi\ \text{üzerinde} \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial n} = 0$$

$$\Omega \text{ içinde } \rho_1(x,0) = 0$$

$\Omega X(0,T) kümesi\ içinde \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho_2 - \beta_2 \Delta \rho_2 = -K_1 \rho_1 + \frac{1}{h} K_2 (d_s - \rho_2)$

$\Gamma X(0,T) kümesi$ üzerinde $\quad \frac{\partial \rho_2}{\partial n} = 0$

Ω içinde $\rho_2(x,0) = \rho_{20}(x)$

Burada h(x, t) sıvı tabakasının yüksekliği, ve $\vec{u}(x,t)$ sıvı tabakasının ortalama yatay hızıdır. $\delta(x - P_j)$ ifadesi P_j noktasında Dirac ölçüsünü göstermekte, $\beta_1 > 0$ ve $\beta_2 > 0$ parametreleri dağılım ve türbülans etkilerini içeren yatay difüzyon katsayılarıdır. $K_1 > 0$ kinetik katsayısı, parametre $K_2 > 0$ deniz yüzeyi boyunca bir oksijen transfer katsayısıdır ve d_s, oksijen doyma yoğunluğudur.

j=1,2,…, N_z tane korunmuş alan olduğunu farz edelim. Buralarda BOİ için maksimum bir düzey ve ÇO için minimum bir düzey tutturulmak zorundadır. F_j ile j-inci tesisteki arıtma maliyetini gösterelim. O zaman tüm temizleme sisteminin [0, T] zaman aralığında toplam maliyet fonksiyonu, (bedel ya da amaç da denir.) aşağıdaki gibidir:

$$J(m) = \sum_{j=1}^{N_E} \int_0^T f_j\left(m_j(t)\right) dt$$

Temizleme sisteminin optimal yönetimi proplemi BOİ değerlerinin [0, T] zaman aralığında bulunması, amaç fonksiyonunun durum kısıtları altında minimize edilmesinden oluşur.

4.3.2.Gürültünün Aktif Kontrolü

Gürültü kirliliği, gürültü azaltımı çevresel bir sorun olarak gün geçtikçe daha fazla önem kazanmaktadır. Özellikle düşük frekanslarda oluşan gürültünün azaltılması için aktif kontrol çalışmaları son yıllarda hızlı dijital sinyal üreticilerinin devreye girmesiyle ilgi toplayan bir konudur. Gürültünün aktif kontrolü dalgaların tahrip edici şekilde kullanılması prensibine dayanır: istenmeyen bir gürültüyü iptal etmek için ikincil bir kaynak tarafından bir karşı basınç oluşturulur. Önemli bir azaltma elde etmek için, bu kaynak büyük bir hassasiyetle iptal edilecek gürültünün tersine eşit bir genlik üretmelidir. Bu tekniklerin uygulamaları, uçaklarda veya otomobillerde gürültüyü azaltmak için başarıyla kullanılmaktadır.

Dağıtılmış sistemlerin optimal kontrol teorisi çerçevesinde gürültünün aktif olarak kontrol edilmesi probleminin modellenmesi ve çözülmesi örneğinin çözümünü yapalım.

Sadelikten dolayı iptal edilecek gürültünün sadece tek bir frekansa sahip olduğunu kabul edelim, fakat aynı zamanda geniş bant gürültüsünü veya periyodik olmayan gürültüyü de kontrol edebilelim. İki problem ardışık olarak dikkate alınır. İlk adımda, karmaşık genlikler kontrol olarak alınır ve amaç, alandaki belirli noktalardaki basıncı en aza indirmektir. İkinci adımda, hoparlörlerin yerleri aynı amaç ifonksiyonuna göre optimize edilir. Mikrofon yerlerinin global gürültüyü engellemek için uygun seçilmesi kısmını incelememize dahil etmiyoruz.

4.3.3.Matematiksel Model

Sınırlı bir tanım kümesi $\Omega_F \subset \mathbb{R}^n$ (n = 2 б 3) olsun. Akustik dalgaların yayılımı aşağıdaki bilinen denklemle ifade edilir:

$$\Omega_F \; içinde \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \Delta p(x,t) = f(x,t)$$

Burada p, basıncı; c ses hızını; f ise kaynağı gösteren terimdir. Problemizde f , gürültünün ikincil kaynağı olan hoparlörler, yani kontroldür. Ayrıca problemde birincil gürültü kaynağı sınırın Γ_N ile gösterilen bir parçasında etkin olmaktadır.

$$\Gamma_N \subset \partial\Omega_F \; üzerinde \quad \frac{\partial p(x,t)}{\partial n} = g(x,t)$$

Burada n; sınıra normal dıştan birim vektördür. Bunun anlamı Γ_N üzerinde normal yer değiştirmelerin zorlanmasıdır. Bu pratikte dış çeperin titreşimlerine karşılık gelir. Hem g hem f'nin harmonik kaynaklar olduğunu varsayarsak:

$$g(x,t) = Re(G(x)e^{-iwt} \quad , \; f(x,t) = Re(F(x)e^{-iwt}$$

Burada F ve G fonksiyonları komplex fonksiyonlardır ve kompleks genlikler olarak adlandırılırlar. Aslında onların argümanları faz açıları olarak adlandırılırken, modülleri fiziksel genliklerdir. Model doğrusal olduğu için çözümleri de aynı frekansla harmoniktir:

$$p(x,t) = Re(P(x)e^{-iwt}$$

Bu durumda akustik dalga denklemi basıncın kompleks genliği tarafından sağlanan aşağıdaki Helmholtz problemini üretir:

$$\begin{cases} -\Delta P - \left(\frac{w}{c}\right)^2 P = F, & \partial\Omega_F \; içinde \\ \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{iw\rho}{Z(w)} P & \Gamma_N \subset \partial\Omega_F \text{ üzerinde} \\ \frac{\partial P}{\partial n} = G & \Gamma_N \subset \partial\Omega_F \text{ üzerinde} \end{cases}$$

Burada ρ sıvı yoğunluğudur ve Z(w) ∈ ℂ duvar empedansıdır.

Z(w) := $\beta(w) + \frac{\alpha(w)}{w} i$

Γ_Z üzerinde sınır koşulu, viskoelastik malzemelerin muhafaza duvarlarındaki emilim davranışını modellemeye imkanı verir. Bunlar gürültüyü azaltmak için kullanılan pasif sistemlerdir. $\beta(w)$ ve $\alpha(w)$ viskoz ve elastik yanıtar ile ilgilidir. Her ikisi de açısal frekans w'nin pozitif fonksiyonlardır. Bizim problemimizde F(x), N_a Dirac delta ölçülerinin $\{x_1^a, \dots, x_{N_a}^a\}$ verilen noktalarında, $\{u_1, \dots, u_{N_a}\}$ kompleks genlikleri ile belirlenen doğrusal kombinasyonlarıdır:

$$u_i \in \mathbb{C} \; olmak \text{ üzere}, \quad F(x) = \sum_{i=1}^{N_a} u_i \delta x_i^a(x),$$

Bu, yüksek sesli hoparlörleri akustik monopoller olarak kabul eder. Gürültünün aktif kontrolünü optimal bir kontrol problemi olarak belirtmek için kaynak terim F(x) i tanımlayan aşağıdaki seçimleri yaparız:

- $Sistem\ durumu$: Ω_F üzerinde $P(x)$ $basıncıdır.$
- $Kontrol\ değişkeni\ u$: $Hoarlörlerin\ kompleks\ genliklerinin\ vektörüdür.$

$$u = (u_1, \dots, u_{N_a}) \in \mathbb{C}^{N_a},$$

Kabul edilebilir kontroller $U_{ad} \subseteq \mathbb{C}^{N_a}$ bir konvex kapalı kümedir ;

- Durumu kontrol eden sistem modeli Helmholtz problemidir.
- Bir z gözlemi Ω_F içindeki verilen $\{x_1^s, \dots, x_{N_s}^s\}$ noktalarına yerleştirilen N_s mikrofonlarındaki basınç değerlerinin kümesidir. Biz onu aşağıdaki gözlem operatörü ile ilişkilendiriyoruz:

$$z = CP(x) = (P(x_i^s), \dots, P(x_{N_s}^s)) \in \mathbb{C}^{N_s}$$

Basıncı x_i^s noktalarında değerlendirmek hoparlörlerin konumlarından farklı oldukları sürece mantıklıdır. Helmholtz probleminin tek bir çözümü vardır.

- Minimize edilecek bedel (amaç) fonksiyonu gözlemlere ve belkide kontrolün kendisine bağlıdır:

$$J(u) = \Phi(P(u), u) = \frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{v}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_a}|P(u;\ x_i^s)|^2 + \frac{v}{2}\sum_{i=1}^{N_a}|u_i|^2$$

Burada $v \geq 0$ olmak üzere ağırlık faktörüdür. O zaman optimal kontrol problemi u_{op} olarak bulunur, öyle ki aşağıdaki minimizasyon denkleminin her hangi bir çözümüdür:

$$J(U_{op}) = \inf_{u \in U_{ad}} J(u)$$

4.4. Halk Sağlığında Optimal Kontrol

Difuzyona uygun uzay-zaman dağılımlı modeller salgın hastalıkları araştırmak için kullanılmaktadır. Murray ve arkadaşları (1985) ilk kez, kısmi diferansiyel denklemleri, tilki popülasyonlarındaki kuduzun mekânsal yayılımını incelemek için kullanmışlardır. Evans ve Pritchard bu modeli itlaf ve karantinada başlangıç koşullarının kontrolüne uygulayarak enfekte popülasyonu istenen bir profile getirdiler. Murray'in çalışmalarının diğer genişletilmiş uyarlamaları çevresel ve habitat heterojenliği alanında olmuştur. Bu modellerde enfeksiyona duyarlı nüfus(populasyon) (S) , enfekte nüfus (I) ve iyileşen nüfus (R) ile gösterildiği için sonradan bu modele S-I-R denilmiştir. 1981 de Webb (G. F. Webb,1981) aşağıdaki doğrusal olmayan KTDD sistemini verilen başlangıç koşulları ile akış sınır değerleri olmaksızın analiz etmiştir:

$$S_t(x,t) = S_{xx}(x,t) - aS(x,t)I(x,t) \qquad t \geq 0, -L \leq x \leq L$$

$$I_t(x,t) = I_{xx}(x,t) - aS(x,t)I(x,t) - \lambda I(x,t)$$

$$R_t(x,t) = R_{xx}(x,t) + \lambda I(x,t)$$

$$S_t(\pm L\,,t) = I_x(\pm L\,,t) = R_x(\pm L\,,t) \qquad t \geq 0,$$

$$S(x,0) = S_0(x), \quad I(x,0) = I_0(x),\ R(x,0) = R_0(x) \qquad -L \leq x \leq L$$

Burada enfeksiyon oranı a ve kaldırma oranı α pozitif sabitler olarak verilir ve ilk popülasyonlar $S_0(x)$, $I_0(x)$;, $R_0(x)$ negatif olmayan ve [-L , L] üzerinde sürekli olduğu kabul edilir. Webb yukarıdaki sistem için bir ten çözüm olduğunu göstermiştir. $t \geq 0$ ve t sonsuza giderken S(x,t) nin x için S_∞(Bir pozitif sabit fonksiyon) a düzgün yakınsak olduğunu ve I(x, t) nin x için $I_\infty(\,[-L, L]\ aralığında\ 0\ a\ eşit\,)$ a düzgün yakınsak olduğunu gösterdi. Bu nedenle t sonsuza giderken enfeksiyonun ona duyarlı hastalar için değil asla hastalıkla teması olmayanlar için ortadan kalkar. 1987'de Fitzgibbon ve Morgan bu modeli keyfi boyutta sınırlı alanlar için genişlettiler ve Webb'inkine benzer asimptotik sonuçları kanıtladılar. 2002 de M. Bendahmane ve arkadaşları doğrusal olmayan KTDD' li reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin en az bir zayıf çözümünün varlığını L^1 türü veri ve akış sınır koşulu olmaksızın ispatladı.

RL Miller Neilan Ağustos 2009 da doktora tezinde optimal kontrol teorisine Webb'in katkılarıyla giren, Fitzgibbon, Morgan vve arkadaşlarının geliştirdiği bu modeli kuduz hastalığına enfekte olan bir populasyon için uyguladı. Enfekte olmuş bu nüfusu en aza indirmek için kontrol stratejileri tasarladı, diğer bir amaç maliyeti en aza indirmek olarak belirtildi. Tezinde belirttiği bu modelde konveksiyon-difüzyon hareketi terimleri ile akış sınır şartları olmaksızın üçlü parabolik kısmi diferansiyel denklem sistemini kullanarak hem zaman hem de uzaydaki hastalığın yayılmasını tanımlamaktadır. Aşının etkileri modelde bir kontrol değişkeni olarak alınmıştır. Durum değişkenleri duyarlı, enfekte ve immün bireylerin sayısını takip etmektedir. Bir amaç fonksiyonu tasarlanmış, aşının optimal stratejisi ile kontrolün karakterizasyonu için ayrıntılı analizler veren bu çalışmada model ve optimal kontrol sonuçları, raccoonlar arasındaki kuduzun yayılmasına, oral aşı yemlerinin zamanlamasını ve yerleştirilmesini belirleyen kontrol fonksiyonu ile uygulanmaktadır. Sonuçlar, hem düzenli hem de düzensiz kuduz yayılımı modelleri için maliyet-etkin aşı dağıtım stratejilerini göstermektedir. Çalışmada hem homojen hem de heterojen mekansal alanlarda optimal aşılama rejimini araştırmak ve hangi uzaklıktaki rakun yerdeğişmelerinin optimal stratejileri etkileyebileceğini belirlemek hedeflenmiştir. S-I-R modelini aşağıdaki gibi uygulamıştır:

S, I, R verilen bir nokta ve bir zamandaki duyarlı, enfekte olmuş veya bağışık populasyon sınıflarını göstersin. R^n kümesinde bir açık ve sınırlı alt küme **Ω** olsun.

$Q = \Omega X(0, T)$ kümesini belirli bir $T > 0$ zamanı için düzenleyelim. $V(x, t)$ kontrolü verildiğinde, ona eşlik eden durum değişkenleri $(S, I, R) = (S, I, R)(v)$ aşağıdaki sistemi sağlar:

$$(x, t) \in Q \text{ için} \qquad L_1S = b(S + R) - \mu_1 S - \beta SI - avS,$$
$$L_2I = \beta SI - \mu_2 I$$
$$L_3R = -\mu_1 R + avS$$

Burada L_k operatörleri $k = 1, 2,3$ için

$L_k u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^k u_{x_i}\right) x_j + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^k u\right) x_i$ Şeklinde tanımlanır. Başlangıç koşulları ve akışsızlık sınırları aşağıdaki şekilde verilir:

$$x \in \Omega \ için \ S(x,0) = S_0(x), \quad I(x,0) = I_0(x), \ R(x,0) = R_0(x)$$

$$\partial\Omega X(0,T) \text{ üzerinde } \frac{\partial S}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v} = 0, \ \frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

Burada sadece S ve R nin doğum verdiği kabul edildi. b parametresi doğum oranı, μ_1 doğal ölüm oranı ve μ_2 ise hastalıktan yükselen ölüm oranıdır. Yatay sıklık terimi BIS duyarlıların enfeksiyon oranını gösterir. Basit kitlesel eylem yasasının kitlesel eylem katsayısı ile uygulandığı varsayılıyor. Kontrol fonksiyonu v, duyarlı popülasyonun aşılama oranını temsil eder. Duyarlı populasyonun etkili bir şekilde aşılanma oranının, toplam duyarlı popülasyon büyüklüğü ile orantılı olduğu varsayılmaktadır. Orantı sabiti, a> 0 için av olarak alınır. Sınır şartları Popülasyonun sınır boyunca yayılmadığını ima eder. $\partial\Omega$ üzerinde dıştan normal vektör η ile gösterilir.

O zaman v bileşenleri $v_i = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}\eta_j\right)$ olan dıştan konormal vektördür.

Makul kontroller sınıfı bazı pozitif v_{max} sabitleri için

$$U = (v \epsilon L^{\infty}(Q) | v: Q \ \rightarrow [0, v_{max}])$$

olarak tanımlanır. Bir epidemik patlamayı T uzunluğundaki bir zaman aralığında kontrol edebilmek için en iyi strateji enfekte olan insan sayısını ve aşılama bedelini bu zaman aralığı için minimize etmek olabilir. Büyük bir duyarlı nüfusun sürdürülmesi de önemli olabilir. Bu nedenle, amaç fonksiyonu minimum yapılır:

$$J(v) = \int_Q \left(AI - BS + C(v)\right) dxdt$$

Burada A, B sabit ağırlıklar ve C(.) düşük yarı sürekli konveks bir fonksiyondur ve aşı maliyetini gösterir.

4.5. Tıpta Optimal Kontrol

Kanser, hücrelerin kontrolsüz bölünmesi ve çoğalması ile ortaya çıkan ve genetik ve çevresel koşulların etkisi altında olan kompleks bir hastalıktır. Bilinen 100’den fazla kanser türü olmasına ve belli tipteki kanserler için olabildiğince standart yaklaşımlar geliştirilmesine rağmen kanser aynı zamanda kişisel bir hastalıktır. Dünya üzerindeki hiçbir insanın DNA’sı birbirine benzemediği için kişilerin benzer tedavilere farklı cevaplar vermesi şaşırtıcı olmayan bir gerçektir. Teknolojinin ilerlemesi ile birlikte günümüzde var olan tedavilere ek olarak yeni tedavi yöntemleri geliştirilmektedir. Standart olarak kabul edilen kemoterapi, radyoterapi ve cerrahi yöntemlere ek olarak aşılar, biyolojik, hormonal, hedeflenmiş ve gen terapiler giderek artan sayıda kullanılmaya başlanmıştır. (Baykara O. 2016)

Medikal araştırmaların gelişmesi ile tıpta tedavi süreçlerinin modelleme çalışmaları hızla artmaktadır. Mümkün olan en hassas modeli arayıp, optimal çözüm bulma problemleri matematiksel düşüncenin bu alanda uygulamalarını devreye almıştır. Matematiksel modellemenin karmaşık sistemleri çözümleme üstünlüğü, deneysel ya da diğer maksatlarla büyük bedeller gerektirmemesi tıpta da tercih edilmesinin en önemli nedenleri arasında gelmektedir.

Her ne kadar adi diferansiyel denklemlerle yapılan modeller kullanışlı olsa da bu denklemlerin uzaysal düşüncede yetersiz kalması en önemli sakınca olarak ortaya çıkmaktadır. Örneğin kemoterapide can kaybına hastalardaki toplam tümor sayısı değil, başlangıçtaki tümörlerin dokulara saldırması ve vucudun en uzak yerlerine yayılması (metastaz)ve ikincil tümörler kurması sebep olmaktadır. Kanser hastalarında can kaybının ana sebebi metastaz kütleler olmaktadır. Kanser istilası ve metastaz yayılma iki önemli ve özü itibariyle mekansal-uzaysal süreçlerdir ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tasarlanabilen modellere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu tür modellerde bir n popülasyonu; bir, iki veya üç boyutlu uzayda mekansal konumlarda sırasıyla (x), (x, y) veya (x, y, z) olarak gösterilir ve sıklıkla bir yoğunluk veya bu pozisyonda maksimum mevcut hacim oranı olarak tarif edilir, % 0 -% 100 veya 0-1 arasında ölçeklenir. (Heiko Enderling, Mark A.J. Chaplain, 2014) n değişkeni sadece zamandaki değişimlere bağlı değil, ayrıca mekansal boyuttaki varyasyonlara da bağlıdır. Bu nedenle n’ ye bağlı denklem onun bağımsız değişkenlerinin kısmi türevlerini de içerir. Dokulara istila kanserin büyümesi ve yayılmasında anahtar kavramdır ve başarılı bir metastaz tanısı için çok önemlidir. Bu istila süreci üç bileşenlidir: kanser hücreleri çeşitli matriks bozunması yapan enzimlerini salgılarlar (MDEs); (MDEs) ler çevredeki dokuları veya hücre dışı matrisleri(ECM) tahrip eder; kanser hücreleri, hızlı üreme ve göç yoluyla çevre dokuya aktif olarak yayılır.

4.5.1. Kanser İstilasının Matematiksel Modellenmesi

Bilim dünyasında kanser istilasını ilk modelleyen bilim insanlarının Gatenby ve Gawlinski olduğu kabul edilmektedir (Gatenby RA, Gawlinski ET. 1996,). Bu modelde aşırı H^+ iyonlarının lokal dokuyu bozduğu, kanser hücrelerinin bu alana yayılmasına ve çoğalmasına izin verdiği temel alınmıştır. Kanser hücrelerinin uzay-zaman gelişimini modelleyen kısmi türevli denklem sistemi aşağıdaki gibi oluşturuldu:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \overbrace{\nabla.(D_c(1-v)\nabla c}^{\text{doğrusal olmayan difüzyon}} + \overbrace{\rho c(1-c)}^{\text{lojistik büyüme}}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \overbrace{\nabla^2 m}^{\text{difüzyon}} + \overbrace{\delta(c-m)}^{\text{üretim\&çürüme}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \overbrace{v(1-v)}^{\text{lojistik büyüme}} - \overbrace{\gamma mv}^{\text{bozulma}}$$

Burada D_c sabit difüzyon katsayısı, ρ: kanser hücresi çoğalma oranı, δ : H^+ iyonları üretimi oranı (bozulma oranına eşitt olarak ta alınabilir) ve γ hücre dışı matriks bozulma oranıdır. Yukarıdaki denklemlerden görüleceği üzere kanser hücreleri hızla çoğalır ve doğrusal olmayan bir difüzyona uğrarlar (normal doku yoğunluğuna bağlı olarak- normal dokunun yüksek yoğunluğu düşük difüzyon, normal dokunun düşük yoğunluğu yüksek difüzyon verir) ve normal dokuyu dağıtan ve bozan H+ iyonlarını salgılarlar. H^+ iyonları da doğrusal bir bozulmaya uğrarlar ve normal doku tekrar sağlığına kavuşmak adına kanser hücresinin yokluğundan faydalanarak lojistik bir büyüme yapar. Gateby ve Gawlinski' nin modelinde basitlik için H^+ üretimi ve bozulmasının aynı oranda olduğu farz edilmiştir. yukarıda bahsedilen kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin hesaplamalı simülasyonu ve matematiksel analizi (dalga teorisi) kombinasyonuyla, Gatenby ve Gawlinski, normal ve kanserli doku arasındaki ara yüzeyde bir alt hücresel boşluğun varlığını öngörmüştür.

Sonraki KTDD modelleri bu fikri geliştirdi ve c kanser hücreleri ile m bozucu enzimler ve v dokusu arasındaki etkileşimi haptotaksis sürecinin kanser hücresi göçünde önemli bir rol oynadığı reaksiyon-difüzyon-taksis modellerini kullanarak araştırdı. Perumpanani ve arkadaşları(1996) bu çalışmayı ilk yapanlar oldular. Hesaplamalı simülasyonlar ve dalga yayılma analizinin bir araya getirilmesiyle bir kez daha, kanser hücrelerinin dokuya girme hızının ve derinliğinin tahminleri yapıldı. Haptotaksisin rolü özellikle Anderson ve arkadaşlarının (2000) yaptığı çalışmada ele alındı ve bu çalışmada 2 boyutlu bir modelleme ilk kez kullanıldı ve dokunun etkisi (ekstrasellüler matriks) açık bir şekilde araştırıldı. Bu modelde sistemi belirten KTDD'ler aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \overbrace{D_c \nabla^2 c}^{\text{difüzyon}} - \overbrace{\gamma \nabla (c \nabla v)}^{\text{haptotaxis}}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \overbrace{\nabla^2 m}^{\text{difüzyon}} + \overbrace{\alpha c}^{\text{üretim}} - \overbrace{\beta m}^{\text{çürüme}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \overbrace{\eta m v}^{\text{bozulma}}$$

Ortaya konulan bu modele sadece istilada kanserli hücre göçünün rolüne odaklanmak için hücre çoğalması dahil edilmemiştir. Chaplain ve arkadaşları(2001), Chaplain ve Lolas (2005), Frieboes ve arkadaşları(2006), Gerisch and Chaplain(2008) ve Andasari ve arkadaşları(2010) diğer süreklilik yaklaşımları ile farklı KTDD li metodlar üzerine çalışmalar sunan bilim insanları arasındadır.

4.5.2. Tümör Büyümesi İçin Ayrık Modeller

Anderson ve arkadaşları kanser istilasını 2 boyutlu olarak sürekli bir modelle açıkladıkları çalışmasında KTDD'li modelden bir ayrık model de türetmişlerdir. Bu modelin hesaplamalı similasyonları bireysel kanser hücrelerinin cerrah tarafından "algılanabilir" olan kanserli dokunun "görünür bir sınırının" ötesine geçebileceği gözlemini keşfetti. Bu muhtemelen tesadüfi olaylar konusunu ve istila modellerinde olasılığı araştıran ilk makaleydi.Şekil 8 den görüldüğü üzere ayrık modelin tesadüfi doğası yüzünden bireysel kanser hücreleri matematiksel olarak dokuyu tahmin edilenden daha büyük bir derinlikte delme yeteneğine sahipler. Diğer ayrık istila modelleri çeşitli farklı teknikler kullanılarak geliştirildi. Bunlardan bazıları Potts, hücresel otomat ve ajan bazlı, hibrid sürekli- ayrık yaklaşımlar ve bireysel, güç –tabanlı modeller olarak sayılabilir.Ayrık modellerin sürekli modellere olan üstün tarafı ayrık modellerin her bir hücre düzeyinde problemi düşünmeleri olarak söylenebilir. Ayrık modelleri kullanarak mutasyon gibi önemli olayların yanında farklı fenotipik özellikler de dikkate alınır. Ayrık modellerin çok ölçekli modellerin doğmasına sebep olduğu söylenmektedir. Hibrit sürekli-ayrık modeller de, son 15 yılda, katı tümör büyümesi ve gelişiminde çok önemli başka bir olay olan anjiyojenez'in modellenmesi için geliştirilmiştir. Anderson ve Chaplain'in (2008) yeni ufuklar açan makalesi, endotelyal hücrelerin uzay-zaman etkileşimlerini tanımlayan bir KTDD sistemini düşündüler:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \overbrace{D_c \nabla^2 n}^{\text{tesadüfi ilerleme}} - \overbrace{\nabla.(\chi(a) n \nabla a)}^{\text{kemotaxis}} - \overbrace{\nabla.(\rho n \nabla v)}^{\text{haptotaxis}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \overbrace{\beta n}^{\text{üretim}} - \overbrace{\gamma n v}^{\text{emiş}}$$

Emiş

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \overbrace{\eta n a}^{\text{emiş}}$$

Burada n: endotel hücreleri, v: hücredışı matris , a: tümor anjiojenik faktör (TAF) ile gösterildi.

Endotelyal hücreler kemotaksis yoluyla yönlendirilmiş göçün yanı sıra TAF gradyanlarına (örn. VEGF) ve haptotaxise yanıt olarak rastgele bir ilerleme yaparlar. Bu tür ayrık modeller artık kılcal damarlar içindeki kan akışının etkilerini içerecek şekilde geliştirilmiştir. Literatürde, tümör kaynaklı anjiyogenez ve vasküler tümör büyümesinin çeşitli yönlerine odaklanan birçok tamamlayıcı model bulunmaktadır. Ayrıca bu ayrık anjiyogenez modelleri, kan damarlarının gelişiminin önemli rol oynadığı örneğin yara iyileşmesi ve retinal gelişim gibi, diğer sistemleri modellemek için uyarlanmış ve geliştirilmiştir(Watson MG, McDougall SR, Chaplain MAJ ve arkadaşları. 2012).

4.5.3. Kanser Kemoterapisi için Optimal Kontrol

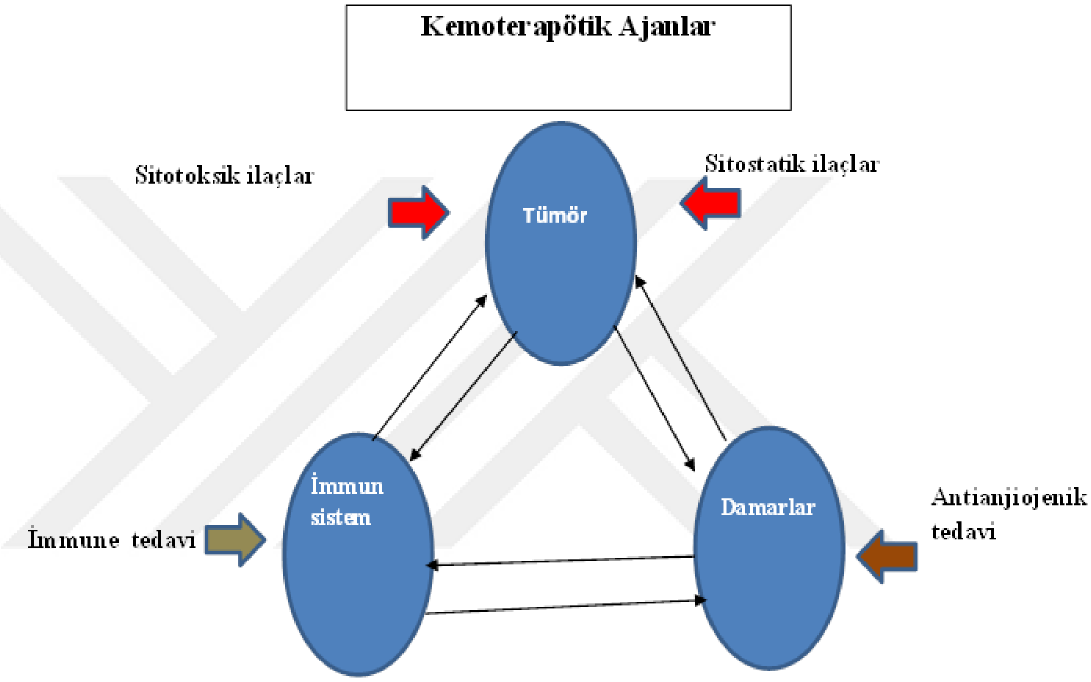
Kanser Kemoterapisi için yapılan medikal tedavide optimal kontrol süreci şu sorularla belirlenir:

- Ne Kadar? (Doz ne kadar olacak?)
- Ne Sıklıkta? (Zamanlama nasıl olacak?)

- Hangi Sırada? (Sıralama nasıl belirlenecek?)

Optimal kontrol probleminin temel sorusu da şu şekilde ifade edilebilir: Doz ve uygulama takvimini modüle ederek kemoterapinin anti-tümör, anti-anjiyojenik ve proimmun etkilerini nasıl optimize edebiliriz?

Kanserli hücrelerin tedavi sürecinde kullanılan ilaçlar sitotoksik ve sitostatik ilaçlar olarak sınıflandırılır.



Şekil 3.4. Kanser Kemoterapi Süreci

Odacıklar(Compartments): Hücre döngüsünün fazlarının demetleri veya kemoterapik olarak duyarlı hücrelerin farklı tiplerinin oluşturduğu demet ya da kümelerin bulunduğu odacıklar.

Durumlar: $N = (N_1, ..., N_n)$ İlgili odacıktaki ortalama kanserli hücre sayısını gösterir.

Kontroller: $u = (u_1,...,u_r)$ Farklı ilaçların ilaç doz oranlarını/konsantrasyonlarını/ etkilerini gösterir.

Dinamikler: Odacıklardaki ortalama kanserli hücre değişimlerini tanımlar

Kanser kemoterapi tedavileri için matematiksel modelleme çabaları uzun bir geçmişe sahiptir. Seksenlerden sonra artan çabalar kapsamlı araştırmaları da beraberinde getirmiştir. Kanser kemoterapisi için yeni modelleme çabalarında hücreye özgü yöntemler benimsenmiş ve hücre döngüsü kontrol nesnesi olarak ele alınmıştır. (A.

Swierniak 1995) Her hücre, hücre doğumundan hücre bölünmesine kadar bir dizi fazdan geçer. Başlangıç noktası büyüme fazıdır (G_1). Bundan sonra hücre DNA sentezinin olduğu bir S fazına girer. Daha sonra hücrenin mitoz veya bölünmenin olduğu M fazı için hazırlandığı ikinci bir büyüme fazı olan G_2 gerçekleşir. İki yavru hücrenin her biri ya G_1 fazına yeniden girebilir ya da bir süreliğine G_1'e yeniden girinceye kadar ayrı bir faz G_0 içinde durağan kalabilir, böylece tüm süreci yeniden başlatabilir. Bu ayrımlar çok önemlidir çünkü ilaçların çoğu hastalığın belirli bir fazında etkin olmaktadır. Modellenen ilaç tipine ve matematiksel modellerde detay derecesine bağlı olarak hücre döngüsünün fazları kümeler halinde birleştirilir. Çoğu zaman G2 ve M, bu fazlar arasındaki sınırların oluşturulması zor olduğundan ve örneğin Paklitaksel (Taxol) gibi birçok öldürücü maddenin esasen bölünme sırasında hücreleri etkilediği ve dolayısıyla G2 / M'ye özgü olduğu için bir kompartımanda birleştirilir. Bu, hücre duvarı mitoz M'de çok ince ve gözenekli hale geldiğinden ve böylece hücrenin bir istilaya karşı daha savunmasız hale gelmesinden dolayı biyolojik olarak anlamlıdır. Açıkça ilaç tedavisi hücre döngüsünü birçok farklı yolla etkilemektedir, ancak burada sadece en temel yön dikkate alınır: hücre öldürme.

Ledzewicz ve Schattler (2004) içinde farmokinetik ve farmodinamik modellerin de olduğu basit bir kanser terapi modeli için optimal kontrol analizi yaptıkları çalışmasında bu modelin geometrik özelliklerinin optimal kontrolün türü üzerinde doğrudan etkisi olduğunu gösterdiler. Onlar belirli bir G_2/M türü öldürücü ilaç ile kanser kemoterapisinin matematiksel modelini tasarladılar. Kurdukları model olasılıksaldır. Sistemde durum bir odacıktaki ortalama kanser hücresi sayısı, kontrol değişkeni ise ilacın etkisi- dozudur. İlacın aktif bileşeni sitostatik bir maddedir ki o hem kanser hücrelerini hem de ona benzer sağlıklı hücreleri öldürebilir. Tedavinin tıbbi amacı belli bir tedavi periyodu sonunda ilacın öldürdüğü kanser hücresi sayısını maximize ederken toksisiteyi normal doku için kabul edilebilir düzeyde tutmaktır. Bu model daha önce Swierniak (1995) tarafından önerildi ve analiz edildi. Bu modelde amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir (Swierniak, Ledzewicz, Schättler 2003):

$$J(u) = rN(T) + \int_0^T qN(T) + \ell u(t)dt \ \rightarrow min$$

Burada r_i ve q_i negatif olmayan sayılar, ℓ bir pozitif sabit olmak üzere $r = (r_1 , r_2)\ ve\ q = (q_1, q_2)$ satır vektörleridir. Bir tedavi sürecinin amacı toksisiteyi normal doku için kabul edilebilir seviyede tutarak kanseri öldürmek ya da daha fazla yayılmasını engelleyip minimumda tutmaktır. $rN(T)$ değeri belirli bir [0, T] periyodunda uygulanan tedavi sonrasında ortalama olarak toplam kanserli hücre sayısını göstermektedir. İntegral altına eklenen $qN(T)$ değeri tedavideki ortalama kanser hücre sayısıdır. Bu terim kanser hücrelerinin sayısının ara dönemlerde kabul edilemez derecede yüksek seviyelere çıkmasını önlemek için tasarlanmıştır. Mutlak bir üst sınır gerektirmekten ziyade, bu "yumuşak" kısıt, kanser hücrelerini dolaylı olarak en aza indirir. Tedavinin toksisite yan etkisi son terimle dolaylı olarak modellenmiştir. Ayrıca u ilaç dozajını toksisitenin ölçüsü olarak daha uygun görülmüştür çünkü ilacın yan etkileri kopyalanacaktır ve hücre ölümleri türünden ölçülmesi mümkün olmayacaktır.

Maximum prensibi optimallik için gerek koşulu verir. Hamilton denklemi:

$$H = qN + \lambda AN + \sum_{j=1}^{m} (\ell_j + \lambda B_j N) u_j$$

Eş denkleme λ gibi öyle bir çözüm vardır ki,

$$-\frac{\partial H}{\partial N} = -q - \lambda(A + \textstyle\sum_{j=1}^{m} B_j u_j)$$

optimal kontrol Hamilton denklemini minimize eder.

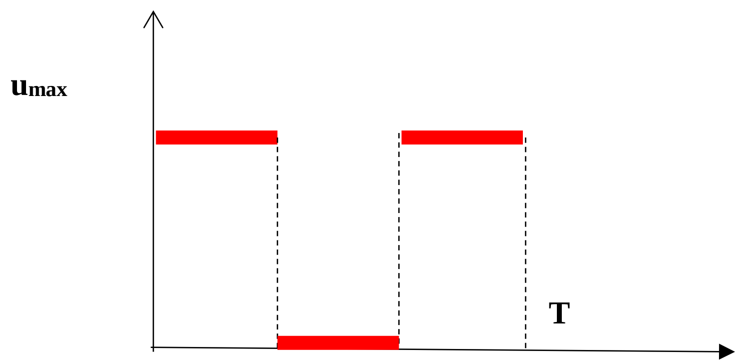
Geçiş fonksiyonu $\Phi_j(t) = \ell_j + \lambda(t) B_j N(t)$ olmak üzere;

Bu şartlar altında optimal kontrolü veren $u_j^*(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi buldular:

$$u_j^*(t) = \begin{cases} 0 & \Phi_j(t) > 0 \\ ? & \Phi_j(t) = 0 \\ u_{max} & \Phi_j(t) < 0 \end{cases}$$

Optimal kontrol için adaylar arasından seçim yapılır

4.5.4. Bang-Bang Kontrolü

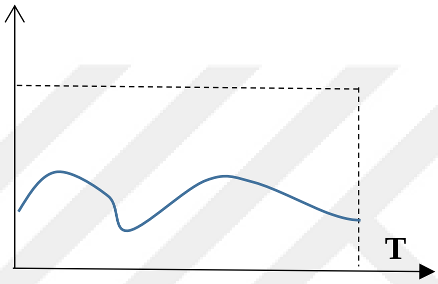


Şekil 3.5. Bang Bang Kontrol Süreci

Bang- bang kontrolü: Maximum doz ile yapılan tedavi protokolünde, maximum doz ile terapi uygulanır ve arada doz kesilerek tedavi tekrar uygulanır.

4.5.5. Singular(Tekil) Kontrol

Bir açık aralık üzerinde $u_j^*(t)$ fonksiyonunun singular olması $\Phi_j(t) \equiv 0$ için gerek ve yeter şartı belirler. Türevler de sıfır olacağı için bu bir kontrolü belirleyebilir. Bu tür kontrollere singular(tekil) denir.



Şekil 3.6. Singular Kontrol Süreci

Singular (Tekil kontrol): Değişen düşük dozlarda sürekli verilen ilaç ile tedavi uygulanır.

Özel durumda $\Phi(T) = \ell > 0$ olduğunda, optimal kontroller u(t) ≡ 0 olan bir aralıkla sonlanır. (Sezgisel olarak, farmakokinetik bir modelin eklenmesi, kontrolün etkinliğinde bir gecikme yaratır ve bundan dolayı, hiçbir yararı olmamakla birlikte, yine de olumsuz yan etkiler olduğu için, tedavinin sonuna kadar ilaçların uygulanması optimal değildir.) Optimal kontrol geçiş fonksiyonunun analiz edilmesi ve tüm bu kontrol adayları arasından sentezlenerek elde edilir. Örneğin kemoterapik olarak duyarlı hücrelerden oluşan homojen tümörlar varsa bang bang kontrol optimal çözümdür. Yani yüksek dozda ilaç ve ara verilerek tedavi optimal çözümü gösterir. Diğer yandan ilaç duyarlılığı farklı farklı olan tümörlere sahip olan hastalarda ilaç dirençleri artan hücre sayısı yükselirse singular(Tekil) kontrol optimal çözümdür. Yani düşük dozlarda sürekli bir tedavi yöntemi optimal çözüm olacaktır. Eğer ilaç direnci çok güçlü (baskın) hale gelirse, kemoterapi sadece kaçınılmaz olanı sonu geciktirebilir.

Tümör anti-anjiyogenez: Bu (Hahnfeldt, Panigrahy, Folkman, Hlatky, Cancer Research, 1999) çalışmayı geliştirip aşağıdaki modeli ortaya koydular:

$\dot{p} = -\xi p ln\left(\frac{p}{q}\right)$ $\qquad$ p: *tümör hacmi*

$\dot{q} = bp - \left(\mu + dp^{\frac{2}{3}}\right)q - \gamma uq$ $\qquad$ q: taşıma kapasitesi

u: *anti − anjiyojenik doz oranı*

ξ: *tümör büyüme parametresi* $\qquad$ γ: *anti − anjiyojenik engel parametresi*

b: *endojenöz uyarıcı* (doğum) $\qquad$ b: *endojenöz engelleyici* (*doğum*)

μ: *doğal* ölüm $\qquad$ p, q : mm^3 *türünden hacim*

Optimal kontrol problemi aşağıdaki modelle kurulur: Herhangi bir T sonlu zamanı için p(T) ‘yi tüm

$$u : [0, T] \rightarrow [0, u_{max}]$$

fonksiyonları üzerinde minimize edelim. u fonksiyonları

$\int_0^T u(t)dt \leq A$ denklemini

$\dot{p} = -\xi p ln\left(\frac{p}{q}\right)$ $\qquad$ $p(0) = p_0$ ve

$\dot{q} = bp - \left(\mu + dp^{\frac{2}{3}}\right)q - \gamma uq$ $\quad$ $q(0) = q_0$ şartları altında sağlasın.

Eğer u_* fonksiyonu bir I açık aralığında singular bir çözüm ise güçlendirilmiş Legendre-Clebsch şartları sağlanır.

Elde edilen sonuçlar şu şekilde yorumlanmıştır: Optimal kontrolün yapısı parametrelere göre oldukça güçlüdür. Geniş bir tümör hacimi için düşük düzeyde dozlar daha iyi sonuçlar verir. Yüksek dozlarda uygulamalar yerine verilen bir dozdaki engelleyicileri uzatılmış bir zaman aralığında uygulamak optimum yoldur. Tümor hacmi ile taşıma kapasitesi arasında maximum tümor azaltımını mümkün kılan bir optimal ilişki vardır ve bu kemoterapi ve radyoterapi kombinasyonu altında korunur. Kemoterapi ile kombinasyon aşağıdaki sistemle ifade edilir: (d’Onofrio ve H. Maurer 2009, MBE 2011) p(T) fonksiyonu

$\dot{p} = -\xi p ln\left(\frac{p}{q}\right) - \varphi pv$, $\quad$ $p(0) = p_0$

$\dot{q} = bp - \left(\mu + dp^{\frac{2}{3}}\right)q - \gamma uq - \eta qv$, $\quad$ $q(0) = q_0$

Anjiojenik engelleyiciler:

$0 \leq u \leq u_{max}$, $\qquad$ $\int_0^T u(t)dt \leq y_{max}$

Sitotoksik ajanlar veya diğer öldürücü terim:

$0 \leq v \leq v_{max}$, $\int_0^T v(t)dt \leq z_{max}$

(Jain ve arkadaşları, 2006) Bir τ parametresine bağlı 1-boyutlu minimizasyon problemi olarak Optimal protokolü aşağıdaki gibi ifade ettiler:

- Başlangıçta kemoterapi hiç verilmez. v = 0, ve optimal anjiojenik terapi yanlız başına uygulanır.(Tam doz : Tekil kontrol)
- Belirlenen bir τ zamanında kemoterapi başlatılır, $v = v_{max}$, tüm ilaçlar bir sezonda verilir.

Çözümün optimal olması için değer fonksiyonunun Hamilton-Jacobi-Bellman denklemini(HJB) sağlaması gerekir.

Bir aralıkta sınırlı, ölçülebilir $u: [0, T] \to U \subset \mathbb{R}^m$ fonksiyonlarının kabul edilebilir kontrolleri

$J(u) = \int_{t_0}^T L(s, x(s), u(s))ds + \varphi(T, x(T))$ fonksiyonunu minimize ederler.

Eğer değer fonksiyonu (t, x) noktasında türetilebilir ise o zaman aşağıdaki birinci derece kısmi türevli diferansiyel denklemi sağlar:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \min_{u \in U}(\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)f(t,x,u) + L(t,x,u) \equiv 0$$

HJB denkleminin çözümü (V, u) ikilisidir. V türetilebilir fonksiyon ve u kontrol fonksiyonu minimum probleminin çözümüdür. Birinci derece kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde genellikle tercih edilen yol denklemi adi diferansiyel denklemler türünden ifade edip çözmektir. HJB denklemi bir optimizasyon problemi ifade eden birinci derece diferansiyel denklemdir. Sonuç olarak düşük boyutlu, minimal parametreli modeller ile tam bir optimal çözüm mümkün olmaktadır. Optimal çözümler bilgisi medikal bir bakış açısı sağlar. Bölgesel sentez çabalarıyla ve optimallik ispatlarıyla bağlantılı ilginç matematiksel problemlere ilgi yükselmektedir.

4.5.6. Ultrasound Tedavide Optimal Kontrol

Kanserli hücrelere uygulanan ultrasound tedavide sıcaklık seviyesi yükseltilerek kanserli dokuları yok etmek amaçtır. Ultrasound dalgaları hücrelere nakledilirken vucud bir enerji dalgası da absorbe eder ve bu ısıya dönüşür. Bu tedavide çok geniş bir alana yayılan kanserli hücrelerin tedavisinin bugünkü tekniklerle uzun sürmesi handikap olarak belirmektedir. Ultrasound tedavide optimal kontrol problemi kanserli hücreleri yok ederken sağlıklı hücrelere zarar vermeyecek yükseklikte sıcaklık üreterek, en fazla sayıda hücre için en az zaman harcamak olarak ifade edilebilir. Tedavi sürecinde sağlıklı hücrelerde görülen kızarıklıklar istenmeyen zararlara yol açabilir. Tedavi planlanmasında tedavi alanını ve dokulardaki sıcaklığı hesaplayan matematiksel modeller çoğunlukla yaklaşık hesaplamalar içermektedir. Ayrıca akustik ve termal parametrelerin çoğu dokudan dokuya, hastadan hastaya değişim göstermektedir.

Dalga Alanı Modeli: Helmholtz Denklemi: Durağan ve homojen olmayan bir ortamda doğrusal dalga nakli ve dağılımı aşağıdaki dalga denklemi ile ifade edilir:

$$\nabla.\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right)-\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0$$

Burada P akustik basınç, ρ yoğunluk, c ise ses hızıdır. Ultrasound tedavide enerji aktarımı yapan sistem belirli bir frekansta çalışır, bu nedenle P basıncını zaman harmoniği olduğu zamanda düşünmek doğaldır. Zaman harmonik durumda, r uzaysal (mekansal) değişkeni r = r(x, y, z) ve açısal frekans w olmak üzere $P(r, t) = p(r)e^{iwt}$ dir.

Basıncın mekan bağlantılı parçası Helmholtz denkleminin homojen olmayan bir absorbe edici ortamda çözümüdür:

$$\nabla.\left(\frac{1}{\rho}\nabla P\right)-\frac{k^2}{\rho}p=0$$

Burada yutucu bir ortamda dalga numarası $k = 2\pi f/c + i\alpha$ dır. f ; alanın frekansı ve α ; absorbe katsayısıdır. Doğrusal olmayan dalga nakillerini ve enine elastik dalgaların (Makaslama dalgalar) oluşumunu dikkate almaması Helmholtz modelinin kısıtlarıdır. Makaslama dalgalar yumuşak doku –kemik arayüzlerinden oluşur. Bu dalgalar akustik alan hesaplamalarında genellikle ihmal edilirler.

Termal Model : Bioısı Denklemi: Dokulardaki sıcaklığın gelişimi Pennes Bioısı Denklemi ile karakterize edilir:

$$\rho C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla . k\nabla T - w_B C_B (T - T_A) + Q$$

Burada T = T(r, t) sıcaklıktır, $C_T = C_T(r)$ dokunun ısı kapasitesi, k = k(r) difüzyon katsayısı, $w_B = w_B(r)$ atardamar perfuzyonu, $C_B = C_B(r)$ kanın ısı kapasitesidir. T_A arterial kan sıcaklığı ve Q = Q(r, t) ise ısı kaynağını gösteren terimdir. Bazı kısıtlamalarına rağmen Bioısı denkleminin dokulardaki gelişimi doğru bir şekilde tanımladığı ispatlanmıştır (C.Damianou, K. Hynynen 1993).

(Malinen, 2004) iki adımlı bir yaklaşım sundu. Birinci adım ileri beslemeli (FF) denetim olarak adlandırıldı, amacı istenen sıcaklığı veya termal doz dağılımını hesaplamak olarak belirtildi. İkinci adımda durum tahminli doğrusal quadratik Gausssian geri beslemeli (FB) kontrol kullanıldı, amacı FF aşamasında olabilecek modelleme hatalarını telafi etmek idi.

Malinen, Bioısı denklemini kontrol prosedüründe durum denklemi olarak kullandı. Kontrollü değişkenler, transdüser(aktaraç) uyarımlarının fazı ve genliği idi. Bu yaklaşım birçok geniş boyutlu doğrusal olmayan modelle tanımlanmış optimizasyon problemi ile sonuçlandı. Amaç fonksiyonu istenen ısı dozu ile mevcut termal doz arasındaki hataları ölçüyordu. Dokulardaki termal doz dağılımı amaç fonksiyonu minimize edilerek bulundu.

Dokulardaki sıcaklığı kontrol etmek için

$$J(T, u; t) = \int_0^{t_f} (\|T(t) - T_d\|^2 w + \|\dot{u}(t)\|_S^2) dt$$

Şeklinde bir amaç fonksiyonu verdi. Burada istenen sıcaklık T_d mevcut sıcaklık T(t) ile gösterildi.

Termal doz kontrolü için doğrudan kontrol yöntemi benimsendi, bu yöntemde amaç fonksiyonu

$$J(T, u; t) = \frac{1}{2} \|D - D_d\|_w^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|\dot{u}(t)\|_S^2 \, dt$$

Şeklinde idi. Burada başarılan termal doz D ile, istenen termal doz D_d ile gösterildi. Termal doz optimizasyonu için amaç fonksiyonu:

$$J(D,\dot{u};t)=\frac{1}{2}(D-D_d)^T W(D-D_d)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\dot{u}\,(t)^T S\dot{u}(t)\,dt$$

Burada pozitif tanımlı W matrix termal doz D ve istenen termal doz D_d arasındaki hatayı ceza altına alır ve transducer uyarılarının zaman türevi de S matrisi ile cezalandırılır.

Pratikte optimizasyon sürecinde bazı limitler vardır: Birincisi hem sağlıklı hem de kanserli hücrelerdeki sıcaklık eşitsizlikler ile sınırlandırılmalıdır. İkincisi ultrasaund transducerin ürettiği maximum genlik pratikte kısıtlanır. Bu limitlerde eşitsizlik şeklindeki kısıtlarla çözüme dahil edilebilir.

Malinen tarafından sunulan bu optimizasyon modelinde sağlıklı hücrelerdeki sıcaklık bir algoritma ile doğrudan minimize edilmektedir. Optimizasyon algoritmasında sıcaklık ve maximum girdi genliği eşitsizlik kısıtlarıyla yaklaşımlar uygulanarak limitlendirilmiştir. Optimizasyon algoritmasının 3D similasyonları ile sağlaması yapıldı.Optimizasyon similasyonuna göre 1,5 tan 2,4 cm ye kadar çapı olan doku hacimlerinde uygulanan bir sonikasyon yeterli olduğu görülmüştür. Eşitsizlik kısıtlı yaklaşımlarla dokulardaki sıcaklıklar etkili bir şekilde sınırlandırılmıştır. Bu sayede sağlıklı ve kanserli dokular arasında optimal ağırlıklandırma seçim görevi basitleşmiştir.

4.6. Mühendislikte Optimal Kontrol

4.6.1.Sürekli Karıştırmalı Tank Reaktörünün(CSTR) Optimal Kontrolü

Sürekli kontrol edilen bir tank reaktörünün (CSTR) soğutma hızı manipülasyonuyla sıcaklık kontrol problemini düşünelim. Sıcaklığın optimal kontrol problemi aşağıdaki gibi formüle edilmiştir (Ray, 1989).

Aşağıdaki şartlara maruz :

$$\dot{x}(t)=1-x(t)+ae^{-\frac{\gamma}{x(t)}}-u(t)$$

$$x(0)=1{,}5,\ \ \dot{x}(0{,}5)=1{,}3\ \ \text{s}$$

Amaç fonksiyonu

$$\min_{U(t)} J=\ \frac{1}{2}\int_0^{0,5}[(\ x(t)-1{,}3)^2+\mu u^2(t)]dt\ ,\ \mu>0$$

Reaktör modelinde boyutsuzluk değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$x(t) = \frac{T}{T_f}$, $t = \frac{\tau}{F/V}$, $a = -\frac{\Delta H k_0 V}{\rho C_p T_f F}$

$\gamma = \frac{E}{RT_f}$, $u = \frac{\dot{Q}}{\rho C_p T_f F}$, $x_0 = \frac{T_0}{T_f}$, $x_d = \frac{T_d}{T_f}$

Kullanılan parametre değerleri a = 1000, $\gamma = 10\ ve\ \mu = 0{,}25$

Sistemi temsil eden Hamilton denklemi:

$$H(x(t), p(t), t) = \frac{1}{2}[(x(t) - 1{,}3)^2 + \mu u^2(t)] + p(t)[1 - x(t) + ae^{-\frac{\gamma}{x(t)}} - u(t)]$$

Optimal kontrol kuralının ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \mathrm{H(x(t9,p(t),t)}}{\partial \mathrm{u(t)}} = \mu \mathrm{u(t)} - \mathrm{p(t)} = 0$$

$$\Rightarrow u^*(t) = \frac{p(t)}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 H(x(t), p(t), t)}{\partial u^2(t)} = \mu > 0$$

Optimal kontrol kanunu ifadesi, minimum Hamilton denklemine karşılık gelmesiyle sonuçlanır.

4.6.2. Kimyasal Proseslerde Reaksiyon-Difüzyon Kontrolü

(Griesse ve Volkwein, 2006) ve (Barthel, John ve Tröltzsch, 2010) Reaksiyon-Difüzyon denklemi üzerine çalışmalar yaptılar. Optimal kontrol problemini aşağıdaki gibi oluşturdular: Minimize etmek istediğimiz aşağıdaki amaç fonksiyonu

$$J(u, v, c) = \frac{\alpha_u}{2}\|u - \check{u}\|^2 L_{2(Q)} + \frac{\alpha_v}{2}\|v - \check{v}\|^2_{L_{2(Q)}} + \frac{\alpha_c}{2}\|c\|^2_{L_{2(\Sigma)}}$$

aşağıdaki KTDD' li kısıtlara maruzdur:

$$Q = \Omega\, X\, [0, T]\ \ içinde\ \ u_t - D_1\nabla^2 u + k_1 u = -\gamma_1\, uv$$

$$Q\ \ içinde\ \ u_t - D_2\nabla^2 v + k_2 v = -\gamma_2\, uv$$

$$\Sigma := \partial\Omega\, X\, [0, T]\ \text{üzerinde}\ \ D_1\frac{\partial u}{\partial n} = c$$

$$\Sigma\ \text{üzerinde}\ \ D_2\frac{\partial v}{\partial n} + \epsilon v = 0$$

$$\Omega \; içinde \; u(x,0) = \; u_0(x)$$

$$\Omega \; içinde \; v(x,0) = \; v_0(x)$$

Ayrıca aşağıdaki kontrol kısıtlarına da sahiptir:

$\Sigma \;\; üzerinde \;\; c \in C_{ad} := \{c \in \; L_\infty(\Sigma) : \; c_a \leq c \leq c_b$

4.6.3. Şarap Fermantasyonu Sürecinin Optimal Kontrolü

Reaksiyon-difüzyon sisteminin incelenmesinde şarap fermantasyonu ilginç bir örnek olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürde şarap fermantasyonu temel olarak adi diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Ancak Juri Merger, Alfio Borzì, Roland Herzog, (2015) yaptıkları çalışmada fermantasyon süreci için oluşturdukları modeli biraz daha genişlettilermayanın metabolizmasının aerobikten anaerobike değişimini modellemek için moleküler oksijenin konsantrasyonu da modele dahil ettiler. Ayrıca, daha sofistike bir toksisite fonksiyonu kullanıldı. Etanol toksisitesi de dikkate alındı. Mekansal yayılımın varlığı ve bir ısı denkleminin dahil edilmesi ile model geometrik ve termal etkilere açık hale geldi. Bu nedenlerden dolayı şarap fermantasyon sürecinin optimal kontrolünü reaksiyon difüzyon kısmi türevli diferansiyel denklemi ile modellediler. İdeal bir fermantasyon sürecini yönlendirmek amacıyla bir sınır optimal kontrol problemi formüle ettiler. Bu optimal kontrol probleminin teorik izahı aşağıdaki şekildedir:

Daha önceleri geliştirilen modele eklemeler yapıldı. Uzay –zaman bağımlı fonksiyonlar ; maya biokütle konsantrasyonunu X, Nitrojen konsantrasyonu N, Oksijen O, Şeker S, Ethanol E, ve sıcaklık T ‘yi göstermek üzere sistemin bilinmeyen değişkenleri olarak belirlendi. Bu çoklukların reaksiyonu aşağıdaki iki mekanizmayla modellendi:

$$a_2N + a_3O + a_4S \;\rightarrow a_1X,$$

$$a_5S \rightarrow a_6E + a_7T$$

Birinci denklem maya büyümesini açıklar çünkü var olan her maya nitrojen, oksijen ve şekeri kullanarak yeni bir hücre üretirler. İkinci denklem mayanın şekeri ethanola çevirmesi ve ısı üretmesi aksiyonunu modeller. $a_{1,\ldots,}$ a_7 sabitleri verim katsayılarıdır.

μ_1 ve μ_2 reaksiyon oranları aşağıdaki gibi modellenir:

$$\mu_1(X,N,O,S,T) = (T - b_1)\frac{N}{c_1+N}\frac{O}{c_2+O}\frac{S}{c_3+S}X,$$

$$\mu_2(X,S,E,T) = (T-b_2)\frac{S}{c_4+S}\frac{c_5}{c_5+E}X,$$

Sıcaklık bağımlılığının dengeleme sıcaklıklarını temsil eden ofsetler b_1 ve b_2 ile doğrusal olduğu varsayılır. $\frac{N}{c_1+N}$ şeklindeki kesirler N, O ve S besinleri için Michaelis-Menten terimleridir, yüksek konsantrasyonlar için reaksiyon oranının doygunluğuna ulaştırırlar. Hatta, o bir besin tüketilmiş ise reaksiyonu yasaklar. Michaelis sabitleri c_i (i=1, 2, 3, 4) reaksiyon hızının mümkün olan maksimum reaksiyon hızının yarısına eşit olduğu ilgili maddenin konsantrasyonlarına karşılık gelir. Velten [2009] modelinin aksine, oksijen ve şeker ek besin olarak ekleniyor, çünkü maya oksijen yokluğunda metabolizmasını aerobikten anaerobike değiştiriyor ve hücre bölünmesini durduruyor. Şeker tüketimi için etanolün engelleme özelliği yüksek etanol konsantrasyonları için daha düşük bir reaksiyon hızı veren $\frac{c_5}{c_5+E}$ formunda bir terim ile dikkate alındı. Tüm bu modellemeler sonucunda ortaya çıkan kısmi türevli diferansiyel denklemler difüzyon içerecek şekilde aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\partial X/\partial t - \sigma_1\Delta X &= +a_1\mu_1(X, N, O, S, T) - \Phi(E)X,\\
\partial N/\partial t - \sigma_2\Delta N &= -a_2\mu_1(X, N, O, S, T),\\
\partial O/\partial t - \sigma_3\Delta O &= -a_3\mu_1(X, N, O, S, T),\\
\partial S/\partial t - \sigma_4\Delta S &= -a_4\mu_1(X, N, O, S, T) - a_5\mu_2(X, S, E, T),\\
\partial E/\partial t - \sigma_5\Delta E &= \qquad\qquad\qquad\qquad + a_6\mu_2(X, S, E, T),\\
\partial T/\partial t - \sigma_6\Delta T &= \qquad\qquad\qquad\qquad + a_7\mu_2(X, S, E, T).
\end{aligned}$$

Bu denklemler uzay-zaman silindirinde $Q := \Omega x(0, t_f)$ tanımlanmıştır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Lipschitz sınırları ile sınırlanmış bir tanım kümesidir, fermentörün iç kısmını temsil eder ve t_f fermantasyon sürecinin son zamanıdır. Yayınım katsayıları $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ pozitif sabitlerdir. Diğer yandan eklenen $-\Phi(E)X$ terimi fermantasyon sonunda ethanolün toksik konsantrasyonu yüzünden ölen maya nufusunu modellemek içindir:

$$\Phi(E) = \left(0{,}5 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(k_1(E-E_{tol})\right)\right) k_2(E-E_{tol})^2$$

Reaksiyon Difüzyon sisteminin sınır koşulları belirlenirken tüm fermentasyon sürecinde fermenterin kapalı tutulduğunu varsayıldığı için X, N, O, S maddelerinin sınıra akışı olmadığı düşünüldü, bu nedenle homojen Neumann sınır koşulları $\Gamma := \partial\Omega$ üzerinde uygulandı. Isı denklemi için Robin türü sınır koşulu konuldu. Fermenterin bir duvarının su döngüsüne, diğer tarafının çevre şartlarına maruz olduğu varsayılarak sınır sıfır olmayan ölçüde iki $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ayrık küme olarak düşünüldü. Konulan sınır şartları aşağıdaki gibidir:

$\Sigma := \Gamma \times (0, t_f)$ üzerinde

$$\sigma_1 \frac{\partial X}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial N}{\partial n} = \sigma_3 \frac{\partial O}{\partial n} = \sigma_4 \frac{\partial S}{\partial n} = \sigma_5 \frac{\partial E}{\partial n} \partial = 0$$

Burada n vektörü Γ üzerine dışsal birim normal vektörü gösterir. Ayrıca konulan şartlar:

$$\sigma_6 \frac{\partial T}{\partial n} = \begin{cases} T_{hava}(T_{dış} - T) & \Sigma_1 := \Gamma_1 x(0,\ t_f)\ üzerinde \\ T_{su}(u - T) & \Sigma_2 := \Gamma_2 x(0,\ t_f)\ üzerinde \end{cases}$$

Dış sıcaklık $T_{dış}$ ve soğutma/ısıtma döngüsünün kontrol edilebilir sıcaklık değişkeni olan u, sırasıyla $\Sigma_1\ ve\ \Sigma_2\ nin$ yanal sınırlar üzerinde zamana bağlı fonksiyonlardır. T_{hava} ve T_{su} pozitif parametreleri fermenter duvarlarının sırasıyla havaya ve suya maruz iken termal iletkenliğini temsil etmektedir. Maddelerin konsantrasyonlarının başlangıç koşulları aşağıdaki gibi verilmiştir:

Ω üzerinde $X(0) = X_0$, $N(0) = N_0$, $O(0) = O_0$

Ω içinde $S(0) = S_0$, $E(0) = E_0$, $T(0) = T_0$

Pratikte X_0, N_0,O_0, S_0, E_0 ve T_0 negatif olmayan sayılardır. Bunlar fermantasyon sürecinin başında bu çoklukların ölçümüyle elde edilir. Notasyonu basitleştirmek için $y := (X, N, O, S, T)^T$ olarak gösterildi ve denklemler başlangıç ve sınır şartlarıyla beraber kısaca aşağıdaki gibi yazıldı:

Q içinde $\frac{\partial y}{\partial t} - D\Delta y = f(y)$

Σ üzerinde $D \frac{\partial y}{\partial n} + Zy = g(u)$

Ω içinde $y(0) = y_0$

Burada difüzyon matrisi $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$. Sağ taraftaki reaksiyon terimleri de f(y) ile gösterildi. Z ve g de aşağıdaki gibidir:

$$Z = \begin{cases} \text{diag}(0,0,0,0,0,T_{hava}) & \Sigma_1 \text{ üzerinde} \\ \text{diag}(0,0,0,0,0,T_{su}) & \Sigma_2 \text{ üzerinde} \end{cases}$$

$$g(u) = \begin{cases} (0,0,0,0,0,T_{hava}T_{su})^T & \Sigma_1 \text{ üzerinde} \\ (0,0,0,0,0,T_{hava}\, u)^T & \Sigma_2 \text{ üzerinde} \end{cases}$$

4.6.4. Oyunlar Teorisinde Optimal Strateji

Son yıllarda dijital oyunlar daha fazla ilgi toplarken sadece eğlence amaçlı olmaktan öteye geçip ekonomik olarak güçlü bir sektör olma başarısını da yakaladı. Oyunlar teorisi uzun bir tarihe sahip olmasa da seçkin bir yapıya sahiptir. 1915 yılında Borel bir matristeki eyer noktaları ile karşılaşmış, ancak oyunlarda bir eyer çözümü elde etmek için karışık stratejilerin varlığına ilişkin temel teoremi von Neumann 1936 da ispatlamıştır. von Neumann ve Morgenstern statik oyunlar ve ekonomik davranış arasındaki bağlantıları ortaya koydu. Nash, von Stackelberg ve diğerleri, çalışmayı N kişiyle işbirliksiz oyunlara genişletti. Diferansiyel ve dinamik oyunlar 1969'da Isaacs'ın çalışmasında ortaya çıktı ve kontrol topluluğunda hızla ilerleyip verimli bir zemin buldu (Tomlin Claire J. 2005).

Dinamik bir oyunda optimal kontrol için Maximum Prensibi(Varyasyonlar Hesabı) ya da Dinamik Programlama Prensibi iki ana yaklaşım olarak öne çıkmaktadır. Bu yaklaşımlar için optimizasyon yöntemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

1. Varyasyonlar hesabı için optimal eğri, komşu eğrilerin daha küçük maliyetlere yol açmayacağı şekilde olmalıdır. Böylece, optimal eğriye ilişkin maliyet fonksiyonunun "türevi" sıfır olmalıdır.
2. Dinamik programlama için en uygun eğri ara noktalarda tam zamanında optimal kalır

İki Kişilik Sıfır Toplamlı Dinamik Oyun: En basit anlamda iki oyuncunun oynadığı bir oyunda, gittikçe gelişen dinamiklere sahip bir oyunu kontrol eden iki oyuncu düşünelim. Bu oyunculardan her biri için optimal strateji nedir? Bu göründüğü kadar basit bir problem değildir çünkü herbir oyuncunun kontrol kararı diğerinin biraz önce verdiği karara, yani ne yaptığına bağlıdır.

Problemin Modeli: $0 \leq t < T$ zaman aralığı verilsin, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^l$ kümeleri boyunca f fonksiyonu $f: \mathbb{R}^n xAxB \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlansın.

t başlangıç zamanında $\alpha(.): [t,T] \rightarrow A$ Birinci oyuncu için bir kontrol

$\beta(.) : [t, T] \rightarrow B$ İkinci oyuncu için bir kontrol

Başlangıç noktası $x \in \mathbb{R}^n$ verilince her bir kontrol çifti ile eşleşen dinamikleri aşağıdaki gibi oluştururuz:

$$\frac{dx}{ds} = f\big(x(s), \alpha(s), \beta(s)\big) \qquad (t \leq s \leq T)$$

$$x(t) = x$$

Oyunun Bedel(Amaç) fonksiyonu :

$$P_{x,t}[\alpha(.), \beta(.)] := \int_t^T r\big(x(s), \alpha(s), \beta(s)\big) ds + g(x(\mathrm{T}))$$

Oyunculardan biri yörüngeye bağlı yukarıdaki bedel fonksiyonunu maksimize etmeye çalışırken diğeri minimize etmeye çalışıyor olsun.

Kontrolü $\alpha(.)$ olan 1.oyuncu P[.] amaç fonksiyonelini maksimize etmek istiyor. Kontrolü $\beta(.)$ olan 2. Oyuncu da P[.] amaç fonksiyonelini minimize etmek istiyor. Bu iki kişilik sıfır- toplam dinamik bir oyundur. Dinamik programlamayı kullanarak değer fonksiyonunu tanımlarız.

Oyunun oyun için kontrol kümeleri :

A(t) : = $\{\alpha(.) : [t, T] \rightarrow A,\ \alpha(.)\ \text{ölçülebilirdir.}\}$

B(t) : = $\{\beta(.) : [t, T] \rightarrow B,\ \beta(.)\ \text{ölçülebilirdir.}\}$

Her bir zaman için oyunculardan birinin diğerinin hareketini bilemeyeceği gerçeğini de modellemek zorundayız. Varaiya ve Elliott–Kalton'un yürürlüğe koyduğu strateji konseptini kullanacağız. Buradaki fikir, bir oyuncunun kontrolde rakibinin seçebileceği tüm olası kontrollere cevaplarını seçmeyi öncelleyecidir.

i. Tüm $t \leq s \leq T$ zamanları için $\Phi : B(t) \rightarrow A(t)$ eşleşmesi 1.oyuncu için bir strateji olarak adlandırılır.

   $t \leq \tau \leq s$ için $\beta(\tau) \equiv \hat{\beta}(\tau)$ denkliği

$$\Phi[\beta](\tau) \equiv \Phi[\hat{\beta}(\tau)](\tau) \qquad (1)$$

   koşulunu gerektirir.

$\Phi[\beta]$ yi 1.oyuncunun 2.oyuncunun β(.) seçimine verdiği yanıt olarak düşünebiliriz. (1) koşulu 1.oyuncunun geleceği öngöremeyeceğini açıklamaktadır.

ii. Tüm $t \leq s \leq T$ zamanları için ψ:A(t)→B(t) eşlemesi 2.oyuncu için bir strateji olarak adlandırılır.

t≤ τ ≤s için α(τ)≡ α῀(τ) denkliği

ψ [α](τ)≡ ψ [α῀(τ)](τ) koşulunu gerektirir.

Stratejiler kümesi :

$A(t) := 1. oyuncunun\ t\ \ zamanında\ başlayan\ stratejileri$

$B(t) := 2. oyuncunun\ t\ \ zamanında\ başlayan\ stratejileri$

Sonuç olarak değer fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

Düşük Değer Fonksiyonu: $v(x,t) := \inf_{\Psi \epsilon B(t)} \sup_{\alpha(.)\epsilon A(t)} P_{x,t}[\alpha(.), \Psi[\alpha](.)]$

Yüksek Değer Fonksiyonu: $u(x,t) := \sup_{\Phi \epsilon A(t)} \inf_{\beta(.)\epsilon B(t)} P_{x,t}[\ \Phi[\beta](.), \beta(.)]$

Oyunculardan biri diğerinin seçimine karşılık kendi stratejisini yapar. Yani ikinci olan oyuncu strateji seçme şansına sahip olduğundan avantajlıdır.

Gerçekte, v(x, t) ≤ u(x, t) eşitsizliği daima sağlanmaktadır. u ve v fonksiyonlarının Newton denklemlerini sağlamalı. U fonksiyonu yüksek New

Düşük ve Yüksek Değer fonksiyonlar için kısmi türevli diferansiyel denklemleri yazalım:

u(x, t) fonksiyonu aşağıdaki denklemin bir çözümüdür:

$$\begin{cases} u_t + min_{b\epsilon B} max_{a\epsilon A}\{f(x,a,b).\nabla_x u(x,t) + r(x,a,b)\} = 0 \\ u(x,T) = g(x) \end{cases}$$

v(x, t) fonksiyonu aşağıdaki denklemin bir çözümüdür:

$$\begin{cases} v_t + max_{a\epsilon A} min_{b\epsilon B}\{f(x,a,b).\nabla_x v(x,t) + r(x,a,b)\} = 0 \\ v(x,T) = g(x) \end{cases}$$

Bu denklemler Hamilton-Jakobi-Bellman denklemlerinin iki kişi, sıfır-toplam kontrol teorisinde benzeşikleridir. Bu denklemleri yeniden

$u_t + H^+(x, \nabla_x u) = 0$ formunda yazalım.

Yüksek KTDD' li Hamilton denklem için:

$$H^+(x,p) \coloneqq min_{b\epsilon B} max_{a\epsilon A}\{f(x,a,b).p + r(x,a,b)\}\ ;$$

ve

$$v_t + H^-(x, \nabla_x v) = 0$$

Düşük KTDD' li Hamilton denklem için:

$$H^{-}(x,p) := max_{a\epsilon A} min_{b\epsilon B}\{f(x,a,b).p + r(x,a,b)\}$$

Genel olarak $H^{-}(x,p) < H^{+}(x,p)$ olacaktır. Düşük ve Yüksek denklemler farklı kısmi türevli denklemlerdir ve genel olarak düşük ve yüksek değer fonksiyonları eşit değildir. $u \neq v$

Bu durumun yorumlanması biraz zor gözükse de buradaki fikir, iki oyuncunun kısa zaman aralıklarında kontrollerini uyguladıkları bir durumu düşünmek olmalıdır. Bu durumda ilk olmak dezavantaj getirecektir zira ikinci oyuncu hangi kontrolün seçileceğini bilmektedir. u değer fonksiyonu, bu durumun bir tür "sonsuz küçük" versiyonunu temsil eder ki onun için 1.oyuncu avantaja sahiptir. v değer fonksiyonu zıt durumu temsil eder ki orada da 2.oyuncu avantajlıdır. Eğer her nasılsa tüm p ve x için $H^{-}(x,p) = H^{+}(x,p)$ olursa, oyunun minimax şartını sağladığı söylenir. Bu durumda değer fonksiyonları arasında $u \equiv v$ olduğu ortaya çıkacağı için oyun değere sahiptir denir.

$\alpha^{*}(.)\ ve\ \beta^{*}(.)$ nın optimal olması $\left(\alpha^{*}(.)\ ve\ \beta^{*}(.)\right)$ çiftinin $P_{x,t}$ in bir eyer (semer) noktası olması demektir. Bunun anlamı

$$P_{x,t}[\alpha(.),\ \beta^{*}(.)] \leq P_{x,t}\,[\alpha^{*}(.),\ \beta^{*}\,(.)] \leq P_{x,t}\,[\alpha^{*}(.),\ \beta(.)]$$

eşitsizliğinin tüm $\alpha(.),\ \beta(.)$ için geçerli olması demektir.

Oyunlar ve Pontryagin Maximum Prensibi: Minimax koşulunun sağlandığını ve α^{*} (.) , β^{*}(.) şeklinde yukarıdaki gibi bir optimal kontrolün tasarlandığını varsayalım. (1) denkleminin $\alpha^{*}(.)\ ve\ \beta^{*}(.)$ optimal kontrolü ile uyumlu bir çözümü x^{*}(.) olsun. O zaman

$P^{*}(t) := \nabla_x v(x^{*}(t),t) = \nabla_x u(x^{*}(t),t)$ olacaktır. Bu denklemin komşu denklemi:

$P^{*}(t) = -\nabla_x H(x^{*}(t), P^{*}(t), \propto^{*}(t), \beta^{*}(t))$ oyun teorisi Hamilton denklemidir.

H(x, p, a, b) := f(x, a, b).p + r(x, a, b)

Hamilton Jacobi Isaacs Denklemi: İki kişilik sıfır toplamlı, t_f son noktalı bir diferansiyel oyun problemini düşünelim. Değer fonksiyonu $J^*(x(t_0), t_0)$ x, t' nin düzgün bir fonksiyonu olsun. O zaman $J^*(x, t)$ fonksiyonu Hamilton Jacobi Isaacs denklemini $J^*(x, t_f) = \phi(x)$ sınır koşulu ile tüm x ler için sağlar.

$$\boldsymbol{\frac{\partial J^*}{\partial t}(x,t) = -H^*(x, \frac{\partial J^*}{\partial x}(x,t), t)}$$

N kişilik Dinamik Oyunlar: N kişi bir oyun oynadığı zaman birçok yeni ve enterasan olasılıklar ortaya çıkar. N kişinin işbirliği içinde oynaması ya da işbirliği yapmadan oynaması şeklinde iki senaryo ortaya çıkar. İşbirlikli oyunlar optimal kontrol problemleridir. Her bir kişinin sistemin tüm durumuna tam girişinin olduğunu ve işbirliksiz oynadıklarını farzedelim.

İşbirliksiz Nash Çözümleri: N tane oyuncunun her birinin süreçte $u_i \in R^{n_i}$, i = 1, . . . ,N kontrolleri ile etkin olabildiği $\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_N, t)$ ile modellenen bir sistem ve aşağıdaki formdaki

$$J_i(u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot)) = \phi_i(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x, u_1, \ldots, u_N, t)dt$$

her bir bedel fonksiyonu minimize edilecektir. En basit işbirliksiz çözüm stratejisi çok bilinen İşbirliksiz Nash Dengesidir. Eğer her bir oyuncu bu stratejiyi geliştirir ve diğer oyuncuların kendi Nash stratejilerini oynadığını farz ederse $i = 1, \ldots, N$ olmak üzere u_i^* kontrollerin kümesinin bir Nash strateji olduğu kabul edilir. Yani i = 1,...,N için

$$\forall u_i(.)\,, \quad J_i(u_i^*, \ldots, u_i, \ldots, u_N^*) \geq J_i(u_i^*, \ldots, u_i^*, \ldots, u_N^*)$$

Nash dengesi tek türlü belirli değildir. 2 kişilik sıfır toplamlı oyunlarda Nash dengesi bir eyer çözümüdür. Hash dengesi için Hamilton Jacobi denklemini Hamiltonları $H_i(x, u_1,\ldots,u_N, p, t)$ olarak tanımlayarak

$H_i(x, u_1, \ldots, u_N, p, t) = L_i(x, u_1, \ldots, u_N) + p^T f(x, u_1, \ldots, u_N, t)$ şeklinde yazarız.

Yukarıdaki eşitsizliğin Nash dengesi için koşullar vardır öyle ki:

$$\boldsymbol{H_i(x, u_1^*, \ldots, u_i, \ldots, u_N^*) \geq H_i(x, u_1^*, \ldots, u_i^*, \ldots, u_N^*, p, t)}$$

N tane oyuncu için çözümleri $H_i^* = H_i^*(x, u_1^*, \ldots, u_N^*, p_i, t)$ olan N tane Hamilton Jacobi denklemi vardır.

İşbirliksiz Stackelberg Çözümleri: Oyunculardan biri ya da daha fazlasının lider olarak davrandığı oyunun çözümleri Stackelberg veya Hiyerarşik Denge olarak anılır. İki oyuncunun oynadığı, 1.oyuncunun lider olduğu, 2. Oyuncunun onu izlediği bir oyun için çözüm konsepti şöyledir: 1.oyuncu $u_1^0(.)$ şeklinde bir strateji yaparsa, 2.oyuncu bedel fonksiyonu J_2 yi minimize etmek için

$\dot{x} = f(x, u_1^0, u_2, t)$ şeklinde bir dinamik seçer ve

$J_2(u_2) = \emptyset_2\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} L_2(x, u_1^0(t), u_2, t)dt$ olur.

Sonra $H_2(x, u_1^0, u_2, p_2, t)$ minimize edilmek için $u_1^*(u_1^0)$ seçilir. Burada p_2 aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar:

$$\dot{p_2} = -\frac{\partial H_2^T}{\partial x}(x, u_1^0, u_2(u_1^0), p, \dot{t}) \qquad p_2(t_f) = D_1^T \emptyset_2(x(t_f), t_f)$$

Sırası gelince oyun lideri kendi stratejisi u_1^* i seçerek J_1 i minimize etmek isterken 2.oyuncunun rasyonel olarak $u_2^*(u_1^*)$ yi oynayacağı kabulü ile sınırlıdır. Bu nedenle onun J_1 i minimize etmesi için çözmesi gereken denklem sistemi aşağıdaki koşullara tabiidir:

$$\dot{x} = f(x, u_1, u_2, t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{p_2} = -\frac{\partial H_2^T}{\partial x}(x, u_1^0, u_2(u_1^0), p, \dot{t}) \qquad p_2(t_f) = D_1^T \emptyset_2(x(t_f), t_f)$$

$$0 = D_3 H_2(x, u_1, u_2, p_2, t)$$

Son denklem H_2 nin minimizasyonu için durağanlık koşuludur. Yukarıdaki sistemin optimizasyon problemi $\mathbb{R}^{2n}$ de standard bir optimal kontrol değildir çünkü sağlanması gereken bir eşitlik vardır.

4.6.5. Hava Trafiği Akışının Optimal Kontrolü

Adi diferansiyel denklemler (ADD) ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerle (KTDD) yönetilen optimal kontroller; yörünge planlamasındaki uygulamaları (A. E. Bryson, JR. ; Y.-C. Ho. 1975), aerodinamik tasarımı (A. Jameson 2003), türbülanslı akış kontrolü (O.M. Aamo ; M. Krstıc 2003) ve hava trafik akışı kontrolü (A. M. Bayen, R. L. Raffard, and C. J. Tomlin) gibi uygulamaları da kapsar. Bu gibi problemler için karar değişkenleri sürekli fonksiyonlardır. Örneğin aerodinamikteki bir hava yolunun geometrik şekli veya hava trafik akışının hızı sürekli bir fonksiyon oluşturur. Optimizasyon probleminin diferansiyel denklemlerle genel olarak ifadesi şöyledir: J iki kez türetilebilir bir reel değerli fonksiyon, u sürekli kontrol değişkeni zamanın ya da uzayın bir fonksiyonu, x sürekli durum değişkeni ve genellikle zamanın ve/ ya da uzayın fonksiyonu, N sistemi yöneten diferansiyel denklemleri temsil eden bir operatör ve son olarak r iki kez türevi olan, durum ve girdi değişkenlerindeki kısıtları gösteren bir fonksiyon olmak üzere;

$r(u, x) \leq 0$

$N(u, x) = 0$ koşulları altında

$J(u, x)\ fonksiyonu\ minimize\ edilecektir.$

Hava trafik akış kontrolünün optimum edilmesi problemini yukarıdaki genel optimizasyon problemi türünden ifade edelim: N(u, x) = 0 hava trafik akışında yer alan taşıma KTDD'lerini anlatmaktadır. Havacılığın akışının, hava sahasının Eulerian bakış açısı kullanılarak analiz edilebileceği ve kontrol edilebileceğini Bayen, Raffard, ve Tomlin yaptıkları çalışmayla kanıtladılar. (A. M. Bayen ; R. L. Raffard.; C. J. Tomlin 2004). Bu formulasyonda sistemin durum değişkeni $\rho(s, t)$ ile gösterilen uçak yoğunluğudur.(s pozisyonu göstermek üzere). Yoğunluk jet yolunun birim uzunluğu başına uçak sayısını temsil eder. Kontrol değişkeni v(s, t) hızıdır, s pozisyonunda ve t zamanında hava trafik kontrolörü tarafından uçağa verilir. Bir hız alanı verilince, uçakların yoğunluğu aşağıdaki süreklilik denklemini sağlar:

$$\frac{\partial \rho(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(s,t) v(s,t)}{\partial s} = 0$$

Yoğunluğun güvenlik yoğunluğunu(ρ_{max}) aşmadığı kısıtlaması altında hedef havaalanında iniş yapan uçakların sayısını maksimize eden hız alanını belirlemek istiyoruz.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial s} = 0$$

$\rho \leq \rho_{max}$, $v_{min} \leq v \leq v_{max}$ koşulları altında

$J(\rho, v) = -\int_0^T \rho(L, t) v(L, t) dt$ amaç fonksiyonu minimize edilecektir.

Hedefe inen toplam uçak sayısı $-J(\rho, v)$ ile gösterilir. v_{min} ve v_{max} yetkililerce belirlenen hız sınır değerleridir.

Optimal Dizayn: Optimal tasarım, Kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmeye yönelik bilgisayar kapasitelerin ve ticari yazılımların artması ile birlikte hemen hemen tüm bilim alanlarında uygulamaları olan önemli bir endüstriyel alan haline geldi . Bunlardan en önemli görülen uygulamalardan biri metal yapıların optimal dizaynıdır. Matematiksel olarak, optimal dizayn bazı tasarım kriterlerini en optimal yolla karşılamak için bir veya daha fazla kısmi diferansiyel denklemin kontrol edilmesinin özel ters problemi olarak tanımlanabilir.

Örneğin, $D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere D ile gösterilen sınırlı bir açık kümeyi bulmak için oluşturulan genel problemi düşünelim:

$$\underset{D \in D_{ad}}{inf} \left\{ \int_D F(u)dx \,\middle|\, D \text{ içinde } G(u) = 0 \right\}$$

Bu denklemde dizayn kriteri F: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ile tanımlanır, u: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ durum değişkeni D üzerinde G(u) = 0 kısmi türevli diferansiyel denklemini sağlar ve D_{ad} makul bir dizaynlar setini tanımlar. Tipik olarak G kısmi diferansiyel operatörü burada fiziksel bir durumu tanımlarken dizayn kriterleri minimize etmek için bir miktar enerjiden ya da bir yeniden yapılandırma probleminden, u ölçümün çözümü ile ilgili bir hata fonksiyonelinden oluşur. Yukarıdaki problem genellikle bir optimal model(biçim) problemidir ve bu genel olarak kötü konumlanmış olarak algılanır çünkü küçük veri yanılgıları çözümde büyük değişikliklere sebep olur.

Parametre dizayn problemi optimal biçim probleminin yazımında alternatif bir yol olarak görülebilir:

$$\underset{X \in X_{ad}}{inf} \left\{ \int_D XF(u)dx \,\middle|\, \Omega \text{ içinde } XG(u) = 0 \right\}$$

Burada Ω tanım kümesi sabitlenmiştir ve alınan ebas X_{ad} makul kümesi içinde tüm karakteristik X : $\Omega \rightarrow \{ 0, 1 \}$ fonksiyonlarının üstündedir.

İletkenlik İçin Optimal Dizayn:

Bir elektrik kondüktöründe güç kaybını minimuma düşürme problemini düşünelim. Verilen bir Ω tanım kümesinde ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$) , verilen bir miktarda mesela C kadar iletken materyal, verilen bir yüzey akımı q : $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ için, $\Gamma \subseteq \partial \Omega$

Biçim(şekil) optimizasyonu iletken tanım kümesi D yi bulma olarak ifade edilir: D⊂ Ω, $\Gamma \subseteq \partial D$ olmak üzere

$$\inf_{D \in D_{ad}} \left\{ \int_D |\nabla\varphi|^2 dx \middle| -div(\nabla\varphi) \right|_D = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial D \setminus \Gamma} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = q, \Big\}$$

Burada $\frac{\partial}{\partial n}$ sınırdaki normal türevi göstermektedir.

$\varphi \epsilon V \ \equiv \left\{ v \in H^1(D) \colon \int_D \ v\, dx = 0 \right\}$, D_{ad} kümesinde elektrik potansiyelidir.

4.6.6. Ekonomi ve Finansta Optimal Kontrol Fayda Maximizasyonu

$x \in R_+^n \ ve\, u \in R_+^1 \ olmak\, üzere\, u = v(x)$ arzulanan sonuçları (Tercihler) göstersin. Kontrol edilemeyen parametreler malların fiyatları ve gelir düzeyidir. $u_i'ler \ R_+^m$ içinde iken fiyatların R_{++}^n içinde bir vektör olduğu kabul ediliyor. Fiyatlar p ile gösteriliyor. Kontrol değişkeni x olarak tanımlanıyor.

Amaç fonksiyonu : $\max_x \ v(x)$

Lagrange fonksiyonu : $\mathcal{L} = v(x) - \lambda(px - m)$

Birinci derece şartlar aşağıdaki gibi verilir:

$\frac{\partial v(x)}{\partial x} - \lambda p = 0$

$-px + m = 0$

Optimal karar değişkeni x^* (p, m) ile verilir. Optimal değer fonksiyonu:

$$\psi(p, m) = \max_x \ v(x) = v(x^*(p, m))$$

Optimal değer fonksiyonunu p ve m ye göre türetip birinci derece şartları kullanarak sadeleştirme yapılırsa

$\dfrac{\frac{\partial\psi(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial\psi(p,m)}{\partial m}} = -x^*(p, m)$ bulunur. Bu özdeşlik Roy özdeşliği olarak adlandırılır.

4.6.7. Optimal Maden Çıkartımı

Bir maden sahibi a ton cevheri çıkarmak istiyor. Bunun için k yılı var ve yıllara göre hangi miktarlarda cevher çıkarırsa optimal olacağını belirlemek istiyor. U ton maden satışından elde edeceği gelir $\sqrt{u}$ ve birim çıkarım maliyeti de c olsun.

Optimal problemi: Toplam karı maximize edecek cevher madenciliğini belirlemektir. Bu problem şu şekilde ifade edilir:

$x_{i+1} = x_i - u_i \,, i = 0, 1, \ldots, k-1$

$x_0 = a$

$x_k = 0$ koşulları altında

$\sum_{i=0}^{k-1} \beta^t (\sqrt{u_i} - cu_i)$ toplamı maximize edilecektir.

Burada i yılında çıkarılacak cevher u_i ile, i yılının başında madende mevcut çıkarılabilecek cevher de x_i ile gösterilmiştir. c , a > 0 olduğu açıktır. $u_i \geq 0$ kısıtları objektif fonksiyonun tanım kümesinde yer almaktadır. Bu problem için Hamilton denklemi :

$H_i(x_i, u_i, \psi^0, \psi_{i+1}) = \psi^0 \beta^t \left(\sqrt{u_i} - cu_i\right) + \psi_{i+1}(x_i - u_i)$

Eş denklem :

$\psi_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1}(\widehat{x_1} , \widehat{u_1} , \psi^0, \psi_{i+1}) = \psi_{i+1}$

Karşıtlık Koşulu :

$$\psi_k = X$$

Karşıtlık koşulu ve eş denklemden her bir i için $\psi_i = X$ olur. Hatta $\psi^0 = 0$ ise $X \neq 0$ olur ve maximum prensibine göre ya çözüm yoktur ya da tüm i değerleri için $\widehat{u_1} = 0$ olur. Böyle bir kontrol terminal(uç) şartı sağlayamayacağı için kabul edilemezdir. Bu nedenle $\psi^0 = 1$ alırız. $\sqrt{u_i}$ fonksiyonunun 0 için bariyer etkisi yüzünden eğer maximum koşulu için $\hat{u}$ gibi bir çözüm varsa o zaman mutlaka $\hat{u} > 0$ olmak zorundadır ve

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial u_i}(\hat{x}_i , \hat{u}_i , 1, \psi_{i+1}) = \left(\frac{\beta^t}{2\sqrt{\hat{u}_i}} - c\right) - \psi_{i+1} \;,$$

Buradan $\frac{\beta^t}{2\sqrt{\hat{u}_i}} = c + X =: b$ elde edilir.

Bunun anlamı her yıl karı eşit kılacak bir çıkartımın optimal yol olacağıdır. Son ifadeden kontrol fonksiyonunu $\widehat{u_i} = \frac{\beta^{2t}}{4b^2}$ olarak bulunur. b sabitini durum denkleminden ve uç koşulundan yararlanarak bulmak için

$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\beta^{2t}}{4b^2} = a$, ve $b = \sqrt{\frac{4a(1-\beta^2)}{1-\beta^{2k}}}$ olarak bulunur.

İş Stratejisi Problemi: Bir fabrika t zamanında x(t) oranıyla özgün bir ürün üretmektedir. Her an, bu üretim ya üretkenlik kapasitesini genişletmek için yatırıma dönüştürülüyor ya da satılıyor. Başlangıç üretim kapasitesi α > 0 ; bu kapasite yatırım oranıyla artmaktadır. Satış fiyatının sabit olduğunu dikkate alarak, bir [0, T] zaman aralığında, her hangi bir t zamanında, üretimin hangi u(t) oranındaki kısmı yatırıma dönüştürülmeli ki toplam satışlar maximize olsun?

Problemin Çözümü:

u: [0, T] ⟶ [0, 1] fonksiyonunu tanımlayalım.

Açıktır ki eğer u(t) fonksiyonu yatırıma giden x(t) nin bir oranı ise, x(t) nin bir parçası olan $\big(1-u(t)\big)x(t)$ değeri t zamanında P > 0 fiyatıyla satılan ürünü verir. Öyleyse problem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in C} \int_0^T \big(1-u(t)\big)x(t)P dt \\ \dot{x} = ux \\ x(0) = \alpha \\ C = \{u: [0,T] \to [0,1] \subset \mathbb{R},\ u \in KC\} \end{cases}$$

Burada α ve T pozitif sabitlerdir. Öyle bir $V: [0,T]X\ \mathbb{R} \ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulacağız ki Bellman-Hamilton-Jacobi (BHJ) denkleminin gerek koşulunu sağlayacak. x(t) değeri t zamanında t zamanında üretilen ürün miktarını gösterdiği için $V(\tau,\xi)$ değerinde τ zamanındaki ξ üretiminin negatif olmayacağını kabul etmek mantıklıdır. Bu nedenle

$V: [0,T]X\ (0,\infty) \ \to \mathbb{R}$ olduğunu kabul ederek

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{v\in[0,1]} \left((1-v)x + \frac{\partial V}{\partial x} xv \right) = 0 \qquad \forall (t,x) \in [0,T]X\mathbb{R}$$

$\mathrm{V(T,x)} = 0$ $\forall > 0$ koşullarını sağlayan V fonksiyonunu bulacağız. x(0) = α >0 ve $\dot{x} = ux \ \geq 0$ olması [0, T] içindeki her t için $x(t) \geq \alpha$ olmasını gerektirir. O zaman x > 0 olur ve BHJ denklemi :

$$\forall (t,x) \in [0,T]X\mathbb{R}^+ \ \ i\c{c}in \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + x + x \max_{v\in[0,1]} [\left(\frac{\partial V}{\partial x} - 1\right) v] = 0$$

Yapılan işlemlerden sonra optimal takip aşağıdaki şekilde bulunur:

$$x^*(t) = \begin{cases} \alpha e^{t} & 0 \leq t \leq T-1 \\ \alpha e^{T-1} & T-1 < t \leq T \end{cases}$$

Optimal yolun yorumu: Orta veya uzun vade strateji olarak T-1 zamanına kadar üretim artışı sağlamak için tüm üretimi yatırıma dönüştürmek, sonra hepsini satıp kara dönüştürmek en iyi yol olarak gözükmektedir.

4.6.8. Ekonomik Aktivitelerin Optimal Mekansal Dağılımı

Son zamanlarda, bazı yazarlar, sermaye birikimi ile dinamik ortamlarda ekonomik aktivitenin optimal mekansal dağılımını incelemişlerdir. Brito (2004), bu olguyu ilk olarak karakterize eden kişi olarak kabul edilmektedir. Brock ve Xepapadeas (2008) ve Boucekkine ve ark. (2009) onu izlediler. Bu çalışmalar Desmet ve Rossi-Hansberg (2010) tarafından araştırılmıştır. Brito ve Boucekkine ve arkadaşları sürtünmesiz sermaye hareketliliğini düşünmüş, Brock ve Xepapadeas ise sermaye hareketliliği olmaksızın mekansal bir yan etki iddia etmiştir. İlkinde, üretim fonksiyonu azalan dönüşleri gösterir: sermaye marjinal verimliliğininin düşük olan bölgelerden yüksek olan bölgelere doğru akış yapar. Sonuç olarak, sermaye mekansal-zamansal dinamiklerinin aşağıdaki formda bir kısmi diferansiyel denklem tarafından yönlendirildiği gösterilmiştir:

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t,z) - \frac{\partial^2 k}{\partial z^2}(t,z) = F(k(t,z),z) - c(t,z)$$

Burada z mekansal pozisyonu göstermektedir. Bu pozisyon bir doğru üzerinde ya da bir çemberde olabilir. t, zamanı; z de mekanı göstermek üzere kişi başı tüketim c(t, z) ve sermaye k(t, z) ile veriliyor. Üretim fonksiyonu F(. , .) uzaya bağlıdır. Denklemin doğasını $\frac{\partial^2 k}{\partial z^2}(t,z)$ terimimden gelmektedir ve uzaydaki kapital akışını yansıtmaktadır. Bu problemi sonsuz boyutlu yapmaktadır.

Kapitalin zaman ve uzay üzerinde hareket kanunu gereğince verilen bir $(t,\theta) \in [0,\infty)X$ T noktasında, k(t, θ)fiziksel kapitali aşağıdaki denkleme göre devinim yapar:

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t,\theta) = Ak(t,\theta) - c(t,\theta) - \tau(t,\theta)$$

Burada A zaman ve uzayda sabit olarak kabul edilen teknoloji düzeyini gösterir. Üretim fonksiyonu uzayın her bir noktasında AK üretim fonksiyonu ile gösterilsin.

Optimal Yatırım Problemi: Bir firmanın [0, T] zaman aralığındaki yatırım problemini düşünelim. Verimli bir k sermayesinin kar oranı, sermaye maliyeti hariç, k^2 ile orantılı olsun. Sermaye birikimi sabit bir α oranıyla azalsın. O zaman i bürüt yatırımlar olmak üzere $\dot{k} = i - \alpha k$ sermayenin brüt eklenmesidir . Net kar akışı değerinin [0, T] üzerinde maximize edilmesi gerekir:

$$\begin{cases} max \int_0^T e^{-rt}(pk^2 - \sigma i^2)dt + \pi e^{-rT}k(T)^2 \\ \dot{k} = i - \alpha k \\ k(0) = k_0 > 0 \\ i \in I \end{cases}$$

Burada $\pi, \sigma, \alpha\ ve\ r$ belirli sabit pozitif sabitlerdir. $\sigma\alpha^2 > p$ ve $I \subset R$ konveks, kompakt ve yeterince geniştir. Optimal değer fonksiyonu $V^c = V^c(t, k)$ olmak üzere aşağıdaki diferansiyel denklem sağlanmalıdır:

$$-rV^c + \frac{\partial V^c}{\partial t} + \max_{v \in I}(pk^2 - \sigma v^2 + (v - \alpha k)\frac{\partial V^c}{\partial t}) = 0$$

$V^c(T, k) = \pi k^2$ olarak bulunur.

4.7. Kaynak Kullanımı ve Yönetiminde Optimal Kontrol

4.7.1. Optimal Arsa Kullanımı

Bir bölgede endüstriyel ve konaklama amaçlı toprakların optimal ve dengeli dağılımı üzerine yapılan çalışmada Anastasios Xepapadeas ve Efthymia Kyriakopoulou kirlilik, çevre politikası, üretim kısıtları, işe gidip gelme maliyetleri gibi parametreleri dikkate alarak sanayi ve konut kümelenmeleri için optimal çözümü araştırdılar.

Bir kapalı, doğrusal ve simetrik 0 (sol sınır) ile S (sağ sınır) arasında sınırlı bir bölge farz ettiler. Endüstri firmaları ve konutlar bu bölgede her hangi bir yere yerleşebilir. Firmaların tek bir ürünü ürettiği, ürün fiyatının bir dünya fiyatı olduğu, r deki bir yerde işçilik L(r) ile, emisyon E(r) ile, üretimin de q(r) = g(z(r))x(A(r), L(r), E(r)) verildiği farz edildi. q: çıkış, L: işçilik girişi, E: üretim sürecinde oluşan emisyon toplamıdır.

Problemde aşağıdaki kabuller de yapıldı: Firmalar, üretimdeki dışsallıklar, yani pozitif bilgi yayılımları nedeniyle, diğer kuruluşların yakınında bulunarak olumlu bir şekilde etkilenmektedir. Üretim süreci, mekanda yayılan ve şehirdeki toplam kirlilik yoğunluğunu artıran emisyonlar üretir. Bu, çok sayıda firmanın çalıştığı ve çevreyi kirlettiği yüksek bir ekonomik aktivite yoğunluğuna sahip bölgelerde güçlü olur. Üretimde emisyonların kullanımı ve takip eden olumsuz sonuçlar icra edilmesini gerektirir. Emisyonların yanı sıra, kirlilik yoğunluğu, mekansal alan boyunca yayıldığından, çevresel düzenlemeler sahaya özel olarak düşünüldü. Çok sayıda hane, verilen bölge aralığında bir yer seçmekte özgürdür. Yerleşim kümelenmelerinin endojen oluşumu, hanehalklarının konum kararlarını etkileyen iki güç tarafından belirlenir: maliyetler ve kirliliğin giderilmesi. Tüketiciler, sanayi sektörünün ürettiği malların tüketiminden ve konut alanlarının miktarından pozitif yarar sağlayarak, kirlilikten olumsuz etkilendiklerini belirtiyorlar. Bu nedenle, r uzamsal noktasında yer alan bir ev, U(c (r), l (r); X (r)) hizmetini alır, burada c, üretilen malın tüketimidir ve l' de ikamet edilen alandır. Tüketiciler, endüstriyel sektörde çalışmak için bir birim zaman ayırmakta, bunun bir kısmı işe gidip gelmek için harcanmaktadır. Uzamsal bir r noktasında çalışanlar mekansal bir s noktasında yaşar. Bu durum $w(s) = w(r)e^{k|r-s|}$ olarak ifade edildi.

Optimal arazi kullanımı problemi aşağıdaki modelle ifade edildi:

$$\max_{L,E} \int_0^S \left[\int_0^{q(r)} P(v)dv - w(r)L(r) - D(r) \right] dr$$

Birinci dereceden gerekli koşullar:

$$P(q)\frac{\partial q(r)}{\partial L(r)} = w(r)$$

$$P(q)\frac{\partial q(r)}{\partial E(r)} = \frac{\partial D(r)}{\partial E(r)}$$

Bu sistemin çözümüyle her bir mekansal r noktası için optimal üretim miktarı q*(r) elde edildi. Optimal emisyon düzeyi hesaplanarak her bir r noktasındaki toplam kirliliğin X^* yoğunluğu ve hatta $D^*(r)$ zararı tanımlandı. Optimal arazi kullanımı iki aşamalı tanımlandı: Birinci aşamada her bir r noktası için firmaların ödeyeceği optimal endüstri arsa kirası

$R_I^*(r) = pq^*(r) - w(r)L^*(r) - D^*(r)$ elde edildi.

İkinci aşamada her bir r noktası için kimselerin ödeyeceği optimal yerleşim arsa kirası $U(c,l,X) \geq \bar{u}$ koşulu altında,

$$w(r) = R_H(r)l(r) + pc(r) = \min_{l,c}[R_H(r)l + pc]$$

olarak elde edildi. Böylelikle hiçbir hane, bölge içinde veya dışında başka bir mekansal noktaya geçme teşviğine sahip olamayacaktır. Denge durumunu çözmek için, r bölgesinde yaşayan bir tüketicinin, X(r) toplam kirlilik miktarını verilen aynı mekansal noktada dikkate aldığı varsayıldı. Problemin Lagrange fonksiyonu oluşturuldu ve r yerinde yaşayıp s yerinde çalışması ve $\bar{u}$ yararlanma düzeyinde olan bir işçinin bir birimlik arsa için $R_H^*(r)$ olan kira teklifi tanımlandı. Yüksek kirlilikteki yerlerde kiraların daha düşük olduğu $\frac{\partial R_H^*}{\partial X_r^*} < 0$ olması nedeniyle garanti altına alındı. Arsa yoğunluğu 1 alınarak her bir r noktasında optimal nüfus yoğunluğu $N^*(r)$ tanımlandı. Nüfus dağılımının artması net ücretin artması ve kirliliğin azalmasıyla olduğu gerçeğinden hareketle her bir noktada $R_H^*(r)\ ile\ R_I^*(r)$ karşılaştırmasının optimal arsa kullanımını vereceği sonucuna varıldı.

4.8. Tartışma

Dinamik programlama ile yapılan optimal kontrolün kısmi veya adi diferansiyel denklemlerle tanımlanmasında izlenen genel yol aşağıdaki gibi açıklanmaktadır: Dinamik sistemlerde genellikle üç tür değişken söz konusudur. 1. Girdi değişkenleri: Harici ajanların sistemi etkilemesine veya yönlendirmesine izin veren değişkenler (Bir arabadaki gaz ve direksiyon simidi, fırında sıcaklık kontrol düğmesi vb.) 2. Çıktı değişkenleri: Sensörler tarafından ölçülen sonuçlar. 3.Durum değişkenleri: Sistemin anlık verileri (Örn. bir aracın veya bir roketin anlık konumu ve hızı, bir fırının içindeki sıcaklık dağılımı). Önce Amaç fonksiyonu tanımlanır. Amaç fonksiyonu (durum değişkenine bağlı olabilir, örneğin T zamanında fırın içindeki sıcaklığı veren bir fonksiyon olabilir ya da bir durum değişkeninin yörünge üzerinde bir fonksiyonel değeri de olabilir (Örneğin bir roketin aldığı toplam yol ya da bir roketin tükettiği toplam yakıt). Bu sistemlerde optimal kontrol probleminin ifadesi şu şekildedir: Amaç fonksiyonunu maximize etmek için sistemin girdi değerlerinin bulunması (örneğin bir taşıtın zamana bağlı olarak sürülmesinde direksiyon yönü ya da gaz pedalının seviyesinin tespiti)

Uzay araçları, kimyasal reaksiyonlar veya robot teknolojisi gibi karmaşık sistemlerin optimal kontrolünde çok çeşitli kısıtlar olması, bu sistemlerin zamana bağlı ve dinamik sistemler olması kaçınılmazdır. Dinamik sistemlerde genellikle kısmi türevli diferansiyel denklemlerle tanımlama yapılmaktadır. Ortaya konulan matematiksel modeller gün be gün gerçek hayat problemlerini ifade etmeye daha da yaklaşmaktadır. Bu aynı zamanda çok çeşitli kısıtlarla belirlenen, daha karmaşıklık diferansiyel denklemler ve birçok bilinmeyen içeren modelleri zorunlu kılmaktadır.

Gelecekte optimal kontrolün günlük yaşantımızın ayrılmaz bir parçası olacağı beklenmelidir. Örneğin bugün bir eğri boyunca sabit hızda çalışan bir araç için simülasyonlar yapıp, güvenli optimal referans manevraları ile kıyaslayarak sürüş önerileri veren optimal kontrole dayalı sürücü destek sistemleri geliştirilmektedir. Bu sistemler sürücüyü olası tehlikeli durumlara karşı uyarmak için sürücü-araç davranışını ve çevre faktörlerini izlemeyi amaçlamaktadır. Bu çalışmaların gelecekte tam bir optimal kontrole evrilip sürücüsüz çalışan taşıtların yollarda olması ile sonuçlanması beklenmektedir. Yakın gelecekte evlerimizde kullandığımız elektronik eşyalar, küçük ev aletleri vb. cihazların her birinin optimal kontrol yeteneği olan cihazlara dönüşmesi de kaçınılmaz gözükmektedir. Optimizasyon teknolojisinin gelişmesiyle bireysel istek ve taleplere yanıt verebilen optimal kontrollere de ihtiyaç olacaktır. Bu durum yakın gelecekte optimal kontrolün kişiye özgü uygulamalarını teknoloji dünyasına görebileceğimiz anlamına gelmektedir. Örneğin aynı marka ve aynı model buzdolabının coğrafi bölgelere, evin konumuna ya da kullanıcının isteklerine göre kısıtları farklı olabilecektir.

Sadece teknolojik alanda değil daha birçok alanda yürürlüğe konulacak optimal kontrol uygulamaları olabileceği düşünülebilir. Vergi gelirlerini maximum yaparken üretim ve refahı dengelemek bir optimal kontrol problemi olarak ifade edilebilir ya da sağlık harcamalarının minimize edilmesi için uygulanacak sağlık politikası bir optimal problem konusu olabilir. İki boyutlu bir düzlemde Brachistochrone problemi ile başlayan optimal kontrol problemleri yolculuğunun gelecekte dinamik programlamayı gerektirerek sonsuz boyutlu sistemlerin kontrolüne dönüşmesi kaçınılmaz gözükmektedir. Bu gelişmeler sosyal hayatta bireysel özgürlüklerin genişlemesine yol açacak, toplumsal huzuru bozacak sonuçlara da sebep olabilecektir. Ülkemizde sanayiden tarıma rekabetçi bir yapı oluşması için verimliliğin arttırılması, bunu sağlamak için optimal kontrolün tüm sektörlerde yürürlüğe alınması kaçınılmaz bir zorunluluktur. Ülke kaynaklarının en akılcı ve en etkin olarak değerlendirilmesi için de iyi bir modelleme, çözümleme ve analiz ile optimal kaynak kullanımı, optimal üretim ve optimal tüketim sağlanması gelişme ve ilerlemede en önemli sürükleyici güç olacaktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Üç yüz yıldan fazla süren bir gelişim sonunda optimal kontrol teorisi, köklerini Fermat, Newton, Leibnitz ve Benoulliler'in attığı Varyasyonlar Analizi'nin bir uzantısı olarak yeni bir alan oluşturdu. Varyasyonlar analizi daha sonra gelen Euler, Lagrange tarafından geliştirildi, 19. Yüzyılda Legendre, Jacobi, Hamilton ve Weierstrass başata olmak üzere birçok matematikçinin ortaya koyduğu teorik temele dayanan optimal kontrol, iyi kurgulanmış bir araştırma alanına dönüştü. Bugün 20.yüzyılın başında Bolza ve Bliss'in önemli katkıları oldu. 1957 de Bellman Hamilton-Jacobi teorisine dinamik programlama adını vererek yeni bir bakış açısı getirdi, temel olarak doğrusal olmayan bir geribeslemeli kontrol şeması oluşturdu. 1939 da Mc Shane ve 1962 de Pontryagin Varyasyonlar analizini kontrol değişkeni kısıtları eşitsizliğini çözecek şekilde genişletti. Optimal kontrol teorisinin kullanılması bilgisayarların 1950 lerde ticari olarak piyasalarda yer almaya başlamasından sonra yaygınlaştı. Bugün optimal kontrol uygulamaları mühendislikten ekonomiye; biyolojiden ve yönetim bilimlerine kadar pek çok alanda yaygınlaştı.

KAYNAKLAR

Aamo, O.M. and Krstıc, M., 2002. Flow Control by Feedback. **Springer**.

Ahmedov, K.T. and Akhiyev, S.S., 1972. Necessary Conditions for Zone Problems of Optimal Control Theory. **Akad, Nauk Azerbaycan, SSR dokl**. vol. 28 No:5, 12-16 pp.

Alvarez, L., 1999. {Vazquez and A. Martnez, Modelling and control of natural convection in canned foods. **IMA J. Appl. Math.** 63 (1999) 246-265.

Andasari, V., Gerisch, A., Lolas, G., et al (eds), 2010. Mathematical modeling of cancer cell invasion of tissue: biological insight from mathematical analysis and computational simulation. **J Math Biol**, 2010; 63(1): 141-71.

Anderson, A.R.A., Chaplain, M.A.J, Newman E.L., et al (eds), 2000. Mathematical modelling of tumour invasion and metastasis. **Computational Mathematical Methods Med**, 2000; 2(2): 129-54.

Anderson, A.R.A., 2005. A hybrid mathematical model of solid tumour invasion: the importance of cell adhesion. **Mathematical Med Biol**, 2005; 22(2): 163-86.-71.

Aretano, R., Zaccarelli, N., Petrosillo I., Dadamo M., Zurlini G., 2006. Dinamica mensile in una panarchia di Sistemi Socio-Ecologici nella Regione Puglia dal 2001 al 2005 attraverso l'analisi da remoto. **16th Meeting of the Italian Society of Ecology**, 19-22 September 2006, Viterbo/Civitavecchia bal Optimization 11: 341-359.

Arnold, Margaret et al (eds), 2006. Natural disaster hotspots: case studies, **Disaster risk management series**, No.6. The World Bank, Hazard Management Unit.

Arrow, K. J., 1968. Applications of control theory of economic growth. **Mathematics of Decision Sciences**, part 2, AMS, page 92.

Åström, K. J., and B. Wittenmark., 1995. **Adaptive Control**. Reading, MA: Addison-Wesley.

Athans, M., 1971. The role and use of the stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control system design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, AC-16(6): 529-552.

Baek, K.H. and Elliot, S.J., 1995. Natural algorithms for choosing source locations in active control systems. **J. Sound Vibr**. 186(1995) 245-267.

Barthel R, Janisch S, Schwarz N, Trifkovic A, Nickel D, Schulz C, Mauser W., 2008. An integrated modelling framework for simulating regional-scale actor responses to global change in the water domain. **Environ Model Software**, 2008;23:1095–121.

Basar, T. and Olsder, G., 1995. **Dynamic Noncooperative Games**. **Academic Press**, 2nd Edition.

Bastı, Mehmet., 2012. "P-medyan Tesis Yeri Seçim Problemi ve Çözüm Yaklaşımları", **Online Academic Journal of Information Technology**, 3, 7, 2012, 47-75.

Bayen, A. M., Raffard, R. L. and Tomlın, C. J., 2004. Adjoint-based constrained control of Eulerian transportation networks: Application to air traffic control. **In the Proceedings of the American Control Conference**, Boston, June 2004.

Baykara O., 2016. **Balikesir Saglik Bil Derg**, Cilt:5 Sayı:3 Aralık 2016

Beavis, B. and Dobbs, B., 1992. **Optimization and stability for economic analysis**. Cambridge university press.

Bellard, C., Bertelsmeier, P. L., Thuller, W. and Courchamp, F., 2012.Impacts of climate change on the future of biodiversity. **Ecol. Lett**. 15, 365–377 (2012).

Bellini G., 2002. FAO, Acqua per le Colture. **Organızzazıone Per L'alımentazıone E L'agrıcoltura Delle Nazıonı Unıte**, Roma, 2002.

Bellman, R., 1957. **Dynamic Programming**. New Jersey: Princeton Univ. Press.

Bendahmane, M., Langlais, M. and Saad, M., 2002. Existence of solutions for reaction-diffusion systems with L1 data, **Advances in Differential Equations** , Volume 7, Number 6, June 2002, Talence Cedex

Beranek and Ver, 1992. **Noise and vibration control engineering. Principles and applications**. JohnWiley and Sons, New York (1992).

Berge, C., 1963. **Topological Spaces**. New York: Macmillan, 1963.

Bermudez, A. and Martinez., 1994. A state constrained optimal control problem related to the sterilization of canned foods. Automatica. **The IFAC Journal**, 30 (1994) 319-329.

Bermudez, A. and Saguez, C., 1987. Optimal control of a Signorini problem. **SIAM J**. Control Optim. 25 (1987) 576-582.

Bermudez, A., 1993. **Mathematical techniques for some environmental problems related to water pollution control, in Mathematics, Climate and Environment,** edited by J.I. Daz, J.-L. Lions. Masson, Paris

Bermudez, A., Martnez, A. and Rodrguez, C., 1991. Un probleme de controle ponctuel lie a l'emplacement optimal d'emissaires d'evacuation sous-marine. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. **I Math**. 313 (1991) 515-518.

Betts R., 1989. Integrated approaches to climate–crop modelling: needs and challenges. Phil Trans R Soc B 2005;360:2049–65. Brouwer C., Prins K.and Heibloem M., Irrigation **Water Management: Irrigation Scheduling.** Training manual no. 4, FAO 1989.

Betts, J.T., 2001. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming. **SIAM**, Philadelphia, USA.

Bhat, M.G., Huffaker, R.G. ve Lenhart, S.M., 1993. Controlling Forest Damage by Dispersive Beaver Populations: Centralized Optimal Management Strategy, **Ecol. Applications**, 3(3), 518-530.)

Bhat, M.G. ve Huffaker, R.G., 2007. Management of a transboundary wildlife population: A self-enforcing cooperative agreement with renegotiation and variable transfer payments. **JEEM**, 53:54-67.

Bliss, G.H., 1946. Lectures on the Calculus of Variations, University of Chicago.

Bolza, O., 1946. Vorlesungen uber Variationsrechnung, Leipzig u. Berlin. 1909. G.H. Bliss**, Lectures on the Calculus of Variations**, University of Chicago.

Bonnans, J.F. and Casas, 1988. **E., Controle de systemes elliptiques semilineaires comportant des contraintes distribuees sur l'etat, in Nonlinear partial dierential equations and their applications**, edited by H. Brezis and J.-L. Lions. Pitman.

Bonnans, J.F., 1989. An introduction to Newton type algorithms for nonlinearly constrained optimization problems. Birkhauser-Verlag, Basel, Internat. Ser. Numer. **Math**. 87 (1989) 1-17.

Brito, P., 2004. The dynamics of growth and distribution in a spatially heterogenous world. WP 13/2004, **ISEG Working Papers**, 2004.

Brock, William A. ve Xepapadeas, A., 2005. Optimal Control and Spatial Heterogeneity: Pattern Formation in Economic-Ecological Models (July 2005). **FEEM**

Working Paper No. 96.2005. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=773925 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.773925

Brock, W. And Xepapadeas, A., 2008. Diffusion-induced instability and pattern formation in infinite horizon recursive optimal control. **Journal of Economic Dynamics and Control**. 32 (2008), 2745–2787.

Bryson Jr., A. E., and ve Ho, Y.-C., 1975. **Applied Optimal Control**. Hemisphere Publishing Corporation. Washington, D.C.

Bryson, A. E., Jr. 1999. **Dynamic Optimization**. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Bryson, A. E., Jr., and Y. C. Ho., 1975. **Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control**. New York, NY: Hemisphere.

Buckdahn R., Li J., 2008. Stochastic differential games and viscosity solutions of HamiltonJacobi-Bellman-Isaacs equations. **SIAM J**. Control Optim. 47 (2008), no. 1, 444-475.

Bull. Math. Biol., 2003, 65, 407–424. 29. Norton, L.; Simon, R. Tumor size, sensitivity to therapy, and design of treatment schedules. **Cancer Treat. Rep**.1997, 61, 1307–1317.

Butgovsky, A.G., 1990. **The Theory Optimal Control of Systems with Dividing Parametres**. Nauka, Moscow.

Büttner, G. and Kosztra, B., 2006. **"CLC 2006 Technical Guidelines."**Caputo, M.C.,2005. Foundation of dynamic economic analysis: optimal control theory and applications. Cambridge University Press.

Caputo. M.C., 2011. **Foundation of dynamic economic analysis: optimal control theory and applications**. Cambridge University Press, 2005.T. A. Weber. Optimal control theory with applications in economics. The MIT Press.

Caratheodory, C., 1967. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations of First Order**. R. Dean (trans!.), Holden-Day, 1967 (originally in German, 1935).

Cardona, O.D., M.K. van Aalst, J. Birkmann, M. Fordham, G. McGregor, R. Perez, R.S.

Casas, E. ve Pola, C., 1989. PLCBAS User's Guide VERSION 1.1. Computacion 1. Universidad de Cantabria**, Santander**, Spain

Casas., E., 1985. L2 estimates for the finite element method for the Dirichlet problem with singular data. Numer. **Math**. 47 (1985) 627-632.

Casas., E., 1986. Control of an elliptic problem with pointwise state constraints. **SIAM J**. Control Optim. 24 (1986) 1309-1318.

Casas., E., 1997. Pontryagin's principle for state constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations. **SIAM J**. Control Optim. 35 (1997) 1297-1327.

Chang, S.S.L., 1961. **Synthesis of Optimal Control Systems**, McGraw-Hill.

Chaplain, M.A.J., Ganesh, M., Graham, I.G., 2001. Spatio-temporal pattern formation on spherical surfaces: numerical simulation and application to solid tumour growth. **J Math Biol Springer-Verlag**, 2001;42(5): 387-423.

Chaplain, M.A.J, Lolas. G., 2005. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: the role of the urokinase plasminogen activation system. **Math Models Methods Appl Sci**, 2005; 15(11): 1685-734.

Ciarlet, P.G., 1991. **Basic error estimates for elliptic problems, in Handbook of Numerical Analysys**, Vol. II, edited by P.G. Ciarlet and J.-L. Lions. North-Holland

Cicala, P., 1957. **An Engineering Approach tu the Calculus of Variations**. Levrotto and BelJa, Torino, 1957.

Clarke, D. W., C. Mohtadi, and P. S. Tuffs., 1987. Generalized predictive control—**Parts I and II. Automatica**, 23(2): 137-160.

Climate Change, 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change,**Intergovernmental Panel on Climate Change**, 2007.

CMCC, 2015. Adaptation in water and coastal areas in Puglia, Italy. **Report of the Pilot 3 of the Orientgate project.**

Costello, C. and Polasky, S., 2008. Optimal harvesting of stochastic spatial resources. **J. Environ. Econ. Manag**. 56:1–18

Cotecchia V., Polemio M., 1995. L'inquinamento e il sovrasfruttamento delle risorse idriche sotterranee pugliesi. 6° Workshop PROGETTO STRATEGICO Clima Ambiente e Territorio nel Mezzogiorno, Taormina, 13-15 December 1995

Current Pharmaceutical Design, 2014, 20, 000-000 11381-6128/14 $58.00+.00 © 2014 Bentham Science Publishers Mathematical Modeling of Tumor Growth and Treatment.

Dai, A., 2011. Drought under global warming: A review. **Wiley Interdisciplinary Reviews: Climate Change**, 2: 45-65.

Dantzig, G. B., 1949a. Programming in a linear structure, **Econometrica**, 17, 73–74.

Dantzig, G. B., 1949b. Programming of Inter-Dependent Activities II, Mathematical Model, **Econometrica**, 17, 3-4, 200-211, 1949b. (Aynı makale ayrıca Dantzig, G.B. (1951), Activity Analysis of Production and Allocation içinde Koopmans, T. C. editör, John Wiley& Sons, NY, 19-32 yayınlanmıştır).

Dantzig, G. B., 1951a. **Maximization of a linear function subject to linear inequalities, Activity Analysis of Production and Allocation içinde Koopmans**, T. C. editör, John Wiley& Sons, NY, 339-347.

Dantzig, G. B., 1951b. **Application of the simplex method to a transportation problem, Activity Analysis of Production and Allocation içinde Koopmans**, T. C. editör, John Wiley& Sons, NY, 359-373.

Dantzig, G. B., 1951c. **A proof of the equivalence of the programming problem and game problem, Activity Analysis of Production and Allocation içinde Koopmans**, T. C. editör, John Wiley& Sons, NY, 330-335.

Debreu, G., 1959. **Theory of Value**. New Haven, CN: Yale University Press,1959.

E. Di Benedetto, 1986. On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equatons with measurable coeffcients. Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 13 (1986) 487-535.

EEA, 2007. **European Environment Agency: CLC2006 technical guidelines**, Publications Office of the European Union, Luxembourg, 2007.

Ekeland, I. ve Temam, R. 1976. **Convex analysis and variational problems**. North-Holland, Amsterdam (1976).

El-Ashry, M.T., Duda, A.M., Skaggs, R.W. and Schilfgaarde, J. van, 1999. Future perspectives on agricultural drainage, Agricultural drainage, ASA-CSSA-SSSA, **Madison**, WI, (1999), pp. 1285–1298

Elliot, N.J. ve Kalton N.J., (1972) The existence of value in differential games Mem. Amer. **Math**. Soc., 126.

Enderling H, Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J., et all. 2009. Paradoxical dependencies of tumor dormancy and progression on basic cell kinetics. **Cancer Res**, 2009; 69(22): 8814-21.

Ergun, A., Camphausen, K. and Wein, L. M., 2003. Optimal scheduling of radiotherapy and angiogenic inhibitors, **Bull. of Math. Biology**, 65 (2003), 407–424.

Evans, L. C., 2002. Partial Diferential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, **American Mathematical Society, Providence, Rhode Island**, 1998, reprinted with corrections in 2002.

Falloon P., ve Betts R., 2009. Climate impacts on European agriculture and water management in the context of adaptation and mitigation—The importance of an integrated approach, **Sci Total Environ** (2009), doi:10.1016/j.scitotenv

Ferrise R., Moriondo M., Trombi G., Miglietta F. And Bindi M., 2013. Climate Change Impacts on Typical Mediterranean Crops and Evaluation of Adaptation Strategies to Cope With, Regional Assessment of Climate Change in the Mediterranean, **Advances in Global Change Research**. Springer Netherlands (2013), pp. 49–70.

Fisher, R.A., 1937. The wave of advance of advantageous genes. **Annals of Eugenics**, 7:355-369

Fitts, P. M., 1954. The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of movement. **Journal of Experimental Psychology**, Vol.47, No.6, pp. 381-391, June 1954.

Fitzgibbon, W. E. and Morgan, J.J., 1988. A diffusive epidemic model on a bounded domain of arbitrary dimension, Differ. **Integral Equ**., 1(1988), pp. 125-132.

Fitzgibbon, W. E., Langlais, M. and Morgan, J.J., 2007. A mathematical model for indirectly transmitted diseases, **Math. Biosci**. 206: 233-248

Frieboes, H.B., 2006. An integrated computational/experimental model of tumor invasion. **Cancer Res**, 2006; 66(3): 1597-604.

Gallina V., Torresan S., Critto A., Zabeo A., Semenzin E., Marcomini A., 2013. “Development of a risk assessment methodology to estimate risk levels.” **KULTURisk Project Deliverable**, 1.7bis. (2013)

Gamallo, P. 1994. Contribucion al estudio matematico de problemas de simulacion y control activo del ruido, Ph. canned foods. Automatica. **The IFAC Journal**, 30 (1994) 319-329.

Gamallo, P., 2002. Contribucion al estudio matematico de problemas de simulacion y control activo del ruido, Ph. Thesis. Universidade de Santiago de Compostela, Spain

García, C. E., D. M. Prett, ve M. Morari., 1989. Model predictive control: Theory and practice—**A survey. Automatica**, 25(3): 335-348.

Gass, S.I., 2000. **Making Decisions with Precision**, Business Week October 30, 2000.

Gass, S.I. ve Assad, A.A., 2004. Annotated Timeline of Operations Research: An Informal History, **Springer-Verlag New York**, NY.

Gatenby, R.A., Gawlinski E.T., 1996. A reaction-diffusion model of cancer invasion. **Cancer Res**, 1996; 56(24): 5745-53.

Gatenby, R.A. The potential role of transformation-induced metabolic changes in tumor-host interaction. **Cancer Res**, 1995; 55(18): 4151-6.

Gerisch, A., Chaplain, M.A.J., 2008. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: Local and non-local models and the effect of adhesion. **J Theoretical Biology**, 2008; 250(4): 684-704.

Goldstine, H.H., 1980. **A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century**, Springer-Verlag.

Griesse, R. and Volkwein, S., 2006. Parametric Sensitivity Analysis for Optimal Boundary Control of a 3D Reaction-Diffusion System, in: Large-Scale Nonlinear Optimization, G. Di Pillo and M. Roma (editors), volume 83 of Nonconvex Optimization and its Applications, p.127–149, **Springer**, Berlin.

Guowei D. and Wulong L., 2009. Three solutions for a diferential inclusion problem involving the p(x)-Laplacian. Nonlinear Anal., **Theory Methods Appl**.

Hahnfeldt, P., Panigrahy, D., Folkman, J., Hlatky, L.R., 1999.Tumor development under angiogenic signaling: A dynamical theory of tumor growth, treatment response, and postvascular dormancy. **Cancer Res**. 1999, 59,4770–4775.

Haataja, 1994, **Solving Optimization Problems**. CSC- Center for Scientific Computing Ltd, Yliopistopaino. ISBN 952-9821-02-6. Ed. 1. 232p.(In Finnish)

Herskovits, J., 1986. A two stage feasible directions algorithm for nonlinear constrained optimization. **Math**. Programming, 36 (1986)19-38.

Herskovits, J., 1998. A feasible directions interior point technique for nonlinear optimization**. J. Optim**. Theory Appl. 99 (1998) 121-146.

Hestenes, M.R., 1996. **Calculus uf Variations and Optimal Control Theory**.Wiley, New York.

Hildenbrand, W., 1974. **Core and Equilibria of a Large Economy**. Princeton: Princeton University Press,.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J., 2005**. Introduction to Operations Research**, 8. baskı, 2005, McGraw Hill, New York, NY.

Hiriart, J.B., 1993. **Convex analysis and Minimization Algorithms**. Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg

Hornbeck R., Keskin P., 2014. The Historically Evolving Impact of the Ogallala Aquifer: Agricultural Adaptation to Groundwater and Drought. **Am. Econ. J. Appl. Econ**., 6 (2014), pp. 190–219.

Hu, B. and Yong, J.,1995. Pontriagin maximum principle for semilinear and quasilinear parabolic equations with pointwise state constraints. **SIAM J**. Control Optim. 33 (1995) 1857-1880.

Hynynen, K., Damianou, C., Darkazanli, A, Unger, E. and Schenck, J.F., 1993. The feasibility of using MRI to monitor and guide noninvasive ultrasound surgery. **INFORMS Interfaces dergisi** web sitesi, http://pubsonline.informs.org/, son erişim tarihi: 6 Şubat 2017.

Jameson, A. 1988. Aerodynamic design via control theory. Princeton University Report MAE 1824, ICASE Report No. 88-64, November 1988, also, **J. of Scientific Computing**, Vol. 3, 1988, pp. 233-260.

Jameson, A., Martınellı, S. and L., 2003. A continuous adjoint method for unstructured grids. 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, **AIAA Paper** AIAA-2003-3955, Orlando, FL,June 23-26, 2003.

Jehle, G.A. and Reny, P. J.1970. **Advanced Microeconomic Theory**. Boston: Addison-Wesley, 2001 Rockafellar, R. T. Convex Analysis. Princeton University Press, 1970.

Kallen, V., Arcuri, P. ve Murray, J. D., 1985. A simple model for the spatial spread and control of rabies. **J. Theor. Biol**., 116(1985), pp. 377-393.

Kansal, A.R., Torquato S, Harsh GR IV, et all., 2000. Cellular automaton of idealized brain tumor growth dynamics. **BioSystems**, 2000; 55(1-3):19-27.

Kantorovich, L. V., 1939. **Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production**. Publication House of the Leningrad State University, Leningrad, U.S.S.R., 68.

Kantorovich, L. V., 1960. Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production, **Management Sci**. 6 ,366–422.

Kantorovich, L. V., and Gavurin M. K. (hazırlanış tarihi 1940, yayın tarihi 1949), The Use of Mathematical Methods in Analyzing Problems of Goods Transport, in Problems of Increasing the Efficiency in the Transport Industry, pp. 110-138). **Academy of Sciences**, U.S.S.R.

Kim, M., ve Erzberger, H., 1967. On the design of optimum distributed parameter system with boundary control function. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 12, 22.

Kliejunas, J. T., 2011. A risk assessment of climate change and the impact of forest diseases on forest ecosystems in the Western United States and Canada. Gen. Tech. Rep. PSW-GTR-236. Albany, CA: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, **Pacific Southwest Research Station**. 70 p.

Koopmans, T. C., 1949. Optimum Utilization of the Transportation System. **Proceedings of the International Statistical Conferences**, 5, 136-145.

Koopmans, T. C. and Bausch, A.F., 1959. Selected Topics in Economics Involving Mathematical Reasoning, **SIAM Review**, 1, 2, 79-148.

Krstíc, M, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovíc., 1995. **Nonlinear and Adaptive Control Design**. New York, NY: Wiley-Interscience.

Kwakernaak H., and R. Sivan. 1972. **Linear Optimal Control Systems**. New York, NY: Wiley.

Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A. and Uraltseva, N.N., 1968. Linear and quasilinear equations of parabolic type. **Amer. Math.Soc**., Providence, Transl. Math. Monogr. 23.

Landis, W. G. And Wiegers, J. A., 1997. Design considerations and a suggested approach for regional and comparative ecological risk assessment, **Hum. Ecol. Risk Assess**., 3, 287–297, 1997.

Lawden, D.E ., 1963. Optimal Trajectories for Space Navigation, Butterworths, London. Ledzewicz, U. and Schattler, H. Optimal bang-bang controls for a 2-compartment model in cancer chemotherapy, **Journal of Optimization Theory and Applications** - JOTA, 114, 2002. pp. 609-637.

Ledzewicz, U. and Schattler, H., 2002. Analysis of a cell-cycle specific model for cancer chemotherapy. **J. of Biological Systems,** 10, (2002), pp. 183-206.

Ledzewicz, U. and Schattler, H., 2002. On optimal controls for a general mathematical model for chemotherapy of HIV, **Proceedings of the 2002 American Control Conference (ACC)**, Anchorage, Alaska, (2002), pp. 3454-3459.

Ledzewicz, U. and Schattler, H., 2003. Optimal control for a bilinear model with recruiting agent in cancer chemotherapy, **Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**, Maui, Hawaii, December 2003, pp. 2762-2767.

Ledzewicz, U., Schattler, H., and Swierniak, A., 2004. Finite-dimensional models of drug resistant and phase specific cancer chemotherapy, **J. of Medical Informatics and Technologies**, 8, (2004), pp. IP 5-13.

Leontief, W.W., 1933. The Use of Indifference Curves in the Analysis of Foreign Trade, **The Quarterly Journal of Economics**, 47, 493-503.

Leontief, W. W., 1936. Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States, **Review of Econ. Statistics**, 18, 3, 105-125.

Levin, S.A., 1976. Population Dynamic Models in Heterogeneous Environments. Ann. **Rev. Ecol. Syst**. 7:287-310.

Lewis, F. L., 1986. **Optimal Estimation**. New York, NY: Wiley Interscience.

Li, W., 2006. Optimal Control for Biological Movement Systems, A dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree Doctor of Philosophy, University of California, San Diego.

Lions, J.L., 1968. **Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires**. Dunod, Paris.

Lions, J.L., 1988. Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems, **SIAM Review**, 30 (1988), 1-68.

Ljung, L., 1987. **System Identification—Theory for the User**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Logan, J. D. and Perez, J. D., 1980. Similarity solutions of reactive shock hydrodynamics. **SIAM Journal of Applied Mathematics**, 39(1980):512-527.

Logan, J. D., 2004. **Applied Partial Differential Equations**, 2nd ed., Springer- Verlag, New York.

Luus, R., 2000. **Iterative Dynamic Programming**. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC.

Malinen, M., Huttunen, T., and Kaipio, J.P., 2002. Optımal control for the ultrasound ınduced heatıng of a tumor, **4th International Conference on Inverse Problems in Engineering**, Rio de Janeiro, Brazil, 2002.

Marchuk, G.I., 1986. **Mathematical models in environmental problems**. North Holland, Amsterdam.

Martín Sánchez, J. M. and J. Rodellar., 1996. **Adaptive Predictive Control**. London, UK: Prentice Hall.

Martinez, A., Rodrguez, C. and Vazquez, M.E., 2000. Theoretical and numerical analysis of an optimal control problem related to waste-water treatment. **SIAM J**. Control Optim. 38 (2000) 1534-1553.

Mayne, D. Q. and H. Michalska. 1990. Receding horizon control of nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 35(7): 814-824.

McRuer, D., Ashkenas, I. and Graham, D., 1973. **Aircraft Dynamics and Autumntic Control**. Princeton.

McShane, E.J., 1939. "On Multipliers for Lagrange Problems." Ama **J. Math**., LXI, 809-818,1939.

Merger, J., Borzi, A. and Herzog, R., 2015. **Optimal control of a system of reaction-diffusion equations modeling the wine fermentation process**. Würzburg, Germany.

Mishra A.K., and Singh V.P., 2011. Drought modeling – A review. **Jurnal of Hydrology**, 403: 157.

Montgomery, D. C, E. A. Peck. and G. G. Vining., 2001. **Introduction to Linear Regression Analysis**. New York, NY: Wiley Interscience.

Morari, M. and E. Zafiriou. 1989. **Robust Process Control**. London, UK: Prentice Hall.

Moss R., Babiker M., Brinkman S., Calvo E., Carter T., Edmonds J., Elgizouli I., Emori S., Erda L., Hibbard K., Jones R., and Nise, N. S., 1995. **Control Systems Engineering. Redwood City**. CA: Benjamin/Cummings.

Murray, J. D. and Seward, W. L., 1991. On the spatial spread of rabies among foxes with immunity, **J. Theo. Biol**., 130(1991), pp. 327-348.
Murray, J. D., Stanley, E. A. and Brown, D. L.,1986. On the spatial spread of rabies among foxes, **Proc. R. Soc.** London B, 229(1986), pp. 111-150.
Nelson,P.A. and Elliot, S.J., 1999. **Active Control of Sound**. Academic Press, London.
Neilan, R.L. Miller, 2009. Optimal Control Applied to Population and Disease Models, PhD diss., University of Tennessee, http://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/74
Newton, G., Gould, L.A. and Kaiser, T.E., 1957. **Analytical Design of Linear Feedback Controls**, Wiley.
Nise, N. S., 1995. **Control Systems Engineering**. Redwood City, CA: Benjamin/Cummings.
Norton, J. P. 1986. **An Introduction to Identification**. London, UK: Academic Press.
Olin Ball, C. and Olson, F.C.W., 1957. **Sterilization in food technology**. Mc Graw Hill, New York (1957).
Olson, L.J. and Roy, S., 2002. The Economics of Controlling a Biological Invasion. **Working Paper; Dept. Of Agr. And Res. Econ**., University of Maryland, College Park.
P.G. Ciarlet, 1991. **Basic error estimates for elliptic problems, in Handbook of Numerical Analysys**, Vol. II, edited by P.G. Ciarlet and J.-L. Lions. North-Holand.
Panier, E.R., Tits, A.L. and Herskovits, J., 1988. A QP-Free, Globally Convergent, Locally Superlinearly Convergent Algorithm for Inequality Constrained Optimization. **SIAM J.** Control Optim. 26 (1988) 788-810.
Palko, S., 1996, "Structural Optimization of Induction Motor using a Genetic Algorithm and a Finite Element Method", Acta Polytechnica Scandinavvica, **Electrical Engineering Series** No. 4, Helsinki, pp. 10-12.
Pannell, D.J. 1990. An economic response model of herbicide application for weed-control. Aust. **J. Agric. Econ**. 34(3): 223–241.
Perez Martin, R.I., Banga, J.R., and Gallardo, J.M., 1989. **Simulation of thermal processes in tuna can manufacture**. Instituto de Investigaciones Marinas (C.S.I.C.), Vigo, Spain.
Perumpanani AJ, Sherratt J.A., Norbury J., ve Byrne H.M., 1996. Biological inferences from a mathematical model for malignant invasion. **Invasion Metastasis**, 1996; 16(4-5): 209-21.
Pierre, D.A., 1992. **"Optimization,"** in McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology 12.
Ponti, L., Gutierrez, A.P., Basso, B., Neteler, M., Ruti, P.M., Dell'Aquila, A., and Iannetta, M., 2013. Olive agroecosystems in the Mediterranean basin: multitrophic analysis of climate effects withprocess-basedrepresentationof soil water balance. **Procedia Environ. Sci**. 19, 122–131.
Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. and Mishchenko, E.F. 1962. The mathematical theory of optimal processes. **Interscience**, 1962.
Poplawski NJ, Agero U, Gens JS, et all., 2009. Front instabilities and invasiveness of simulated avascular tumors. **Bull Math Biol** ; 71(5): 1189-227.
Price, W. L. 1983. Global optimization by controlled random search. **J. Optimization Theory and Applications**, 40(3): 333-348.

Qadir M, and Oster J.D, 2004. Crop and irrigation management strategies for saline-sodic soils and waters aimed at environmentally sustainable agriculture. **Science of The Total Environment**, Volume 323, Issues 1–3, 5 May 2004, Pages 1–19.

Ray, W.H. 1989. **Advanced Process Control**. Butterworths, Boston.

Rejniak K.A., and Anderson A.R.A., 2010. Hybrid models of tumor growth.**WIREs Syst Biol Med**, 2010; 3(1): 115-25.

Russell, D.L., 1978. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, **SIAM Review** 20 (1978), 639-739.

Stadler, G., 2006. Optimization with Differential Equations: Where many large scale optimization problems come from, http://www.mat.uc.pt/eopt/6sessao-eopt.pdf E.T. 06.02.2018.

Samuelson, P. A., 1992. **Foundations of Economic Analysis**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983.Varian, H. R. Microeconomic Analysis. 3rd Edition. New York: Norton, 1992.

Sanchirico, J. N., 2005. Additivity Properties in Metapopulation Models: Implications for the assessment of marine reserves, **JEEM**, 49(1):1-25.

Sanchrico, J.N. and Wilen, J.E., 2005. Managing Renewable Resource Use With Market-Based Instruments: Matching Policy Scope to Ecosystem Scale. **JEEM**, 50:1, 23-46.

Sanchirico, J., Albers, H., and Fischer, C., 2010. Invasive species management in a spatially heterogeneous world: Effects of uniform policies. **Resource and Energy Economics.**

Sanchirico, J., Albers, H., Fischer, C. and Coleman, C., 2010. Spatial management of invasive species: Pathways and policy options. **Environmental and Resource Economics**, 45 (2010) 517-535.

Sastry, S. S., 2005. Lectures in Optimal Control and Dynamic Games, **Notes for the course.**

Scott, R.,1973. Finite element convergence for singular data. Numer. **Math**. 21 (1973) 317-327.

Shepherd, A., et. all., 2012. A Reconciled Estimate of Ice-Sheet Mass Balance. **Science** 338, 1183 (2012).

Shepard, C. C., Agostini, V. N., Gilmer, B., Allen, T., Stone, J., Brooks, W., and Beck, M. W., 2011. Assessing future risk: quantifying the effects of sea level rise on storm surge risk for the southern shores of Long Island, New York, **Natural Hazards**, January 2012, Volume 60, Issue 2, pp 727-745. 04 Dec 2011.

Sjöberg, J., Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P.-Y. Glorennec, H.Hjalmarsson. and A. Juditsky. 1995. Nonlinear black-box modeling in system identification: A unified overview. **Automatica**, 31(12): 1691-1724.

Smith, D. M., S. Cusack, A. W. Colman, C. K. Folland, G. R. Harris, and J. M. Murphy, 2007: Improved surface temperature prediction for the coming decade from a global climate model. **Science**, 317, 796–799.

Steduto, P., Hsiao, T.C., Fereres. and E., Raes D., 2012. **Crop yield response to water**. Food And Agriculture Organizatıon Of The United Nations (FAO), Rome.

Stengel, R. F. 1994. **Optimal Control and Estimation**. New York, NY: Dover Publications.

Stephanopoulos, G., 1984. **Chemical Process Control**. London, UK: Prentice-Hall International.
Storn, R. and Price, K. 1997. **Differential evolution** : A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces.
Swierniak, A., Ledzewicz, U. and Schattler, H. 2003. Optimal control for a class of compartmental models in cancer chemotherapy, **International J. of Applied Mathematics**, 13, (2003), pp. 101-112.
Swierniak, A., 1995. Cell cycle as an object of control. **J. of Biological Systems**, 3, (1995), pp. 41-54.
Swierniak, A., Polanski, A. and Kimmel, M. 1996. Optimal control problems arising in cell-cycle-specific cancer chemotherapy. **Cell Proliferation**, 29, (1996), pp. 117-139.
Bewley, T.R.., 2001. Flow control: New challenges for a new renaissance. **Progress in Aerospace Science**, 37:21-58.
Tagaki, T. and Sugeno, M., 1985. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. IEEE Trans. Fuzzy Systems 1(1):
Tomlin, C. J., 2005. **Lecture Notes 8**. Optimal Control and Dynamic Games, May 11, New Orleans, LA, 2005.
Troltzsch, F. 2005. **Optimale Steuerung partieller Dierentialgleichungen. Theorie, Verfahren und Anwendungen**. 1st ed. Vieweg Verlag, Wiesbaden, Germany, 2005 (German).
Turner S. and Sherratt, J,A., 2002. Intercellular adhesion and cancer invasion: a discrete simulation using the extended Potts model. **J Theoretical Biol**, 2002; 216(1): 85-100.
Varaiya, P., 1967. The existence of solution to a differential game. **SIAM J**. Control Optim. 5, 153-162.
Vasiliev, F.P., 1974. **Lectures on Solving Methods for Extremal Problems**. Moscow Universty Press, Moscow.
Vazquez, M.E. 1992.{Mendez, Contribucion a la resolucion numerica de modelos para el estudio de la contaminacion de aguas. Master thesis. Dept. Matematica Aplicada. Univ. Santiago de Compostela, Spain (1992).
Wang, P. K. C., 1966. Asymptotic stability of distributed parameter systems with feedback control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 11, 46–54.
Wang, P. K. C. and Tung, F., 1964. Optimum control of distributed parameter systems. **Journal of Basic Engineering**, 67–79.
Webb, G. F., 1985. **Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics**. Marcel Dekker, New York, 1985.
Webb, G.F., 1981. A reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. **J. Math.Anal. Appl.**, 84(1981), pp. 150-161.
Weber, T. A. 2011. **Optimal control theory with applications in economics**. The MIT Press.
Williams, H.P., 1999. **Model Building in Mathematical Programming**. 4. baskı, Wiley, New York, NY.
Winston, W.L. (2003), **Operations Research: Applicatios and Algorithms.** 4. baskı, International Thomson Publishing, Belmont, CA.
Wurtz, F., Richomme, M., Bigeon, J. and Sabonnadiere, J.C, 1997. A Few Results for Using genetic algorithms in Design of Electrical Machines", **IEEE Transactions on Magnetics**, Vol.33, No.2.

Yegerov, V.A., 1978. **Optimal Control of Heat and Diffussion Proceses**. Nauka, Moscow.

Zabeo, A., Pizzol, L., Agostini, P., Critto, A., Giove, S. and Marcomini, A., 2011. Regional risk assessment for contaminated sites, Part 1: Vulnerability assessment by multicriteria decision analysis, **Environ. Int.**, 37, 1295–1306, 2011.

Zald, A. E., Shelly, S. and Wade, T.,2006. A to Z GIS: An Illustrated Dictionary of Geographic Information Systems. **Articles (Libraries)**. Paper 144.

Zhang, J.,2004. Risk assessment of drought disaster in the maize-growing region of Songliao Plain, China. **Agriculture, Ecosystems & Environment**, Volume 102, Issue 2, April 2004, Pages 133–153.

Zhang, L., Wang, Z., and Sagotsky, J.A., 2008. Deisboeck TS. Multiscale agentbasedcancer modeling. **J Math Biol**, 2008; 58(4-5): 545-59.

Zhou, Q., Mikkelsen P.S., , Halsnæs K., and Arnbjerg-Nielsen K., 2008. Framework for economic pluvial flood risk assessment considering climate change effects and adaptation benefits. **Journal of Hydrology**, Volumes 414–415, Pages 539–549. 11 January 2012.

ÖZGEÇMİŞ

Yazar, 1981 yılında Adana'da doğdu. İlkokul, Ortaokul ve Lise öğrenimini Adana'da tamamladı. Anadolu Üniversitesi İşletme Fakültesi İşletme Bölümü'nü 2009 yılında mezun oldu. Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalından 2018 yılında Yüksek Lisans derecesiyle mezun oldu. Halen Mustafa Kemal Üniversitesi Sanat ve Tasarım MYO Bilgisayar İşletmeni olarak görev yapmaktadır.