



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ**

Sema Merve KILINÇ

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
OCAK-2019



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ**

Sema Merve KILINÇ

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
OCAK-2019**

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Sema Merve KILINÇ

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN danışmanlığında hazırlanan bu tez 09/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN
Başkan

Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Erdal SERTKAYA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

09.01.2019

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Sema Merve KILINÇ

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Dört bölümden oluşan bu tezin, giriş bölümünde kesirli türev ve integral kavramı ile ilgili literatür bilgisi verildi.

İkinci bölümde, Conformable kesirli türev içeren diferansiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalara yer verildi.

Üçüncü bölümde, bazı özel fonksiyonlar ve Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Conformable kesirli türev yaklaşımları verildi. Bu bölümde son olarak üstel fonksiyon yönteminin conformable türev içeren lineer olmayan bir diferansiyel denkleme uygulanması verildi.

Tezin orjinal kısmı olan dördüncü bölümde, zaman değişkenine göre Conformable kesirli değiştirilmiş Boussinesq, dağınık uzun dalga, Gilson-Pickering, Liouville denklemlerinin ve avcı-av modelinin üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak analitik çözümleri elde edildi. Elde edilen analitik çözümlerin üç boyutlu grafikleri verildi.

2019, 64 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, Üstel fonksiyon yöntemi, Analitik çözüm.

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION BY EXPONENTIAL FUNCTION METHOD

In the introduction of this thesis, which is composed of four chapter, the literature information about the concept of fractional derivative and integral is given.

In the second chapter, the studies that node on the conformable fractional differential equations are given.

In the third chapter, some special functions and Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Conformable fractional derivative approaches are given. In this chapter, finally, the application of exp-function method to nonlinear differential equations involving conformable derivative is given.

In the fourth chapter, which is the original part of the thesis, analytical solutions of conformable time fractional variant Boussinesq, dispersive long wave, Gilson-Pickering, Liouville equations and the predator-prey system are obtained by using exp-function method. The three dimensional graphics of obtained analytical solutions are given.

2019, 64 Pages

Key Words: Fractional order partial differential equations, Exponential function method, Analytical solution.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans tezım süresince bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen danıőmanım Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN'a ve maddi manevi desteklerinden dolayı aileme teőekkürlerimi borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. Gama Fonksiyonu	7
3.2. Beta Fonksiyonu	8
3.3. Grünwald-Letnikov Yaklaşımı	8
3.4. Riemann-Liouville Yaklaşımı	9
3.5. Riemann-Liouville Yaklaşımı ile Grünwald-Letnikov Yaklaşımın İlişkisi	10
3.6. Caputo Yaklaşımı	10
3.7. Conformable Yaklaşımı	11
3.8. Üstel Fonksiyon Yöntemi	13
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	15
4.1. Kesirli Mertebeden Değiştirilmiş Boussinesq Denklemi	15
4.2. Kesirli Mertebeden Dağılık Uzun Dalga Denklemi	24
4.3. Kesirli Mertebeden Gilson-Pickering Denklemi	32
4.4. Kesirli Mertebeden Avcı - Av Modeli	40
4.5. Kesirli Mertebeden Liouville Denklemi	49
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	56
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	62

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4. 1. $\alpha = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	19
Şekil 4. 2. $\alpha = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	19
Şekil 4. 3. $\alpha = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	20
Şekil 4. 4. $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	20
Şekil 4. 5. $\alpha = 0,25$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	21
Şekil 4. 6. $\alpha = 0,5$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	21
Şekil 4. 7. $\alpha = 0,75$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	22
Şekil 4. 8. $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	22
Şekil 4. 9. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi	23
Şekil 4. 10. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	23
Şekil 4. 11. $\alpha = 0,25$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	27
Şekil 4. 12. $\alpha = 0,5$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	28
Şekil 4. 13. $\alpha = 0,75$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	28
Şekil 4. 14. $\alpha = 0,9$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	29
Şekil 4. 15. $\alpha = 0,25$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	29
Şekil 4. 16. $\alpha = 0,5$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	30
Şekil 4. 17. $\alpha = 0,75$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	30
Şekil 4. 18. $\alpha = 0,9$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	31
Şekil 4. 19. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u_1(x, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	31
Şekil 4. 20. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $v_1(x, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	32
Şekil 4. 21. $\gamma = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	37
Şekil 4. 22. $\gamma = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	38
Şekil 4. 23. $\gamma = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	38
Şekil 4. 24. $\gamma = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	39
Şekil 4. 25. Farklı t değerlerinde $\gamma = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	39
Şekil 4. 26. $\alpha = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	44
Şekil 4. 27. $\alpha = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	45
Şekil 4. 28. $\alpha = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	45
Şekil 4. 29. $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	46
Şekil 4. 30. $\alpha = 0,25$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	46
Şekil 4. 31. $\alpha = 0,5$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	47
Şekil 4. 32. $\alpha = 0,75$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	47
Şekil 4. 33. $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	48
Şekil 4. 34. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi	48
Şekil 4. 35. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözüm eğrisi.....	49
Şekil 4. 36. $\alpha = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	53
Şekil 4. 37. $\alpha = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	53
Şekil 4. 38. $\alpha = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	54
Şekil 4. 39. $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi	54

Şekil 4. 40. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi 55



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(x)$: Gama fonksiyonu
$\beta(x, y)$: Beta fonksiyonu
${}_aD_t^p f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında p –inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi
${}_aD_t^{-p} f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında p –inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali
${}_aD_t^p f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında p –inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_aD_t^{-p} f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında p –inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_a^C D_t^\alpha f(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ kapalı aralığında α –inci mertebeden Caputo kesirli türevi
$T_\alpha(f(t))$: $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli türevi
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$: $f(t)$ fonksiyonunun n –inci mertebeden türevi
$f^{(k)}(t)$: $f(t)$ fonksiyonunun k –ıncı mertebeden türevi

1. GİRİŞ

Kesirli türev kavramı, ilk olarak ünlü matematikçi olan G.W. Leibnitz' in L' Hospital'a yönelttiği soru ile 1695 yılında literatürde yerini almıştır (Oldham ve Spanier, 1974). 17. yüzyıldan sonra ise kesirli mertebeden türev kavramı birçok matematikçinin dikkatini çekmiş olup, bu alanda çalışmalar yapılmıştır (Hilfer, 2000).

Kesirli mertebeden türevler için literatürde birçok yaklaşım vardır. Bunlardan bazıları Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Conformable yaklaşımlarıdır. İki ünlü matematikçi olan Riemann ve Liouville'nin tanımladıkları kesirli mertebeden türev yaklaşımlarının birleştirilmesi sonucunda meydana gelen, Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı günümüzde sıklıkla kullanılmaktadır (Kilbas ve ark., 2006). 1967 yılında, Grünwald ve Letnikov sonlu fark yaklaşımını kullanarak Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımını tanımlamışlardır. Belli şartlar altında bir fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi ile Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türevinin eşit olduğu görülmüştür (Debnath ve Bhatta, 2007). Tamsayı mertebeli türev içeren başlangıç ve sınır değerleri ile verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin ifade edilmesine uygun olan Caputo türev yaklaşımı ise M. Caputo tarafından 1967 yılında literatüre kazandırılmıştır (Podlubny, 1999). Bu türev yaklaşımlarına göre daha basit olması sebebiyle birçok matematikçi tarafından tercih edilen ve adi türev ile ifade edilebilen Conformable kesirli türev yaklaşımı 2014 yılında literatürde yerini almıştır (Khalil ve ark., 2014).

Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo yaklaşımlarının sağlamadığı birçok özelliği R. Khalil ve arkadaşları tarafından tanımlanan Conformable kesirli türev yaklaşımı sağlamaktadır (Rezazadeh ve ark., 2017).

Son yıllarda, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, biyoloji, kimya, mühendislik, fizik, ekonomi ve diğer birçok alanda meydana gelen olayların matematiksel modellenmesinde kullanılmaktadır. Ayrıca, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler bilim ve mühendislik alanında önemli bir yere sahip olan lineer olmayan olayların da modellenmesinde önemli rol oynamaktadır (Aminikkah, 2016).

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler sinyal işleme, kontrol mühendisliği, elektromanyetizma, biyolojik bilimler, akışkan mekaniği, difüzyon süreçleri, viskoelastik

malzemelerin dinamiği, sürekli mekanik mekanizmalar ve küresel alevlerin yayılımı gibi birçok fizik ve mühendislik alanlarında kullanılmaktadır (Ilie, 2018).

Fizik ve mühendislikte meydana gelen olayların matematiksel modellenmesi sonucunda ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında etkili ve kolay bir yöntem olan üstel fonksiyon yöntemi 2006 yılında ilk olarak diferansiyel denklemlere uygulandı ve bu denklemlerin tam çözümleri elde edildi (He ve Wu, 2006).

Bu tezde; conformable kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq, dağınık uzun dalga, Gilson–Pickering, Liouville denklemlerinin ve avcı–av modelinin üstel fonksiyon yöntemi ile analitik çözümleri elde edilecektir.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Fizik ve mühendislikte meydana gelen olayların matematiksel modellenmesi sonucunda ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri büyük bir öneme sahiptir. Bu tür denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan yöntemler literatürde mevcuttur. Bu yöntemlerden bazıları, tanh-fonksiyon (Wazwaz, 2004; Malffiet, 2004), Jakobi eliptik (Parkes ve ark., 2002; Zhang ve Dai, 2006), birinci integral (Feng, 2002; Feng ve Wang, 2003), üstel fonksiyon (He ve Wu, 2006; He ve Abdou, 2007), alt denklem (Yomba, 2005; Zhang ve Xia, 2006), G'/G açılımı (Zhang ve ark., 2008; Wang ve ark., 2008), fonksiyonel değişim (Zerarka ve ark., 2010; Tasbozan ve ark., 2012) yöntemleridir.

Conformable kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri birçok matematikçi tarafından elde edildi.

2014 yılında Hammad ve Khalil tarafından conformable kesirli türev için Fourier serileri tanımlandı ve bazı kısmi diferansiyel denklemlerinin bu seri yardımıyla çözümleri bulundu (Hammad ve Khalil, 2014)

2014 yılında Hammad ve Khalil tarafından yapılan bir diğer çalışmada ise değişken katsayılı conformable kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemler için Wronskian formülü verildi (Hammad ve Khalil, 2014).

2015 yılında Batarfi ve arkadaşları tarafından başlangıç ve üç nokta sınır şartları ile verilen conformable kesirli mertebeden diferansiyel denklem çalışıldı (Batarfi ve ark., 2015).

2015 yılında Atangana ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada conformable kesirli türevin yeni özellikleri ile birlikte bu türev ile ilgili bazı teoremler verildi (Atangana ve ark., 2015).

2015 yılında Kurt ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada conformable kesirli mertebeden Burger's denkleminin Fourier serisi yardımıyla analitik çözümleri ve homotopi analiz yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edildi (Kurt ve ark., 2015).

2015 yılında Kurt ve Çenesiz tarafından yapılan çalışmada conformable kesirli mertebeden iki ve üç boyutlu dalga denklemlerin analitik çözümleri verildi (Çenesiz ve Kurt, 2015).

2015 yılında Abdeljawad conformable kesirli türev ve integral için zincir kuralını, Gronwall'un eşitsizliğini, kısmi integrasyonunu, Taylor kuvvet seri açılımlarını, Laplace dönüşümlerini ve lineer diferansiyel sistemlerini tanımladı (Abdeljawad, 2015).

2016 yılında Ekici ve arkadaşları tarafından ele aldıkları conformable kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümleri birinci integral yöntemi yardımıyla bulundu (Ekici ve ark., 2016).

2016 yılında Benkhattou ve arkadaşları zaman skalasında conformable kesirli türev ve integrali tanımladı (Benkhattou ve ark., 2016).

2016 yılında Aminikhah ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, conformable kesirli mertebeden (1+1) ve (2+1) boyuta sahip düzenli uzun dalga denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için alt denklem yöntemi kullanıldı (Aminikhah ve ark., 2016).

2016 yılında Eslami ve Rezazadeh tarafından yapılan çalışmada birinci integral yöntemi ile conformable kesirli mertebeden Wu-Zhang denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Eslami ve Rezazadeh, 2016).

2016 yılında Kurt ve arkadaşları tarafından homotopi analiz yöntemi kullanılarak yapılan çalışmada conformable kesirli mertebeden Burgers-Korteweg-de Vries diferansiyel denkleminin nümerik çözümleri elde edildi (Kurt ve ark., 2016).

2016 yılında Tasbozan ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada conformable kesirli mertebeden iki boyutlu Boussinesq denklemi ve birleştirilmiş KdV-mKdV denkleminin analitik çözümleri Jacobi eliptik fonksiyon açılım yöntemiyle elde edildi (Tasbozan ve ark., 2016).

2016 yılında Iyiola ve Nwaeze tarafından conformable kesirli türev ve integral tanımı geliştirildi ve yeni sonuçlar elde edildi (Iyiola ve Nwaeze, 2016).

2017 yılında Kurt ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, G'/G açılım yöntemi ve homotopi analiz yöntemi kullanılarak, Nizhnik-Novikov-Veselov denklem sisteminin tam ve yaklaşık çözümleri elde edildi (Kurt ve ark., 2017).

2017 yılında Ilie ve arkadaşları tarafından conformable kesirli mertebeden Bernoulli ve Riccati denklemlerinin genel çözümleri elde edildi (Ilie ve ark., 2017).

2017 yılında Hosseini ve Ansari tarafından yapılan çalışmada lineer olmayan conformable kesirli mertebeden Boussinesq denkleminin analitik çözümleri Kudryashov yöntemi kullanılarak elde edildi (Hosseini ve Ansari, 2017).

2017 yılında Rezazadeh ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise lineer olmayan zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden Sharma-Tasso-Olver denkleminin analitik çözümleri doğrudan cebirsel yöntem yardımıyla elde edildi (Rezazadeh ve ark., 2017).

2017 yılında Hosseini ve arkadaşları tarafından kuadratik ve kübik nonlinearliğe sahip zamana bağlı conformable kesirli mertebeden Klein-Gordon denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi kullanıldı (Hosseini ve ark., 2017).

Conformable kesirli türev içeren Cahn-Allen ve Cahn-Hilliard denklemlerine Kudryashov yönteminin yeni bir versiyonunu uygulayarak, bu denklemlerin analitik çözümleri 2017 yılında Hosseini ve arkadaşları tarafından elde edildi (Hosseini ve ark., 2017).

2017 yılında Çenesiz ve arkadaşları tarafından birinci integral yöntemi kullanarak zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden Burgers', modifiye Burgers' ve Burgers-Korteweg-de Vries denklemlerinin analitik çözümleri elde edildi (Çenesiz ve ark., 2017).

2017 yılında yaygın olarak değişen difüzyon katsayılarına sahip tek boyutlu difüzyon ile birlikte ele alınan zaman değişkenine göre conformable kesirli kısmi türev içeren Robertson denklem sisteminin yaklaşık çözümleri q-homotopi analiz yöntemini kullanarak Iyiola ve arkadaşları tarafından elde edildi (Iyiola ve ark., 2017).

2017 yılında Kaplan ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, conformable kesirli mertebeden (2+1) boyutlu Zoomeron ve EW denklemlerinin modifiye edilmiş basit denklem yöntemi yardımıyla analitik çözümleri elde edildi (Kaplan ve ark., 2017).

2018 yılında Tasbozan ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, zamana göre conformable kesirli mertebeden Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sisteminin Sine-Gordan açılım yöntemini kullanılarak analitik çözümleri elde edildi. Ayrıca, pertürbasyon-iterasyon algoritması kullanılarak bu sistemin nümerik çözümleri elde edildi (Tasbozan ve ark., 2018).

2018 yılında Ilie ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada birinci integral yöntemi kullanılarak conformable kesirli mertebeden Burgers – KdV, Klein – Gordon, KdV-Zakharov – Kuznetsev ve Zakharov – Kuznetsov denklemlerinin analitik çözümleri elde edildi (Ilie ve ark., 2018).

2018 yılında Rezazadeh ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada genelleştirilmiş izdüşümsel Riccati denklem yöntemi, conformable kesirli mertebeden Duffing modelinin analitik çözümlerini bulmak için önerildi (Rezazadeh ve ark., 2018).

2018 yılında Darvishi ve arkadaşları tarafından conformable türev ve kesirli kompleks dönüşümünün özellikleri kullanılarak, lineer olmayan conformable kesirli mertebeden $(1 + 1)$ boyutlu Schrödinger modelinin bazı özel fonksiyonlar yardımıyla analitik çözümleri elde edildi (Darvishi ve ark., 2018).

2018 yılında Kaplan ve Akbulut tarafından yapılan çalışmada conformable kesirli mertebeden bazı diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri modifiye edilmiş basit denklem ve $\exp(-\Phi(\xi))$ yöntemleri ile elde edildi (Kaplan ve Akbulut, 2018).

2018 yılında Bayram ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada conformable kesirli mertebeden Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denkleminin nümerik çözümü Sinc-collocation yöntemi kullanılarak elde edildi (Bayram ve ark., 2018).

2018 yılında Korkmaz tarafından yapılan çalışmada, conformable kesirli mertebeden KdV ve Burger's denklemlerinin Kudryashov yöntemi yardımıyla analitik çözümleri elde edildi (Korkmaz, 2018).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, ilk olarak bazı özel fonksiyonlar verildikten sonra literatürde sıklıkla kullanılan kesirli türev yaklaşımlarından Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Conformable yaklaşımları verildi. Daha sonra tezde ele alınacak olan Conformable kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılacak olan üstel fonksiyon yöntemi verildi.

3.1. Gama Fonksiyonu

Faktöriyel fonksiyonu olarak bilinen, Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

şeklinde genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır (Podlubny, 1999).

Gama fonksiyonunun en çok kullanılan özellikleri

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad x > 0,$$

$$\Gamma(x) = (x - 1)!, \quad x \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

şeklindedir (Altın, 2011).

$-1 < x < 0$ aralığında x 'in negatif değerlerindeki Gama fonksiyonu, $0 < x + 1 < 1$ olacağından,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{x}$$

formülü ile hesaplanır. $-2 < x < -1$ aralığındaki negatif x değerleri için Gama fonksiyonu, $0 < x + 2 < 1$ olacağından,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + 2)}{x(x + 1)}$$

eşitliği yardımıyla kolayca bulunur.

Benzer düşünce ile, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $-n < x < -n + 1$ eşitsizliğini sağlayan x değerleri için $0 < x + n < 1$ olacağından, $-n < x < -n + 1$ aralığındaki x değerlerinin Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{x(x + 1)(x + 2) \dots (x + n - 1)}$$

formülü elde edilir (Altın, 2011).

3.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, $x > 0$, $y > 0$ olmak üzere

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde Riemann integrali ile tanımlıdır (Taşbozan, 2011).

Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

şeklinde ifade edilebilir (Altın, 2011).

3.3. Grünwald-Letnikov Yaklaşımı

$f(t)$ ve $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m+1$ olmak üzere $f^{(k)}(t)$ fonksiyonları $[a, t]$ aralığında sürekli olsun. Burada m , $m \leq p < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayıdır. Bu varsayımlar altında $f(t)$ fonksiyonunun p -inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\binom{p}{r}$ değeri

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-r+1)}{r!}$$

formülü ile tanımlanmıştır (Podlubny, 1999).

$f(t)$ fonksiyonu $[a, t]$ aralığında sürekli ise $f(t)$ fonksiyonunun p -inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

(3.3.1)

şeklinde tanımlanır. Burada $\binom{p}{r}$ değeri

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p+1)(p+2) \dots (p+r+1)}{r!}$$

olarak alınmıştır (Podlubny, 1999).

$f(t)$ fonksiyonunun birinci türevi olan $f'(t)$ türevinin $[a, t]$ aralığında sürekli olduğu varsayılır ve (3.1.1) denkleminin sağ tarafına bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau$$

eşitliği bulunur. Eğer $f(t)$ fonksiyonunun $[a, t]$ aralığında $m+1$ kez sürekli diferansiyellenebilir olduğunu varsayılırsa (3.1.1) denkleminde

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

3.4. Riemann-Liouville Yaklaşımı

$f(t)$ fonksiyonu (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir fonksiyon olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun p -inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $p > 0$ olmak üzere

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

$0 < \alpha \leq 1$ için $k - \alpha > 0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun $(k - \alpha)$ -mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_a D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.4.1)$$

olarak tanımlıdır (Podlubny, 1999).

(3.4.1) eşitliğinde $p = k - \alpha$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a D_t^{-(k-p)} f(t) \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $k - 1 \leq p < k$ dir (Podlubny, 1999).

3.5. Riemann-Liouville Yaklaşımı ile Grünwald-Letnikov Yaklaşımın İlişkisi

$f(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekli ve $m + 1$ defa sürekli diferansiyellenebilir olduğunu varsayılırsa, $0 \leq m < p < m + 1$ şartını sağlayan her p değeri için ${}_a D_t^p f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türevi vardır ve Grünwald-Letnikov kesirli türevine eşittir. (3.4.1) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımına $m + 1$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(\alpha)(t - \alpha)^{-p+k}}{\Gamma(-p + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(-p + m + 1)} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}_a D_t^p f(t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

$f(t)$ ve $f'(t)$ fonksiyonları $[a, t]$ aralığında sürekli olsun. Yukarıdaki formüle $m = 0$ alınırsa $f(t)$ fonksiyonunun $0 < p < 1$ aralığındaki her p için Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli türevleri eşittir ve

$${}_a D_t^p f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \frac{f(\alpha)(t - \alpha)^{-p}}{\Gamma(1 - p)} + \frac{1}{\Gamma(1 - p)} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

eşitliği ile tanımlıdır (Podlubny, 1999).

3.6. Caputo Yaklaşımı

$f(t)$ fonksiyonu n kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $n - 1 < \alpha < n$ şartını sağlayan α değeri için $f(t)$ fonksiyonunun α -inci mertebeden Caputo anlamındaki kesirli türevi

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{\alpha}^t \frac{f^n(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}$$

eşitliği ile tanımlıdır (Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville yaklaşımı ile Caputo yaklaşımı arasındaki en büyük farklardan biri sabit bir fonksiyonun türevinin hesaplanmasıdır. Örneğin; $f(t) = A$ sabit

fonksiyonunun Caputo anlamında kesirli mertebeden türevi sifira eşittir. Fakat bu sabit fonksiyonun Riemann-Liouville anlamındaki kesirli mertebeden türevi a değerinin sonlu değer olması halinde sifira eşit değildir. Çünkü sabit fonksiyonun Riemann-Liouville anlamındaki kesirli mertebeden türevi

$${}_a D_t^\alpha f(t) = D_t^{-p} A = \frac{At^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

$f(t)$ fonksiyonu (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon ve $m - 1 < \alpha < m$ şartını sağlayan bir m tamsayısı için $k = 1, 2, 3, \dots, m + 1$ olmak üzere $f^{(k)}(t)$ türevlerinde $[a, t]$ aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1$ değerleri için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları sağlanıyorsa

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t)$$

eşitliği elde edilir (Podlubny, 1999).

3.7. Conformable Yaklaşımı

Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev yaklaşımlarının tanımlarından, bu üç kesirli mertebeden türev yaklaşımının da lineerlik özelliğini sağladığı kolayca görülmektedir. Fakat bu üç türev yaklaşımın bazı dezavantajları aşağıdaki gibidir (Khalil ve ark., 2014):

- Yukarıdaki kısımlarda bahsedildiği gibi, sabit bir fonksiyonun Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi sifira eşit değildir.
- Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev yaklaşımları, $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları α -mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, iki fonksiyonun çarpımının türev

$$D_t^\alpha(f(t)g(t)) = f(t)D_t^\alpha(g(t)) + g(t)D_t^\alpha(f(t))$$

formülünü sağlamazlar.

- Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev yaklaşımları, $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları α -mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $g \neq 0$ olmak üzere iki fonksiyonun bölümün türev

$$D_t^\alpha \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \frac{g(t)D_t^\alpha(f(t)) - f(t)D_t^\alpha(g(t))}{[g(t)]^2}$$

formülünü sağlamazlar.

- Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D_t^\alpha(f(t)og(t)) = f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t)$$

şeklinde verilen zincir kuralı formülünü sağlamazlar.

- Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$$

eşitliğini sağlamazlar.

Tanım 3.7.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli türevi

$$T_\alpha(f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere $(0, a)$ açık aralığında α –inci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

eşitliği yazılabilir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.7.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olduğu varsayılırsa $f(t)$ fonksiyonu t_0 noktasında sürekli bir fonksiyon olur (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.7.2. $0 < \alpha \leq 1$ ve $t > 0$ için $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları α –inci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır (Khalil ve ark., 2014):

- Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af(t) + bg(t)) = aT_\alpha(f(t)) + bT_\alpha(g(t))$,
- Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,
- Her $f(t) = c$ sabit fonksiyonu için $T_\alpha(c) = 0$,
- $T_\alpha(f(t)g(t)) = f(t)T_\alpha(g(t)) + g(t)T_\alpha(f(t))$,
- $T_\alpha \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \frac{g(t)T_\alpha(f(t)) - f(t)T_\alpha(g(t))}{[g(t)]^2}$,
- $T_\alpha(f(t)) = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}$.

Bazı fonksiyonların $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α –inci mertebeden conformable kesirli türevleri

- $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(e^{at}) = at^{1-\alpha}e^{at}$,
- $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\sin(bt)) = bt^{1-\alpha}\cos(bt)$,
- $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\cos(ct)) = -ct^{1-\alpha}\sin(ct)$,
- $T_\alpha\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = 1$,
- $T_\alpha\left(\sin\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \cos\frac{t^\alpha}{\alpha}$,
- $T_\alpha\left(\cos\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = -\sin\frac{t^\alpha}{\alpha}$,
- $T_\alpha\left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$.

Tanım 3.7.2. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden conformable kesirli integrali

$$I_\alpha^a(f(t)) = I_1^a(t^{\alpha-1}f(t)) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \quad (3.7.1)$$

şeklinde genelleştirilmiş Riemann integrali ile tanımlıdır (Khalil ve ark., 2014).

(3.7.1) ile verilen eşitlik yardımıyla

- $I_{\frac{1}{2}}^0(\sqrt{t}\cos(t)) = \sin(t)$,
- $I_{\frac{1}{2}}^0(\cos(2\sqrt{t})) = \sin(2\sqrt{t})$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.7.3. $t \geq a$ olmak üzere $f(t)$ sürekli fonksiyonu için

$$T_\alpha(I_\alpha^a(f(t))) = f(t)$$

eşitliği geçerlidir (Khalil ve ark., 2014).

3.8. Üstel Fonksiyon Yöntemi

F lineer olmayan bir fonksiyon, $u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon, x ve t konum ve zaman bağımsız değişkenleri olmak üzere

$$F\left(u(x, t), \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \dots\right) = 0 \quad (3.8.1)$$

şeklinde zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alınsın. (3.8.1) ile verilen kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleminde, k ve w daha sonra belirlenecek olan keyfi sabitler olmak üzere

$$u(x, t) = u(\eta), \eta = kx + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (3.8.2)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulansın. (3.8.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemindeki kısmi türevler (3.8.2) dalga dönüşümü yardımıyla

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = w \frac{du(\eta)}{d\eta}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = k \frac{du(\eta)}{d\eta}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k^2 \frac{d^2 u(\eta)}{d\eta^2}, \dots \quad (3.8.3)$$

adi türevlere dönüşür (Abdeljawad, 2015).

(3.8.3) ile elde edilen adi türevler (3.8.1) ile verilen zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa

$$Q \left(u(\eta), \frac{du(\eta)}{d\eta}, \frac{d^2 u(\eta)}{d\eta^2}, \dots \right) = 0 \quad (3.8.4)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklemi elde edilir. (3.8.4) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\eta)} = \frac{a_{-c} \exp(-c\eta) + \dots + a_d \exp(d\eta)}{b_{-p} \exp(-p\eta) + \dots + b_q \exp(q\eta)} \quad (3.8.5)$$

şeklinde dalga çözümü aransın. Burada c , d , p ve q daha sonra belirlenecek olan pozitif tamsayılar, a_n ve b_m ise bilinmeyen katsayılardır.

(3.8.5) denklemindeki, c , d , p ve q pozitif tamsayılarını belirlemek için en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasındaki homojen dengeye bakılır (Tasbozan ve ark, 2017).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, bazı conformable anlamında kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin üstel fonksiyon yöntemi ile analitik çözümleri elde edildi. Her bir denklem için elde edilen analitik çözümlerin yüzeyleri ve eğrileri çizildi.

4.1. Kesirli Mertebeden Değiştirilmiş Boussinesq Denklemi

Su dalgaları için bir model olan değiştirilmiş Boussinesq denkleminde $u = u(x, t)$ hızı ve $v = v(x, t)$ toplam derinliği ifade etmektedir. 1995 yılında Wang tarafından değiştirilmiş Boussinesq denkleminin analitik çözümleri homejen denge yöntemi kullanılarak elde edildi (Wang, 1995). 2005 yılında Yomba tarafından yapılan çalışmada değiştirilmiş Boussinesq denkleminin analitik çözümlerini elde etmek amacıyla genişletilmiş Fan alt denklem yöntemi kullanıldı (Yomba, 2005). Ayrıca 2005 yılında Lü tarafından değiştirilmiş Boussinesq denkleminin dalga çözümleri Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edildi (Lü ve ark., 2005). 2008 yılında ise Wang ve arkadaşları tarafından yapılan bir diğer çalışmada ise G'/G açılım yöntemi kullanılarak değiştirilmiş Boussinesq denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Wang ve ark., 2008).

İlk olarak, conformable kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq denklemini $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

ele alınsın.

(4.1.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq denkleminine

$$\eta = kx + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (4.1.2)$$

dalga dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} wu_\eta + ku_\eta + kv_\eta &= 0, \\ wv_\eta + k(uv)_\eta + k^3 u_{\eta\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.1.3) denklem sistemi η değişkenine göre bir kez integre edilip ve daha sonra integral sabitlerinin sıfır alınmasıyla, (4.1.3) adi diferansiyel denklem sistemi

$$wu + \frac{ku^2}{2} + kv = 0,$$

$$wv + kuv + k^3 u_{\eta\eta} = 0 \quad (4.1.4)$$

formuna dönüşür. (4.1.4) denklem sistemindeki ilk eşitlikten v değeri yalnız bırakılırsa

$$v = -\frac{1}{k} \left(wu + \frac{ku^2}{2} \right) \quad (4.1.5)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (4.1.4) denklemi sistemindeki ikinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$2w^2u + 3kwu^2 + k^2u^3 - 2k^4u_{\eta\eta} = 0 \quad (4.1.6)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.6) denkleminin çözümünün

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\eta)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\eta)}} \quad (4.1.7)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada c, d, p ve q pozitif tamsayılar, a_n ($n = -c, \dots, d$) ve b_m ($m = -p, \dots, q$) daha sonra belirlenecek olan katsayılardır.

Bilinmeyen c, d, p ve q pozitif tam sayılarını belirlemek için, (4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ ve $u(\eta)$ ifadesinin η değişkenine göre ikinci türevi olan $u_{\eta\eta}$ değerleri (4.1.6) denkleminde yerlerine yazılır ve daha sonra, en yüksek dereceden lineer olmayan terim olan u^3 ile en yüksek mertebeden türev olan $u_{\eta\eta}$ terimleri arasındaki homojen dengeye bakılır.

(4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ ifadesi yardımıyla, (4.1.6) denklemindeki en yüksek mertebeden türev olan $u_{\eta\eta}$ ifadesinin değeri

$$u_{\eta\eta} = \frac{c_1 e^{[-(c-3p)\eta] + \dots}}{c_2 e^{[-4p\eta] + \dots}} \quad (4.1.8)$$

şeklinde ve en yüksek dereceden lineer olmayan u^3 ifadesinin değeri ise

$$u^3 = \frac{c_3 e^{[-3c\eta] + \dots}}{c_4 e^{[-3p\eta] + \dots}} \quad (4.1.9)$$

şeklinde hesaplanır. (4.1.8) ve (4.1.9) denklemlerindeki katsayıların eşitlenmesiyle

$$-c - 3p = -3c - p$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$c = p \quad (4.1.10)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ ifadesi yardımıyla, (4.1.6) denklemindeki en yüksek mertebeden türev olan $u_{\eta\eta}$ ifadesinin değeri

$$u_{\eta\eta} = \frac{\dots+d_1 e^{[(d+3q)\eta]}}{\dots+d_2 e^{[4q\eta]}} \quad (4.1.11)$$

olarak ve en yüksek dereceden lineer olmayan u^3 ifadesinin değeri

$$u^3 = \frac{\dots+d_3 e^{[3d\eta]}}{\dots+d_4 e^{[3q\eta]}} \quad (4.1.12)$$

olarak bulunur. (4.1.11) ve (4.1.12) denklemlerindeki katsayıların eşitlenmesiyle

$$d + 3q = 3d + q$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$q = d \quad (4.1.13)$$

eşitliği bulunur.

Homojen denge sonucunda elde edilen (4.1.10) ve (4.1.13) eşitliklerinde $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ olarak seçilirse, (4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ eşitliği

$$u(\eta) = \frac{a_{-1}e^{(-\eta)}+a_0+a_1e^{(\eta)}}{b_{-1}e^{(-\eta)}+b_0+b_1e^{(\eta)}} \quad (4.1.14)$$

formuna dönüşür.

Böylece (4.1.14) denkleminde verilen $u(\eta)$ değeri ve $u(\eta)$ değerinden elde edilen $u_{\eta\eta}$ ikinci türevi (4.1.6) denkleminde yerlerine yazılır ve $e^{n\eta}$ ($n = -3(1)3$) terimlerine göre Maple programı yardımıyla düzenlenirse

$$\frac{1}{A}[C_3e^{(3\eta)} + C_2e^{(2\eta)} + C_1e^{(\eta)} + C_0 + C_{-1}e^{(-\eta)} + C_{-2}e^{(-2\eta)} + C_{-3}e^{(-3\eta)}]=0 \quad (4.1.15)$$

eşitliği elde edilir. Burada $A, C_3, C_2, C_1, C_0, C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}$ katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$A = (b_1e^{(\eta)} + b_{-1}e^{(-\eta)} + b_0)^3,$$

$$C_3 = 2w^2a_1b_1^2 + k^2a_1^3 + 3kwa_1^2b_1,$$

$$C_2 = -2k^4a_0b_1^2 + 2w^2a_0b_1^2 + 3k^2a_1^2a_0 + 4w^2a_1b_1b_0 + 3kwa_1^2b_0 + 6kwa_1a_0b_1 + 2k^4a_1b_1b_0,$$

$$C_1 = 2w^2a_1b_0^2 + 3k^2a_1a_0^2 - 2k^4a_1b_0^2 + 4w^2a_0b_1b_0 + 6kwa_1a_0b_0 + 3kwa_0^2b_1 + 2k^4a_0b_1b_0 - 8k^4a_{-1}b_1^2 + 3k^2a_1^2a_{-1} + 2w^2a_{-1}b_1^2 + 4w^2a_1b_1b_{-1} + 3kwa_1^2b_{-1} + 6kwa_1a_{-1}b_1 + 8k^4a_1b_1b_{-1},$$

$$C_0 = 6k^2a_1a_0a_{-1} + 4w^2a_1b_0b_{-1} + 4w^2a_0b_1b_{-1} + 4w^2a_{-1}b_1b_0 + 12k^4a_0b_1b_{-1} - 6k^4a_1b_0b_{-1} - 6k^4a_{-1}b_1b_0 + 6kwa_1a_0b_{-1} + 6kwa_1a_{-1}b_0 + 6kwa_0a_{-1}b_1 + 2w^2a_0b_0^2 + 3kwa_0^2b_0 + k^2a_0^3,$$

$$\begin{aligned}
C_{-1} &= 2w^2 a_1 b_{-1}^2 + 6kwa_{-1} a_0 b_0 - 2k^4 a_{-1} b_0^2 + 4w^2 a_0 b_{-1} b_0 - 8k^4 a_1 b_{-1}^2 + \\
&6kwa_1 a_{-1} b_{-1} + 3kwa_0^2 b_{-1} + 3k^2 a_1 a_{-1}^2 + 2w^2 a_{-1} b_0^2 + 2k^4 a_0 b_{-1} b_0 + \\
&4w^2 a_{-1} b_1 b_{-1} + 3k^2 a_0^2 a_{-1} + 8k^4 a_{-1} b_1 b_{-1}, \\
C_{-2} &= -2k^4 a_0 b_{-1}^2 + 2w^2 a_0 b_{-1}^2 + 6kwa_0 a_{-1} b_{-1} + 3k^2 a_{-1}^2 a_0 + 2k^4 a_{-1} b_0 b_{-1} + \\
&3kwa_{-1}^2 b_0 + 4w^2 a_{-1} b_{-1} b_0, \\
C_{-3} &= 2w^2 a_{-1} b_{-1}^2 + k^2 a_{-1}^3 + 3kwa_{-1}^2 b_{-1}. \tag{4.1.16}
\end{aligned}$$

$n = -3, -2, \dots, 2, 3$ olmak üzere $e^{n\eta}$ ifadesinin katsayılarının

$$C_3 = 0, C_2 = 0, C_1 = 0, C_0 = 0, C_{-3} = 0, C_{-2} = 0, C_{-1} = 0 \tag{4.1.17}$$

şeklinde sıfıra eşitlenmesiyle cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple yardımıyla çözülmesiyle,

$$a_{-1} = 0, b_0 = \frac{2kb_{-1}a_1 + a_0^2}{2ka_0}, b_1 = \frac{a_1}{2k}, w = -k^2 \tag{4.1.18}$$

katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayıların ve (4.1.2) ile verilen dalga dönüşümünün (4.1.14) denkleminde yerlerine yazılmasıyla $u(x, t)$ analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{2ka_0}{a_0 + 2kb_{-1}e^{k\left(-x + \frac{kt^\alpha}{\alpha}\right)}} \tag{4.1.19}$$

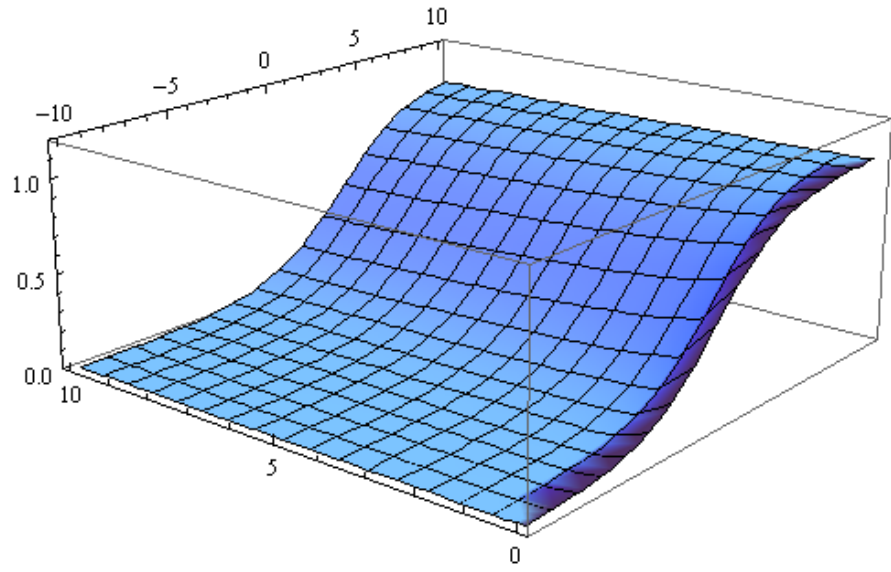
olarak elde edilir. $v(x, t)$ analitik çözümü ise (4.1.5) eşitliğinde (4.1.19) ile verilen $u(x, t)$ analitik çözümünün yerine yazılmasıyla

$$v(x, t) = \frac{4k^3 a_0 b_{-1} e^{k\left(-x + \frac{kt^\alpha}{\alpha}\right)}}{\left(a_0 + 2kb_{-1} e^{k\left(-x + \frac{kt^\alpha}{\alpha}\right)}\right)^2} \tag{4.1.20}$$

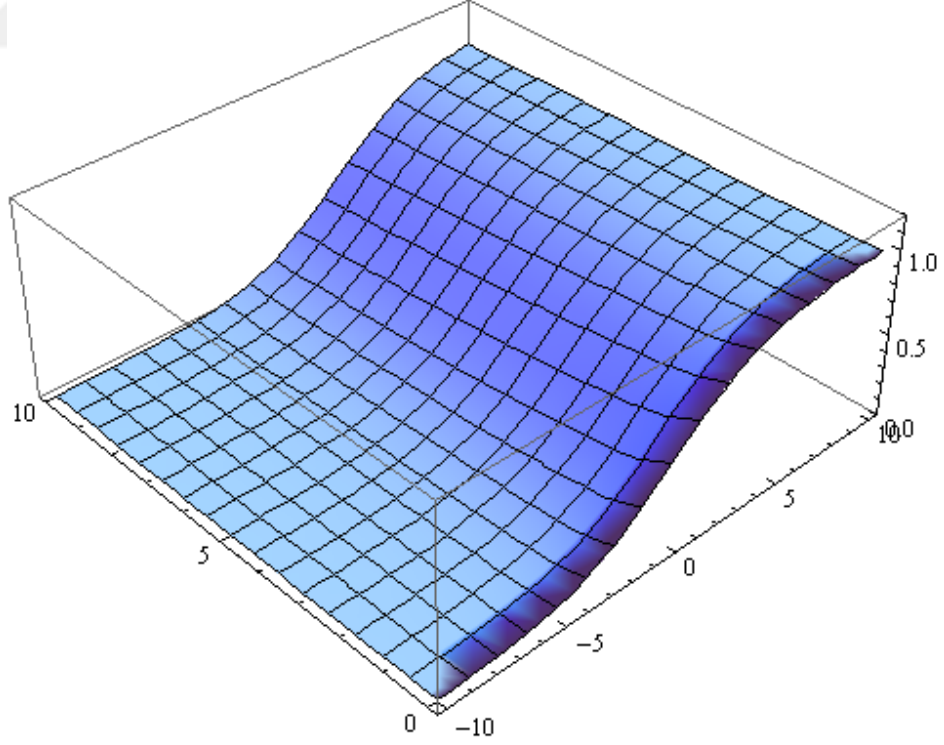
olarak elde edilir.

(Şekil 4.1.) ile (Şekil 4.8.) arasında (4.1.1) ile verilen comformable kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq denkleminin $a_0 = 1, b_{-1} = 1, k = 0.5$ değerlerinde ve $-10 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 10$ aralıklarında farklı α değerleri için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri verildi.

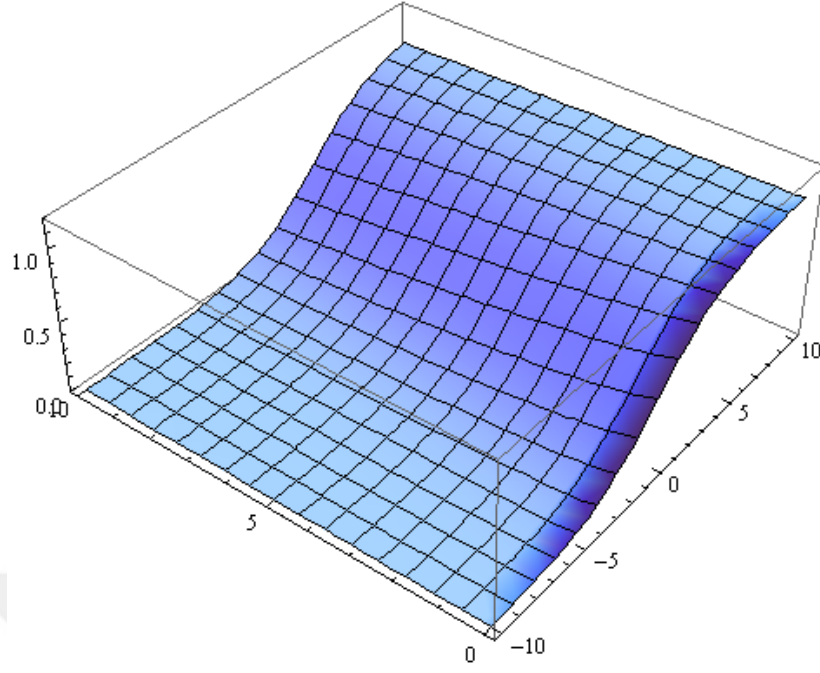
(4.1.1) ile verilen comformable kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq denkleminin $a_0 = 1, b_{-1} = 1, k = 0.5, \alpha = 0.9$ değerlerinde ve $-10 \leq x \leq 10$ aralığında farklı t değerlerinde $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ analitik çözümlerinin eğrileri (Şekil 4.9.) ve (Şekil 4.10.) da verildi.



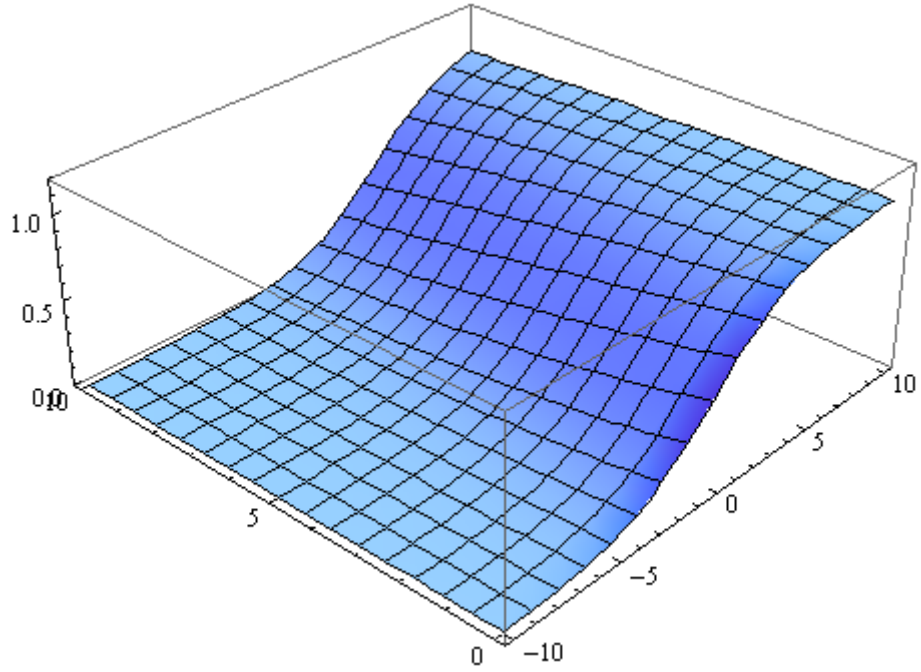
Şekil 4. 1. $\alpha = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



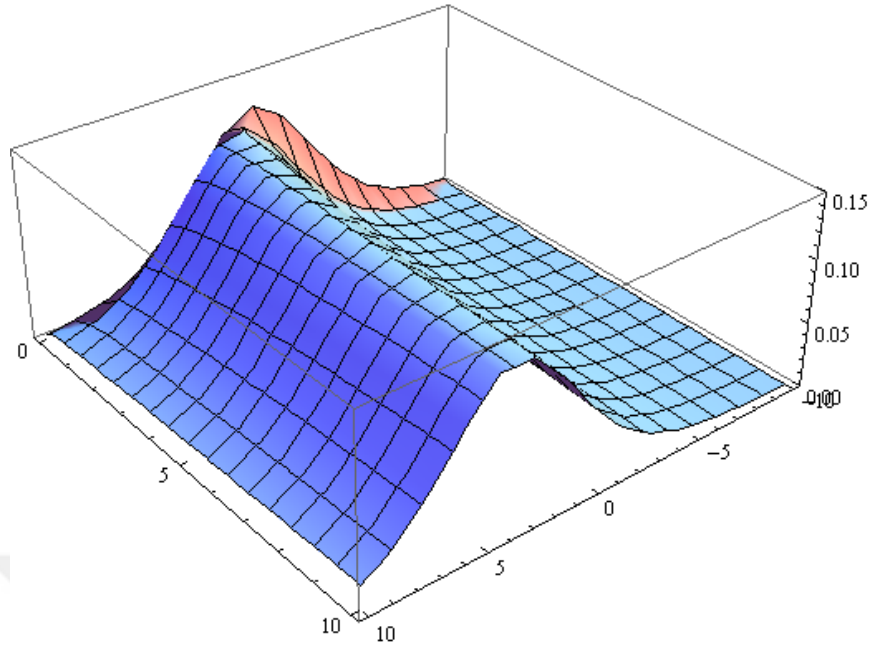
Şekil 4. 2. $\alpha = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



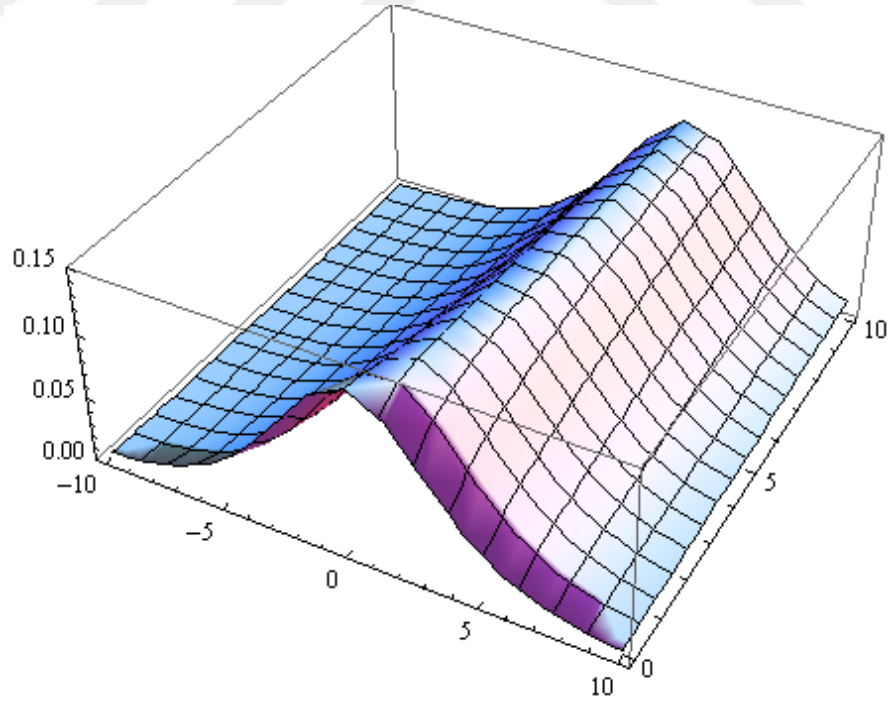
Şekil 4. 3. $\alpha = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



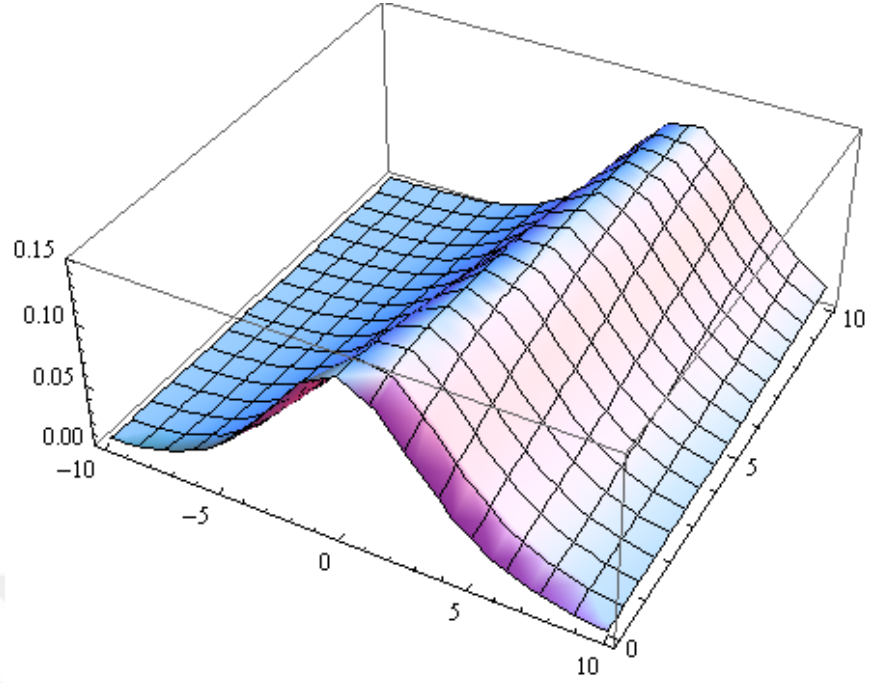
Şekil 4. 4. $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



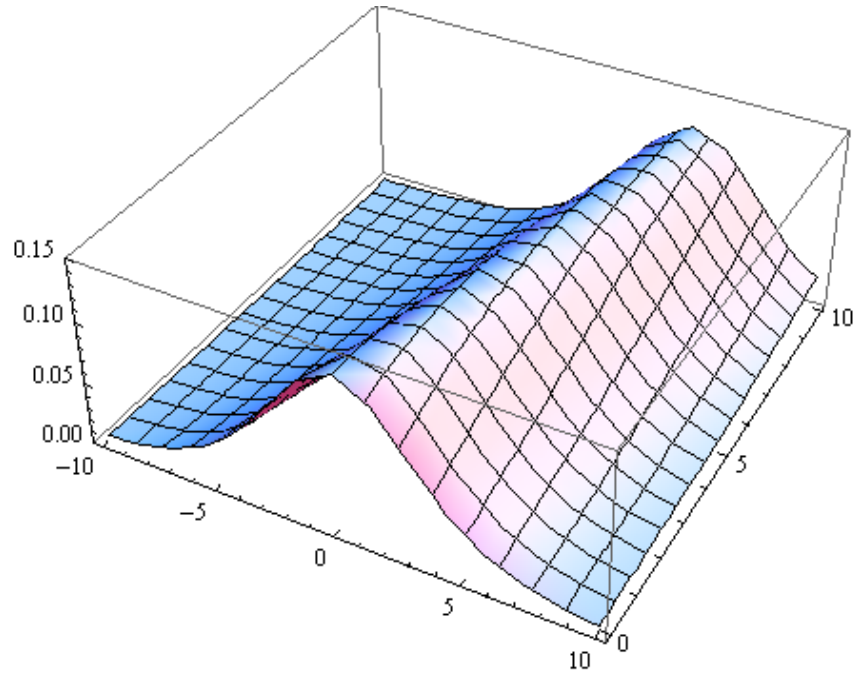
Şekil 4. 5. $\alpha = 0,25$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



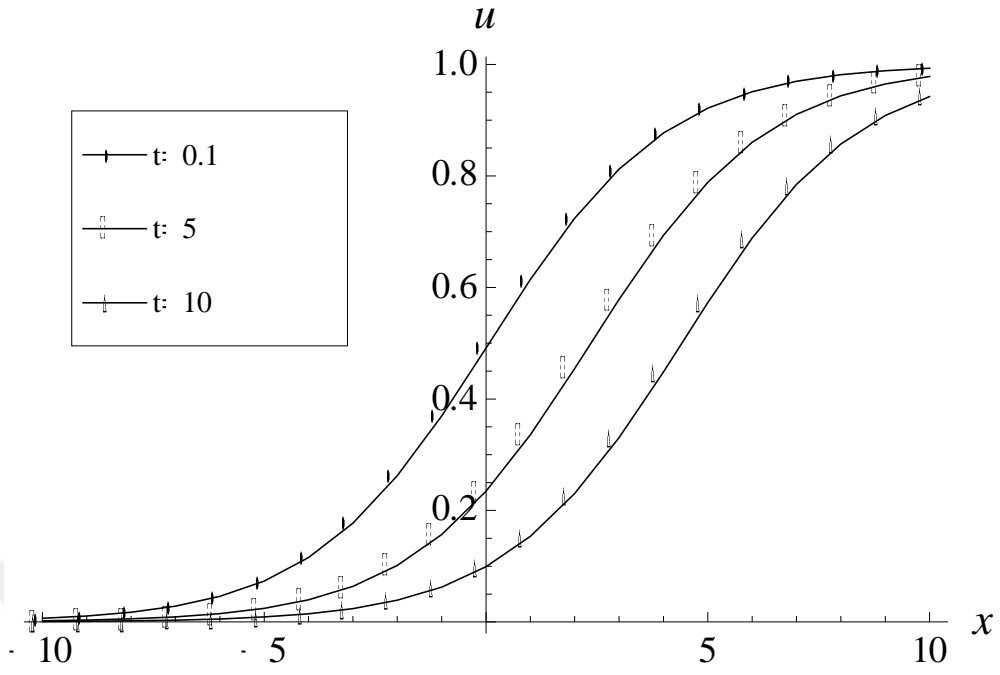
Şekil 4. 6. $\alpha = 0,5$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



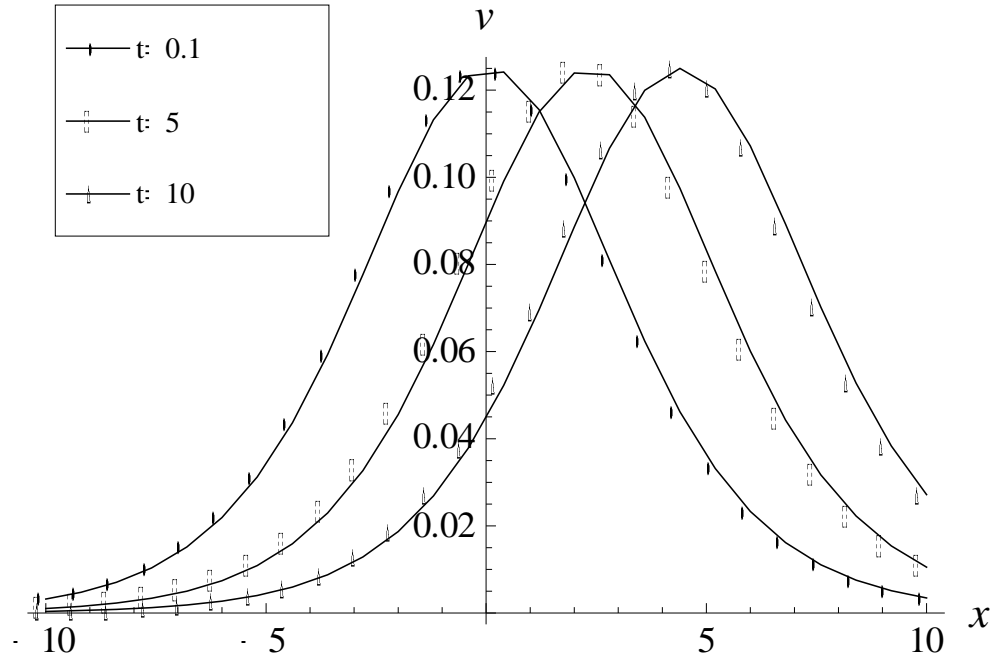
Şekil 4. 7. $\alpha = 0,75$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 8. $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 9. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi



Şekil 4. 10. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözüm eğrisi

4.2. Kesirli Mertebeden Dağılık Uzun Dalga Denklemi

Dağılık uzun dalga denkleminde u , su dalgasının yükselmesi ve v , x yönü boyunca suyun yüzey hızını ifade etmektedir. 1996 yılında Wang ve arkadaşları tarafından dağılık uzun dalga denkleminin analitik çözümleri homojen denge yöntemi kullanılarak elde edildi (Wang ve ark., 1996). 2003 yılında Zheng ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada da dağılık uzun dalga denkleminin çözümleri genişletilmiş tanh-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edildi (Zheng, 2003). 2005 yılında ise Chen ve arkadaşları tarafından dağılık uzun dalga denkleminin çözümlerini bulmak için genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi kullanıldı (Chen ve ark., 2005). Ayrıca 2011 yılında Akbar tarafından (2+1) boyutlu dağılık uzun dalga denkleminin çözümleri üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edildi (Akbar ve Ali, 2011).

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere conformable kesirli mertebeden dağılık uzun dalga denklemini

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

göz önüne alınsın.

(4.2.1) ile verilen conformable kesirli mertebenden dağılık uzun dalga denklem sistemine (4.1.2) dalga dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} wu_\eta + ku u_\eta + kv_\eta &= 0, \\ wv_\eta + k(uv)_\eta + \frac{k^3 u_{\eta\eta\eta}}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.2.2) diferansiyel denklem sisteminin η değişkenine göre bir kez integrale edilmesiyle

$$\begin{aligned} wu + \frac{ku^2}{2} + kv &= 0, \\ wv + kuv + \frac{k^3 u_{\eta\eta}}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

adi diferansiyel denklem sistemi bulunur. Burada integral sabitleri sıfır alınmıştır.

$v(\eta)$ değeri, (4.2.3) denklem sisteminin ilk eşitliğinden, $u(\eta)$ değeri cinsinden

$$v = -\frac{1}{k} \left(wu + \frac{ku^2}{2} \right) \quad (4.2.4)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitliğin (4.2.3) denklem sistemindeki ikinci denklemde kullanılmasıyla, sadece $u(\eta)$ ve $u(\eta)$ değerinin η değişkenine göre ikinci türevi olan $u_{\eta\eta}$ değerlerini içeren

$$6w^2u + 9kwu^2 + 3k^2u^3 - 2k^4u_{\eta\eta} = 0 \quad (4.2.5)$$

eşitliği elde edilir.

Önceki kısımda olduğu gibi, (4.2.5) denkleminin çözümünün (4.1.7) formunda olduğunu kabul edelim.

(4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ değerinin (4.2.5) eşitliğinde yerine yazılmasıyla oluşan denklemdeki en yüksek dereceden lineer olmayan terim u^3 ile en yüksek mertebeden türev olan $u_{\eta\eta}$ terimleri arasındaki homojen dengeye bakılarak, c , d , p ve q pozitif tamsayılarının değerleri belirlenir.

Kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq denkleminin çözümünde olduğu gibi homojen denge sonucunda $c = p$ ve $q = d$ eşitlikleri elde edilir. $c = p = 1$ ve $q = d = 1$ olarak alınırsa (4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ eşitliği (4.1.14) formuna dönüşür.

(4.1.14) ile verilen $u(\eta)$ değeri ile bu değer ikinci türevinin (4.2.5) denkleminde kullanılmasıyla cebirsel denklem elde edilir. Bu cebirsel denklem $e^{n\eta}$ ($n = -3(1)3$) terimlerine göre Maple programı yardımıyla düzenlenirse

$$\frac{1}{A} [C_3 e^{(3\eta)} + C_2 e^{(2\eta)} + C_1 e^{(\eta)} + C_0 + C_{-1} e^{(-\eta)} + C_{-2} e^{(-2\eta)} + C_{-3} e^{(-3\eta)}] = 0 \quad (4.2.6)$$

formunda yazılır. Bu cebirsel denklemde yer alan A , C_3 , C_2 , C_1 , C_0 , C_{-1} , C_{-2} , C_{-3} katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$A = (b_1 e^{(\eta)} + b_{-1} e^{(-\eta)} + b_0)^3,$$

$$C_3 = -6w^2 a_1 b_1^2 - 3k^2 a_1^3 - 9kwa_1^2 b_1,$$

$$C_2 = -6w^2 a_0 b_1^2 - 9k^2 a_1^2 a_0 + 2k^4 a_0 b_1^2 - 12w^2 a_1 b_1 b_0 - 9kwa_1^2 b_0 - 18kwa_1 a_0 b_1 - 2k^4 a_1 b_1 b_0,$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= -6w^2 a_1 b_0^2 - 9k^2 a_1 a_0^2 + 2k^4 a_1 b_0^2 - 12w^2 a_0 b_1 b_0 - 18kwa_1 a_0 b_0 - \\
&9kwa_0^2 b_1 - 2k^4 a_0 b_1 b_0 - 9k^2 a_1^2 a_{-1} - 6w^2 a_{-1} b_1^2 + 8k^4 a_{-1} b_1^2 - 12w^2 a_1 b_1 b_{-1} - \\
&9kwa_1^2 b_{-1} - 18kwa_1 a_{-1} b_1 - 8k^4 a_1 b_1 b_{-1}, \\
C_0 &= -3k^2 a_0^3 - 12w^2 a_{-1} b_1 b_0 - 12w^2 a_1 b_0 b_{-1} - 18kwa_1 a_0 b_{-1} - 18kwa_1 a_{-1} b_0 - \\
&12w^2 a_0 b_1 b_{-1} + 6k^4 a_1 b_0 b_{-1} + 6k^4 a_{-1} b_1 b_0 - 12k^4 a_0 b_1 b_{-1} - 18k^2 a_1 a_0 a_{-1} - \\
&9kwa_0^2 b_0 - 6w^2 a_0 b_0^2 - 18kwa_0 a_{-1} b_1, \\
C_{-1} &= -6w^2 a_{-1} b_0^2 - 9k^2 a_0^2 a_{-1} + 2k^4 a_{-1} b_0^2 - 12w^2 a_0 b_{-1} b_0 - 9kwa_0^2 b_{-1} - \\
&18kwa_0 a_{-1} b_0 - 2k^4 a_0 b_{-1} b_0 + 8k^4 a_1 b_{-1}^2 - 9k^2 a_1 a_{-1}^2 - 6w^2 a_1 b_{-1}^2 - \\
&8k^4 a_{-1} b_1 b_{-1} - 12w^2 a_{-1} b_1 b_{-1} - 18kwa_1 a_{-1} b_{-1} - 9kwa_{-1}^2 b_1, \\
C_{-2} &= -9k^2 a_0 a_{-1}^2 - 6w^2 a_0 b_{-1}^2 + 2k^4 a_0 b_{-1}^2 - 12w^2 a_{-1} b_0 b_{-1} - 18kwa_0 a_{-1} b_{-1} - \\
&9kwa_{-1}^2 b_0 - 2k^4 a_{-1} b_0 b_{-1}, \\
C_{-3} &= -6w^2 a_{-1} b_{-1}^2 - 3k^2 a_{-1}^3 - 9kwa_{-1}^2 b_{-1}. \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

$e^{n\eta}$ ($n = -3, -2, \dots, 2, 3$) terimlerinin katsayıları olan $C_3, C_2, C_1, C_0, C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}$ ifadelerin

$$C_3 = 0, C_2 = 0, C_1 = 0, C_0 = 0, C_{-3} = 0, C_{-2} = 0, C_{-1} = 0 \tag{4.2.8}$$

şeklinde sifıra eşitlenmesiyle cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan denklem sisteminin Maple yardımıyla çözülmesiyle, bazı değişkenlerin değerleri

$$a_{-1} = 0, a_0 = 0, b_{-1} = 0, b_1 = \mp \frac{\sqrt{3}a_1}{2k}, w = \pm \frac{k^2}{\sqrt{3}} \tag{4.2.9}$$

olarak elde edilir.

(4.2.9) ile verilen değişken değerlerinin ve (4.1.2) dalga dönüşümünün (4.1.14) denkleminde yerine yazılmasıyla $u(x, t)$ analitik çözümleri

$$u_1(x, t) = - \frac{2ka_1}{\sqrt{3}a_1 - 2kb_0 e^{-kx - \frac{k^2 t^\alpha}{\sqrt{3}\alpha}}} \tag{4.2.10}$$

$$u_2(x, t) = \frac{2ka_1}{\sqrt{3}a_1 + 2kb_0 e^{-kx + \frac{k^2 t^\alpha}{\sqrt{3}\alpha}}} \tag{4.2.11}$$

olarak bulunur. (4.2.10) ve (4.2.11) ile verilen $u(x, t)$ analitik çözümlerinin değerleri (4.2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa $v(x, t)$ analitik çözümleri

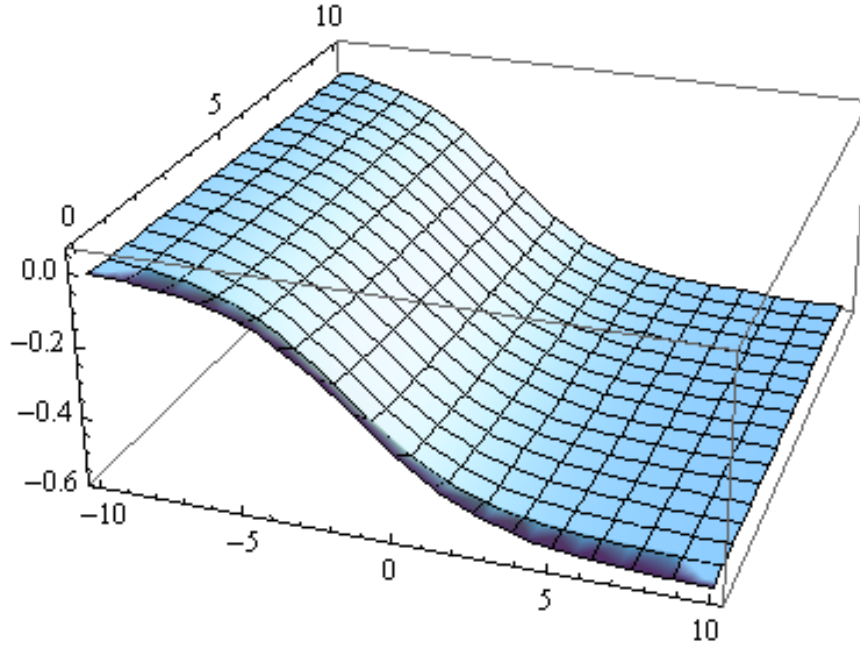
$$v_1(x, t) = -\frac{4k^3 a_1 b_0 e^{\frac{kx + k^2 t^\alpha}{\sqrt{3}\alpha}}}{\sqrt{3}(a_1 \sqrt{3} e^{\frac{kx + k^2 t^\alpha}{\sqrt{3}\alpha}} - 2kb_0)^2} \quad (4.1.12)$$

$$v_2(x, t) = \frac{4k^3 a_1 b_0 e^{\frac{kx + k^2 t^\alpha}{\sqrt{3}\alpha}}}{\sqrt{3}(a_1 \sqrt{3} e^{\frac{kx + k^2 t^\alpha}{\sqrt{3}\alpha}} + 2kb_0)^2} \quad (4.1.13)$$

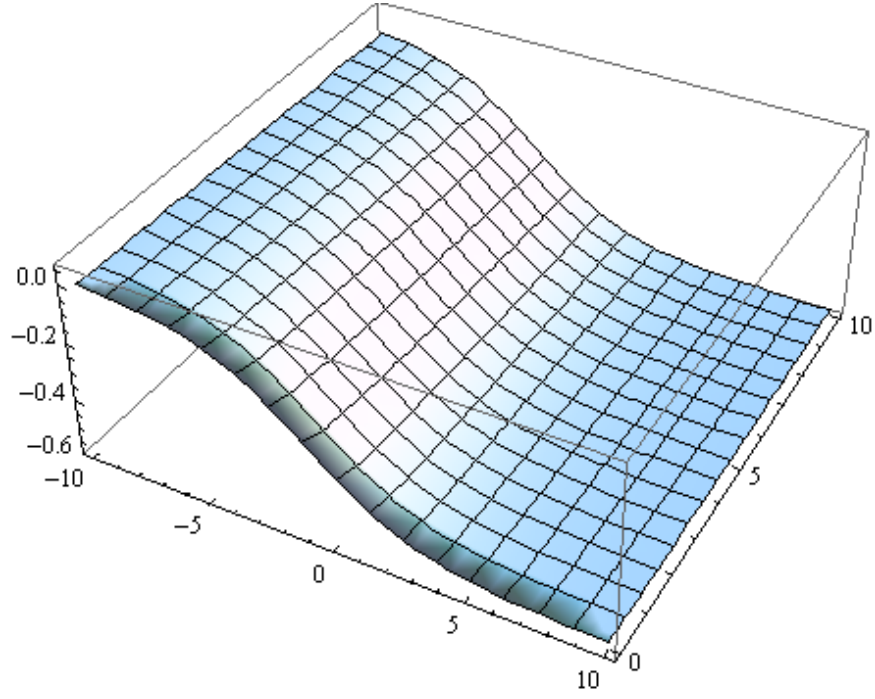
olarak elde edilir.

(4.2.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden dağınık uzun dalga denkleminin $a_1 = 1$, $b_0 = -1$, $k = 0.5$ değerlerinde $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq t \leq 10$ aralıklarında farklı α değerleri için $u_1(x, t)$ ve $v_1(x, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri (Şekil 4.11.) ile (Şekil 4.19.) arasında verildi.

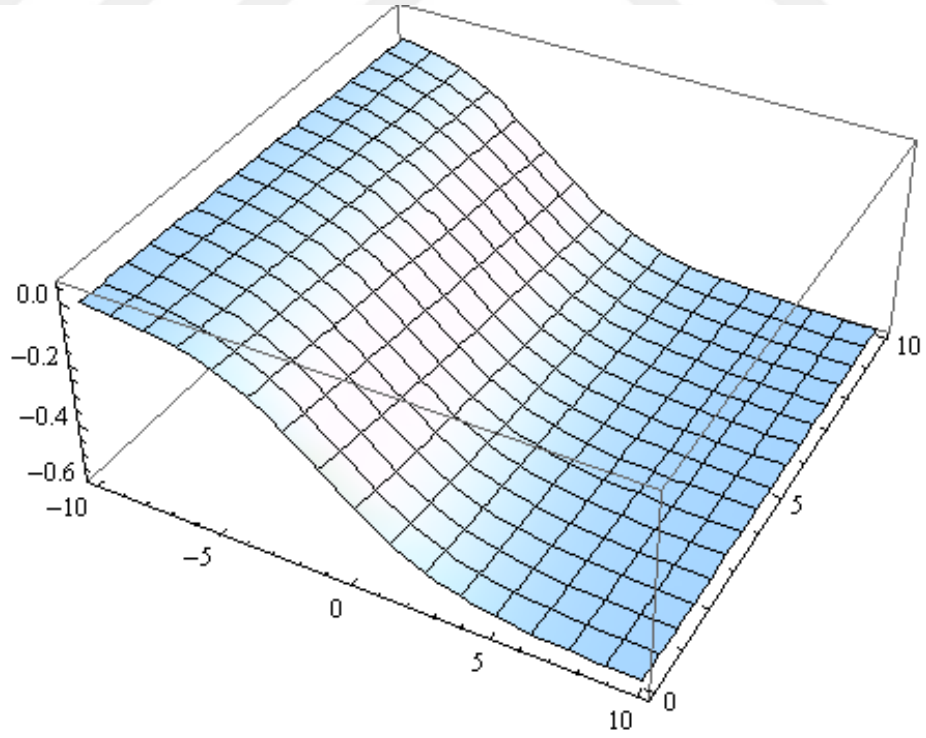
(Şekil 4.20.) ve (Şekil 4.21.) de $a_1 = 1$, $b_0 = -1$, $k = 0.5$, $\alpha = 0.9$ değerlerinde ve $-10 \leq x \leq 10$ aralığında farklı t değerlerinde (4.2.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden dağınık uzun dalga denkleminin $u_1(x, t)$ ve $v_1(x, t)$ analitik çözümlerinin eğrileri verildi.



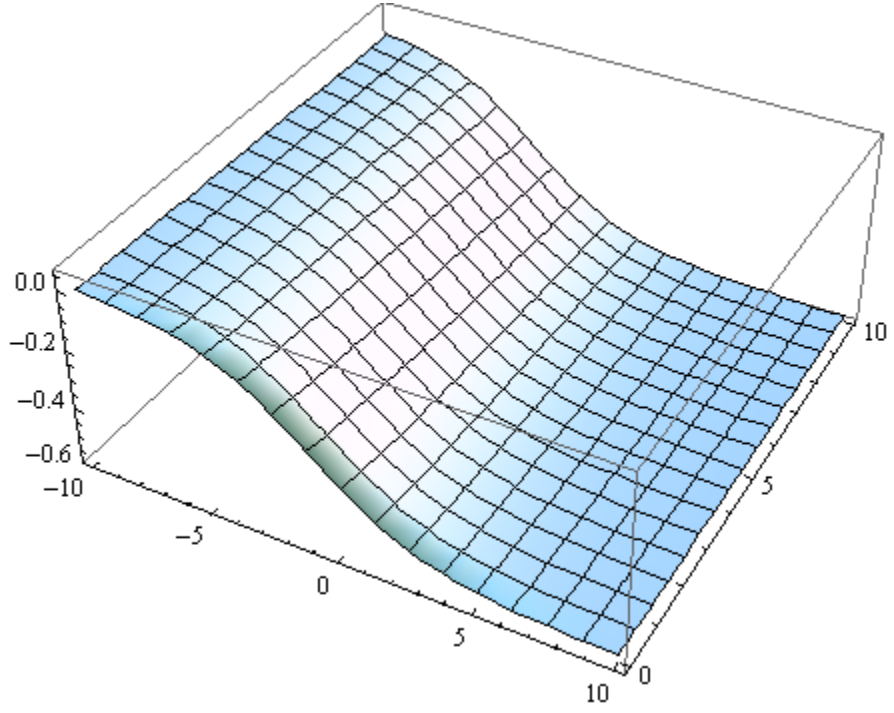
Şekil 4. 11. $\alpha = 0,25$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyi



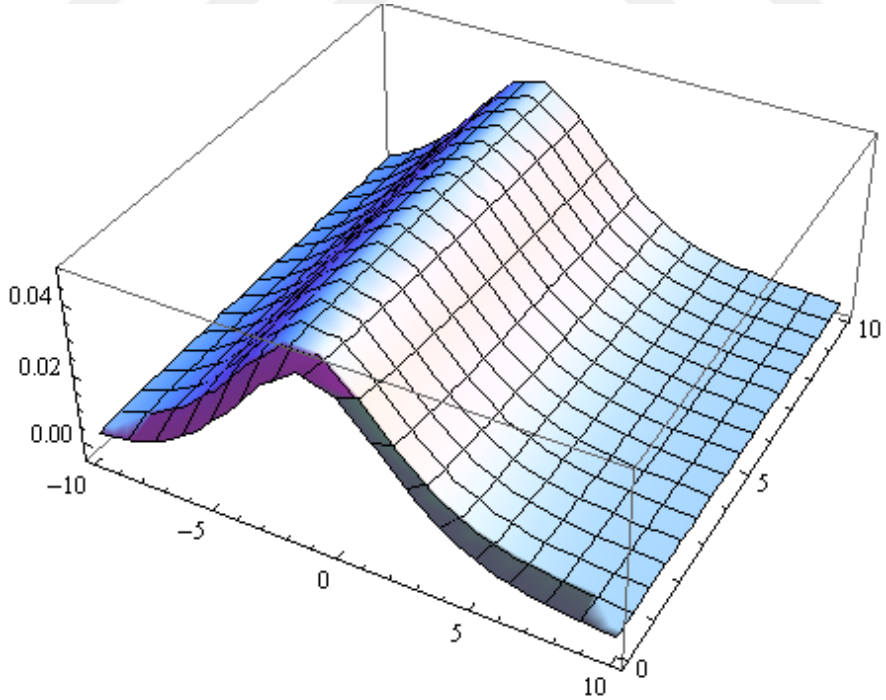
Şekil 4. 12. $\alpha = 0,5$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



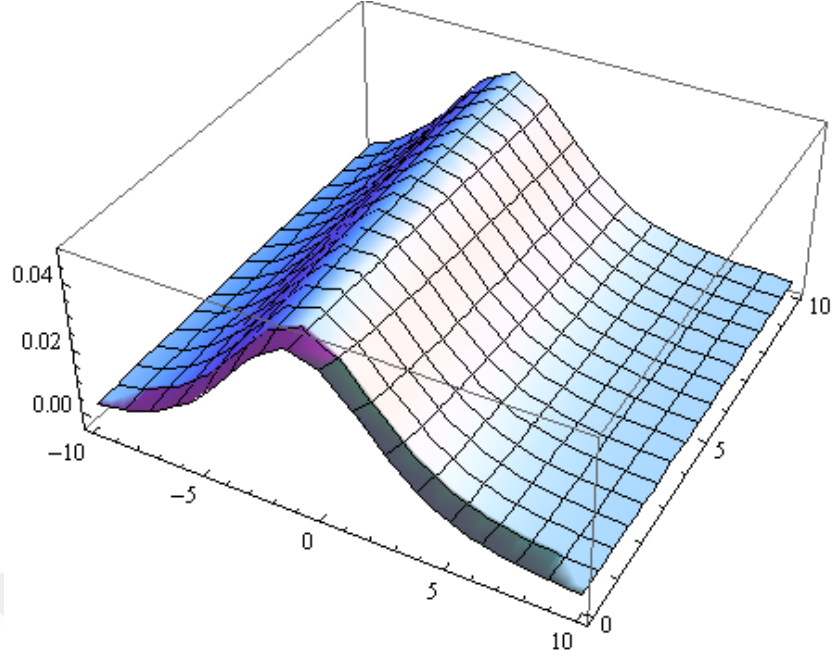
Şekil 4. 13. $\alpha = 0,75$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



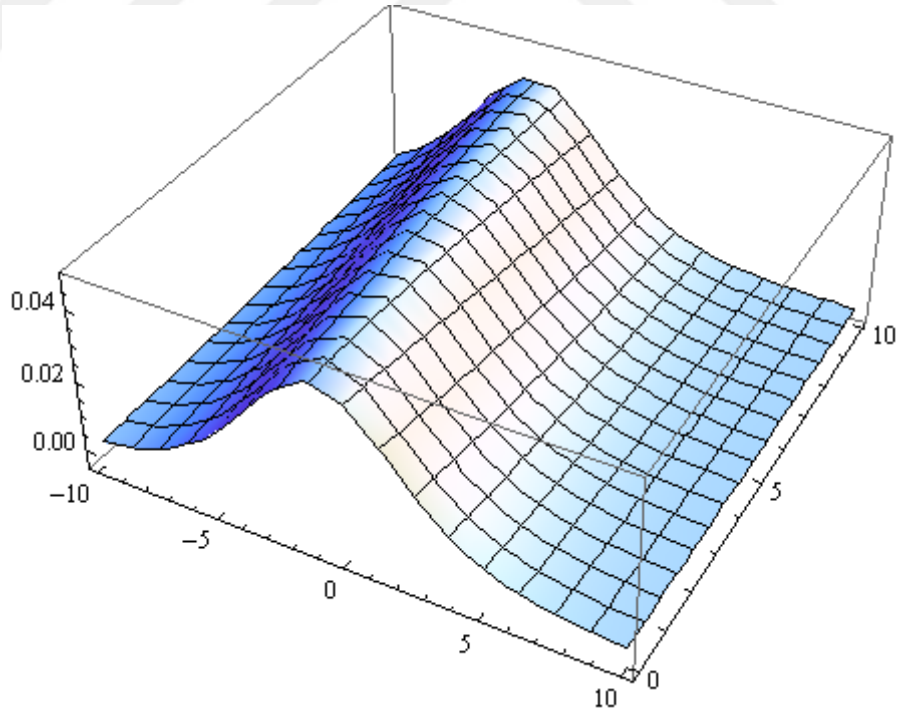
Şekil 4. 14. $\alpha = 0,9$ için $u_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



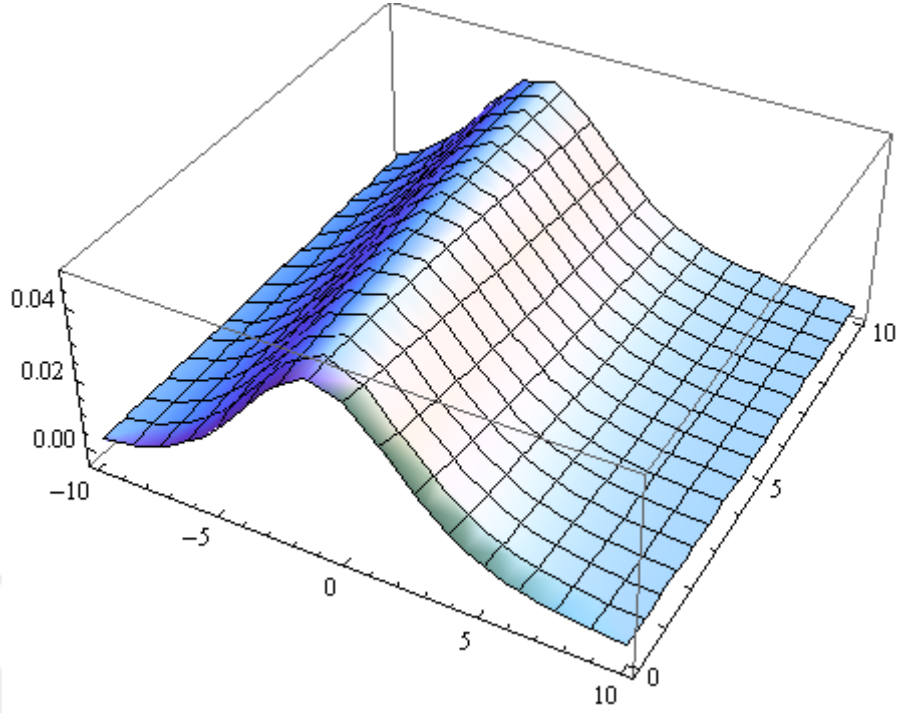
Şekil 4. 15. $\alpha = 0,25$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



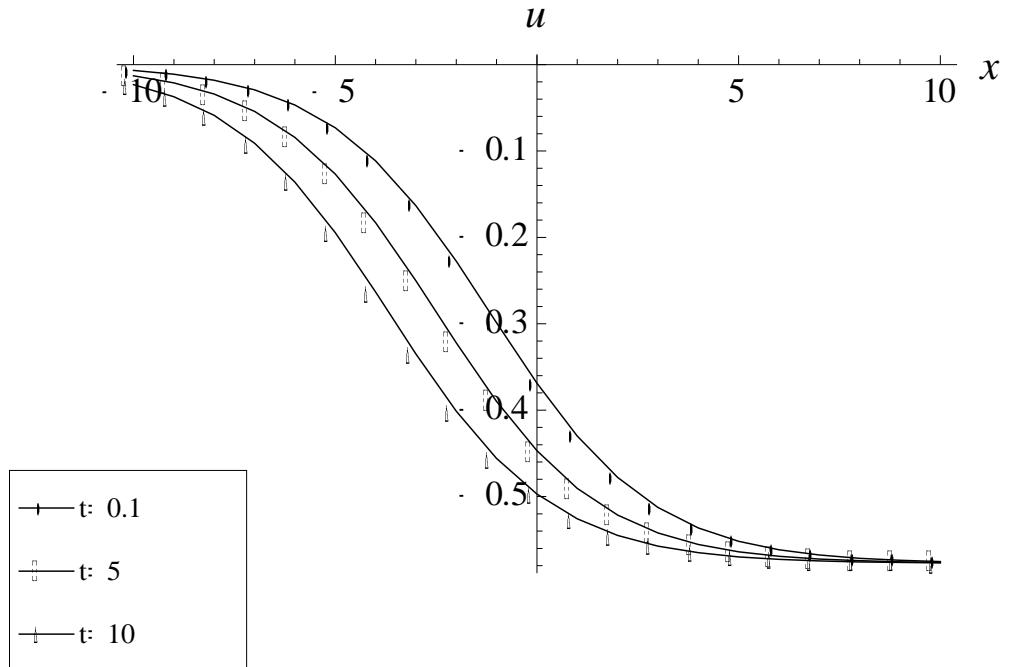
Şekil 4. 16. $\alpha = 0,5$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



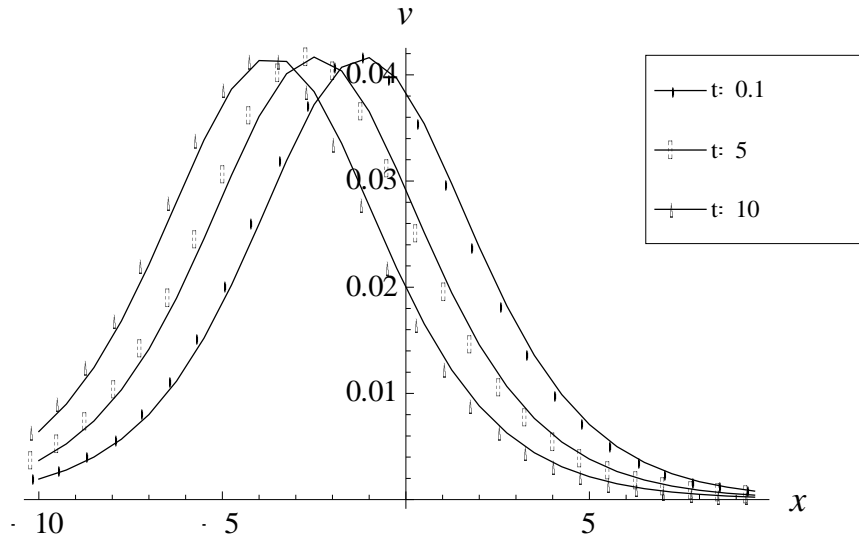
Şekil 4. 17. $\alpha = 0,75$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 18. $\alpha = 0,9$ için $v_1(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 19. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u_1(x, t)$ analitik çözüm eğrisi



Şekil 4. 20. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $v_1(x, t)$ analitik çözüm eğrisi

4.3. Kesirli Mertebeden Gilson–Pickering Denklemi

2009 yılında Chen ve arkadaşları tarafından Gilson-Pickering denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Chen ve ark., 2009). Ayrıca 2009 yılında Fan ve arkadaşları tarafından Gilson-Pickering denkleminin analitik çözümleri G'/G yöntemi kullanılarak elde edildi (Fan ve ark., 2009). 2011 yılında Ebadi ve arkadaşları tarafından yine G'/G yöntemi kullanılarak Gilson-Pickering denkleminin çözümleri elde edildi (Ebadi ve ark., 2011). 2011 yılında Aslan tarafından Gilson-Pickering denkleminin analitik çözümleri bölüm teoremi yardımıyla elde edildi (Aslan, 2011).

Conformable kesirli mertebeden Gilson-Pickering denklemi

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x} = 0 \quad (4.3.1)$$

ele alınsın. Burada a, b, c, α ve β sabit katsayılarıdır. Ayrıca $\gamma \in (0,1]$ olmak üzere γ , conformable anlamında kesirli mertebeden türevi göstermektedir.

(4.3.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Gilson-Pickering kısmi diferansiyel denklemine

$$\eta = kx + w \frac{t^y}{y} \quad (4.3.2)$$

dalga dönüşümü uygulanırsa, (4.3.1) kısmi diferansiyel denklemi

$$wu_\eta + ak^2wu_{\eta\eta} + bku_\eta + ck^3uu_{\eta\eta\eta} + \alpha kuu_\eta + \beta k^3u_\eta u_{\eta\eta} = 0 \quad (4.3.3)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüşür. (4.3.3) denkleminin çözümünün (4.1.7) formunda olduğunu kabul edelim. (4.1.7) eşitliğindeki c , d , p ve q pozitif tamsayılarını belirlemek için (4.3.3) adi diferansiyel denklemindeki u_η ile $u_{\eta\eta\eta}u$ ifadelerinin arasındaki homojen dengeye bakılır. (4.1.7) denklemi yardımıyla (4.3.3) denklemindeki u_η ifadesi

$$u_\eta = \frac{c_1 e^{[-(c-p)\eta] + \dots}}{c_2 e^{[-2p\eta] + \dots}} \quad (4.3.4)$$

şeklinde ve $u_{\eta\eta\eta}u$ ifadesi

$$u_{\eta\eta\eta}u = \frac{c_3 e^{[-(2c-7p)\eta] + \dots}}{c_4 e^{[-9p\eta] + \dots}} \quad (4.3.5)$$

şeklinde yazılır. (4.3.4) ve (4.3.5) denklemlerindeki katsayıların eşitlenmesiyle

$$-c - 8p = -2c - 7p$$

denklemi bulunur ve buradan

$$c = p$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde, u_η ve $u_{\eta\eta\eta}u$ ifadeleride

$$u_\eta = \frac{\dots + d_1 e^{[(d+q)\eta]}}{\dots + d_2 e^{[2q\eta]}}$$

$$u_{\eta\eta\eta}u = \frac{\dots + d_3 e^{[(2d+7q)\eta]}}{\dots + d_4 e^{[9q\eta]}}$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki iki denklem birbirine eşitlenirse

$$d + 8q = 2d + 7q$$

denklemi bulunur. Böylece

$$q = d$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Kolaylık olması açısından, $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ olarak alırsa, (4.1.7) ile verilen $u(\eta)$ değeri (4.1.14) ile verilen değere dönüşür.

(4.1.14) denklemi (4.3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{A} [C_4 e^{(4\eta)} + C_3 e^{(3\eta)} + C_2 e^{(2\eta)} + C_1 e^{(\eta)} + C_0 + C_{-1} e^{(-\eta)} + C_{-2} e^{(-2\eta)} + C_{-3} e^{(-3\eta)} + C_{-4} e^{(-4\eta)}] = 0 \quad (4.3.6)$$

eşitliği elde edilir. Burada $A, C_4, C_3, C_2, C_1, C_0, C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, C_{-4}$ katsayıları

$$A = (b_1 e^{(\eta)} + b_{-1} e^{(-\eta)} + b_0)^5,$$

$$C_4 = \alpha k a_1^2 b_1^2 b_0 - \alpha k^2 w a_0 b_1^4 + c k^3 a_1^2 b_1^2 b_0 + w a_1 b_0 b_1^3 - c k^3 a_1 a_0 b_1^3 + \alpha k^2 w a_1 b_0 b_1^3 - w a_0 b_1^4 - \alpha k a_1 a_0 b_1^3 - b k a_0 b_1^4 + b k a_1 b_0 b_1^3,$$

$$C_3 = -2 w a_{-1} b_1^4 + 3 w a_1 b_0^2 b_1^2 - \beta k^3 a_0^2 b_1^3 - 3 w a_0 b_1^3 b_0 - \alpha k a_0^2 b_1^3 + 2 w a_1 b_{-1} b_1^3 - 2 b k a_{-1} b_1^4 - c k^3 a_0^2 b_1^3 + 3 \alpha k^2 w a_0 b_1^3 b_0 - 3 \alpha k^2 w a_1 b_0^2 b_1^2 + 2 \alpha k a_1^2 b_1 b_0^2 - 8 \alpha k^2 w a_{-1} b_1^4 - 4 c k^3 a_1^2 b_1 b_0^2 - 8 c k^3 a_1 a_{-1} b_1^3 - 2 \alpha k a_1 a_{-1} b_1^3 + 2 \alpha k a_1^2 b_1^2 b_{-1} + 8 c k^3 a_1^2 b_1^2 b_{-1} + 5 c k^3 a_1 a_0 b_1^2 b_0 - \alpha k a_1 a_0 b_1^2 b_0 + 8 \alpha k^2 w a_1 b_{-1} b_1^3 + 2 b k a_1 b_{-1} b_1^3 - \beta k^3 a_1^2 b_1 b_0^2 + 3 b k a_1 b_0^2 b_1^2 - 3 b k a_0 b_1^3 b_0 + 2 \beta k^3 a_1 a_0 b_1^2 b_0,$$

$$C_2 = 4 c k^3 a_0^2 b_1^2 b_0 - 6 \beta k^3 a_1^2 b_1 b_0 b_{-1} + 6 \beta k^3 a_1 a_{-1} b_1^2 b_0 - 18 c k^3 a_1^2 b_1 b_0 b_{-1} + \alpha k a_1 a_0 b_1^2 b_{-1} - 3 \alpha k a_0 a_{-1} b_1^3 - 6 \beta k^3 a_0 a_{-1} b_1^3 + 31 c k^3 a_1 a_0 b_1^2 b_{-1} - 4 c k^3 a_1 a_{-1} b_1^2 b_0 + 6 \beta k^3 a_1 a_0 b_1^2 b_{-1} - 5 c k^3 a_1 a_0 b_1 b_0^2 - 2 \beta k^3 a_1 a_0 b_1 b_0^2 + 9 w a_1 b_0 b_1^2 b_{-1} + 22 \alpha k^2 w a_0 b_1^3 b_{-1} - 9 c k^3 a_0 a_{-1} b_1^3 - 3 b k a_0 b_1^2 b_0^2 - 2 \alpha k a_0^2 b_1^2 b_0 + 9 b k a_1 b_0 b_1^2 b_{-1} - 7 b k a_{-1} b_1^3 b_0 - 13 \alpha k^2 w a_{-1} b_1^3 b_0 + c k^3 a_1^2 b_0^3 + \beta k^3 a_1^2 b_0^3 - 2 w a_0 b_1^3 b_{-1} - 3 w a_0 b_1^2 b_0^2 + 3 w a_1 b_0^3 b_1 - 7 w a_{-1} b_1^3 b_0 + \alpha k a_1^2 b_0^3 + \alpha k a_1 a_0 b_1 b_0^2 - 3 \alpha k^2 w a_1 b_0^3 b_1 + 3 \alpha k^2 w a_0 b_1^2 b_0^2 + \beta k^3 a_0^2 b_1^2 b_0 - 2 b k a_0 b_1^3 b_{-1} + 6 \alpha k a_1^2 b_1 b_0 b_{-1} - 9 \alpha k^2 w a_1 b_0 b_1^2 b_{-1} - 4 \alpha k a_1 a_{-1} b_1^2 b_0 + 3 b k a_1 b_0^3 b_1,$$

$$C_1 = -b k a_0 b_1 b_0^3 - c k^3 a_0^2 b_1 b_0^2 - \alpha k a_0^2 b_1 b_0^2 - 8 c k^3 a_1 a_{-1} b_1 b_0^2 + 4 c k^3 a_1^2 b_0^2 b_{-1} - 2 \alpha k a_1 a_{-1} b_1 b_0^2 + 12 w a_1 b_0^2 b_1 b_{-1} - 12 \beta k^3 a_0 a_1 b_0 b_{-1} + 40 c k^3 a_1 a_{-1} b_1^2 b_{-1} - 2 \beta k^3 a_0 a_{-1} b_1^2 b_0 + 4 \alpha k a_1^2 b_0^2 b_{-1} - 32 c k^3 a_1^2 b_1 b_0^2 + 6 \alpha k a_0 a_1 b_1 b_0 b_{-1} +$$

$$\begin{aligned}
& 12bka_1b_0^2b_1b_{-1} + 6bka_1b_{-1}^2b_1^2 + ak^2wa_{-1}b_0^4 + bka_1b_0^4 - 4ak^2wa_1b_{-1}^2b_1^2 - \\
& 8\beta k^3a_{-1}^2b_1^3 + 24ak^2wa_{-1}b_1^3b_{-1} - 9ak^2wa_{-1}b_1^2b_0^2 + 6wa_1b_{-1}^2b_1^2 - 6wa_{-1}b_1^3b_{-1} - \\
& 9wa_{-1}b_1^2b_0^2 - 2\alpha ka_1a_{-1}b_1^2b_{-1} + 2\beta k^3a_1a_{-1}b_1b_0^2 + 27ak^2wa_0b_1^2b_0b_{-1} - \\
& 18ck^3a_0a_1b_1b_0b_{-1} + 16\beta k^3a_1a_{-1}b_1^2b_{-1} - 3wa_0b_1^2b_0b_{-1} - 18ak^2wa_1b_0^2b_1b_{-1} - \\
& \alpha ka_0^2b_1^2b_{-1} - 9bka_{-1}b_1^2b_0^2 + 4\alpha ka_1^2b_1b_{-1}^2 - 3bka_0b_1^2b_0b_{-1} + 5\beta k^3a_1^2b_0^2b_{-1} - \\
& wa_0b_1b_0^3 - 7\alpha ka_0a_{-1}b_1^2b_0 + 23ck^3a_0^2b_1^2b_{-1} - ak^2wa_0b_1b_0^3 - 8ck^3a_{-1}^2 - \\
& ck^3a_0a_{-1}b_1^2b_0 - 6bka_{-1}b_1^3b_{-1} + \alpha ka_0a_1b_0^3 + 7\beta k^3a_0^2b_1^2b_{-1} - 2\alpha ka_{-1}^2b_1^3 - \\
& 8\beta k^3a_1^2b_1b_{-1}^2 + ck^3a_0a_1b_0^3 + wa_1b_0^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & -55ck^3a_1a_0b_1b_{-1}^2 - 5\alpha ka_0a_{-1}b_1^2b_{-1} + 20\beta k^3a_0a_{-1}b_1^2b_{-1} + 20\beta k^3a_0a_{-1}b_1^2b_{-1} - \\
& 20\beta k^3a_1a_0b_1b_{-1}^2 + 5\alpha ka_0b_{-1}b_0^2 + 5wa_1b_0^3b_{-1} + 5\alpha ka_1^2b_0b_{-1}^2 + 10\beta k^3a_1^2b_0b_{-1}^2 - \\
& 10\beta k^3a_{-1}^2b_1^2b_0 - 5\alpha ka_0a_{-1}b_0^2 - 5wa_{-1}b_1b_0^3 + 15wa_1b_0b_1b_{-1}^2 + 5ck^3a_1^2b_0b_{-1}^2 - \\
& 5ck^3a_{-1}^2b_1^2b_0 - 15wa_1b_1^2b_0b_{-1} + 55ck^3a_0a_{-1}b_1^2b_{-1} + 5ck^3a_1a_0b_{-1}b_0^2 - 5ck^3a_0a_{-1}b_1b_0^2 + \\
& 5ak^2wa_1b_0^3b_{-1} - 45ak^2wa_1b_0b_1b_{-1}^2 + 45ak^2wa_{-1}b_1^2b_0b_{-1} - 5ak^2wa_1b_1b_0^3 + \\
& 5bka_1b_0^3b_{-1} + 15bka_1b_0b_1b_{-1}^2 - 15bka_1b_1^2b_0b_{-1} - 5bka_{-1}b_1b_0^3 - 5\alpha ka_{-1}^2b_1^2b_0 + \\
& 5\alpha ka_1a_0b_1b_{-1}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1} = & -6wa_{-1}b_1^2b_{-1}^2 + 6wa_1b_{-1}^3b_1 + 2\alpha ka_1^2b_{-1}^3 + 8\beta k^3a_1^2b_{-1}^3 + 8ck^3a_1^2b_{-1}^3 - \\
& bka_{-1}b_0^4 + 9wa_1b_0^2b_{-1}^2 + 3wa_0b_1b_0b_{-1}^2 + 2\alpha ka_1a_{-1}b_1b_{-1}^2 - 6bka_{-1}b_1^2b_{-1}^2 - \\
& 12bka_{-1}b_1^2b_0^2b_{-1} + 9ak^2wa_1b_0^2b_{-1}^2 - wa_{-1}b_0^4 + 18ck^3a_0a_{-1}b_1b_0b_{-1} + \\
& 3bka_0b_1b_0b_{-1}^2 + 2\beta k^3a_1a_0b_{-1}^2b_0 - 6\alpha ka_0a_{-1}b_1b_0b_{-1} - ak^2wa_{-1}b_0^4 - 5\beta k^3a_{-1}^2b_1b_0^2 - \\
& 40ck^3a_1a_{-1}b_1b_{-1}^2 - 16\beta k^3a_1a_{-1}b_1b_{-1}^2 - 12wa_{-1}b_1b_0^2b_{-1} - 2\beta k^3a_1a_{-1}b_0^2b_{-1} - \\
& 27ak^2wa_0b_1b_0b_{-1}^2 - 4\alpha ka_{-1}^2b_1b_0^2 - 4ck^3a_{-1}^2b_1b_0^2 + 12\beta k^3a_0a_{-1}b_1b_0b_{-1} + \\
& 32ck^3a_{-1}^2b_1^2b_{-1} + 8\beta k^3a_{-1}^2b_1^2b_{-1} + 7\alpha ka_1a_0b_{-1}^2b_0 - 7\beta k^3a_0^2b_1b_{-1}^2 + ck^3a_0^2b_{-1}b_0^2 + \\
& \alpha ka_0^2b_{-1}b_0^2 - ck^3a_0a_{-1}b_0^3 - \alpha ka_0a_{-1}b_0^3 + ck^3a_1a_0b_{-1}^2b_0 + \alpha ka_0^2b_1b_{-1}^2 - \\
& 24ak^2wa_1b_{-1}^3b_1 + 24ak^2wa_{-1}b_1^2b_{-1}^2 + 18ak^2wa_{-1}b_1b_0^2b_{-1} - 23ck^3a_0^2b_1b_{-1}^2 + \\
& 8ck^3a_1a_{-1}b_0^2b_{-1} - 4\alpha ka_{-1}^2b_1^2b_{-1} + 2\alpha ka_1a_{-1}b_0^2b_{-1} + 9bka_1b_0^2b_{-1}^2 + 6bka_1b_{-1}^3b_1 + \\
& wa_0b_{-1}b_0^3 + bka_0b_{-1}b_0^3 + ak^2wa_0b_{-1}b_0^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-2} = & -9wa_{-1}b_1b_0b_{-1}^2 - 22ak^2wa_0b_1b_{-1}^3 - 3bka_{-1}b_0^3b_{-1} + 3bka_0b_{-1}^2b_0^2 - \\
& 6\beta k^3a_1a_{-1}b_0b_{-1}^2 - \alpha ka_0a_{-1}b_1b_{-1}^2 + 7bka_1b_0b_{-1}^2 + 6\beta k^3a_{-1}^2b_1b_0b_{-1} - \\
& 9bka_{-1}b_1b_0b_{-1}^2 - 6\beta k^3a_0a_{-1}b_1b_{-1}^2 + 18ck^3a_{-1}^2b_1b_0b_{-1} + 6\beta k^3a_1a_0b_{-1}^3 - \\
& 6\alpha ka_{-1}^2b_1b_0b_{-1} + 2\alpha ka_0^2b_{-1}^2b_0 + 4ck^3a_1a_{-1}b_0b_{-1}^2 + 4\alpha ka_1a_{-1}b_0b_{-1}^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9ck^3a_1a_0b_{-1}^3 - 31ck^3a_0a_{-1}b_1b_{-1}^2 + 5ck^3a_0a_{-1}b_0^2b_{-1} - 4ck^3a_0^2b_{-1}^2b_0 + \\
& 3ak^2wa_{-1}b_0^3b_{-1} - 3ak^2wa_0b_{-1}^2b_0^2 - \beta k^3a_0^2b_{-1}^2b_0 + 2bka_0b_1b_{-1}^3 + \\
& 13ak^2wa_1b_0b_{-1}^3 + 2\beta k^3a_0a_{-1}b_0^2b_{-1} + 9ak^2wa_{-1}b_1b_0b_{-1}^2 + 3\alpha ka_1a_0b_{-1}^3 - \\
& \beta k^3a_{-1}^2b_0^3 + 2wa_0b_1b_{-1}^3 - ck^3a_{-1}^2b_0^3 - \alpha ka_{-1}^2b_0^3 - 3wa_{-1}b_0^3b_{-1} + 3wa_0b_{-1}^2b_0^2 + \\
& 7wa_1b_0b_{-1}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-3} = & \alpha ka_0a_{-1}b_0b_{-1}^2 - 8ck^3a_{-1}^2b_1b_{-1}^2 - 8ak^2wa_{-1}b_1b_{-1}^3 - 3bka_{-1}b_0^2b_{-1}^2 + \\
& 3bka_0b_{-1}^3b_0 - 2\alpha ka_{-1}^2b_0^2b_{-1} + 8ck^3a_{-1}a_1b_{-1}^3 + 2\alpha ka_{-1}a_1b_{-1}^3 - \\
& 5ck^3a_0a_{-1}b_0b_{-1}^2 + ck^3a_0^2b_{-1}^3 + 2bka_1b_{-1}^4 - 3wa_{-1}b_0^2b_{-1}^2 + 3wa_0b_{-1}^3b_0 + \\
& \beta k^3a_0^2b_{-1}^3 - 2wa_{-1}b_1b_{-1}^3 + \alpha ka_0^2b_{-1}^3 + 2wa_1b_{-1}^4 + 8ak^2wa_1b_{-1}^4 + \\
& 3ak^2wa_{-1}b_0^2b_{-1}^2 - 3ak^2wa_0b_{-1}^3b_0 + \beta k^3a_{-1}^2b_0^2b_{-1} - 2bka_{-1}b_1b_{-1}^3 - \\
& 2\beta k^3a_0a_{-1}b_0b_{-1}^2 + 4ck^3a_{-1}^2b_0^2b_{-1} - 2\alpha ka_{-1}^2b_1b_{-1}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-4} = & ak^2wa_0b_{-1}^4 + wa_0b_{-1}^4 - \alpha ka_{-1}^2b_0b_{-1}^2 + ck^3a_{-1}a_0b_{-1}^3 - wa_{-1}b_0b_{-1}^3 - \\
& ck^3a_{-1}^2b_0b_{-1}^2 + bka_0b_{-1}^4 - ak^2wa_{-1}b_0b_{-1}^3 - bka_{-1}b_0b_{-1}^3 + \alpha ka_{-1}a_0b_{-1}^3. \quad (4.3.7)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (4.3.7) ile verilen C_n ($n = -3, -2, \dots, 2, 3$) katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle oluşan cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle

$$a_0 = \frac{b_0(bk+w+ak^2w)}{\beta k^3}, b_{-1} = 0, b_1 = 0, \alpha = -\beta k^2 - ck^2 \quad (4.3.8)$$

değerleri bulunur.

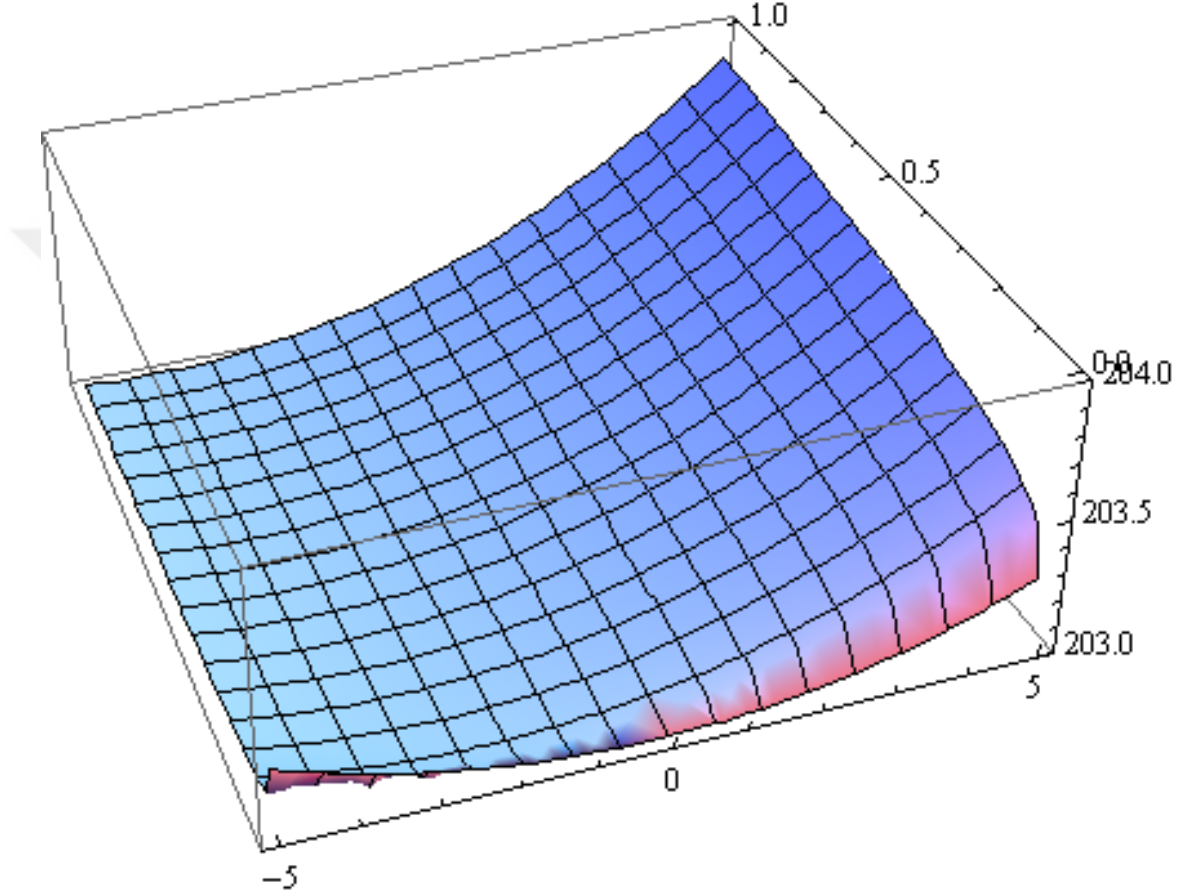
(4.1.14) denklemini (4.3.8) ile verilen katsayılarının ve (4.3.2) dalga dönüşümünün yerlerine yazılmasıyla $u(x, t)$ analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{b_0} \left(a_{-1} e^{-kx - \frac{wt^\gamma}{\gamma}} + a_1 e^{kx + \frac{wt^\gamma}{\gamma}} + \frac{b_0(w+k(b+akw))}{k^3\beta} \right) \quad (4.3.9)$$

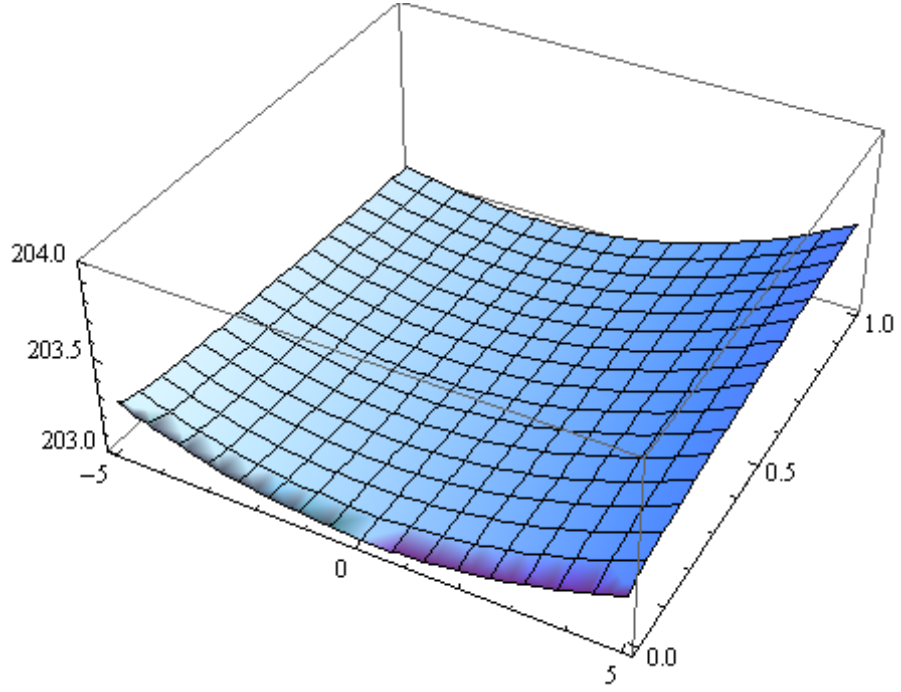
olarak elde edilir.

(4.3.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Gilson–Pickering denkleminin $a_1 = 1, b_0 = 1, a_{-1} = 1, k = 0.1, w = 0.1, \alpha = 1, \beta = 1, a = 1, b = 1, c = 1$ değerlerinde $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq t \leq 1$ aralıklarında farklı γ değerleri için $u(x, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri (Şekil 4.21.) ile (Şekil 4.24.) arasında verildi.

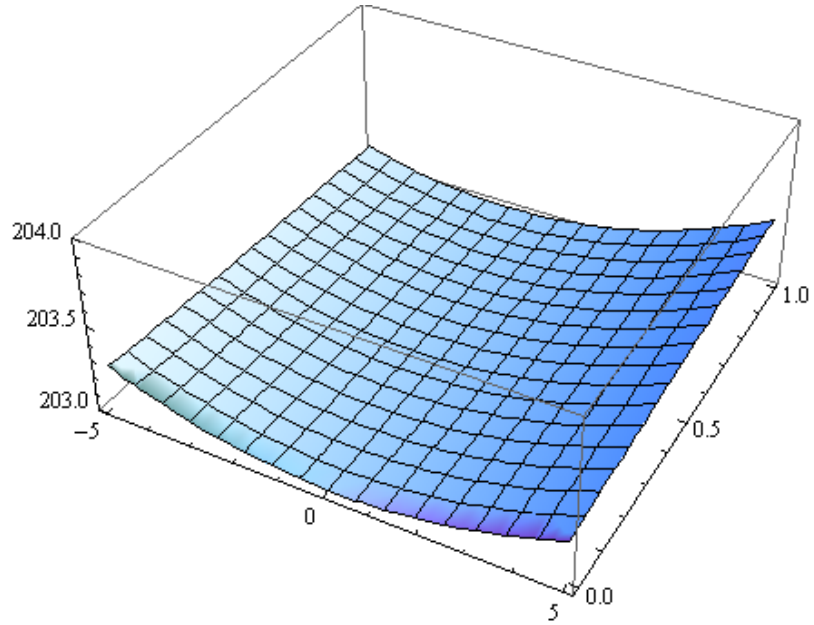
(Şekil 4.25.) de $a_1 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{-1} = 1$, $k = 0.1$, $w = 0.1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $\gamma = 0.9$ değerlerinde ve $-1 \leq x \leq 1$ aralığında farklı t değerlerinde (4.3.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Gilson–Pickering denkleminin $u(x, t)$ analitik çözümlerinin eğrileri verildi.



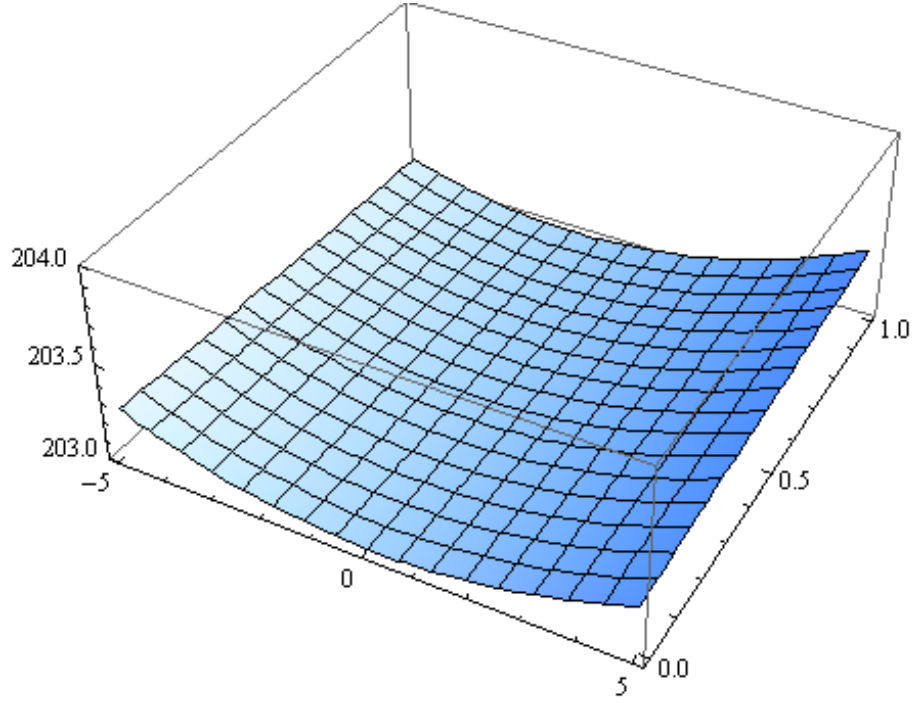
Şekil 4. 21. $\gamma = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



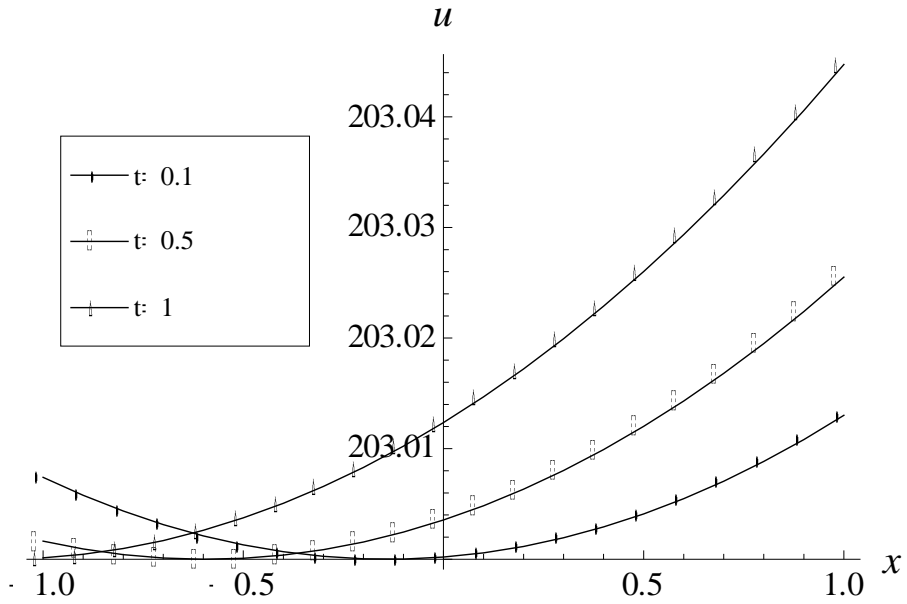
Şekil 4. 22. $\gamma = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 23. $\gamma = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 24. $\gamma = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 25. Farklı t değerlerinde $\gamma = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi

4.4. Kesirli Mertebeden Avcı - Av Modeli

Av-avcı modeli denklem sisteminde u av sayısını v ise avcı sayısını modellemektedir. Av-avcı modelinin analitik çözümleri 2013 yılında Kraenkel ve arkadaşları tarafından G'/G açılım yöntemi kullanılarak elde edildi (Kraenkel ve ark., 2013). Ayrıca 2013 yılında Atangana tarafından av-avcı modelinin yaklaşık çözümleri homotopi ayrıştırma yöntemi kullanılarak da elde edildi (Atangana, 2013). 2015 yılında Abdelrahman ve arkadaşları tarafından av-avcı modelinin çözümleri $\exp(-\Phi(\xi))$ yöntemi kullanılarak elde edildi (Abdelrahman ve ark., 2015). Zayed ve Amer tarafından da 2015 yılında av-avcı modelinin analitik çözümleri modifiye edilmiş basit denklem yöntemi kullanılarak elde edildi (Zayed ve Amer, 2015). 2016 yılında ise Choi ve arkadaşları tarafından av-avcı modelinin çözümleri Q-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edildi (Choi ve ark., 2016).

Conformable kesirli mertebeden Avcı - Av modeli, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u - (1 + \beta)u^2 + u^3 + uv &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \kappa uv + mv + \delta v^3 &= 0\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

olarak ele alınsın. Burada κ, δ, m ve β pozitif parametrelerdir. (4.4.1) denklem sisteminde $m = \beta$ ve $\kappa + \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \beta + 1$ olarak alınırsa, (4.4.1) denklem sistemi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u - \left(\kappa + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)u^2 + u^3 + uv &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \kappa uv + \beta v + \delta v^3 &= 0\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

olarak yeniden yazılır. (4.4.2) conformable kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem sistemine (4.1.2) dalga dönüşümü uygulanırsa, u ve v bağımlı değişkenler ve η bağımsız değişken olmak üzere

$$\begin{aligned}wu_\eta - k^2 u_{\eta\eta} + \beta u - \left(\kappa + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)u^2 + u^3 + uv &= 0, \\ wv_\eta - k^2 v_{\eta\eta} - \kappa uv + \beta v + \delta v^3 &= 0\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.4.3) adi türevli diferansiyel denklemini adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürmek için

$$v = \frac{1}{\sqrt{\delta}} u$$

dönüşümü kullanılırsa

$$k^2 u_{\eta\eta} - w u_{\eta} - \beta u + \kappa u^2 - u^3 = 0 \quad (4.4.4)$$

denklemini elde edilir.

(4.4.1) conformable kesirli mertebeden avcı – av modelinin analitik çözümünü bulmak için (4.4.4) denkleminde (4.1.7) formunda çözüm aransın. (4.1.7) denklemindeki c , d , p ve q pozitif tamsayıları belirlemek için, en yüksek mertebeden türev olan $u_{\eta\eta}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan u^3 ifadelerinin değerleri, (4.1.7) eşitliği yardımıyla

$$u_{\eta\eta} = \frac{c_1 e^{[-c-3p]\eta} + \dots}{c_2 e^{[-4p]\eta} + \dots} \quad (4.4.5)$$

ve

$$u^3 = \frac{c_3 e^{[-3c]\eta} + \dots}{c_4 e^{[-3p]\eta} + \dots} \quad (4.4.6)$$

olarak hesaplanır. (4.4.5) ve (4.4.6) denklemlerinden

$$-c - 3p = -3c - p$$

eşitliği bulunur. Böylece

$$c = p$$

elde edilir. (4.1.7) denkleminde bulunan d ve q pozitif tam sayıları arasındaki bağıntı ise

$$u_{\eta\eta} = \frac{\dots + d_1 e^{[(d+3q)\eta]} + \dots}{\dots + d_2 e^{[4q]\eta}} + \dots$$

ve

$$u^3 = \frac{\dots + d_3 e^{[3d]\eta} + \dots}{\dots + d_4 e^{[3q]\eta}} + \dots$$

eşitliklerinden

$$q = d$$

olarak bulunur. Kolaylık olması açısından, $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ olarak alınırsa (4.1.7) denklemi,

$$u(\eta) = \frac{a_{-1}e^{(-\eta)} + a_0 + a_1e^{(\eta)}}{b_{-1}e^{(-\eta)} + b_0 + b_1e^{(\eta)}} \quad (4.4.7)$$

formuna dönüşür.

(4.4.7) eşitliği ile verilen $u(\eta)$ ve $u(\eta)$ ifadesinin (4.4.7) eşitliğinden elde edilen η değişkenine göre birinci ve ikinci türevleri (4.4.4) adi diferansiyel denklemde yerine yazılır ve daha sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$A = (b_1e^{(\eta)} + b_{-1}e^{(-\eta)} + b_0)^3$$

$$C_3 = -\beta a_1 b_1^2 - a_1^3 + \kappa a_1^2 b_1,$$

$$C_2 = -3a_0 a_1^2 + w a_0 b_1^2 - \beta a_0 b_1^2 - k^2 a_1 b_0 b_1 + k^2 a_0 b_1^2 + \kappa a_1^2 b_0 - w a_1 b_0 b_1 - 2\beta a_1 b_0 b_1 + 2\kappa a_0 a_1 b_1,$$

$$C_1 = -3a_{-1} a_1^2 + k^2 a_1 b_0^2 - w a_{-1} b_0^2 - \beta a_{-1} b_0^2 + \kappa a_0^2 b_{-1} - k^2 a_0 b_{-1} b_0 - w a_0 b_{-1} b_0 - 2\beta a_0 b_{-1} b_0 + 2\kappa a_0 a_{-1} b_0 - 3a_0^2 a_{-1} - \beta a_1 b_{-1}^2 + 4k^2 a_1 b_{-1}^2 - 2w a_1 b_{-1}^2 + \kappa a_{-1}^2 b_1 - 4k^2 a_{-1} b_1 b_{-1} + 2w a_{-1} b_1 b_{-1} - 2\beta a_{-1} b_1 b_{-1} + 2\kappa a_1 a_{-1} b_{-1},$$

$$C_0 = -\beta a_0 b_0^2 + 2\kappa a_1 a_0 b_{-1} - 2\beta a_{-1} b_1 b_0 + 3k^2 a_1 b_0 b_{-1} + 3k^2 a_{-1} b_1 b_0 - 6k^2 a_0 b_1 b_{-1} - 2\beta a_0 b_1 b_{-1} - 3w a_1 b_0 b_{-1} + 2\kappa a_1 a_{-1} b_0 + \kappa a_0^2 b_0 + 3w a_{-1} b_1 b_0 - 2\beta a_1 b_0 b_{-1} - a_0^3 + 2\kappa a_0 a_{-1} b_1 - 6a_1 a_0 a_{-1},$$

$$C_{-1} = -3a_1 a_{-1}^2 + k^2 a_{-1} b_0^2 - w a_1 b_0^2 - \beta a_1 b_0^2 + \kappa a_0^2 b_1 - k^2 a_0 b_1 b_0 + w a_0 b_1 b_0 - 2\beta a_0 b_1 b_0 + 2\kappa a_0 a_1 b_0 - 3a_0^2 a_1 - \beta a_{-1} b_1^2 + 4k^2 a_{-1} b_1^2 + 2w a_{-1} b_1^2 + \kappa a_1^2 b_{-1} - 4k^2 a_1 b_1 b_{-1} - 2w a_1 b_1 b_{-1} - 2\beta a_1 b_1 b_{-1} + 2\kappa a_1 a_{-1} b_1,$$

$$C_{-2} = -3a_0 a_{-1}^2 - w a_0 b_{-1}^2 - \beta a_0 b_{-1}^2 - k^2 a_{-1} b_0 b_{-1} + k^2 a_0 b_{-1}^2 + \kappa a_{-1}^2 b_0 + w a_{-1} b_0 b_{-1} - 2\beta a_{-1} b_0 b_{-1} + 2\kappa a_0 a_{-1} b_{-1},$$

$$C_{-3} = -\beta a_{-1} b_{-1}^2 - a_{-1}^3 + \kappa a_{-1}^2 b_{-1}.$$

olmak üzere

$$\frac{1}{4}[C_3e^{(3\eta)} + C_2e^{(2\eta)} + C_1e^{(\eta)} + C_0 + C_{-1}e^{(-\eta)} + C_{-2}e^{(-2\eta)} + C_{-3}e^{(-3\eta)}]=0 \quad (4.4.8)$$

eşitliği elde edilir.

(4.4.8) denklemindeki $C_3, C_2, C_1, C_0, C_{-3}, C_{-2}, C_{-1}$ katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle ve oluşan cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle, bazı parametrelerin değerleri

$$a_0 = 0, b_0 = (-a_1b_{-1} + a_{-1}b_1) \sqrt{\frac{-1}{a_1a_{-1}}}, \kappa = \frac{b_1a_{-1} + a_1b_{-1}}{b_{-1}b_1} \quad (4.4.9)$$

olarak bulunur.

(4.4.9) ile verilen a_0, b_0, κ parametrelerin değerleri ve (4.1.2) dalga dönüşümünün (4.4.7) denkleminde yerine yazılmasıyla, $u(x, t)$ analitik çözümü

$$u(x, t) =$$

$$\frac{a_{-1}e^{\frac{t\alpha\left(\frac{a_{-1}^2}{b_{-1}^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}\right)}{\alpha}} + a_1e^{\sqrt{2}x\left(\frac{a_{-1}}{b_{-1}} - \frac{a_1}{b_1}\right)}}{b_{-1}e^{\frac{t\alpha\left(\frac{a_{-1}^2}{b_{-1}^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}\right)}{\alpha}} + b_1e^{\sqrt{2}x\left(\frac{a_{-1}}{b_{-1}} - \frac{a_1}{b_1}\right)} + e^{-\frac{(a_1b_{-1} - a_{-1}b_1)(\sqrt{2}xb_{-1}b_1 + t\alpha(a_1b_{-1} + a_{-1}b_1))}{2ab_{-1}^2b_1^2}} \sqrt{\frac{1}{-a_{-1}a_1}}(-a_1b_{-1} + a_{-1}b_1)} \quad (4.4.10)$$

olarak elde edilir. (4.4.1) conformable kesirli mertebeden avcı – av modelinin (4.4.10) ile elde edilen $u(x, t)$ analitik çözümünün

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} u(x, t)$$

denkleminde yerine yazılmasıyla $v(x, t)$ analitik çözümü

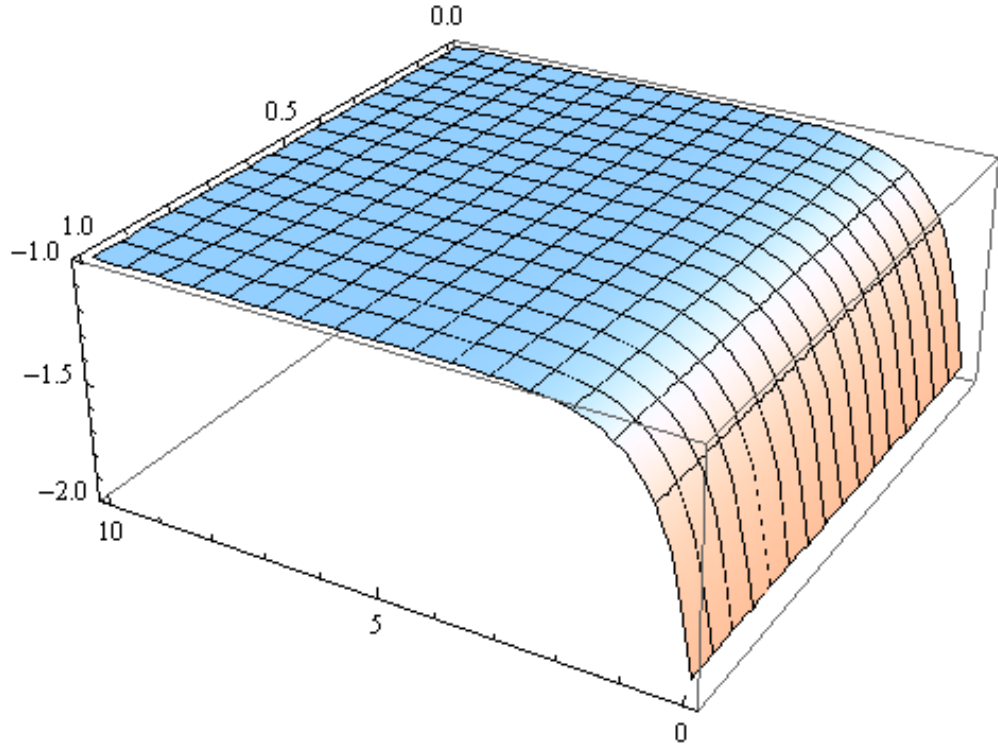
$$v(x, t) =$$

$$\sqrt{\delta} \left(\frac{a_{-1}e^{\frac{t\alpha\left(\frac{a_{-1}^2}{b_{-1}^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}\right)}{\alpha}} + a_1e^{\sqrt{2}x\left(\frac{a_{-1}}{b_{-1}} - \frac{a_1}{b_1}\right)}}{b_{-1}e^{\frac{t\alpha\left(\frac{a_{-1}^2}{b_{-1}^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}\right)}{\alpha}} + b_1e^{\sqrt{2}x\left(\frac{a_{-1}}{b_{-1}} - \frac{a_1}{b_1}\right)} + e^{-\frac{(a_1b_{-1} - a_{-1}b_1)(\sqrt{2}xb_{-1}b_1 + t\alpha(a_1b_{-1} + a_{-1}b_1))}{2ab_{-1}^2b_1^2}} \sqrt{\frac{1}{-a_{-1}a_1}}(-a_1b_{-1} + a_{-1}b_1)} \right) \quad (4.4.11)$$

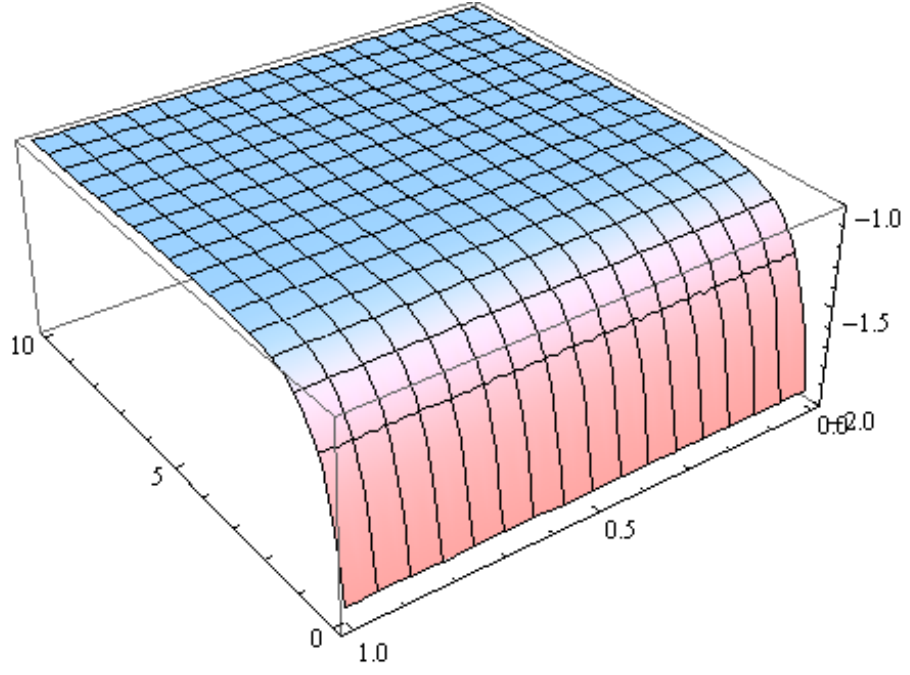
olarak bulunur.

(4.4.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden avcı – av modelinin $a_{-1} = 1, a_1 = 1, b_{-1} = 1, b_1 = 1, k = 1, w = 1, \delta = 0.1$ değerlerinde $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq t \leq 1$ aralıklarında farklı α değerleri için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri (Şekil 4.26.) ile (Şekil 4.33.) arasında verildi.

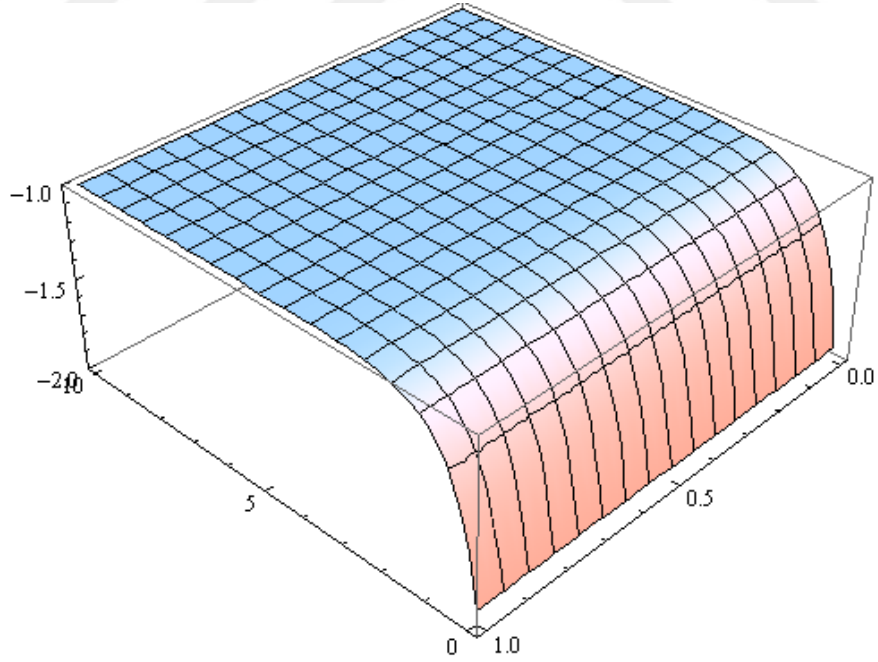
(Şekil 4.34.) ve (Şekil 4.35.) de $a_{-1} = 1, a_1 = 1, b_{-1} = 1, b_1 = 1, k = 1, w = 1, \delta = 0.1, \alpha = 0.9$ değerlerinde ve $-10 \leq x \leq 10$ aralığında farklı t değerlerinde (4.3.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Gilson–Pickering denkleminin $u(x, t)$ analitik çözümlerinin eğrileri verildi.



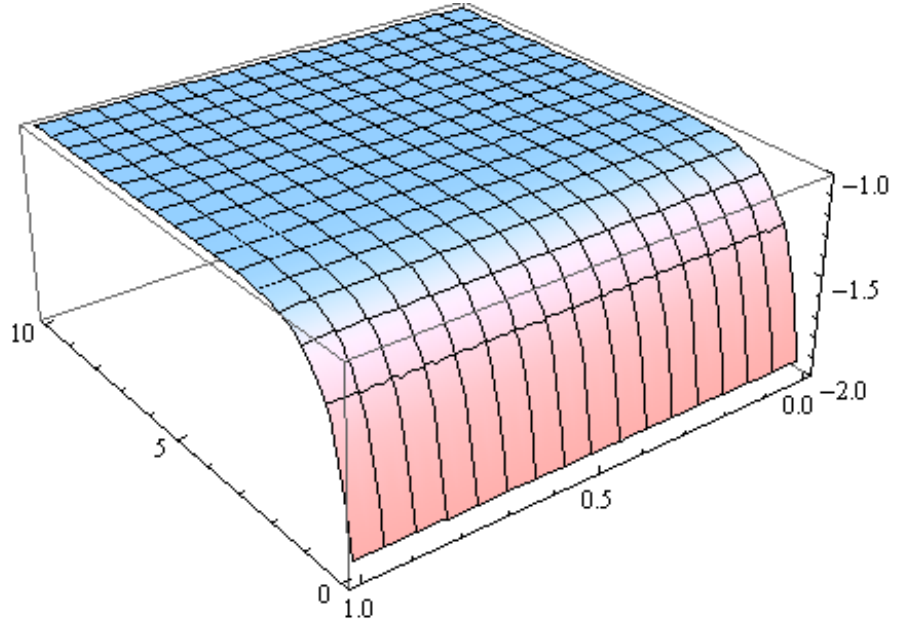
Şekil 4. 26. $\alpha = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



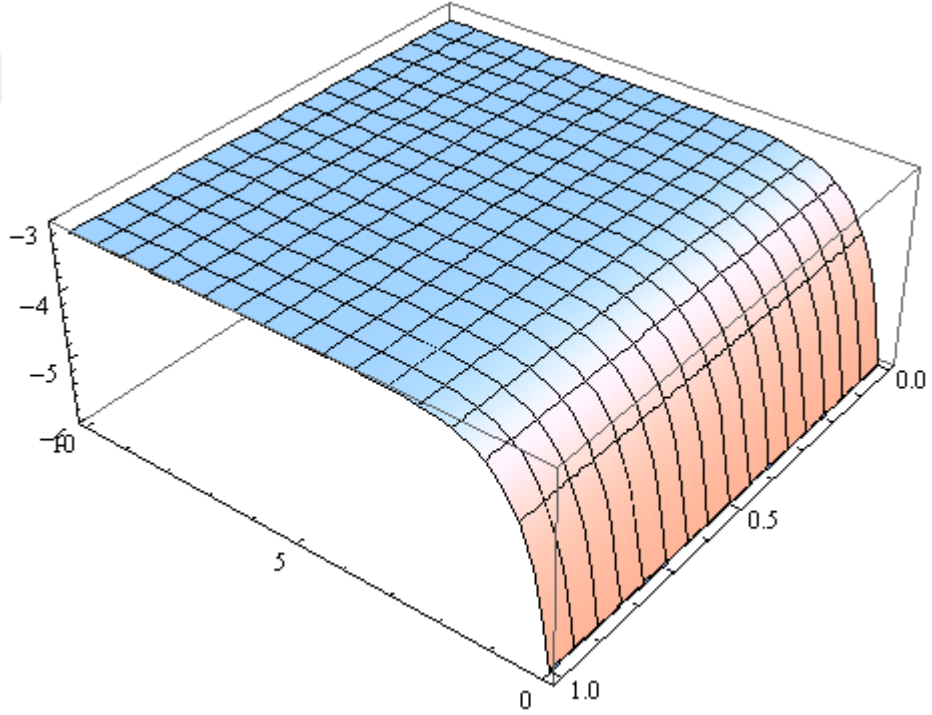
Şekil 4. 27. $\alpha = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



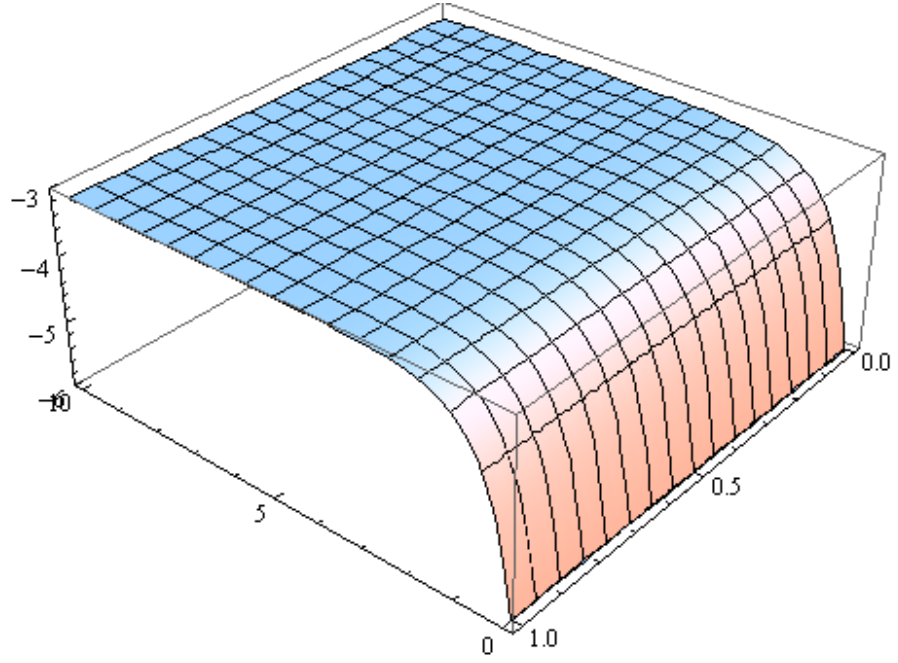
Şekil 4. 28. $\alpha = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



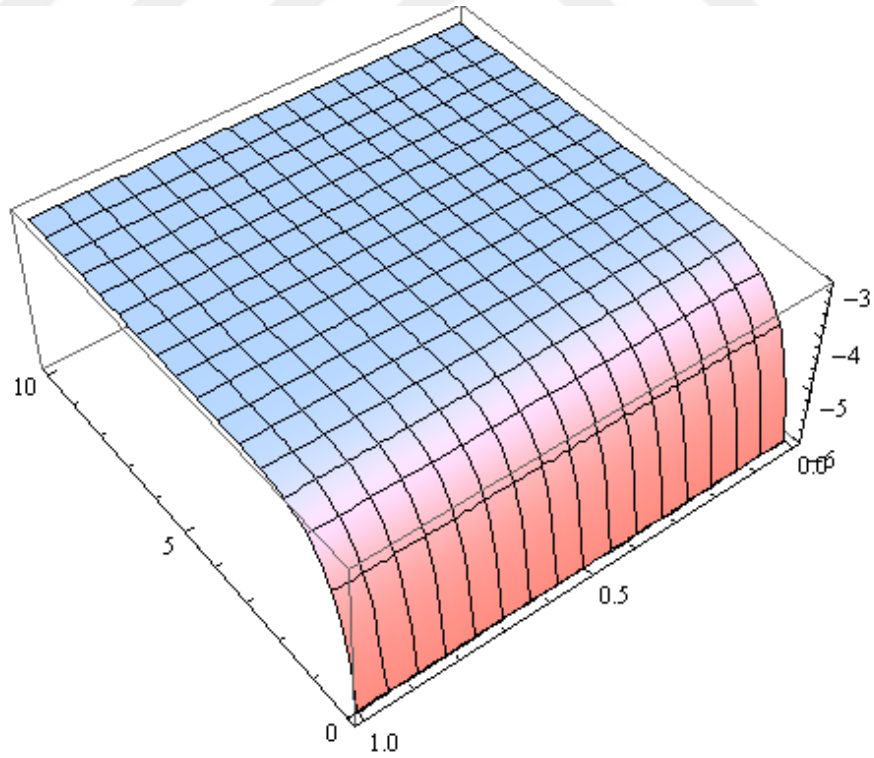
Şekil 4. 29. $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



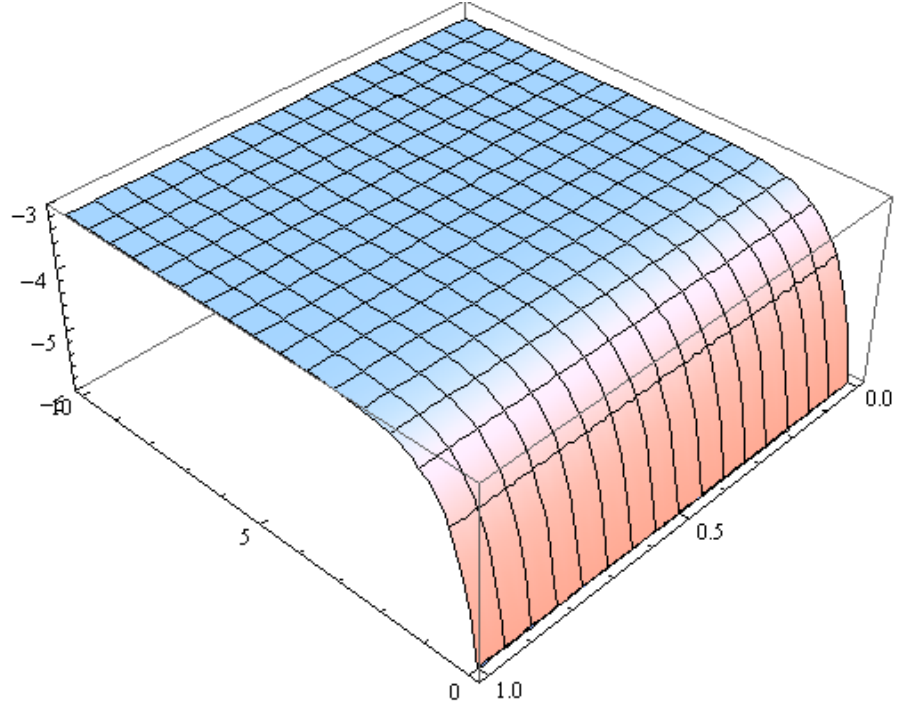
Şekil 4. 30. $\alpha = 0,25$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



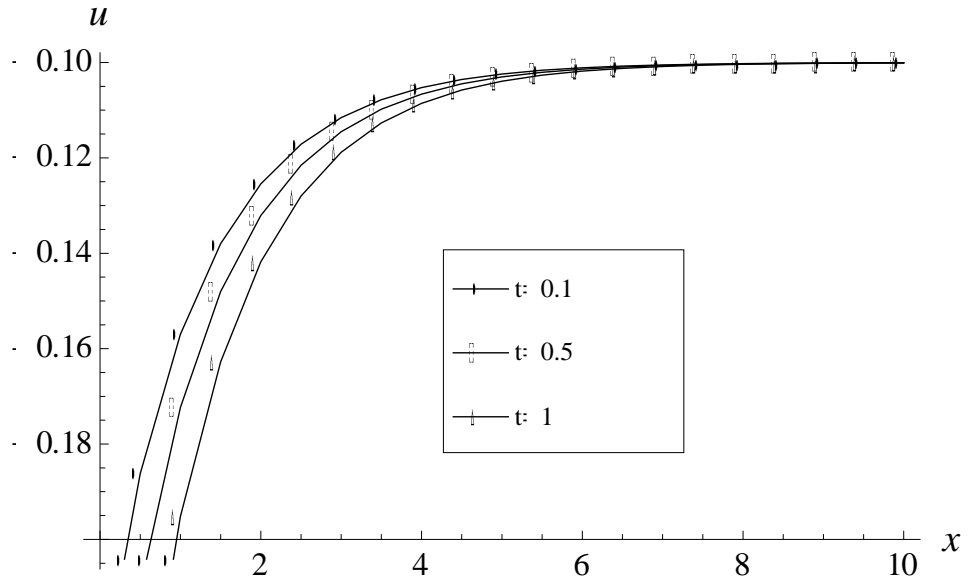
Şekil 4. 31. $\alpha = 0,5$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



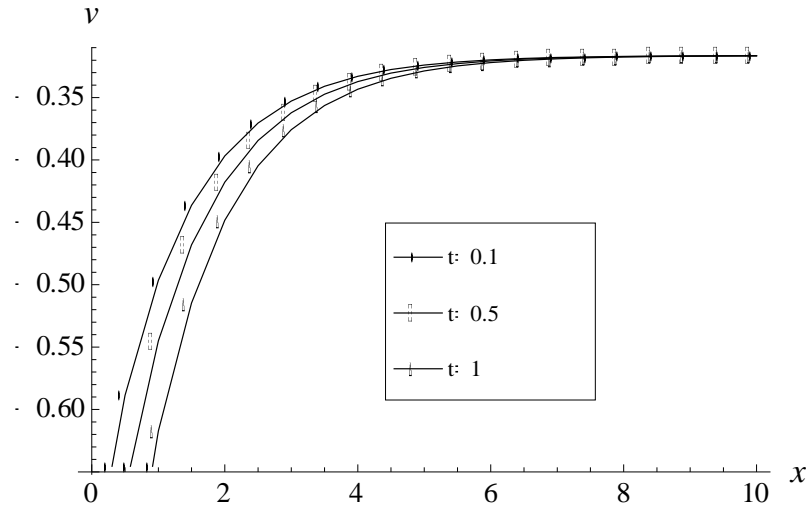
Şekil 4. 32. $\alpha = 0,75$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 33. $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 34. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi



Şekil 4. 35. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $v(x, t)$ analitik çözüm eğrisi

4.5. Kesirli Mertebeden Liouville Denklemi

Liouville denklemini periyodik çözümleri 2005 yılında Wazwaz tarafından, tanh yöntemi kullanılarak bulundu (Wazwaz, 2005). Ayrıca 2008 yılında Wazwaz ve arkadaşları tarafından genişletilmiş tanh yöntemi kullanılarak Liouville denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Wazwaz, 2008). 2010 yılında da Kutluay ve arkadaşları tarafından G'/G açılım yöntemi ile Liouville denklem sisteminin analitik çözümleri elde edildi (Kutluay ve ark., 2010). 2015 yılında ise Kurt ve Tasbozan tarafından Liouville denkleminin analitik çözümleri fonksiyonel değişken ve genişletilmiş deneme yöntemleri kullanılarak elde edildi (Kurt ve Tasbozan, 2015).

Conformable kesirli mertebeden Liouville denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) + e^u = 0 \quad (4.5.1)$$

ele alınsın. (4.5.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Liouville denklemine (4.1.2) dalga dönüşümü uygulanırsa

$$k w u_{\eta\eta} + e^u = 0 \quad (4.5.2)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.5.2) ile verilen denklemi $\theta = e^u$ dönüşümü uygulanırsa

$$kw \left(\theta_{\eta\eta} \theta - (\theta_{\eta})^2 \right) + \theta^3 = 0 \quad (4.5.3)$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.5.3) denkleminin çözümü (4.1.7) formunda olsun. (4.1.7) denklemdeki bilinmeyen c , d , p ve q pozitif tamsayılarını bulmak için bundan önceki kısımlarda olduğu gibi $\theta_{\eta\eta} \theta$ ile θ^3 terimlerinin arasındaki homojen dengeye bakılsın.

(4.5.4) denklemdeki en yüksek mertebeden türev olan $\theta_{\eta\eta} \theta$,

$$\theta_{\eta\eta} \theta = \frac{c_1 e^{[-c-3p]\eta} + \dots}{c_2 e^{[-4p]\eta} + \dots} \quad (4.5.4)$$

şeklinde ve en yüksek derece lineer olmayan terim θ^3 ,

$$\theta^3 = \frac{c_3 e^{[-3c]\eta} + \dots}{c_4 e^{[-3p]\eta} + \dots} \quad (4.5.5)$$

şeklinde yazılır.

(4.5.4) ve (4.5.5) denklemlerindeki katsayıları eşitlenerek dengelenirse,

$$-c - 3p = -3c - p$$

eşitliğinden,

$$c = p$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\theta_{\eta\eta} \theta = \frac{\dots + d_1 e^{[(d+3q)\eta]} + \dots}{\dots + d_2 e^{[4q]\eta}} + \dots$$

ve

$$\theta^3 = \frac{\dots + d_3 e^{[3d]\eta} + \dots}{\dots + d_4 e^{[3q]\eta}} + \dots$$

eşitliklerinden

$$q = d$$

bulunur. $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ ve özel olarak $b_1 = 1$ alınır, (4.1.7) denklemi

$$\theta(\eta) = \frac{a_{-1}e^{(-\eta)} + a_0 + a_1e^{(\eta)}}{b_{-1}e^{(-\eta)} + b_0 + e^{(\eta)}} \quad (4.5.6)$$

formuna dönüşür.

(4.5.7) ile verilen $\theta(\eta)$ değerinin kendisi, birinci ve ikinci türevlerinin (4.5.3) denklemlerinde yerlerine yazılıp ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla

$$\frac{1}{A} [C_4e^{(4\eta)} + C_3e^{(3\eta)} + C_2e^{(2\eta)} + C_1e^{(\eta)} + C_0 + C_{-1}e^{(-\eta)} + C_{-2}e^{(-2\eta)} + C_{-3}e^{(-3\eta)} + C_{-4}e^{(-4\eta)}] = 0 \quad (4.5.7)$$

eşitliği elde edilir. Burada $A, C_4, C_3, C_2, C_1, C_0, C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, C_{-4}$ katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$A = (e^{(\eta)} + b_{-1}e^{(-\eta)} + b_0)^4$$

$$C_4 = a_1^3,$$

$$C_3 = -kwa_1^2b_0 + 3a_1^2a_0 + kwa_0a_1 + a_1^3b_0,$$

$$C_2 = a_1^3b_{-1} + 3a_1a_0^2 - 4kwa_1^2b_{-1} + 4kwa_{-1}a_1 + 3a_1^2a_{-1} + 3a_1^2a_0b_0,$$

$$C_1 = -kwa_1^2b_0b_{-1} + kwa_1b_0^2a_0 + 6kwa_1b_0a_{-1} - kwa_0^2b_0 + kwa_0a_{-1} + 3a_1^2a_0b_{-1} - 6kwa_1b_{-1}a_0 + 6a_1a_0a_{-1} + a_0^3 + 3a_1^2a_{-1}b_0 + 3a_1a_0^2b_0,$$

$$C_0 = 3a_1a_0^2b_{-1} - 4kwa_0^2b_{-1} + 3a_0^2a_{-1} + 6a_1a_0a_{-1}b_0 + 3a_1^2a_{-1}b_{-1} + 3a_1a_{-1}^2 + a_0^3b_0 + 4kwa_1b_0^2a_{-1},$$

$$C_{-1} = 3a_0a_{-1}^2 + 3a_0^2a_{-1}b_0 + a_0^3b_{-1} - kwa_0^2b_{-1}b_0 + kwa_{-1}b_0^2a_0 + kwa_1b_{-1}^2a_0 - 6kwa_{-1}a_0b_{-1} + 6kwa_1b_{-1}a_{-1}b_0 - kwa_{-1}^2b_0 + 3a_1a_{-1}^2b_0 + 6a_1a_0a_{-1}b_{-1},$$

$$C_{-2} = -4kwa_{-1}^2b_{-1} + 3a_0a_{-1}^2b_0 + 3a_0^2a_{-1}b_{-1} + 3a_1a_{-1}^2b_{-1} + 4kwa_1b_{-1}^2a_{-1} + a_{-1}^3,$$

$$C_{-3} = -kwa_{-1}^2b_0b_{-1} + a_{-1}^3b_0 + 3a_0a_{-1}^2b_{-1} + kwa_0b_{-1}^2a_{-1},$$

$$C_{-4} = a_{-1}^3b_{-1}.$$

$n = -3, -2, \dots, 2, 3$ olmak üzere $e^{n\eta}$ ifadesinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilecek olan cebirsel denklem sisteminin çözümünden

$$a_{-1} = 0, a_1 = 0, b_{-1} = \frac{a_0^2}{4k^2w^2}, b_0 = \frac{a_0}{kw} \quad (4.5.8)$$

değerleri elde edilir.

(4.5.6) denkleminde (4.5.8) ile verilen katsayılar ve (4.1.2) dalga dönüşümü yerine yazılmasıyla $\theta(x, t)$ analitik çözümü

$$\theta(x, t) = \frac{4e^{kx + \frac{t^\alpha w}{\alpha}} k^2 w^2 a_0}{\left(2e^{kx + \frac{t^\alpha w}{\alpha}} kw + a_0\right)^2} \quad (4.5.9)$$

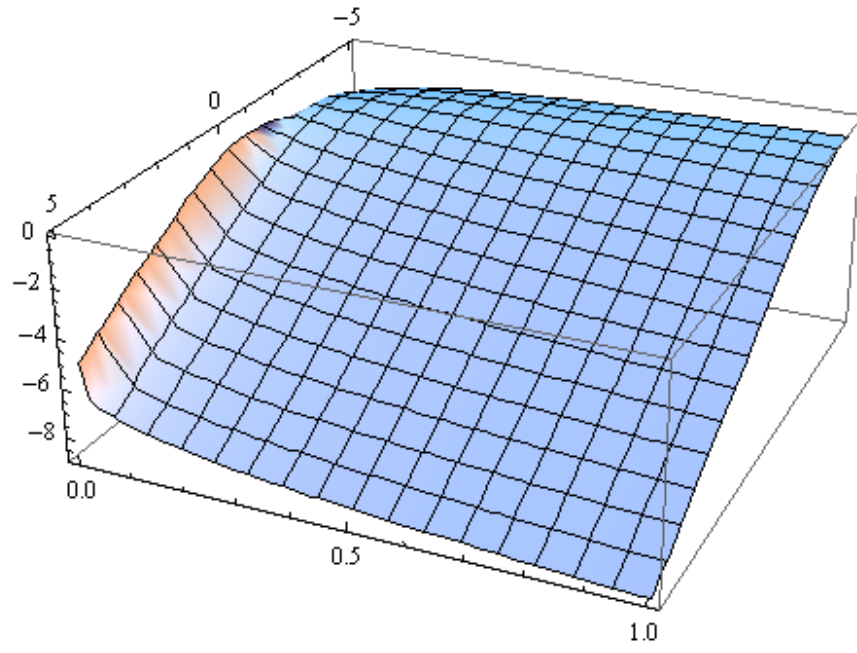
olarak elde edilir. (4.5.9) ile verilen $\theta(x, t)$ analitik çözümünün $\theta = e^u$ eşitliğinde yerine yazılmasıyla, $u(x, t)$ analitik çözümü

$$u(x, t) = \ln \left(\frac{4e^{kx + \frac{t^\alpha w}{\alpha}} k^2 w^2 a_0}{\left(2e^{kx + \frac{t^\alpha w}{\alpha}} kw + a_0\right)^2} \right)$$

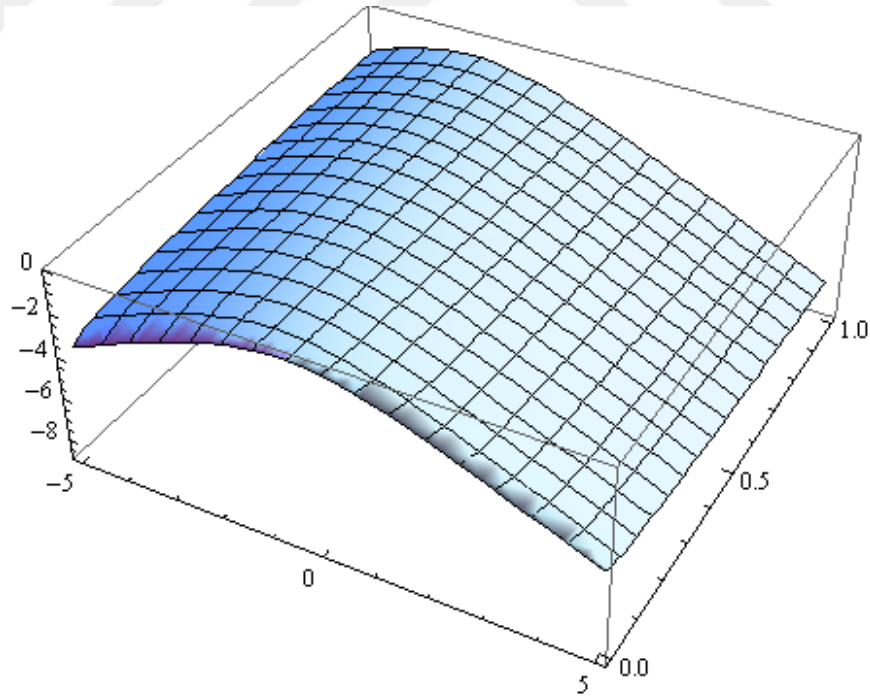
şeklinde elde edilir.

(4.5.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Liouville denkleminin $a_0 = 1, k = 1, w = 1$ değerlerinde $-5 \leq x \leq 5, 0 \leq t \leq 1$ aralıklarında farklı α değerleri için $u(x, t)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri (Şekil 4.36.) ile (Şekil 4.39.) arasında verildi.

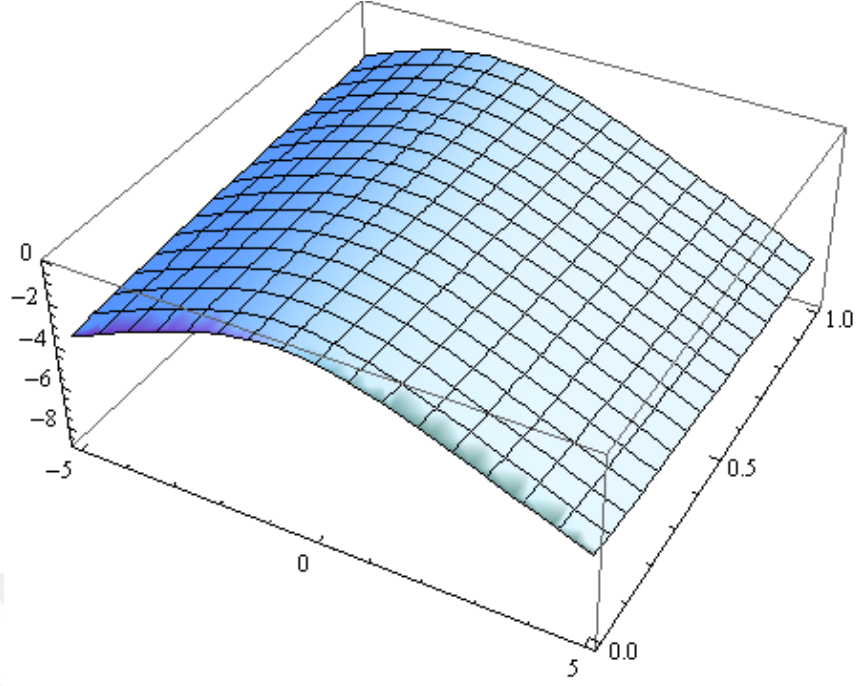
(Şekil 4.40.) da $a_0 = 1, k = 1, w = 1, \alpha = 0.9$ değerlerinde ve $-8 \leq x \leq 5$ aralığında farklı t değerlerinde (4.5.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden Liouville denkleminin $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ analitik çözümlerinin eğrileri verildi.



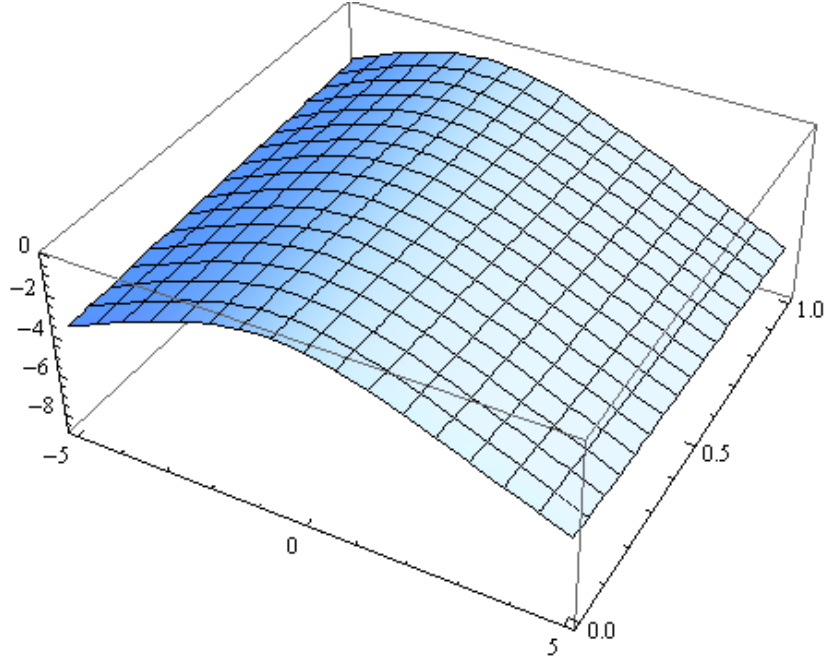
Şekil 4. 36. $\alpha = 0,25$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



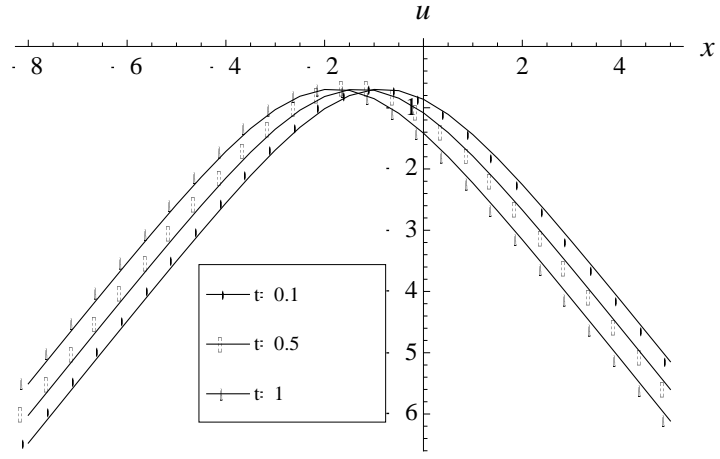
Şekil 4. 37. $\alpha = 0,5$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 38. $\alpha = 0,75$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 39. $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4. 40. Farklı t değerlerinde $\alpha = 0,9$ için $u(x, t)$ analitik çözüm eğrisi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, zaman değişkenine bağlı conformable kesirli kısmi türev içeren kesirli mertebeden değiştirilmiş Boussinesq, dağınık uzun dalga, Gilson – Pickering, Liouville denklemlerinin ve avcı – av modelinin analitik çözümleri üstel fonksiyon yöntemi yardımıyla başarılı bir şekilde elde edildi.

Elde edilen analitik çözümlerde yer alan katsayılar için alınan bazı değerlerde her bir problemin yüzeyle verildi. Ayrıca analitik çözümlerde zaman değişkeni sabit tutularak konum değişkenine göre analitik çözümlerin eğrileri verildi.

Sonuç olarak, doğadaki birçok olayın matematiksel modellenmesiyle meydana gelen ve conformable kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri üstel fonksiyon yöntemi ile etkili ve kolay bir şekilde çözülebilir.

KAYNAKLAR

- Abdelrahman, M.A.E, Zahran, E.H.M., Khater, M.M.A., 2015. The $\exp(-\Phi(\xi))$ -expansion method and its application for solving nonlinear evolution equations. **International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application**, 4: 37-47.
- Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 279: 57-66.
- Abu Hammad, I. and Khalil, R., 2014. Fractional Fourier series with applications. **American Journal of Computational and Applied Mathematics**, 4(6): 187-191.
- Akbar, M.A. ve Ali, N.H.M., 2011. Exp-Function method for Duffing equation and new solutions of (2+1) dimensional dispersive long wave equations. **Progress in Applied Mathematics**, 1(2): 30-42.
- Altın, A., 2011. **Uygulamalı Matematik**. Gazi Kitapevi, 294 s, Türkiye.
- Aminikkah, H., Refahi Sheikhan, A.H., Rezazadeh, H., 2016. Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with conformable fractional derivatives. **Scientia Iranica**, 23(3): 1048-1054.
- Aslan, I., 2011. Exact and explicit solutions to nonlinear evolution equations using the division theorem. **Applied Mathematics and Computation**, 217: 8134-8139.
- Atangana, A., 2013. On the solution of system of fractional nonlinear Predator-Prey population model via homotopy decomposition method. **International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics**, 1558: 2579-2589.
- Atangana, A., Baleanu, D., Alsaedi, A., 2015. New properties of conformable derivative. **Open Mathematics**, 13: 1-10.
- Bayram, M., Hatipoglu, V.F., Alkan, S., Das, S.E., 2018. A solution method for integro-differential equations of conformable fractional derivative. **Thermal Science**, 22: 7-14.
- Benkhetou, N., Hassani, S., Torres, D.F.M., 2016. A conformable fractional calculus on arbitrary time scales. **Journal of King Saud University - Science**, 28(2016): 93-98.
- Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J.J., Shammakh, W., 2015. Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations. **Journal of Function Spaces**, (2015): 6.
- Çenesiz, Y., Kurt, A., 2015. The new solution of time fractional wave equation with conformable fractional derivative definition. **Journal of New Theory**, 7: 79-85.
- Çenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A., Tasbozan, O., 2017. New exact solutions of Burgers' type equations with conformable derivative. **Waves in Random and Complex Media**, 27(1): 103-116.
- Chen, Y, Wang, Q., 2005. Extended Jacobi elliptic function rational expansion method and abundant families of Jacobi elliptic function solutions to (1+1)-dimensional dispersive long wave equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 24: 745-757.
- Chen, A, Huang, W., Tang, S., 2009. Bifurcations of travelling wave solutions for the Gilson-Pickering equation. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, 10: 2659-2665.
- Choi, J.H., Kim, H., Sakthivel, R., 2016. On certain exact solutions of diffusive predator-prey system of fractional order. **Chinese Journal of Physics**, 54: 135-146.

- Dai, C, Zhang, J., 2005. Jacobian elliptic function method for nonlinear differential-difference equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 27: 1042-1047.
- Darvishi, M.T., Najafi, M., Seadawy, A.R., 2018. Dispersive bright, dark and singular optical soliton solutions in conformable fractional optical fiber Schrödinger models and its applications. **Optical and Quantum Electronics**, 50: 181.
- Debnath, L. and Bhatta, D., 2007. Integral transforms and their Applications, **Chapman-Hall/CRC**, 143 s, USA.
- Ebadi, G., Kara, A.M., Petkovic, M.D., Biswas, A., 2011. Soliton solutions and conservation laws of the Gilson-Pickering equation. **Optik**, 127(2016): 10659-10669.
- Ekici, M., Mirzazadeh, M., Eslami, M., Zhou, Q., Moshokoa, S.P., Biswas, A., Belic, M., 2016. Optical soliton perturbation with fractional-temporal evolution by first integral method with conformable fractional derivatives. **Waves in Random and Complex Media**, 21(2): 378-385.
- Eslami, M., Rezazadeh, H., 2016. The first integral method for Wu-Zhang system with conformable time-fractional derivative. **Calcolo**, 53: 475-485.
- Fan, X., Yang, s., Zhao, D., 2009. Travelling wave solutions for the Gilson-Pickering equations by using the simplified G'/G -expansion method. **International Journal of Nonlinear Science**, 8(3): 368-373.
- Feng, Z., 2002. The first-integral method to study the Burgers-Korteweg-de Vries equation. **Journal of Physics**, 35: 343-349.
- Feng, Z., Wang, X., 2002. The first integral method to the two-dimensional Burgers-Korteweg-de Vries equation. **Physics Letters**, 308: 173-178.
- Hammad, M.A. and Khalil, R., 2014. Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equations. **International Journal of Differential Equations and Applications**, 13(3): 177-183.
- He, J. and Wu, X., 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 30: 700-708.
- He, J. and Abdou, M.A., 2006. New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method. **Chaos, Solitons and Fractals**, 34: 1421-1429.
- Hilfer P., 2000. Various Approaches to the Fractional Calculus. (R Hilfer, Editor). **Applications of Fractional Calculus In Physics**. World Scientific, 99-088745, 3 s, Germany.
- Hosseini, K., Mayeli, P., Ansari, R., 2017. Modified Kudryashov method for solving the conformable time-fractional Klein–Gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities. **Optik**, 130(2017): 737-742.
- Hosseini, K., Bekir, A., Ansari, R., 2017. New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method. **Optik**, 132(2017): 203-209.
- Hosseini, K., Ansari, R., 2017. New exact solutions of nonlinear conformable time-fractional Boussinesq equations using the modified Kudryashov method. **Waves in Random and Complex Media**, 27(4): 628-636.
- Ilie, M., Biazar, J., Ayati, Z., 2017. General solution of Bernoulli and Riccati fractional differential equations based on conformable fractional derivative. **International Journal of applied Mathematical Research**, 6(2): 49-51.
- Iyiola, O.S., Nwaeze, E.R., 2016. Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach. **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, 2: 1-7.

- Iyiola, O.S., Tasbozan, O., Kurt, A., Çenesiz, Y., 2017. On the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1-D diffusion. **Chaos, Solitons and Fractals**, 94(2017): 1-7.
- Kaplan, M., Bekir, A., Özer, M.N., 2017. A simple technique for constructing exact solutions to nonlinear differential equations with conformable fractional derivative. **Optical and Quantum Electronics**, 49: 266.
- Kaplan, M., Akbulut, A., 2018. Application of two different algorithms to the approximate long water wave equation with conformable fractional derivative. **Arab Journal of Basic and Applied Sciences**, 2576-5299.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 264: 65-70.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. **Elsevier Science**, 540 s, New York.
- Korkmaz, A., 2018. On the wave solutions of conformable fractional evolution equations. **Ankara University Faculty Of Sciences Communications Series**, 67(1): 68-79.
- Kraenkel, R.A., Manikandan, K., Senthilvelan, M., 2013. On certain new exact solutions of a diffusive predator-prey system. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, 18: 1269-1274.
- Kurt, A., Tasbozan, O., 2015. Analytic solutions of Liouville equation using extended trial equation method and the functional variable method. **Applied Mathematics and Information Sciences Letters**, 3(3): 93-96.
- Kurt, A., Tasbozan, O., Cenesiz, Y., 2015. On the solution of Burger's equation with the new fractional derivative. **Open Access**, 13: 355-360.
- Kurt, A., Tasbozan, O., Cenesiz, Y., 2016. Homotopy analysis method for conformable Burgers-Koteweg-de Vries equation. **Bulletin of Mathematical Sciences and Applications**, 17: 17-23.
- Kurt, A., Tasbozan, O., Baleanu, D., 2017. New solutions for conformable fractional Nizhnik–Novikov–Veselov system via G'/G expansion method and homotopy analysis methods. **Optical and Quantum Electronics**, 49: 333.
- Kutluay, S., Esen, A., Tasbozan, O., 2010. The G'/G expansion method for some nonlinear evolution equations. **Applied Mathematics and Computation**, 217: 384-391.
- Lü, D., 2005. Jacobi elliptic function solutions for two variant Boussinesq equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 24(2005): 1373-1385.
- Malfliet, W., 2003. The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 164-165: 529-541.
- Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus, **Academic Press**, 225 s, New York.
- Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus, **Academic Press**, 225 s, New York.
- Parkes, E.J., Duffy, B.R., Abbott, P.C., 2002. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. **Physics Letters**, 295: 280-286.
- Podlubny, L., 1999. Fractional Differential Equations. **Academic Press**, 340 s, London.

- Rezazadeh, H., Khodadad, F.S., Manafian, J., 2017. New structure for exact solutions of nonlinear time fractional Sharma- Tasso-Olver equation via conformable fractional derivative. **Applications and Applied Mathematics: An International Journal**, 12(1): 405-414.
- Rezazadeh, H., Korkmaz, A., Eslami, M., Vahidi, J., Asghari, R., 2018. Traveling wave solution of conformable fractional generalized reaction Duffing model by generaliezed projective Riccati equation method. **Optical and Quantum Electronics**, 50: 150.
- Tasbozan, O., Yagmurlu, N.M., Esen, A., 2013. The functional variable method for some nonlinear (2+1)-dimensional equations. **Selçuk Journal of applied Mathematics**, 14(1): 37-45.
- Tasbozan, O., Çenesiz, Y., Kurt, A., 2014. New analytical solutions for conformable fractional PDEs arising in mathematical physics by exp-function method. **Open Physics**, 15(1): 647-651.
- Tasbozan, O., Şenol, M., Kurt, A., Özkan, O., 2014. New solutions of fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system in shallow water waves. **Ocean Engineering**, 161(2018): 62-68.
- Tasbozan, O., Çenesiz, Y., Kurt, A., 2016. New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV-mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method. **The European Physical Journal Plus**, 131: 244.
- Taşbozan, O., 2011. Lineer olmayan kesirli mertebeden türevli kısmi diferansiyel denklemlerin homotopi analiz yöntemi ile çözümü. İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, **Matematik Anabilim Dalı**, Malatya
- Yomba, E., 2005. The extended Fan's sub-equation method and its application to KdV–MKdV, BKK and variant Boussinesq equations. **Elsevier Science**, 336: 463-476.
- Wang, M., 1995. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. **Physics Letters**, 199: 169-172.
- Wang, M., Zhou, Y., Li, Z., 1996. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. **Physics Letters**, 216: 67-75.
- Wang, M., Li, X., Zhang, J., 2007. The G'/G -expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations mathematical physics. **Physics Letters**, 272: 417-423.
- Wazwaz, A., 2004. The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 154: 713-723.
- Wazwaz, A., 2005. The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Mikhailov and the Tzitzeica-Dodd-Bullough equations. **Chaos, Solitons and Fractals**, 25: 55-63.
- Wazwaz, A., 2008. The tanh method for traveling wave solutions to the Zhiber-shabat equation and other related equations. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 13: 584-592.
- Zayed, E.M.E. and Amer, Y.A., 2015. The modified simple equation method for solving nonlinear diffusive predator-prey system and Bogoyavlenskii equations. **International Journal of Physics Sciences**, 10(4): 133-141.
- Zhang, S., Xia, T., 2006. A further improved extended Fan sub-equation method and its application to the (3+1)-dimensional Kadomstev-Petviashvili equation. **Physics Letters**, 356: 119-123.

- Zhang, S., Tong, J., Wang, W., 2007. A generalied G'/G -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients. **Physics Letters**, 372: 2254-2257.
- Zheng, X., Chen, Y., Zhang, H., 2003. Generalied extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation. **Physics Letters**, 311: 145-157.
- Zerarka, A., Ouamane, S., Attaf, A., 2010. On the functional variable method for finding exact solutions to class of wave equations. **Applied Mathematics and Computation**, 217: 2897-2904.



ÖZGEÇMİŞ

Yazar, 1991 yılında Adana’ da doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Hatay’ da tamamladı. Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü’nden 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı. 2016 yılında Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi Bilgi İşlem Daire Başkanlığı’nda Bilgisayar Mühendisi olarak işe başladı ve halen görev yapmaktadır.

