ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ULTRAHİPERBOLİK SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI DİREKT VE TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ÖZLEM KAYTMAZ

AĞUSTOS 2018

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ULTRAHİPERBOLİK SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI DİREKT VE TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Özlem KAYTMAZ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Ağustos 2018

KABUL:

Özlem KAYTMAZ tarafından hazırlanan "Ultrahiperbolik Schrödinger Denklemleri için Bazı Direkt ve Ters Problemlerin Çözümlerinin Kararlılığının Araştırılması" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 03/08/2018

Danışman: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Erdal COŞKUN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU ....
Mersin Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Hamza MENKEN ....
Mersin Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2018

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Özlem KAYTMAZ

ÖZET

Doktora Tezi

ULTRAHİPERBOLİK SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN BAZI DİREKT VE TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Özlem KAYTMAZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Ağustos 2018, 89 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm klasik ve ultrahiperbolik Schrödinger denklemleri için direkt ve ters problemler hakkında literatürde mevcut olan temel sonuçlara ayrılmıştır. İkinci bölümde, sözü edilen problemlerin çözülebilirliğinin araştırılmasında kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, kısmi türevli denklemler için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili literatürde yer alan başlıca sonuçlar ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, ters ve kötü konulmuş problemler teorisinin bilim ve teknolojideki çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir. Beşinci bölümde, bir ultrahiperbolik Schrödinger denklemi için yerel bir Carleman değerlendirmesi elde edilmiş ve bu değerlendirme kullanılarak Cauchy probleminin çözümünün Hölder kararlılığı gösterilmiştir. Son bölümde ise bir ultrahiperbolik Schrödinger denklemi için bazı ters problemler ele alınmış, elde edilen genel Carleman değerlendirmeleri yardımıyla bu problemlerin çözümlerinin koşullu Hölder kararlılığı ispatlanmıştır.

ÖZET (devam ediyor)

Anahtar Kelimeler: Ultrahiperbolik Schrödinger denklemi, ters problem, kararlılık, Carleman değerlendirmesi.

Bilim Kodu: 403.06.00.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF SOLUTIONS OF SOME DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR ULTRAHYPERBOLIC SCHRÖDINGER EQUATIONS

Özlem KAYTMAZ

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Fikret GÖLGELEYEN
August 2018, 89 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the main results on the direct and inverse problems for classical and ultrahyberbolic Schrödinger equations in the literature. In the second chapter, some basic definitions and theorems that are used to investigate the solvability of these problems are presented. In the third chapter, some of the major results in the literature on the existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for partial differential equations are discussed. In the fourth chapter, various examples of the applications of inverse and ill-posed problems in science and technology are given. In the fifth chapter, a local Carleman estimate for the ultrahyperbolic Schrödinger equation is obtained and the Hölder stability for the Cauchy Problem is proved. In the last chapter, we obtain a global Carleman estimate and prove conditional Hölder stability for some inverse problems for the ultrahyperbolic Schrödinger equation.

ABSTRACT (continued)

Keywords: Ultrahyperbolic Schrödinger equation, inverse problem, stability, Carleman estimate.

Science Code: 403.06.00.

TEŞEKKÜR

Tezimin tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, bilgisiyle beni yönlendiren; bu tezi tamamlamamda çok büyük emeği olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Fikir ve tavsiyeleri ile bu çalışmaya katkıda bulunan değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Masahiro YAMAMOTO'ya, sayın Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na, sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ'a ve sayın Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bu sürecin her anında yanımda olan, sevgisiyle her daim güç veren değerli anneme, babama, ablama, eşime, oğluma ve arkadaşım Arş. Gör. Özge ARIBAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bir bölge
$\overline{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
ν	: ∂D sınırına göre birim dış normal vektörü
$D'(\Omega)$	: Ω üzerinde tanımlı genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı
χ	: Kesme (cut off) fonksiyonu
$supp\varphi(x)$	: φ fonksiyonunun supportu; $supp\varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$
$(.,.)_{L^2(\Omega)}$	: $L^2(\Omega)$'da iç çarpım
$\partial_t u$	: u fonksiyonunun t değişkenine göre kısmi türevi; $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$
$\partial_{x_i} u$	: u fonksiyonunun x_i değişkenine göre kısmi türevi; $\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$
$\partial_{y_j} u$	: u fonksiyonunun y_j değişkenine göre kısmi türevi; $\partial_{y_j} u = \frac{\partial u}{\partial y_j}$
$\nabla_x u$	: u fonksiyonunun x vektörüne göre gradienti; $\nabla_x u = \left(\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots, \partial_{x_n} u\right)$
$\nabla_y u$	: u fonksiyonunun y vektörüne göre gradienti; $\nabla_y u = \left(\partial_{y_1} u, \partial_{y_2} u, \dots, \partial_{y_m} u\right)$
$\Delta_x u$	: u fonksiyonunun x vektörüne göre laplasyeni; $\Delta_x u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u$
$\Delta_y u$	: u fonksiyonunun y vektörüne göre laplasyeni; $\Delta_y u = \sum_{j=1}^{m} \partial_{y_j}^2 u$
$i = \sqrt{-1}$	: Sanal birim

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada, ultrahiperbolik Schrödinger denklemleri için bazı direkt ve ters problemlerin çözümlerinin kararlılığı Carleman değerlendirmeleri yardımıyla araştırılmıştır.
Schrödinger denklemi, ilk olarak Ervin Schrödinger'in 1926 yılında yayınladığı "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules" başlıklı makalesinde yer almıştır. Bu denklem kuantum mekaniğinin temel denklemi olup atom ve moleküler fizikte önemli uygulamaları mevcuttur (Duarte 2014, s. 179).
Literatürde klasik Schrödinger denklemini konu alan pek çok çalışma mevcut olmasına rağmen, ultrahiperbolik Schrödinger denklemi ile ilgili sınırlı sayıda çalışma yapılmıştır. Bu kapsamda başlangıç değer problemi Kenig et al. (1998, 2006) tarafından incelenerek uygun uzaylarda iyi konulmuş olduğu gösterilmiştir. Bu tür denklemlerin başta su dalgası problemleri olmak üzere farklı alanlarda önemli uygulamaları vardır (Davey and Stewartson 1974, Djordjevic and Redekopp 1977, Escauriaza et al. 2011, Ichinose 1990, Zakharov and Schulman 1980, Zakharov and Kuznetsov 1986). Ayrıca kuantum kinetik teorisinde de bu denklemler karşımıza çıkmaktadır:
Örneğin, bir $\left\{(x,p,t):\ x=\left(x_1,x'\right)\in\mathbb{R}^n,\ x_1>0,\ p\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}\right\}$ bölgesinde

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}p_j\frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{i}{(2\pi)^n h}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\left[\Phi\left(x-\frac{h}{2}y,t\right)-\Phi\left(x+\frac{h}{2}y,t\right)\right]\\ &\quad\times\exp\left[iy\left(p-\overline{p}\right)\right]u\left(x,\overline{p},t\right)d\overline{p}dy+f \qquad (1.1)\end{aligned}$$

kuantum kinetik denklemini ele alalım. Burada $u(x,p,t)$ kuantum dağılım fonksiyonu, h Planck sabiti, $\Phi(x,t)$ potansiyel ve $f(x,p,t)$ kaynağı karakterize eden fonksiyonu gösterir. (1.1) denklemine p değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulanır ve

$$x-\frac{1}{2}hy=\xi,\ x+\frac{1}{2}hy=\eta$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{i}{2}h\left(\Delta_\eta-\Delta_\xi\right)w+i\left[\Phi(\eta)-\Phi(\xi)\right]w=\widehat{f}$$

ultrahiperbolik Schrödinger denklemi elde edilir. Burada $w(\xi,\eta,t)=\widehat{u}(x,p,t)$, $\widehat{u}$ ve $\widehat{f}$ fonksiyonları da u ve f 'nin Fourier dönüşümlerini göstermektedir (Amirov 2001, s. 152).
Carleman değerlendirmeleri, ilk kez 1939 yılında Torsten Carleman tarafından iki boyutlu eliptik denklemlerin çözümlerinin bazı özelliklerinin araştırılması amacıyla kullanılmıştır. Geleneksel olarak bu eşitsizlikler özellikle kötü konulmuş problemlerin çözümlerinin tekliğinin ispatında önemli bir araç olmuştur. Bu problemlere örnek olarak:

i) Dirichlet ve Neumann sınır verisi sadece sınırın bir parçasında verildiğinde eliptik denklemler için Cauchy problemi,

ii) Dirichlet ve Neumann sınır verileri yan sınırın bir parçasında verilip başlangıç şartlarının $t=0$ da bilinmediği durumda parabolik ve hiperbolik denklemler için standart olmayan Cauchy problemi

verilebilir.
1973 yılında S. P. Shishatskii, bu fikri Hadamard anlamında kötü konulmuş olan problemler için şartlı Hölder kararlılığının araştırılmasında kullanmıştır. Ters problemler teorisine uygulanması ise Bukhgeim and Klibanov (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir. A. L. Bukhgeim ve M. V. Klibanov, Carleman değerlendirmelerini kullanarak bazı katsayı ters problemleri için genel (global) teklik ve kararlılık teoremlerini ispatlamışlardır. Bu çalışma öncesinde katsayı ters problemleri ile ilgili sadece yerel (lokal) teklik teoremleri bilinmekteydi.
Daha sonra bu yöntem Puel and Yamamoto (1996), Isakov and Yamamoto (2000), Imanuvilov and Yamamoto (2001a, b), Bellassoued and Yamamoto (2006b), Klibanov and Yamamoto (2006) tarafından hiperbolik denklemler için çeşitli ters problemlerin çözümlerinin kararlılığının araştırılmasında kullanılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.
Khaïdarov (1987), Isakov (2006), Doubora and Osses (2006), Baudoin et al. (2011), Baudouin et al. (2007), Yuan and Yamamoto (2007), Liu and Triggiani (2012) bu alanda yapılan diğer önemli çalışmalardır.
Parabolik denklemler için katsayı ters problemleriyle ilgili olarak Imanuvilov and Yamamoto (1998), Yamamoto (2009), Lü (2012), Egger et al. (2005), Bellassoued and Yamamoto (2006a), Benabdallah et al. (2007), Isakov (2006) önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Amirov (2001), Lavrent'ev et al. (1986), Romanov (2006) ultrahiperbolik denklemler için ters problemlerin çözümlerinin tek devamlılık özelliğini ve kararlılığını Carleman değerlendirmeleri yardımıyla ele almışlardır. Gölgeleyen and Yamamoto (2014), ultrahiperbolik denklemler için bazı ters problemlerin çözümlerinin koşullu Hölder kararlılığını ispatlamışlardır.

Klasik Schrödinger denklemi için bu doğrultudaki ilk çalışma Baudouin and Puel (2002) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, $\partial\Omega$ sınırı C^2'den ve Γ, $\partial\Omega$'nın açık bir alt kümesi olmak üzere

$$\begin{aligned} i\partial_t y(x,t) + \Delta y(x,t) + q(x)\, y(x,t) &= 0,\ x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,t) &= h(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) &= y_0(x),\ x \in \Omega \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\partial_\nu y|_{\Gamma \times (0,T)} = g(x,t)$$

ek bilgisi yardımıyla $q(x)$ katsayısının belirlenmesi ters probleminin çözümünün tekliği ve Lipschitz kararlılığı, Imanuvilov and Yamamoto (2001b) de verilen yöntem kullanılarak ispatlanmıştır. Burada $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ belirli geometrik koşulları sağlayan sınırın bir parçası olup $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ sınırına göre birim dış normal vektörü göstermektedir. Mercado et al. (2008) ise daha esnek bir pseudo-konvekslik şartı altında yeni bir Carleman eşitsizliği elde etmiş ve bu eşitsizlik yardımıyla daha az sınır koşulu ve ölçüm verisi kullanarak kararlılığı ispatlamıştır. Baudouin and Puel (2002) ve Mercado et al. (2008) de temel kabul, ölçümün yapıldığı sınır parçasının gözlemlenebilirlik için geometrik optik şart ile ilgili bir geometrik koşulu sağlamasıdır (Bardos et al. 1992). Bu geometrik koşul, Bellassoued and Choulli (2009) tarafından uzaysal bölgenin sınırının bir komşuluğunda potansiyelin bilindiği kabul edilerek daha da esnetilmiştir. Yuan and Yamamoto (2010), negatif mertebeden Sobolev uzaylarında bir klasik Schrödinger denklemi için regüler bir ağırlık fonksiyonu kullanarak bir Carleman değerlendirmesi elde etmişler ve L^p potansiyellerinin belirlenmesi ters probleminin çözümünün tekliğini ispatlamışlardır. Cristofol and Soccorsi (2011), sonlu sayıda Neumann verisinden Schrödinger denkleminin zamana bağlı katsayısının belirlenmesi ters problemini çalışmışlardır. Kian et al. (2015), Baudouin and Puel (2002) de elde edilen sonuçları sınırsız bölgelere genişletmiştir. Triggiani and Zhang (2015), bir Riemann manifoldunun sınırlı bağlantılı bir bölgesinde tanımlı manyetik potansiyel içeren Schrödinger denklemini göz önüne almışlardır. Amirov (2008) de Schrödinger tipi bir denklem için bazı ters problemler, sınırsız bir bölgede noktasal Carleman değerlendirmesi kullanılarak ele alınmıştır ve bu problemlerin çözümlerinin tekliği ile kararlılığına ilişkin teoremler verilmiştir.

Bu tez kapsamında ilk olarak, $\Omega = D \times G \times (-T, T)$ bölgesinde

$$Au \equiv ia_0(x,y)\partial_t u\,(x,y,t) + \Delta_y u\,(x,y,t) - \Delta_x u\,(x,y,t)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} a_i\,(x,y,t)\,\partial_{x_i} u\,(x,y,t) + \sum_{j=1}^{m} b_j\,(x,y,t)\,\partial_{y_j} u\,(x,y,t)$$
$$+c\,(x,y,t)\,u\,(x,y,t) = f(x,y,t),\ \ (x,y,t) \in \Omega \tag{1.2}$$

formunda bir ultrahiperbolik Schrödinger denkleminin

$$u = g,\ \ \partial_\nu u = h,\ \ (x,y,t) \in \Gamma \times G \times (-T,T) \tag{1.3}$$

Cauchy koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemi ele alınmıştır. Burada $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi ∂D düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $L > 0$ için $G = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \ |y| < L\}$ ve $T > 0$ dır. Ayrıca $\Gamma \subset \partial D$ dir.

(1.2) denklemi için yerel bir Carleman değerlendirmesi Isakov (2006) da verilen yöntem kullanılarak elde edilmiş ve bu değerlendirme yardımıyla (1.2)-(1.3) Cauchy probleminin çözümünün Hölder kararlılığı gösterilmiştir.

İkinci olarak, $Q = D \times G \times (-T, T)$ bölgesinde

$$i\partial_t v(x,y,t) + \Delta_y v(x,y,t) - \Delta_x v(x,y,t) - p(x,y)v(x,y,t) = 0,\ \ (x,y,t) \in Q \tag{1.4}$$

ultrahiperbolik Schrödinger denkleminin

$$v(x,y,0) = a(x,y),\ \ (x,y) \in D \times G \tag{1.5}$$

başlangıç ve

$$v(x,y,t) = 0,\ \ (x,y,t) \in \partial D \times G \times (-T,T) \tag{1.6}$$

sınır koşulları altında $p(x,y)$, $(x,y) \in D \times G$ katsayısının

$$\partial_\nu v(p)|_{\partial D_+ \times G \times (-T,T)} \tag{1.7}$$

ek bilgisi yardımıyla belirlenmesi katsayı ters problemi ele alınmıştır. Burada $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi ∂D düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve $L > 0$ için $G = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \ |y| < 2L\}$

ve $T > 0$ dır. (1.4) denklemi için genel bir Carleman değerlendirmesi elde edilmiş ve bu değerlendirme yardımıyla (1.4)-(1.7) probleminin çözümünün koşullu kararlılığı ispatlanmıştır.

Bu tezin beşinci ve altıncı bölümlerinde ele alınan problemler daha önce incelenmemiş olup elde edilen sonuçlar bu alanda bir ilk niteliğindedir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 ($C^m(\Omega)$ Uzayı) *Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge, m negatif olmayan bir tamsayı, $|\alpha| \leq m$ olsun. Her m için, $D^\alpha \varphi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olan tüm φ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzay $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$, sırasıyla $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ sınıfından olan ve Ω bölgesinde kompakt supporta sahip tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaylardır (Adams and Fournier 2003, s. 10).*

Tanım 2.2 ($L^p(\Omega)$ Uzayı) *Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge ve p bir pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir (Adams and Fournier 2003, s. 23).

Tanım 2.3 ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) *Ω bölgesi üzerinde ölçülebilir bir u fonksioyonu bu bölgede esas olarak sınırlıdır (essential bounded) denir, eğer Ω bölgesi üzerinde hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa. Bu K sabitlerinin en büyük alt sınırı Ω üzerinde $|u|$'nun esas supremumu olarak adlandırılır ve ess $\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ şeklinde gösterilir. Bu uzayda norm*

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

şeklinde verilir (Adams and Fournier 2003, s. 27).

Tanım 2.4 (Genelleşmiş Fonksiyon) *$C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $D(\Omega)$ ile gösterilir:*

i) *Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için supp $\varphi_k \in K$ dır.*

ii) *Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ve $k \to \infty$ için $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün yakınsak ise $k \to \infty$ için $\varphi_k \overset{D(\Omega)}{\to} \varphi$ yakınsar denir.*

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1971, s. 66).

Tanım 2.5 (Genelleşmiş Türev) *$f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^{\alpha} f(\Omega)$ (genelleşmiş) türevi,*

$(D^{\alpha} f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \left(f, D^{\alpha}\varphi\right), \ \varphi \in D(\Omega)$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1971, s. 79).

Tanım 2.6 ($H^m(\Omega)$ Uzayı) *$H^m(\Omega)$, kendisi ve m. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ uzayına ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu cümleye ait bazı özellikler aşağıda verilmiştir:*

i) *$H^m(\Omega)$ lineer uzaydır ve $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ olarak tanımlanır.*

ii) *$H^m(\Omega)$ üzerinde tanımlanan*

$$(f_1, f_2)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} D^{\alpha} f_1 D^{\alpha} \overline{f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir.

iii) *$\partial\Omega \in C^m(\Omega)$ ise $C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı, $H^m(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur.*

iv) *$\partial\Omega \in C^m(\Omega)$ ise $H^m(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır (Mikhailov 1978, s. 121).*

Tanım 2.7 ($H_0^m(\Omega)$ Uzayı) *$H_0^m(\Omega)$ uzayı, $\|.\|_{H^m}$ Sobolev normuna göre $C_0^m(\Omega)$ uzayının tamlanışıdır (Reddy 1998, s. 243).*

Tanım 2.8 (Sobolev Uzayları) *m pozitif bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $\|\cdot\|_{m,p}$ fonksiyoneli aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^{\alpha} u\|_p^p \right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty, \tag{2.1}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^{\alpha} u\|_{\infty}. \tag{2.2}$$

Yukarıdaki $\|\cdot\|_p$ sembolü $L^p(\Omega)$ uzayındaki normu göstermektedir. (2.1) veya (2.2) normları ile verilen aşağıdaki uzaylar Ω bölgesi üzerinde Sobolev uzayı olarak adlandırılır:

i) $H^{m,p}(\Omega) \equiv \left\{ u \in C^m(\Omega) ; \ \|u\|_{m,p} < \infty \right\}$ *kümesinin* $\|\cdot\|_{m,p}$ *normuna göre tamlanışıdır.*

ii) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) ; \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ *dir.*

iii) $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv W^{m,p}(\Omega)$ *uzayında* $C_0^\infty(\Omega)$ *uzayının kapanışıdır.*

Açıktır ki $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ *ve* $W^{2,p}(\Omega) = H^p(\Omega)$ *dır (Adams and Fournier 2003, s. 59).*

Tanım 2.9 ($L^P(0,T;\ X)$ Uzayı) *X bir Banach uzayı olmak üzere, $u : [0,T] \to X$ şeklinde tanımlı ve ölçülebilir tüm fonksiyonların uzayı $L^p(0,T;\ X)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm*

i) $\|u\|_{L^p(0,T;\ X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \ 1 \leq p < \infty,$

ii) $\|u\|_{L^\infty(0,T;\ X)} := \underset{0 \leq t \leq T}{ess\sup} \|u(t)\|_X < \infty$

şeklinde verilir (Evans 1997, s. 285).

Tanım 2.10 ($C([0,T];\ X)$ Uzayı) *X bir Banach uzayı olmak üzere, $u : [0,T] \to X$ şeklinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C([0,T];\ X)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm*

$$\|u\|_{C([0,T];\ X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty$$

biçiminde tanımlanır (Evans 1997, s. 285).

Tanım 2.11 ($W^{1,p}(0,T;\ X)$ Uzayı) *X bir Banach uzayı olmak üzere, kendisi ve birinci mertebeden genelleşmiş türevi $L^p(0,T;\ X)$ uzayına ait olan tüm u fonksiyonlarının uzayı $W^{1,p}(0,T;\ X)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;\ X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \left\|u'(t)\right\|_X^p dt \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty, \\ \underset{0 \leq t \leq T}{ess\sup} \left(\|u(t)\|_X + \left\|u'(t)\right\|_X \right), \ (p = \infty) \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Açıktır ki $H^1(0,T;\ X) = W^{1,2}(0,T;\ X)$ dir (Evans 1997, s. 286).

Tanım 2.12 ($H^m(\Omega)$ Uzayı İçin İz Teoremi) *Kabul edelim ki Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık ve sınırlı bir bölgesi olsun. Ω bölgesinin Γ sınırı $n-1$ boyutlu düzgün bir manifold olsun. Ayrıca Ω bölgesi yerel olarak Γ sınırının bir tarafında yer alsın. Bu durumda $D\left(\overline{\Omega}\right) \to (D(\Gamma))^m$ uzayları arasındaki*

$$u \to \left\{ \left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right| j = 0, ..., m-1 \right\}$$

dönüşümü

$$H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

uzayları arasında

$$u \to \left\{ \left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right| j = 0, ..., m-1 \right\}$$

sürekli lineer bir dönüşüme genişletilebilir. Bu dönüşüm örtendir ve

$$\frac{\partial^j}{\partial \nu^j} \Re \overrightarrow{g} \to \Re \overrightarrow{g},\ 0 \le j \le m-1$$

olacak şekilde

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^m(\Omega)$$

uzayları arasında

$$\overrightarrow{g} = \{g_j\} \to \Re \overrightarrow{g}$$

sürekli lineer bir ters dönüşüm vardır. Burada E bir Hilbert uzayı olmak üzere,

$$\Re(a, b;\ E) = \begin{cases} C^0([a,b];\ E) = \{[a,b] \to E \text{ sürekli fonksiyonlar, } a \text{ ve } b \text{ sonlu ise}\} \\ t \ge a \to E \text{ sürekli sınıırlı fonksiyonlar, } a \text{ sonlu ve } b = +\infty \text{ ise} \\ \mathbb{R} \to E \text{ sürekli sınıırlı fonksiyonlar, } a = -\infty,\ b = +\infty \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Lions and Magenes 1972, s. 39).

Ek olarak $s \ge 0$ reel bir sayı olmak üzere, $H^s(\Omega)$ Uzayı için iz teoremi aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.13 ($H^s(\Omega)$ Uzayı için İz Teoremi) *Kabul edelim ki Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık ve sınırlı bir bölgesi olsun. Ω bölgesinin Γ sınırı $n-1$ boyutlu düzgün bir manifold olsun.*

Ayrıca Ω *bölgesi yerel olarak* Γ *sınırının bir tarafında yer alsın. Bu durumda* $D\left(\overline{\Omega}\right) \to \left(D\left(\Gamma\right)\right)^m$ *uzayları arasındaki*

$$u \to \left\{ \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right| \; j = 0, ..., \mu \right\}$$

dönüşümü $H^s\left(\Omega\right) \to \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$ *uzayları arasında*

$$u \to \left\{ \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right| \; j = 0, ..., \mu \right\}$$

sürekli lineer bir dönüşüme genişletilebilir. Burada μ, $\mu < s - \frac{1}{2}$ *şartını sağlayan en büyük tamsayıdır (Lions and Magenes 1972, s. 41).*

Tanım 2.14 ($L^p\left(\Omega, w\right)$ **Ağırlıklı Lebesgue Uzayı)** $1 \leq p < \infty$ *ve* $w = w(x)$ *bir ağırlık fonksiyonu, yani ölçülebilir ve* Ω *bölgesinde hemen hemen her yerde pozitif bir fonksiyon olmak üzere* $L^p\left(\Omega, w\right)$ *uzayı*

$$L^p\left(\Omega, w\right) = \left\{ u = u(x); \; uw^{\frac{1}{p}} \in L^p\left(\Omega\right) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay

$$\|u\|_{p,w} = \left(\int_{\Omega} \left|u\left(x\right)\right|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla birlikte bir Banach uzayıdır (Drabek et al. 1997, s. 18).

Tanım 2.15 ($W^{k,\,p}\left(\Omega, w\right)$ **Ağırlıklı Sobolev Uzayı)** $k \in \mathbb{N}, p > 1$ *ve* $w = \left\{w_\alpha; \;\; |\alpha| \leq k\right\}$, w_α *ağırlık fonksiyonlarının ailesi olsun.* $D^\alpha u(x)$ *genelleşmiş türevler olmak üzere*

$$\int_{\Omega} \left|D^\alpha u(x)\right|^p w_\alpha dx < \infty, \;\; |\alpha| \leq k$$

şartını sağlayan tüm $u = u(x)$ *fonksiyonlarının kümesi* $W^{k,\,p}\left(\Omega, w\right)$ *uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda norm*

$$\|u\|_{k,p,w} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left|D^\alpha u(x)\right|^p w_\alpha dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde verilir (Drabek et al. 1997, s. 13).

Tanım 2.16 (Diferensiyel Operatör) *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme olsun. Katsayıları $C^\infty(\Omega)$ uzayından olan m. mertebeden bir diferensiyel operatör*

$$P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

şeklinde tanımlanır. P operatörünün temel kısmı (ya da temel sembolü)

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

ile verilir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ ve $\xi^\alpha = \xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\ldots\xi^{\alpha_n}$ dir (Hörmander 1976, s. 29).

Tanım 2.17 (Karakteristik Yüzey) *$\varphi \in C^1(\Omega)$ için $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ olsun. Eğer*

$$p(x_0, \nabla\varphi(x_0)) = 0$$

ise, o zaman $S = \{x \in \Omega;\ \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ yüzeyi m. mertebeden P operatörüne göre $x_0 \in \Omega$ noktasında karakteristik yüzey olarak adlandırılır. Eğer her noktasında karakteristik ise, S yüzeyine karakteristik yüzey denir (Hörmander 1976, s. 30).

BÖLÜM 3

KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY PROBLEMİ: VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Bilindiği üzere analitik katsayılı kısmi türevli denklem sistemleri için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, başlangıç verisinin analitik olması şartı altında ilk olarak 1842 yılında Augustin Cauchy ve daha genel olarak 1875 yılında Sophie Kowalevsky tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1 (Cauchy-Kovalevsky Teoremi) *$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_N$ bilinmeyen fonksiyonlar ve $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere aşağıdaki denklem sistemini göz önüne alalım:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} &= F_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right), \quad (3.1) \\ k_0 + k_1 + \ldots + k_n &= k \leq n_j, \; k_0 < n_j, \; (i, j = 1, 2, \ldots, N), \\ \left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} &= \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; (k = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1). \quad (3.2) \end{aligned}$$

Eğer tüm F_i fonksiyonları $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots, \varphi^0_{j,k_0,k_1,\ldots,k_n}, \ldots\right)$ noktasının bir komşuluğunda analitik ve tüm $\varphi_j^{(k)}$ fonksiyonları da $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ noktasının bir komşuluğunda analitik ise, bu durumda (3.1)-(3.2) Cauchy problemi $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ noktasının bir komşuluğunda analitik bir çözüme sahiptir ve bu çözüm analitik fonksiyonlar sınıfında tektir (Petrovskii 1967, s. 16).

(3.1)-(3.2) Cauchy problemine örnek olarak, verilen başlangıç koşullarından sonsuz homojen bir zarın titreşiminin belirlenmesi problemi, yani

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (3.3)$$

denkleminin

$$u(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(0)}(x_1, x_2), \; u_t(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(1)}(x_1, x_2) \quad (3.4)$$

koşullarını sağlayan çözümünü bulma problemi verilebilir. Diğer taraftan Cauchy-Kovalevsky teoremi genel olarak (3.1)-(3.2) formunda olmayan sistemlere uygulanamaz. Bu durum için Kovalevsky tarafından aşağıdaki örnek verilmiştir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.5}$$

denkleminin

$$u\,(0, x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \tag{3.6}$$

başlangıç koşulunu sağlayan bir $u(t,x)$ analitik çözümü varsa bu çözümün orijinin bir komşuluğunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}} \tag{3.7}$$

serisi ile temsil edilebilir olması gerekir. Ancak bu seri $t \neq 0$ için her noktada ıraksaktır. 20. yüzyıla gelindiğinde kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan en temel yöntem olarak kuvvet serilerine açılım yöntemi karşımıza çıkmaktadır. Bunun nedeni her realistik çözümün başlangıç noktasının/yüzeyinin bir komşuluğunda yakınsak bir kuvvet serisine açılabilir olması yani analitik olması gerektiği düşüncesiydi. Ancak zamanla bu bakış açısının matematiksel fiziğin problemleri için yetersiz kaldığı ve analitik olmayan çözümlerin de araştırılması gerektiği görülmüştür. Cauchy-Kovalevsky teoremi bir analitik Cauchy probleminin birden fazla analitik çözümü olamayacağını gösterir, analitik olmayan diğer çözümlerinin varlığı hakkında bir bilgi vermez. Bu durum ise lineer analitik denklemler için Holmgren Teoremi ile açıklığa kavuşturulmuştur.

Son yıllarda ters problemler ve kontrol teorisi gibi uygulamalı alanlardaki gelişmeler bu konuda yeni problemlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü için tek devam (unique continuation) özelliği bunlardan biridir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.1 (Tek Devam Özelliği) *$P(x,D)$ bir kısmi diferensiyel operatör ve S, Ω bölgesinde yönlendirilebilir bir hiperyüzey olsun. Eğer her bir $x_0 \in S$ noktasının bir $V(x_0)$ komşuluğu var öyle ki Ω bölgesinde $P(x,D)u = 0$ ve S'nin pozitif tarafında $u \equiv 0$ olduğunda $V(x_0)$ komşuluğunun tamamında $u \equiv 0$ ise, bu durumda u genelleşmiş fonksiyonu için S boyunca P operatörüne göre tek devam özelliği sağlanır denir (Gilbert et al. 2000, s. 71).*

Yukarıdaki tanımdan da görülebileceği gibi tek devam özelliği yerel bir özelliktir. Ancak kompaktlık kriterinin sağlanması durumunda genel sonuçlar elde edilebilir. 1990'ların başlarında bu alanda iki klasik sonuç bilinmekteydi. Bunlardan birincisi hiperyüzeyin geometrisi açısından daha optimal görülebilecek ancak analitik katsayılara ihtiyaç duyan Holmgren Teoremi; ikincisi ise sadece sürekli diferensiyellenebilir katsayılı diferensiyel operatörleri ele alan ancak hiperyüzeyin kuvvetli pseudo-konveks olmasını gerektiren Hörmander Teoremi'dir.

Teorem 3.2 (Holmgren Teoremi) *$P(x, D)$ operatörü, katsayıları analitik olan bir diferensiyel operatör olsun. Ayrıca S yönlendirilebilir C^1 hiperyüzeyi, x_0 noktasında karakteristik olmasın. Bu durumda her $u \in D'(\Omega)$ için S boyunca x_0 noktasında P operatörüne göre tek devam özelliği sağlanır. Burada $D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonlar uzayıdır (Gilbert et al. 2000, s. 71).*

Yukarıdaki teoremde analitik olması gerekmeyen keyfi Cauchy verileri için problemin çözümünün tekliği genelleşmiş fonksiyon uzaylarında ispatlanmış, diğer taraftan u çözümünün varlığı kabul edilmiştir. Analitik olmayan diferensiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün tekliği hala araştırılması gereken bir konudur.

İki boyutlu eliptik denklemler için teklik teoremi, katsayıların analitik olmaması durumunda 1939 yılında Torsten Carleman tarafından ispatlanmıştır. Bu çalışmada daha sonra Carleman değerlendirmeleri olarak adlandırılan, bir ağırlık fonksiyonu (φ) ve büyük parametre (s) içeren ve her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanan

$$s \left\| e^{s\varphi} u \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left\| e^{s\varphi} P u \right\|_{L_2(\Omega)}$$

formundaki ön değerlendirmeler kullanılmıştır. Burada C sabiti s'den bağımsız olup $\Omega \in \mathbb{R}^2$ açık bir kümedir (Kenig 1986, s. 948).

Carleman'ın elde ettiği sonuçlar C. Müller (1954) tarafından $\mathbb{R}^n$'e genelleştirilmiştir. Daha sonra A. P. Calderon (1958) ve L. Hörmander (1960) pseudo-konvekslik kavramını kullanarak günümüzde birçok çalışmaya temel teşkil eden önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Tanım 3.2 (Pseudo-Konveks Fonksiyon) *$S \subset \mathbb{R}^n$ açık bir küme ve $f : S \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in S$ için $\nabla f(x_1)(x_2 - x_1) \geq 0$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ oluyorsa ya da $f(x_2) < f(x_1)$ iken $\nabla f(x_1)(x_2 - x_1) < 0$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna pseudo-konvekstir denir (Borwein and Lewis 2010, s. 143).*

P operatörü, $\mathbb{R}^n$'de katsayıları reel olan ikinci mertebeden bir diferensiyel operatör olsun. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$'de aşağıdaki adi diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım:

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x,\xi), \ \frac{d\xi_i}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}(x,\xi), \ i = 1,2,...,n. \tag{3.8}$$

(3.8) sistemi $p(x,\xi)$'ye karşılık gelen Hamilton denklemleridir. Bu sistemin çözümü belirli başlangıç koşullarını sağlayan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$'de bir eğridir ve bikarakteristik olarak adlandırılır. Eğer bir bikarakteristik üzerinde bazı noktalarda $p(x,\xi) = 0$ ise, o zaman bu bikarakteristik üzerinde tüm noktalarda $p(x,\xi) = 0$ dır. $p(x,\xi) = 0$ olduğunda bikarakteristiklere, sıfır bikarakteristikler denir. $(x,\xi) \to x$ dönüşümü altında sıfır bikarakteristiklerin izdüşümleriyle $\mathbb{R}^n$'de elde edilen eğrilere $P(x,D)$ operatorünün ışınları denir.
$P(x,D)$'nin bikarakteristikleri boyunca türev almak

$$H_p(x,\xi) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

Hamilton vektör alanı boyunca türev almak demektir.
Herhangi iki $p(x,\xi)$, $q(x,\xi)$ sembolü için Poisson parantezi

$$\{p,q\} = \sum_{i=1}^{n} p_{\xi_i}q_{x_i} - p_{x_i}q_{\xi_i} = H_p q = \frac{d}{ds}\left(q\left(x(s),\xi(s)\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır.
Bu nedenle $\{p,q\}$, $P(x,D)$'nin bikarakteristikleri boyunca q'nun türevlerini gösterir. Benzer şekilde

$$\{p,\{p,q\}\}\left(x(s),\xi(s)\right) = \frac{d}{ds}\left(\{p,q\}\left(x(s),\xi(s)\right)\right) = \frac{d^2}{ds^2}q\left(x(s),\xi(s)\right)$$

ve $\{p,\{p,q\}\}$, $P(x,D)$'nin bikarakteristikleri boyunca q'nun ikinci türevlerini ifade etmektedir. Eğer q, ξ'den bağımsızsa, o zaman $\{p,\{p,q\}\}$, $P(x,D)$'nin ışınları boyunca q'nun ikinci türevini gösterir.
Kabul edelim ki $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık sınırlı bir küme, $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ fonksiyonları, $\overline{\Omega}$ bölgesinde her noktada $\nabla\psi \neq 0$ ve $\nabla\phi \neq 0$ olan düzgün fonksiyonlar olsun (Rakesh 2011, s. 2). Buna göre aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 3.3 (Operatöre Göre Pseudo-Konveks Fonksiyon) *Eğer her* $x \in \overline{\Omega}$ *ve* $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$p(x,\xi) = 0, \ \ \{p,\psi\}(x,\xi) = 0 \tag{3.9}$$

iken

$$\{p, \{p, \psi\}\}(x, \xi) > 0 \tag{3.10}$$

oluyorsa, bu durumda ψ *fonksiyonuna* $\overline{\Omega}$ *bölgesinde* $P(x, D)$ *operatörüne göre pseudo-konvekstir denir. Diğer bir deyişle* $P(x, D)$*'nin herhangi bir* $x(s)$ *ışını için* $\psi(x(s))$ *fonksiyonunun her kritik noktasında* $\frac{d^2}{ds^2}\psi(x(s)) > 0$ *şartı sağlanıyorsa* $\psi(x)$, $P(x, D)$ *operatörüne göre pseudo-konvekstir denir. Bundan dolayı* $\psi(x(s))$, *kritik noktada yerel minimuma sahiptir (Rakesh 2011, s. 3).*

Tanım 3.4 (Operatöre Göre Kuvvetli Pseudo-Konveks Fonksiyon) *Eğer* ψ *pseudo-konveks ve her* $x \in \overline{\Omega}$, $\zeta = \xi + i\sigma\nabla\psi(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \neq 0$ *için*

$$p(x, \zeta) = 0, \quad \{p(x, \zeta), \psi(x)\} = 0 \tag{3.11}$$

iken

$$\frac{1}{i\sigma}\left\{\overline{p(x, \zeta)}, p(x, \zeta)\right\} > 0 \tag{3.12}$$

oluyorsa, bu durumda ψ *fonksiyonuna* $\overline{\Omega}$ *bölgesinde* $P(x, D)$ *operatörüne göre kuvvetli pseudo-konvekstir denir (Rakesh 2011, s. 4).*

$P(x, D)$ *operatörü ikinci mertebeden olduğunda pseudo-konvekslik ve kuvvetli pseudo-konvekslik birbirine denktir.*

Carleman değerlendirmelerini elde etmek için kuvvetli pseudo-konvekslikten daha güçlü bir koşula ihtiyaç vardır. Bu koşul genellikle özel şart olarak adlandırılır, standart bir ismi yoktur.

Tanım 3.5 (Özel şart) *Eğer* φ, $P(x, D)$ *operatörüne göre pseudo-konveks fonksiyon ve her* $\zeta = \xi + i\sigma\nabla\varphi(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \neq 0$ *için* $p(x, \zeta) = 0$ *olduğunda her* $x \in \overline{\Omega}$ *için (3.12) sağlanıyorsa,* φ *fonksiyonu* $\overline{\Omega}$ *bölgesinde* $P(x, D)$ *operatörü için özel şartı sağlar denir. Yani özel şart, (3.11)'in ikinci şartını sağlamayı gerektirmez. Bu yüzden özel şartlar kuvvetli pseudo-konveksliği gerektirir (Rakesh 2011, s. 4).*

ψ *fonksiyonu* $\overline{\Omega}$ *bölgesinde* $P(x, D)$ *operatörüne göre kuvvetli pseudo-konveks olsun. O zaman yeterince büyük reel* λ *için,* $\varphi = e^{\lambda\psi}$ *fonksiyonu* $\overline{\Omega}$ *bölgesinde özel şartı sağlar (Rakesh 2011, s. 4).*

Teorem 3.3 (Hörmander Teoremi) *P operatörü, katsayıları reel ve temel sembolü C^1 uzayından olan bir diferensiyel operatör olsun. Ayrıca S yönlendirilebilir C^2 hiperyüzeyi, x_0 noktasında P operatörüne göre kuvvetli pseudo-konveks olsun. Bu durumda her $u \in H^{(m-1)}(\Omega)$ fonksiyonu için S boyunca x_0 noktasında P'ye göre tek devam özelliği sağlanır (Gilbert et al. 2000, s. 72).*

BÖLÜM 4

TERS PROBLEMLER TEORİSİNİN BİLİM VE TEKNOLOJİDEKİ BAZI UYGULAMALARI

Ters problemler teorisi, 20. yüzyılın ortalarından başlayarak her geçen gün bilim ve teknolojide daha önemli hale gelmiştir. Bu tür problemlerin; fizik, jeofizik, tıp ve astronomi gibi matematiğin kullanıldığı pek çok sahada önemli uygulamaları vardır. Zira bu problemlerin çözümleri, incelenen ortama ait yoğunluk, dalga yayılım hızı, elastisite parametreleri, iletkenlik, elektriksel ve manyetik geçirgenlik gibi önemli fiziksel özellikler hakkında bilgi vermektedir (Kabanikhin 2008, s. 317).

Direkt problem, var olan bir sebepten ortaya çıkabilecek sonuçların bulunması problemi iken; ters problem mevcut sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak ifade edilebilir. Örneğin, grip olan bir hastada ortaya çıkabilecek belirtilerin neler olduğunun saptanması bir direkt problemdir, diğer taraftan yüksek ateş, burun akıntısı ve halsizlik şikayetleri olan bir kişinin hastalığının teşhisi ise bir ters problemdir. Bu belirtiler farklı sağlık sorunlarından kaynaklanabileceğinden böyle bir problemin çözümünün tek olmadığı açıktır. Matematiksel fizikte direkt problem; denklem, bölge ve koşullar verildiğinde denklemi ve koşulları sağlayan çözümün bulunması problemi olarak tanımlanır (Yıldız 1995, s. 6). Burada amaç, belli bir anda bölgenin belli bir noktasındaki fiziksel alanı veya süreci tanımlayan (elektromanyetik, akustik, sismik vb.) bir fonksiyonun bulunmasıdır. Ayrıca bu problemlerde ortamın özelliklerinin, fiziksel sürecin başlangıç anındaki durumunun ve/veya sınırda sağlanan özelliklerin bilindiği kabul edilir. Diğer yandan sıklıkla ortamın özelliklerinin bilinmediği durumlarla da karşılaşılmaktadır. Bu da direkt problemin çözümü hakkında verilen ek bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi ters problemi olarak karşımıza çıkmaktadır (Kabanikhin 2008, s. 318).

4.1 TERS PROBLEMLER TEORİSİNİN BAZI UYGULAMA ALANLARI

Bilim ve teknolojinin farklı alanlarında ortaya çıkan çeşitli ters problemlere örnekler aşağıda sunulmuştur.

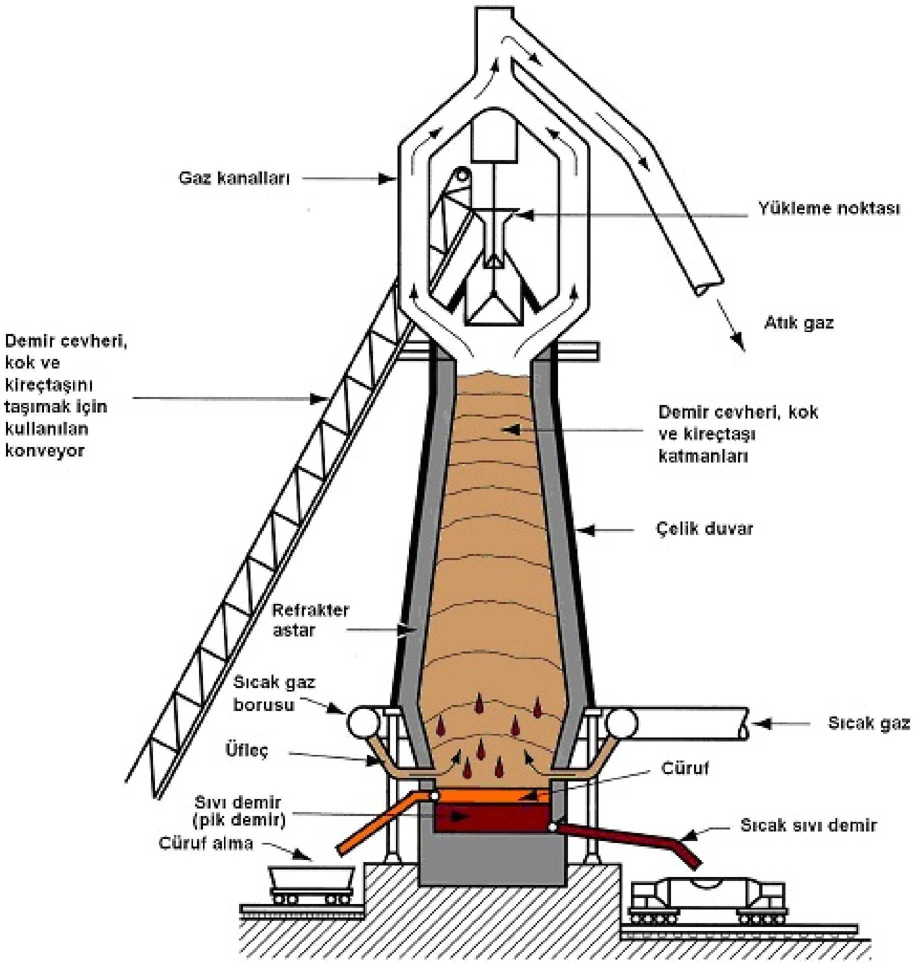
4.1.1 Endüstrideki Bazı Ters Problemler

Bilindiği gibi nükleer güç santralleri diğer enerji kaynaklarına göre nispeten daha ucuz, daha verimli ve karbon-nötr bir enerji üretimi sağlamaktadır. Bununla birlikte bu tesislerde büyük facialara yol açabilecek kazaların yaşanması ihtimali az da olsa her zaman vardır. Uluslararası Atom Enerjisi Kurumu büyük nükleer kazaları, planlı ve uzun süreli önlemlerin uygulanmasını gerektiren, geniş alana yayılmış sağlık ve çevresel etkileri olan, önemli miktarda radyoaktif madde salınımının söz konusu olduğu durumlar olarak tanımlamaktadır.

Atmosferde taşınarak daha geniş bölgelere yayılan, büyük ölçekli ve uzun süreli çevre kirliliğine yol açan radyoaktif maddeler ayrıca kansere, bilişsel gelişim geriliğine ve kalp hastalıklarına neden olmaktadır. Bu yüzden toprak, su ve atmosferdeki radyoaktif kirliliğin izlenmesi bir zorunluluk olarak ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan, cihazların yüksek maliyeti nedeni ile kirlilik ölçümü maalesef sadece sınırlı sayıda noktada hassas bir şekilde yapılabilmektedir. Bu durum atmosferik dağılım için bir sayısal simülasyonun geliştirilmesi ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Fakat doğru konsantrasyon ve birikim değerlerinin elde edilebilmesi, kaynak hakkında bilgi sahibi olunmasına, yani hangi zamanda ne kadar radyoaktif maddenin salındığının bilinmesine bağlıdır. Kirlilik oranının tespiti ve risk azaltıcı önlemlerin alınabilmesi için bu verilerin doğru bir şekilde değerlendirilmesi son derece önemlidir. Ancak bu bilgiler genellikle halka açık değildir ya da bilinmemektedir. Örneğin, 2011 yılında meydana gelen Fukushima nükleer kazasında kamuoyu ile paylaşılan verilerin doğruluğuna ilişkin çeşitli iddialar ortaya atılmıştır. İşte bu noktada ters problemler teorisi, kaynak fonksiyonunun belirlenmesi için alternatif bir çözüm yolu olarak ortaya çıkmaktadır. Başka bir deyişle, ölçüm noktalarından toplanan veriler ve oluşturulan matematiksel model kullanılarak radyoaktif madde salınımının zamansal değişiminin belirlenmesi ters probleminin çözümü, yukarıdaki sorunun cevabı olarak karşımıza çıkmaktadır (Martinez-Camara et al. 2013, s. 4330).

Ters problemler teorisi, demir-çelik endüstrisinde de önemli uygulama alanlarına sahiptir.

Demir-çelik üretim sürecinde entegre tesislerin ana ünitesi olan yüksek fırınlarda, demir cevherinin içeriğinde bulunan demir oksit kok kömürü ile indirgenerek sıcak maden ya da sıvı ham demire dönüştürülür. Sıvı ham demir içinde yüksek oranda bulunan; karbon, silisyum, fosfor, kükürt gibi elementler istenilen ölçüde arıtılarak ve gerekli alaşım maddeleri ilave edilerek çelik üretimi gerçekleştirilir (Tatlıdil ve Sayın 2011, s. 60).
Yüksek fırının içindeki sıcaklık dağılımı, homojen olmamakla birlikte yaklaşık 1500° C'dir. Büyük boyutta bir fırın yaklaşık 100 m yüksekliğinde olup günlük 1200 ton civarında üretim yapmaktadır. Yüksek fırınların boyutu, yapısı ve içerideki yüksek sıcaklık nedeniyle ısı akışının direkt olarak gözlemlenmesi mümkün değildir. Dolayısıyla fırının tabanına yakın dış bölgeye yerleştirilmiş ısıl çift adı verilen aygıtlar kullanılarak elde edilen sıcaklık verilerinden fırındaki ısı akışının davranışının belirlenmesi problemi karşımıza çıkar. Bu ters problemin çözümü, üretim tesisinde ortaya çıkabilecek sorunların önceden tespiti için hayati önem taşır (Şekil 4.1).



Şekil 4.1: Yüksek fırının yapısı (Demir 2013).

Fırında, yüksek sıcaklık altında çok fazlı oldukça karmaşık bir süreç gerçekleştiğinden bu durumun matematiksel modelinin oluşturulması oldukça zordur. Ancak burada amaç yüksek fırının güvenlik kontrolünü sağlamak için bir indeks elde etmek olduğundan ısıl çiftlerden elde edilen verilerin değerlendirilebileceği bir minimal model oluşturulmalıdır. Bunun için en uygun model bir boyutlu ısı denklemidir:

$$u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t)\,,\ 0 < x < l,\ 0 < t < T.$$

Burada $\alpha > 0$ ısı iletim katsayısı, $0 < x < l$ fırının tabanını oluşturan tuğlaların derinlik değişkeni olup $x = l$ ve $x = 0$ sırasıyla tuğlanın alt ucuna ve erimiş demir ile temas ettiği noktaya karşılık gelmektedir. Diğer yandan problemin çözümü için mevcut olan veriler

$$\begin{aligned} u(l,t) &= h(t),\ 0 < t < T, \\ u_x(l,t) &= g(t),\ 0 < t < T \end{aligned}$$

şeklinde alınabilir. Böylece ilgili ters problem $g(t)$, $h(t)$ $(0 < t < T)$ verilerinden

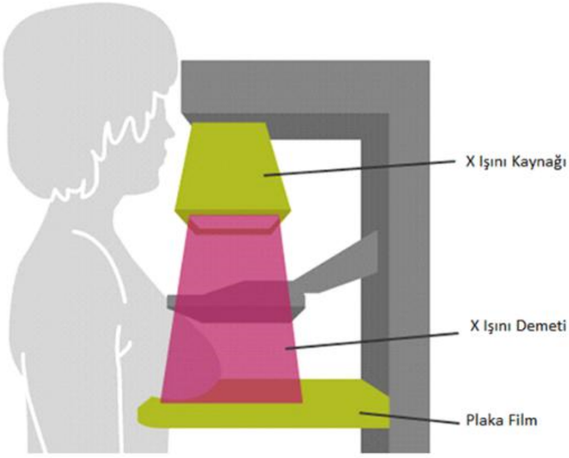
$$f(t) = -u_x(0,t)\,,\ 0 < t < T$$

fonksiyonunun belirlenmesi problemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Burada $u(x,0)$, $0 < x < l$ başlangıç değerinin de bilinmediğine dikkat edilmelidir (Yamamoto 2013, s. 83).

Ters problemlerde bazen kullanılabilecek verilerin miktarı oldukça azdır. Uzak bir gök cisminin veya uzak bir galaksinin görüntüsünün belirlenmesi veya deprem verilerinden çok derindeki bir jeofizik yapının tespiti böyle problemlere örnek olarak verilebilir. Bazı durumlarda ise, ilgi duyulan nesneye farklı sinyaller gönderilerek, bu sinyallerin seçimine bağlı olarak farklı ölçüm sonuçları elde edilir. Örneğin; tıbbi görüntülemede, insan vücuduna ultrason veya X ışını sinyalleri gönderilerek vücudun içinden geçen veya yansıyan sinyallere göre elde edilen ölçüm sonuçları değerlendirilir (Şekil 4.2).

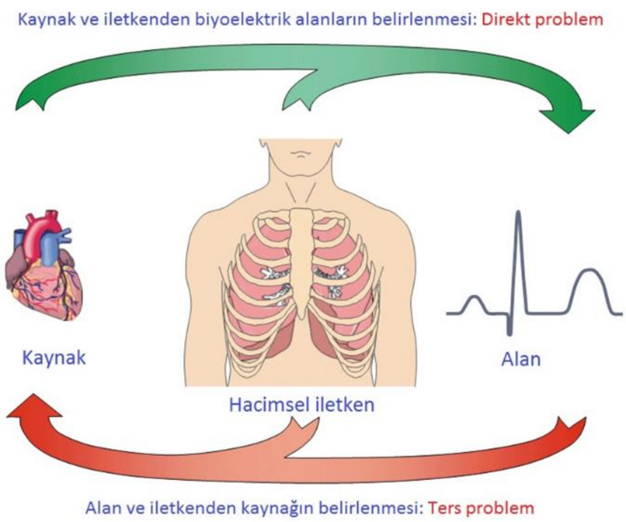
4.1.2 Tıptaki Bazı Ters Problemler

Günümüzde göğüs kanseri insan sağlığını tehdit eden büyük sorunlardan biridir. Her ne kadar bu kanser türünün özel sebepleri bilinmese de erken teşhis ve tümörün karakterinin belirlenmesi tedavinin başarısında kilit bir rol oynamaktadır. Matematiksel olarak, kanser hücresi sağlıklı göğüs dokusunda ortaya çıkan homojenliğin bozulduğu bir nokta veya bölge olarak görülebilir. Burada problem, yüzeyden yansıyan akustik dalgalardan elde edilen veriler yardımıyla homojenliğin bozulduğu bölgenin diğer bir deyişle kanser hücresinin yerini tespit etmektir.



Şekil 4.2: Mamografi cihazı (www.medicalradiation.com).

İnsan vücudunu bir hacimsel iletken ve kalbimizi de bir biyoelektrik hacimsel kaynak olarak düşündüğümüzde, günlük klinik tanılarda kardiyologların tıbbi cihazlarla elde edilen biyoelektrik sinyalleri kullanarak, kaynağın yapısının belirlenmesi ters problemini çözmeye çalıştıklarını görürüz (Şekil 4.3), (Malmivuo and Plonsey 1995, s. 212).



Şekil 4.3: Kardiyolojide direkt ve ters problem (Malmivuo and Plonsey 1995).

Ters problemlerin karakteristik özelliklerinden biri onların genellikle kötü konulmuş problemler olmasıdır.

4.2 TERS VE KÖTÜ KONULMUŞ PROBLEMLER

İyi ve kötü konulmuş problem kavramları 1902 yılında Fransız matematikçi J. S. Hadamard tarafından verilmiştir. U ve F metrik uzaylar, $A : U \to F$ bir operatör olmak üzere

$$Au = f \tag{4.1}$$

denklemini göz önüne alalım. (4.1) denkleminin aşağıdaki özellikleri sağlayan çözümünün bulunması problemine (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında iyi konulmuş problem denir:

i) Her $f \in F$ için U uzayında problemin çözümü vardır.

ii) Problemin çözümü U uzayında tektir.

iii) Problemin koşulları F uzayında az değiştiğinde problemin çözümü de U uzayında az değişir (kararlılık koşulu) (Lavrent'ev et al. 1986, s. 26). Bu şartlardan herhangi birinin sağlanmaması durumunda problem, (U, F) uzay çifti için Hadamard anlamında kötü konulmuş problem olarak adlandırılır. Bir (U_1, F_1) uzay çifti için iyi, başka bir (U_2, F_2) uzay çifti için kötü konulmuş probleme, (U_2, F_2) uzay çifti için zayıf kötü konulmuş problem denir. Tüm uzay çiftlerinde kötü konulmuş probleme kuvvetli kötü konulmuş problem denir. Hadamard'ın kendisinin örnek olarak gösterdiği bir kötü konulmuş problem; Laplace denklemi için Cauchy problemidir. En basit şekliyle bu problem aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$u = u(x,y), \ \Delta u = 0, \ y > 0, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = 0, \ u_y(x,0) = \alpha \sin nx, \ x \in [0,\pi] \tag{4.3}$$

bağıntıları verilsin. (4.2)-(4.3) Cauchy problemi

$$u(x,y) = \frac{\alpha}{n} \sin nx \sinh ny$$

çözümüne sahiptir.

$y = 0$ da verilen Cauchy verileri kullanılarak $y > 0$ için u çözümünün bulunması problemini ele alalım. Açıktır ki, uygun normlu uzay çiftleri, her $\varepsilon > 0$, $c > 0$ ve $y > 0$ için

$$\|\alpha \sin nx\| < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\alpha}{n} \sin nx \sinh ny\right\| > c$$

olacak şekilde α ve n seçmek mümkündür. Dolayısıyla koşullar az değiştiğinde çözüm sonsuz şekilde değişmektedir. O halde, problem Hadamard anlamında kötü konulmuş problemdir.

Isı denklemi için ters zamanlı çözümün verilere sürekli bağımlılığına ilişkin benzer bir durum aşağıdaki Cauchy probleminde ortaya çıkar:

$$u = u(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; t > 0, \tag{4.4}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{4.5}$$

Laplace denklemi ve daha genel olarak eliptik denklem için Cauchy problemi Hadamard anlamında kötü konulmuştur. Gerçekten de Cauchy problemi zamana bağlı fiziksel olayların tasviri için kullanılırken, eliptik denklemler ise zamandan bağımsız fiziksel olayları ve alanları tasvir etmektedir. Isı denklemi için ters zamanlı Cauchy probleminin Hadamard anlamında kötü konulmuş olması termodinamiğin ikinci yasasıyla ilgilidir.

Örnek 4.1

$$\Omega = \{(x,t) \mid x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \; 0 < t < T\}$$

bölgesinde verilen,

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + b(x)\, u_t + a_0(x)\, u = f(x,t) \tag{4.6}$$

formunda bir hiperbolik tip denklemin

$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x) \tag{4.7}$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemini göz önüne alalım. (4.6)-(4.7) hiperbolik denklem için bir Cauchy problemi olup $D = \mathbb{R}^n$ iken $(C^2(D), C(D))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Ancak D bölgesi $\mathbb{R}^n$ ile çakışmıyor ise çözüm birden fazla olabileceğinden bu problem verilen uzay çiftinde kötü konulmuştur. Bu durumda (4.6)-(4.7) probleminin çözümünün tekliğini garanti etmek için Ω bölgesinin sınırının

$$\Gamma = \partial D \times (0,T) = \{(x,t) \mid x \in \partial D, \; 0 < t < T\}$$

kısmında bir ek koşul verilmesi gerekir. Örnek olarak,

$$u|_{\Gamma} = u_2(x,t) \tag{4.8}$$

koşulu verilebilir. Bu durumda (4.6)-(4.8) problemine 1. karışık problem denir. Bu problem $(C^2(D), C(D))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. (4.8) koşulu yerine,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = u_3(x,t) \tag{4.9}$$

alınırsa (4.6), (4.7), (4.9) problemi 2. karışık problem olarak adlandırılır. Burada n, ∂D'nin dış normalidir. Ele alınan problem $(C^2(D), C(D))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Eğer (4.6)-(4.7) problemine ek olarak

$$\alpha(x,t)\,u(x,t) + \beta(x,t)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = u_4(x,t) \tag{4.10}$$

koşulu verilirse (4.6), (4.7), (4.10) problemine 3. karışık problem denir. Bu problem de $(C^2(D), C(D))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur. Burada $\alpha(x,t)$ ve $\beta(x,t)$ verilen keyfi fonksiyonlar olup $\alpha^2(x,t) + \beta^2(x,t) \neq 0$ dır.

Örnek 4.2 *(4.6) denklemi yerine*

$$Lu \equiv u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i} + a_0(x)\,u = f(x,t) \tag{4.11}$$

formunda bir parabolik denklem, (4.7) şartı yerine de

$$u(x,0) = u_0(x)$$

koşulu alınırsa (4.11) denklemi için Cauchy problemi, 1., 2. ve 3. karışık problemler $(C^2(D), C(D))$ uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş olur.

Örnek 4.3 *Bir D bölgesinde,*

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = f(x) \tag{4.12}$$

denkleminin

$$u|_{\partial D} = u_0(x) \tag{4.13}$$

koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine Dirichlet problemi (1. sınır değer), (4.13) şartına da Dirichlet şartı denir. Eliptik denklem için Dirichlet problemi $(C^2(D), C(D))$ *uzay çiftinde iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik denklemler için ise kötü konulmuştur. Eğer (4.13) yerine,*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = u_1(x) \tag{4.14}$$

şartı alınırsa (4.12) denkleminin (4.14) şartını sağlayan çözümün bulunması problemine Neumann problemi (2. sınır değer), (4.14) şartına da Neumann şartı denir. Burada n*,* ∂D*'nin dış normalidir.*

Eliptik tip denklem için Neumann problemi $(C^2(D), C(D))$ *uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuştur, hiperbolik ve parabolik tip denklemler için ise kötü konulmuştur. (4.12) denkleminin*

$$\alpha(x)\, u(x) + \beta(x) \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = u_2(x) \tag{4.15}$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine Roben problemi (3. sınır değer), (4.15) şartına da Roben şartı denir. Burada $\alpha(x)$ *ve* $\beta(x)$ *sürekli fonksiyonlar olup* $\alpha^2(x)+\beta^2(x) \neq 0$ *dır.*

Eliptik tip denklem için Roben problemi $(C^2(D), C(D))$ *uzay çiftinde Hadamard anlamında iyi konulmuş, hiperbolik ve parabolik denklemler için ise kötü konulmuştur.*

Örnek 4.4

$$\partial_t u = i\Delta u + P\left(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}\right),\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

bağıntılarıyla verilen lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç değer problemi $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ *Sobolev uzayında Hadamard anlamında yerel olarak iyi konulmuştur. Burada* $u = u(x,t)$ *karmaşık değerli fonksiyon,* $P : \mathbb{C}^{2n+2} \to \mathbb{C}$ *lineer veya sabit terimleri olmayan polinom ve* $\nabla_x u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)$ *dur (Kenig et al. 1993, s. 256).*

Örnek 4.5

$$\partial_t u = i\left(\sum_{j\le k}\partial_{x_j}^2 u - \sum_{j>k}\partial_{x_j}^2 u\right) + P\left(u, \nabla_x u, \overline{u}, \nabla_x \overline{u}\right),\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ k \in \{1, ..., n\},$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

bağıntılarıyla verilen lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç değer problemi $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ Sobolev uzayında Hadamard anlamında yerel olarak iyi konulmuştur. Burada $u = u(x,t)$ karmaşık değerli fonksiyon, $P : \mathbb{C}^{2n+2} \to \mathbb{C}$ lineer veya sabit terimleri olmayan polinom ve $\nabla_x u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)$ dur (Kenig et al. 1998, s. 489).

Hadamard'a göre kötü konulmuş problemler, reel fiziksel anlamı olan pratik olayları tanımlamaz. Çünkü pratikte koşullar her zaman belirli bir hata payı ile verilir. Bu hatalı koşullar kullanılarak bulunan çözüm, kesin çözümden çok farklı olabilir ve bu da pratikte yanlış sonuçların elde edilmesine sebep olur. Bu nedenle başlangıçta birçok matematikçi sadece Hadamard anlamında iyi konulmuş problemlerle ilgilenmiştir. Daha sonraları ise bilim ve teknolojide ortaya çıkan birçok problemin kötü konulmuş problem olduğunun görülmesi matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Hatta Hadamard'ın kendisinin örnek olarak gösterdiği Laplace denklemi için Cauchy problemi de elektromanyetik alanların bulunması probleminde karşımıza çıkmaktadır.

1943 yılında Rus Matematikçi A. N. Tikhonov, kötü konulmuş problemlerin pratikteki önemine işaret ederek bu problemlerin kararlı çözümlerinin bulunabileceği ihtimali üzerinde durmuştur. Tikhonov'un yaklaşımı, çözüm uzayının sınırlandırılması fikrine dayanmaktadır. Buna göre aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa problem, Tikhonov anlamında iyi konulmuş problem olarak adlandırılır:

i) U bir metrik uzay olmak üzere, problemin çözümü var ve belirli bir $M \subset U$ cümlesine aittir.

ii) Problemin çözümü M'de tektir.

iii) Problemin çözümü M'de koşullara sürekli bağımlıdır, yani çözümü M cümlesinin dışına çıkarmayan koşullar F metrik uzayında sonsuz küçük bir değişikliğe uğradıklarında problemin çözümü de U metrik uzayında sonsuz küçük değişir (Lavrent'ev et al. 1986, s. 27).

M cümlesine problemin doğruluk cümlesi denir.

Günlük yaşantımızda sürekli olarak ters ve kötü konulmuş problemlerle karşılaşırız. Zihinsel ve fiziksel olarak sağlıklı olduğumuz durumlarda bu tür problemler daha hızlı ve etkili bir şekilde çözülebilir. Örneğin, görsel algımızı ele alalım. Gözlerimizin belli bir anda çevremizdeki sonlu sayıda noktadan görsel bilgi alabildiği bilinmektedir. Peki neden etrafımızdaki her şeyi tam olarak görebildiğimiz hissine kapılıyoruz? Hiç şüphesiz bunun nedeni, kişisel bir bilgisayar gibi çalışarak belirli noktalardan alınan verileri interpolasyon ve kestirim yaparak görüntüyü tamamlayan beynimizdir. Bir ortamın gerçek görüntüsünün belli sayıdaki noktadan yeteri kadar düzgün bir şekilde oluşturulabilmesi için bu ortamın daha önceden görülmüş olması gerekir. Dolayısıyla bir nesnenin ve çevresinin görüntüsünün oluşturulması problemi kötü konulmuş bir problemdir. Çünkü çözüm tek değildir veya verilerdeki küçük değişiklikler, çözümde büyük değişikliklere sebep olabilir. Buna rağmen beynimiz oldukça hızlı bir şekilde bu problemi çözebilmektedir. Bunun nedeni, beynin önceki geniş tecrübelerini (ön bilgi-a priori information) kullanabilme yeteneğidir (Kabanikhin 2008, s. 318).

Son olarak, uzayda farklı açılardan aydınlatılabilen bir cismi ele alalım. Bu cismin şekli biliniyorken gölgesinin şeklinin bulunması problemi bir direkt problem olup iyi konulmuştur. Diğer taraftan cismin çeşitli düzlemler üzerindeki izdüşümlerinden (gölgesinden), cismin şeklinin belirlenmesi bir ters problemdir ve bu problem sadece konveks cisimler için iyi konulmuştur. Çünkü konveks olmayan bir bölge bu yolla belirlenemez. Böyle bir problem, ilk defa ayın üzerine düşen gölgesinden dünyanın şeklinin küresel olduğu sonucuna varan Aristo tarafından formülize edilmiş ve çözülmüştür. Açıktır ki sadece ay yüzeyi üzerindeki gölgesinin şeklinden yararlanarak dünyanın şeklinin belirlenmesi ters probleminin çözümü tek değildir (Kabanikhin 2008, s. 328).

BÖLÜM 5

ULTRAHİPERBOLİK SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR CAUCHY PROBLEMİ

Bu bölümde, kısmi türevli denklemler için bazı Cauchy problemlerinin çözümlerinin tekliğinin ve kararlılığının araştırılmasında kullanılan ve Carleman değerlendirmeleri üzerine kurulu genel bir yöntem verilmiştir. Bu amaçla ilk olarak, bu yönteme temel teşkil eden ve Isakov (2006) tarafından verilmiş olan bazı tanım ve teoremler ele alınmıştır.
Kabul edelim ki m multi-indeksinin m_j pozitif tamsayı bileşenleri $m_1 = \cdots = m_q > m_{q+1} \geq \cdots$ koşulunu sağlasın. ∇_q operatörü $\nabla_q = (\partial_1, \ldots, \partial_q, 0, \ldots, 0)$ olarak tanımlansın. Ayrıca

$$A\,(x;\partial) = \sum a_\alpha \partial^\alpha,\ \ (|\alpha : m| \leq 1)$$

diferensiyel operatörünü göz önüne alalım. Burada $|\alpha : m| = \alpha_1/m_1 + \cdots + \alpha_n/m_n$ dir. A_m, $|\alpha : m| = 1$ olmak üzere, A operatörünün m. temel kısmı olarak tanımlanır ve

$$A_m\,(x;\zeta) = \sum a_\alpha i^{|\alpha|} \zeta^\alpha$$

ile gösterilir. Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırlı bir bölge olmak üzere $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ ve m. temel kısmın katsayıları $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ fonksiyonlar sınıfından olsun. $\varphi \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ olup $\overline{\Omega}$ bölgesinde $\nabla_q \varphi \neq 0$ dır. Üstel ağırlık fonksiyonunu $\exp\left(s\varphi\left(x\right)\right)$ şeklinde tanımlayalım. Burada C sabiti sadece A, Ω, Γ, φ büyüklüklerine bağlıdır.

Teorem 5.1 *Kabul edelim ki her $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ için $A_m\,(x;\xi) \neq 0$ veya A_m'in katsayıları reel değerli olsun. Eğer*

$$A_m\,(x;\zeta) = 0,\ \zeta = \xi + is\nabla_q \varphi,\ s \neq 0 \tag{5.1}$$

olduğunda Ω bölgesinde bir pozitif δ sayısı için

$$\sum_{j,\ k \leq q} \left(\partial_j \partial_k \varphi \left(\partial A_m / \partial \zeta_j\right) \left(\overline{\partial A_m / \partial \zeta_k}\right) + s^{-1}\,\mathrm{Im}\left(\partial_k A_m \left(\overline{\partial A_m / \partial \zeta_k}\right)\right)\right) > \delta \tag{5.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için $C < s$ iken

$$s\int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 w^2 dx \le C\int_\Omega |Au|^2 w^2 dx, \quad |\alpha : m| < 1 \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır (Isakov 2006, s. 51, Teorem 3.2.1).

Yukarıdaki teoremde φ fonksiyonu üzerine konulan şartlar, kuvvetli pseudo-konveks şartı olarak adlandırılır.

Teorem 5.2 *Kabul edelim ki A, temel kısmının katsayıları reel olan ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel operatör olsun ve $\psi \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ olmak üzere*

$$A_m(x;\xi) = 0,\ \sum \left(\partial A_m/\partial \xi_j\right)\partial_j\psi = 0,\ \xi \ne 0$$

olduğunda $\overline{\Omega}$ bölgesinde

$$\sum (\partial_j\partial_k\psi)\left(\partial A_m/\partial\xi_j\right)(\partial A_m/\partial\xi_k)$$
$$+\sum \left(\left(\partial_k\partial A_m/\partial\xi_j\right)\partial A_m/\partial\xi_k - \partial_k A_m \partial^2 A_m/\partial\xi_j\partial\xi_k\right)\partial_j\psi > 0$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca

$$A(x, \nabla\psi(x)) \ne 0,\ x \in \overline{\Omega}$$

olsun. Bu durumda ağırlık fonksiyonu

$$\varphi = e^{\lambda\psi}$$

olmak üzere $C_1(\lambda)$, C_2 sabitleri vardır öyle ki $C_2 < \lambda$, $C_1 < s$, $|\alpha| \le 1$ iken her $u \in H^2(\Omega)$ fonksiyonu için

$$s^{3-2|\alpha|}\int\limits_\Omega |\partial^\alpha u|^2 e^{2\lambda\psi}dx \le C\left(\int\limits_\Omega |Au|^2 e^{2\lambda\psi}dx + \int\limits_{\partial\Omega} s|\nabla u|^2 + s^3|u|^2 e^{2\lambda\psi}dx\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Isakov 2006, s. 52, Teorem 3.2.1$'$).

Teorem 5.2'de ψ fonksiyonu üzerine konulan şartlar pseudo-konvekslik şartı olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen Carleman değerlendirmelerinin bir uygulaması olarak

$$Au = f,\ x \in \Omega, \tag{5.4}$$

$$\partial_v^j u = g_j,\ j \le m_1 - 1,\ x \in \Gamma,\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha : m| < 1 \tag{5.5}$$

bağıntılarıyla verilen Cauchy problemi için teklik ve kararlılık sonuçları verilebilir. Burada Γ, $\partial\Omega$ sınırının bir parçası olup, bu sınır C^{m_1} fonksiyonlar sınıfındandır. Ayrıca $\Omega_\epsilon = \Omega \cap \{\varphi > \varepsilon\}$ şeklinde tanımlansın.

Teorem 5.3 (Teklik ve Kararlılık) *Kabul edelim ki φ, Teorem 5.1'in koşullarını sağlayan ve $\partial\Omega\backslash\Gamma$ sınırında $\varphi < 0$ olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda (5.4)-(5.5) Cauchy probleminin bir u çözümü için*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}(\Omega_\epsilon) \leq C\left(F + M^{1-\kappa}F^\kappa\right), \ |\alpha : m| < 1 \tag{5.6}$$

olacak şekilde Ω, Γ, φ ve ε büyüklüklerine bağlı C ve $\kappa \in (0,1)$ sabitleri vardır. Burada $F = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sum \|g_j\|_{H^{(m_1-j-1/2)}(\Gamma)}$, $(j \leq m_1 - 1)$ ve $|\alpha : m| < 1$ için $M = \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}$ dır (Isakov 2006, s. 54, Teorem 3.2.2).
Bu teorem $\partial\Omega\backslash\Gamma$ sınır parçasında $\varphi < 0$ koşulunu sağlayan kuvvetli pseudo-konveks bir φ fonksiyonu bulunabildiği takdirde, Ω_0 bölgesinde u çözümünün tekliğini garanti eder.

İspat. Genişleme teoremi kullanılarak (5.5) Cauchy verisini sağlayan bir u^* fonksiyonu bulunabilir öyle ki (5.6) eşitsizliğinin sol tarafı CF ile sınırlı kalır. Bu durumda $u - u^*$ farkı Γ üzerinde sıfır değerini alır. Şimdi $0 \leq \chi \leq 1$ olmak üzere

$$\chi = \begin{cases} 1, & \Omega_{\varepsilon/2}, \\ 0, & \Omega\backslash\Omega_{\varepsilon/4} \end{cases}$$

şeklinde bir $\chi \in C^\infty$ kesme fonksiyonu tanımlayalım. Buna göre $w = \chi v \in H_0^{(m_1)}(\Omega_0)$ olsun.
Çarpımın türevi için Leibniz formülü kullanılarak $A(\chi v) = \chi A v + A_{m-1} v$ elde edilir. Burada A_{m-1} operatörü $|\alpha : m| < 1$ için sadece ∂^α türevlerini içerir. Ayrıca $v \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için ifade edilen (5.3) eşitsizliği yaklaşım yoluyla $v \in H_0^{(m_1)}(\Omega_0)$ fonksiyonuna genişletilebileceğinden w fonksiyonu için bu değerlendirme uygulanırsa

$$s\sum \|e^{s\varphi}\partial^\alpha w\|^2_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon/2}\right)} \leq C\left(\|e^{s\varphi} f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum \|e^{s\varphi}\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

elde edilir. $\Omega_{\varepsilon/2}$ bölgesinde $w = v$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafında Ω bölgesi yerine $\Omega_{\varepsilon/2}$ bölgesi alınırsa w yerine v yazılabilir. Diğer taraftan bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terim $\Omega = \Omega\backslash\Omega_{\varepsilon/2} \cup \Omega_{\varepsilon/2}$ eşitliği kullanılarak

$$\sum \|e^{s\varphi}\partial^\alpha v\|^2_{L^2\left(\Omega_{\varepsilon/2}\right)} \leq C\left(\|e^{s\varphi} f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum \|e^{s\varphi}\partial^\alpha v\|^2_{L^2\left(\Omega\backslash\Omega_{\varepsilon/2}\cup\Omega_{\varepsilon/2}\right)}\right)$$

yazılabilir. Burada $s > 2C$ olarak seçilirse $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_{\varepsilon/2}$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\sum \|e^{s\varphi}\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le C\left(\|e^{s\varphi}f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum \|e^{s\varphi}\partial^\alpha v\|^2_{L^2\left(\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon/2}\right)}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ω_ε bölgesinde $\varepsilon < \varphi$ olduğundan $\exp(s\varepsilon) < \exp(s\varphi)$, Ω bölgesinde $\Phi = \sup\varphi$ olmak üzere $\exp(s\varphi) < \exp(s\Phi)$ ve $\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon/2}$ bölgesinde $\exp(s\varphi) \le \exp(s\varepsilon/2)$ olur. Böylece ilgili integral bölgesinde eşitsizliğin sol tarafında $\exp(s\varphi)$ fonksiyonunun minimumu ile sağ tarafında maksimumu yer değiştirilir ve her iki taraf $\exp(2s\varepsilon)$ ile bölünürse

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le C\exp(s(\Phi-\varepsilon))\,F + C\exp(-s\varepsilon/2)\,M$$

elde edilir. Burada

$$s = \max\left\{(\Phi-\varepsilon/2)^{-1}\ln(M/F),\ C(\varepsilon)\right\}$$

olarak seçelim. Ayrıca $C(\varepsilon) > 0$ için $s > 2C$ şartı sağlanır. Bu seçim nedeniyle sağ taraftaki ikinci terim birinci terimden büyük olamaz. Yukarıdaki eşitsizlikte s'yi yerine yazarsak $\kappa = \varepsilon/(2\Phi-\varepsilon)$ için (5.6) elde edilir. ■

5.1 SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİNİN VE KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Teorem 5.3'ün bir uygulaması olarak $\Omega = D\times(-T,T)$ bölgesinde

$$Au \equiv ia_0(x)\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\,\partial_j u(x,t) + c(x,t)\,u(x,t) = f(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega$$

Schrödinger denklemini

$$u = g,\ \ \partial_\nu u = h,\ \ (x,t)\in\Gamma = \gamma\times(-T,T)$$

Cauchy koşulları ile birlikte ele alalım. Bu problemin çözümünün tekliği ve kararlılığı araştırılmıştır. Burada, $a_0 > 0$ olmak üzere, $a_0 \in C^1\left(\overline{D}\right)$ ve $1 \le j \le n$ için b_j, $c \in L^\infty(\Omega)$ olarak kabul edilmiştir.

Teorem 5.4 *D, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge ve $\gamma \in C^2$, D'nin sınırının bir parçası olmak üzere*

$$D \subset \left\{-h < x_n < 0, \ \left|x_n'\right| < r\right\}; \ \gamma = \partial D \cap \{x_n < 0\} \tag{5.7}$$

koşulları sağlansın. Ayrıca

$$-2a_0 < x \cdot \nabla a_0, \ \partial_n a_0 \leq 0, \ (x,t) \in \Omega \tag{5.8}$$

olsun. Bu durumda $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega \cup \Gamma$ olan her Ω_ε için (5.4)-(5.5) Cauchy probleminin u çözümü tektir ve

$$\|\partial_j u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\left(F + M^{1-\kappa}F^{\kappa}\right), \ j = 1, \ldots, n$$

değerlendirmesi sağlanır. Burada C, $\kappa \in (0,1)$; Ω_ε ve M büyüklüklerine bağlı sabitler olup $M = \|\sum \partial_k u\|_{L^2(\Omega)}(\Omega) + \|u\|_{L^2(\Omega)}(\Omega)$, $F = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sum \|g\|_{H^{(1/2)}(\Gamma)} + \sum \|h\|_{H^{(3/2)}(\Gamma)}$ ve $x_n' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0, 0)$ şeklinde tanımlıdır (Isakov 2006, s. 79, Teorem 3.4.13).

İspat. Teoremin kabullerinden pozitif s sayısı için $\Omega_\varepsilon \subset \{|t| < T - s\}$ yazılabilir. Ayrıca C^∞ fonksiyonlar sınıfından olan bir $\omega(t)$ fonksiyonu seçelim öyle ki $\omega(t) = 0$, $|t| < T - s$, $0 \leq \omega \leq h$ ve $\omega(T) = \omega(-T) = h$ olsun. Diğer yandan,

$$x_1 = y_1, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}, \ x_n = y_n - \omega(t), \ t = m$$

değişken değişimi yapılırsa A operatörünün temel kısmı ve (5.8)'de verilen ikinci koşul olan $\partial_n a_0 \leq 0$ değişmezken birinci koşulun $-2a_0 < y \cdot \nabla a_0 - \omega \partial_n a_0$ ile yer değiştirdiği görülür. Bu durumda $\partial\Omega \cap \{y_n < 0\} \subset \Gamma$ ve $\Omega_\varepsilon \subset \{|y'| < r, \ -h < y_n < 0\}$ yazılabilir. Daha sonra (5.8) koşulunda ortaya çıkan değişim göz önünde bulundurularak tekrar x gösterimine geçilebilir.

Şimdi,

$$\psi(x,t) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + (x_n - \beta_n)^2 - \beta_n^2 - r^2, \ h^2 + 2h\beta_n > r^2$$

olmak üzere $\varphi = \exp(\sigma/2\psi)$ ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım. Bu tanıma göre φ fonksiyonunun (5.2) kuvvetli pseudo-konveks fonksiyon olma şartını $m = (2, \ldots, 2, 1)$ ve $q = n$ olmak üzere sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

$\zeta = \xi + is\nabla_n \varphi$ ve $\nabla_n \varphi = \sigma/2\varphi \nabla\psi$ olmak üzere $A_m(\zeta) = 0$ eşitliğinin reel ve sanal kısımları sırasıyla

$$-a_0 \xi_{n+1} + \sum \xi_j^2 = s^2 \sigma^2 4^{-1} \varphi^2 |\nabla\psi|^2, \ 0 = \xi \cdot \nabla\psi \tag{5.9}$$

bağıntılarına eşittir. (5.2) eşitsizliğinin sol tarafı

$$
\begin{aligned}
J_1 &= 4\sigma\varphi\left(|\zeta_1|^2+\cdots+|\zeta_n|^2\right)+\tau^{-1}\operatorname{Im}\left(\partial_1+\cdots+\partial_n a_0\xi_{n+1}2\zeta_n\right),\\
J_2 &= \sigma^2\varphi\left|\partial_1\psi\zeta_1+\cdots+\partial_n\psi\zeta_n\right|^2
\end{aligned}
$$

terimlerinin toplamından oluşur. Burada $\zeta = \xi + is\nabla_n\varphi$ ve (5.9) bağıntıları kullanılarak

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \sigma\varphi\left(4|\xi|^2+s^2\sigma^2\phi^2|\nabla\psi|^2-2\xi_{n+1}x\cdot\nabla a_0+2\xi_{n+1}\beta_n\partial_n a_0\right)\\
&= \sigma\varphi\left(2a_0^{-1}\left(2a_0+x\cdot\nabla a_0-\beta_n\partial_n a_0\right)|\xi|^2\right.\\
&\quad\left.+a_0^{-1}\left(2a_0+x\cdot\nabla a_0+\beta_n\partial_n a_0\right)2^{-1}s^2\sigma^2\phi^2|\nabla\psi|^2\right),\\
J_2 &= \sigma^4\varphi^2 s^2|\nabla\psi|^2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Homojenlik özelliği ve $|\zeta| = 1$ kabulü kullanılarak $s = 0$ alındığında (5.8) koşulu ve (5.9) bağıntılarının ilki gereği β_n yeterince büyük iken $J_1 > 0$ olduğu görülür. Buradan $J > 0$ sonucuna ulaşılır. β_n sabitlenir. Bu eşitsizlik $|s| < \varepsilon_0$ olduğunda süreklilik gereği korunur. $|s| \geq \varepsilon_0$ olduğunda σ büyük seçilerek pozitiflik koşulu tekrar elde edilebilir. Böylece φ fonksiyonu kuvvetli pseudo-konveks fonksiyondur ve Teorem 5.3 uygulanabilir. Bunun için Ω_δ^* alt bölgesini $\Omega_\delta^* = \Omega \cap \{\psi > \delta\}$ olarak tanımlayalım. β_n büyük seçilerek bir küçük δ için $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\delta^*$ yazılabilir. ψ fonksiyonunun tanımı ve β_n için verilen koşul $\partial\Omega\backslash\Gamma$ sınırında $\psi < 0$ olmasını garanti eder. Böylece Teorem 5.3 gereği ispat tamamlanır. ∎

5.2 ULTRAHİPERBOLİK SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Bu bölümde, bazı katsayıları değişken olan ultrahiperbolik Schrödinger denklemi için yerel bir Carleman değerlendirmesi Isakov (2006) da verilen yöntem kullanılarak elde edilmiş ve bu değerlendirme kullanılarak Cauchy probleminin çözümünün kararlılığı ispatlanmıştır.

Kabul edelim ki, n, $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ olmak üzere $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi ∂D düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun. Ayrıca $L > 0$ için $G = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \ |y| < L\}$ şeklinde verilsin.

Bu bölümde, $\Omega = D \times G \times (-T, T)$ bölgesinde

$$Au \equiv ia_0(x,y)\partial_t u(x,y,t) + \Delta_y u(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)\,\partial_{x_i} u(x,y,t) + \sum_{j=1}^{m} b_j(x,y,t)\,\partial_{y_j} u(x,y,t)$$
$$+c(x,y,t)\,u(x,y,t) = f(x,y,t),\ (x,y,t) \in \Omega \tag{5.10}$$

değişken katsayılı ultrahiperbolik Schrödinger denklemi

$$u = g,\ \partial_\nu u = h,\ (x,y,t) \in \Gamma \times G \times (-T,T) \tag{5.11}$$

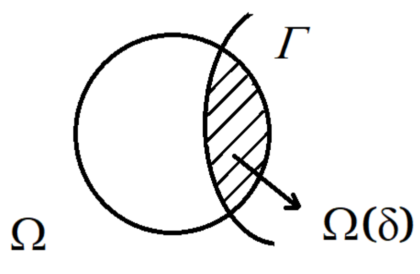
Cauchy koşulları ile birlikte ele alınmıştır. (5.10) denkleminde $a_0 \in C^1\left(\overline{D \times G}\right)$, $a_0 > 0$ ve $a_i,\ b_j,\ c \in L^\infty(\Omega)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ olduğu kabul edilmektedir.
Ayrıca

$$\begin{aligned}
H^{(1,1,0)}(\Omega) &= L^2\left(-T,T;\ H^1(D) \times L^2(G)\right) \cap L^2\left(-T,T;\ L^2(D) \times H^1(G)\right),\\
H^{(2,2,1)}(\Omega) &= H^1\left(-T,T;\ L^2(D) \times L^2(G)\right) \cap L^2\left(-T,T;\ H^2(D) \times L^2(G)\right)\\
&\quad \cap L^2\left(-T,T;\ L^2(D) \times H^2(G)\right),\\
H_0^{(2,2,1)}(\Omega) &= \left\{u \in H^{(2,2,1)}(\Omega);\ \mathrm{supp}u \subset \Omega\right\}
\end{aligned}$$

uzaylarını tanımlayalım.
Problem 5.1 Ω bölgesinin bir alt bölgesinde (5.10) denklemini ve (5.11) Cauchy koşullarını sağlayan u fonksiyonunun belirlenmesi problemini ele alalım.
Bu amaçla $\delta > 0$, $x_0 \notin \overline{D}$ ve $0 < \beta < 1$ olmak üzere

$$\Omega(\delta) = \left\{(x,y,t) \in \Omega;\ |x - x_0|^2 - |y|^2 - \beta|t|^2 > \delta^2\right\} \tag{5.12}$$

bölgesini tanımlayalım (Şekil 5.1).



Şekil 5.1: Ağırlık fonksiyonu ile oluşturulan alt bölge.

Bir Yerel Carleman Değerlendirmesi

Bu bölümde, kararlılık değerlendirmelerinin ispatında kullanılacak olan (5.10) denklemi için bir Carleman değerlendirmesi verilmiştir.

Bu amaçla $\gamma > 0$ olmak üzere

$$\varphi(x,y,t) = e^{\gamma\psi(x,y,t)} \tag{5.13}$$

şeklinde bir ağırlık fonksiyonu tanımlayalım. Burada

$$\psi(x,y,t) = |x - x_0|^2 - |y|^2 - \beta |t|^2$$

olarak alınmıştır.

Önerme 5.1 Kabul edelim ki

$$\inf\left\{4 + \nabla_x \log a_0 \cdot \nabla_x\psi - \nabla_y \log a_0 \cdot \nabla_y\psi;\ (x,y,t) \in \Omega(\delta)\right\} > 0 \tag{5.14}$$

olsun. Bu durumda her $s \geq s_0$ ve $u \in H_0^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(\delta)} (s|\nabla_y u|^2 + s|\nabla_x u|^2 + s^3|u|^2)e^{2s\varphi}dxdydt \\ \leq\ & C\int_{\Omega(\delta)} |Au|^2 e^{2s\varphi}dxdydt \end{aligned} \tag{5.15}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ sabitleri vardır.

İspat. $C_0^\infty(\Omega(\delta))$ fonksiyonlar uzayı, $H_0^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))$ fonksiyonlar uzayında yoğun olduğundan her $u \in H_0^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))$ fonksiyonuna bir $u_n \in C_0^\infty(\Omega(\delta))$ dizisi ile yaklaşılabilir. Gerçekten, Reddy (1998, s. 243 Teorem 8)'den $H_0^m(\Omega(\delta))$ uzayı, $C_0^\infty(\Omega(\delta))$'nın $\|.\|_{H^m}$ normuna göre tamlanışıdır. Diğer taraftan, tamlanış tanımından $C_0^\infty(\Omega(\delta))$, $H_0^m(\Omega(\delta))$ da yoğundur. Ayrıca $H_0^{(2,2,1)}(\Omega(\delta)) \subset H_0^m(\Omega(\delta))$ olduğundan $C_0^\infty(\Omega(\delta))$, $H_0^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))$ da yoğundur. Bu nedenle (5.15) eşitsizliğini $u \in C_0^\infty(\Omega(\delta))$ için ispatlamak yeterli olacaktır. O halde, Isakov (2006) tarafından elde edilen genel sonuç (Teorem 5.1) burada kullanılarak Önerme 5.1 ispatlanabilir.

A operatörünün m. temel kısmı

$$A_m(x,y,t,\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2 - \sum_{k=n+1}^{n+m} \zeta_k^2 - a_0\zeta_{n+m+1} \tag{5.16}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + is\nabla_{x,y,t}\varphi,\ \xi = \left(\xi_x, \xi_y, \xi_{n+m+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+m+1}, \\ \xi_x &= (\xi_1, \cdots, \xi_n),\ \xi_y = \left(\xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+m}\right) \end{aligned}$$

dir. Teorem 5.1'den,

$A_m(x,y,t,\zeta)=0,\ \zeta\neq 0,\ \ (x,y,t)\in\overline{\Omega(\delta)}$

iken

$$J(x,y,t,\zeta)=\sum_{k,j=1}^{n+m+1}\partial_j\partial_k\varphi\left(\partial A_m/\partial\zeta_j\right)\left(\overline{\partial A_m/\partial\zeta_k}\right)$$
$$+\frac{1}{s}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n+m+1}\left(\partial_k A_m\right)\left(\overline{\partial A_m/\partial\zeta_k}\right)\right)>0 \tag{5.17}$$

olduğunu göstermeliyiz. (5.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned}A_m(x,y,t,\zeta) &= |\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2-a_0\xi_{n+m+1}+2is\xi_x\cdot\nabla_x\varphi-2is\xi_y\cdot\nabla_y\varphi\\ &\quad -ia_0s\partial_t\varphi-s^2\left|\nabla_x\varphi\right|^2+s^2\left|\nabla_y\varphi\right|^2\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$|\xi_x|^2=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2,\ \ \left|\xi_y\right|^2=\sum_{k=1}^{m}\xi_{n+k}^2,\ \ |\nabla_x\varphi|^2=\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}^2\varphi,\ \ |\nabla_y\varphi|^2=\sum_{k=1}^{m}\partial_{y_k}^2\varphi$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\nabla_x\varphi &= \gamma\varphi\nabla_x\psi,\ \nabla_y\varphi=\gamma\varphi\nabla_y\psi,\ \partial_t\varphi=\gamma\varphi\partial_t\psi,\\ |\nabla_x\varphi|^2 &= \gamma^2\varphi^2\left|\nabla_x\psi\right|^2,\ \ |\nabla_y\varphi|^2=\gamma^2\varphi^2\left|\nabla_y\psi\right|^2\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}A_m(x,y,t,\zeta) &= |\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2-a_0\xi_{n+m+1}+2is\gamma\varphi\xi_x\cdot\nabla_x\psi-2is\gamma\varphi\xi_y\cdot\nabla_y\psi\\ &\quad -ia_0s\gamma\varphi\partial_t\psi-s^2\gamma^2\varphi^2\left|\nabla_x\psi\right|^2+s^2\gamma^2\varphi^2\left|\nabla_y\psi\right|^2\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan, $\zeta=\xi+is\gamma\varphi\nabla_{x,y,t}\psi$ için $A_m(x,y,t,\zeta)=0$ eşitliğinin reel ve sanal kısımları sırasıyla

$$|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2-a_0\xi_{n+m+1}=s^2\gamma^2\varphi^2\left(|\nabla_x\psi|^2-|\nabla_y\psi|^2\right), \tag{5.18}$$

$$2\left(\xi_x\cdot\nabla_x\psi-\xi_y\cdot\nabla_y\psi\right)=a_0\partial_t\psi \tag{5.19}$$

bağıntılarına denktir. (5.17) eşitliğinin sağ tarafının birinci ve ikinci terimini sırasıyla J_1 ve J_2 ile gösterelim.

Ayrıca

$$\partial_j=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x_j}, & 1\leq j\leq n,\\ \frac{\partial}{\partial y_j}, & 1\leq j\leq m,\\ \frac{\partial}{\partial t}, & j=n+m+1\end{cases}$$

gösterimlerini kullanalım. Bu durumda

$$\partial_k\varphi = \gamma\varphi\partial_k\psi,\ \partial_j\partial_k\varphi = \gamma^2\varphi\partial_k\psi\partial_j\psi + \gamma\varphi\partial_j\partial_k\psi,\ 1 \leq k,\ j \leq n+m+1 \tag{5.20}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{k,j=1}^{n+m+1} \gamma^2\varphi\partial_k\psi\partial_j\psi \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j}\overline{\frac{\partial A_m}{\partial\zeta_k}} + \sum_{k,j=1}^{n+m+1} \gamma\varphi\partial_j\partial_k\psi \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j}\overline{\frac{\partial A_m}{\partial\zeta_k}} \\ &: = J_{11} + J_{12} \end{aligned}$$

elde edilir ve burada

$$J_{11} = \gamma^2\varphi \left| \sum_{j=1}^{n+m+1} \partial_j\psi \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j} \right|^2,$$

$$J_{12} = \sum_{j=1}^{n} 2\gamma\varphi \left| \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j} \right|^2 - \sum_{j=n+1}^{n+m} 2\gamma\varphi \left| \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j} \right|^2 - 2\gamma\varphi\beta \left| \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_{n+m+1}} \right|^2$$

dir. (5.19) ve (5.20) bağıntılarından

$$\begin{aligned} J_{11} &= \gamma^2\varphi \left| \sum_{j=1}^{n+m+1} \partial_j\psi \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j} \right|^2 \\ &= \gamma^2\varphi \left| \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}\psi\,(2\zeta_k) - \sum_{k=1}^{m} \partial_{y_k}\psi\,\left(2\zeta_{n+k}\right) - \partial_t\psi a_0 \right|^2 \\ &= \gamma^2\varphi \left| \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}\psi\,(2\xi_k + 2is\gamma\varphi\partial_{x_k}\psi) - \sum_{k=1}^{m} \partial_{y_k}\psi\,\left(2\xi_{n+k} + 2is\gamma\varphi\partial_{y_k}\psi\right) - \partial_t\psi a_0 \right|^2 \\ &= \gamma^2\varphi \left| 2\xi_x \cdot \nabla_x\psi - 2\xi_y \cdot \nabla_y\psi + 2is\gamma\varphi\left(|\nabla_x\psi|^2 - |\nabla_y\psi|^2\right) - \partial_t\psi a_0 \right|^2 \\ &= 4s^2\gamma^4\varphi^3\left(|\nabla_x\psi|^2 - |\nabla_y\psi|^2\right)^2 \end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir.

Benzer hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} J_{12} &= \sum_{j=1}^{n} 2\gamma\varphi \left| \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j} \right|^2 - \sum_{j=n+1}^{n+m} 2\gamma\varphi \left| \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_j} \right|^2 - 2\gamma\varphi\beta \left| \frac{\partial A_m}{\partial\zeta_{n+m+1}} \right|^2 \\ &= 2\gamma\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} |2\zeta_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} \left|-2\zeta_{n+k}\right|^2 - \beta\,|-a_0|^2 \right) \\ &= 2\gamma\varphi\left(4\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \sum_{k=1}^{m} \xi_{n+k}^2 \right) + 4s^2\gamma^2\varphi^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2\psi - \sum_{k=1}^{m} \partial_{y_k}^2\psi \right) - \beta a_0^2 \right) \\ &= 8\gamma\varphi\left(|\xi_x|^2 - \left|\xi_y\right|^2 \right) + 8s^2\gamma^3\varphi^3\left(|\nabla_x\psi|^2 - |\nabla_y\psi|^2\right) - 2\gamma\varphi\beta a_0^2 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
J_2 &= s^{-1}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n+m+1}(\partial_k A_m)\left(\overline{\partial A_m/\partial\zeta_k}\right)\right)\\
&= s^{-1}\operatorname{Im}\left(-\sum_{k=1}^{n}(\partial_{x_k}a_0)\,\zeta_{n+m+1}\left(2\overline{\zeta_k}\right)-\sum_{k=1}^{m}(\partial_{y_k}a_0)\,\zeta_{n+m+1}\left(-2\overline{\zeta_{n+k}}\right)\right)\\
&= s^{-1}\operatorname{Im}\left(-\sum_{k=1}^{n}2\,(\partial_{x_k}a_0)\left(\xi_{n+m+1}+is\gamma\varphi\partial_t\psi\right)(\xi_k-is\gamma\varphi\partial_{x_k}\psi)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=1}^{m}2\,(\partial_{y_k}a_0)\left(\xi_{n+m+1}+is\gamma\varphi\partial_t\psi\right)\left(\xi_{n+k}-is\gamma\varphi\partial_{y_k}\psi\right)\right)\\
&= s^{-1}\operatorname{Im}\left(-\sum_{k=1}^{n}2\,(\partial_{x_k}a_0)\left(\xi_{n+m+1}\xi_k-is\gamma\varphi\xi_{n+m+1}\partial_{x_k}\psi+is\gamma\varphi\xi_k\partial_t\psi\right.\right.\\
&\quad\left.+s^2\gamma^2\varphi^2\partial_t\psi\partial_{x_k}\psi\right)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}2\,(\partial_{y_k}a_0)\left(\xi_{n+m+1}\xi_{n+k}-is\gamma\varphi\xi_{n+m+1}\partial_{y_k}\psi+is\gamma\varphi\xi_{n+k}\partial_t\psi\right.\\
&\quad\left.\left.+s^2\gamma^2\varphi^2\partial_t\psi\partial_{y_k}\psi\right)\right)\\
&= \gamma\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}2\,(\partial_{x_k}a_0)\left(\xi_{n+m+1}\partial_{x_k}\psi-\xi_k\partial_t\psi\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=1}^{m}2\,(\partial_{y_k}a_0)\left(-\xi_{n+m+1}\partial_{y_k}\psi+\xi_{n+k}\partial_t\psi\right)\right)\\
&= \gamma\varphi\xi_{n+m+1}\left(2\nabla_x a_0\cdot\nabla_x\psi-2\nabla_y a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&\quad+\gamma\varphi\beta t\left(4\nabla_x a_0\cdot\xi_x-4\nabla_y a_0\cdot\xi_y\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned}
J_{12}+J_2 &= 8\gamma\varphi\left(|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2\right)+8s^2\gamma^3\varphi^3\left(|\nabla_x\psi|^2-|\nabla_y\psi|^2\right)-2\gamma\varphi\beta a_0^2\\
&\quad+\gamma\varphi\xi_{n+m+1}\left(2\nabla_x a_0\cdot\nabla_x\psi-2\nabla_y a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&\quad+\gamma\varphi\beta t\left(4\nabla_x a_0\cdot\xi_x-4\nabla_y a_0\cdot\xi_y\right)\\
&= \gamma\varphi a_0^{-1}\left(|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2\right)\left(8a_0+2\nabla_x a_0\cdot\nabla_x\psi-2\nabla_y a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&\quad+s^2\gamma^3\varphi^3a_0^{-1}\left(8a_0-2\nabla_x a_0\cdot\nabla_x\psi+2\nabla_y a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&\quad+\gamma\varphi\beta t\left(4\nabla_x a_0\cdot\xi_x-4\nabla_y a_0\cdot\xi_y\right)-2\gamma\varphi\beta a_0^2
\end{aligned}$$

olur.

$$J_{11}=4s^2\gamma^4\varphi^3\left(|\nabla_x\psi|^2-|\nabla_y\psi|^2\right)^2,$$

$$
\begin{aligned}
J_{12}+J_2 &= \gamma\varphi a_0^{-1}\left(|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2\right)\left(8a_0+2\nabla_x a_0\cdot\nabla_x\psi-2\nabla_y a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&+s^2\gamma^3\varphi^3 a_0^{-1}\left(8a_0-2\nabla_x a_0\cdot\nabla_x\psi+2\nabla_y a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&+\gamma\varphi\beta t\left(4\nabla_x a_0\cdot\xi_x-4\nabla_y a_0\cdot\xi_y\right)-2\gamma\varphi\beta a_0^2
\end{aligned}
$$

eşitliklerinde $s=0$ olarak alındığında

$$
\begin{aligned}
J_{12}+J_2 &= \gamma\varphi\left(|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2\right)\left(8a_0+2\nabla_x\log a_0\cdot\nabla_x\psi-2\nabla_y\log a_0\cdot\nabla_y\psi\right)\\
&+\gamma\varphi\beta t\left(4\nabla_x a_0\cdot\xi_x-4\nabla_y a_0\cdot\xi_y\right)-2\gamma\varphi\beta a_0^2
\end{aligned}
$$

bulunur. (5.14) eşitsizliğinin sol tarafı ε_1 ile gösterilir ve

$$
J_{12}+J_2\geq\gamma\varphi\left(\left(|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2\right)\varepsilon_1-C\left(\beta+\beta T\right)\right) \tag{5.22}
$$

yazılabilir. Burada $C>0$, a_0 ve Ω büyüklüklerine bağlı sabitlerdir. (5.22) eşitsizliğinde $|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2>0$ ve $\beta>0$ yeterince küçük olacak şekilde seçilirse

$$
\left(\left(|\xi_x|^2-\left|\xi_y\right|^2\right)\varepsilon_1-C\left(\beta+\beta T\right)\right)>0
$$

olduğu görülür. Bu nedenle $J_{12}+J_2>0$ olur ve buradan $J\left(x,y,t,\zeta\right)>0$ bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

5.2.1 Kararlılık Değerlendirmeleri

Teorem 5.5 *Kabul edelim ki $u\in H^{(2,2,1)}\left(\Omega\right)$ fonksiyonu (5.10)-(5.11) bağıntılarını sağlasın. Ayrıca*

$$
\max_{x\in\overline{D}}|x-x_0|<\sqrt{L^2+\delta^2}, \tag{5.23}
$$

$$
\max_{x\in\overline{D}}|x-x_0|<\sqrt{\beta T^2+\delta^2} \tag{5.24}
$$

eşitsizlikleri ve $\Gamma\subset\partial D$ alt sınırı için

$$
\Gamma\supset\partial D\cap\left\{|x-x_0|\geq\delta\right\} \tag{5.25}
$$

koşulu sağlansın. Bu durumda her $\delta_1>\delta$ için

$$
\|u\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta_1))}\leq C\varepsilon^{\kappa}\left(\varepsilon^{1-\kappa}+\|u\|^{1-\kappa}_{H^{(1,1,0)}(\Omega)}\right) \tag{5.26}
$$

olacak şekilde $C>0$ ve $\kappa\in(0,1)$ sabitleri vardır. Burada

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(-T,T;\,H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times L^2(G))}+\|g\|_{H^2\left(-T,T;\,H^{\delta}(\Gamma)\times L^2(G)\right)}\\
&+\|g\|_{L^2\left(-T,T;\,H^{\delta}(\Gamma)\times H^2(G)\right)}+\|h\|_{L^2(-T,T;\,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times L^2(G))}\\
&+\|h\|_{H^2\left(-T,T;\,H^{\delta}(\Gamma)\times L^2(G)\right)}+\|h\|_{L^2\left(-T,T;\,H^{\delta}(\Gamma)\times H^2(G)\right)}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı olup τ keyfi pozitif bir sayıdır.

İspat. Öncelikle problemin ele alındığı alt bölge ve bu alt bölgenin sınırlarını belirlemek gerekir. Bu amaçla

$$\widetilde{r} = \max_{x \in \overline{D}} |x - x_0| \tag{5.27}$$

olmak üzere $x \in \overline{D}$, $|y| \leq L$ ve $\psi(x, y, t) > \delta^2$ için (5.24) eşitsizliğinden

$$\delta^2 < \psi(x, y, t) \leq \widetilde{r}^2 - \beta |t|^2 \leq \beta T^2 + \delta^2 - \beta |t|^2$$

yazılabilir. Buradan $|t| < T$ elde edilir.
Diğer taraftan $\partial\Omega(\delta)$ sınırı $\partial\Omega(\delta) = \bigcup_{j=1}^{5} \Gamma_j$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= (\partial D \times G \times (-T, T)) \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ \psi(x, y, t) > \delta^2\right\}, \\
\Gamma_2 &= (D \times \partial G \times (-T, T)) \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ \psi(x, y, t) > \delta^2\right\}, \\
\Gamma_3 &= (D \times G \times (-T, T)) \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ \psi(x, y, t) = \delta^2\right\}, \\
\Gamma_4 &= (D \times G \times \{t = T\}) \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ \psi(x, y, t) > \delta^2\right\}, \\
\Gamma_5 &= (D \times G \times \{t = -T\}) \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ \psi(x, y, t) > \delta^2\right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\Gamma_2 = \emptyset$ olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten de, (5.23) eşitsizliğinden

$$\delta^2 < \psi(x, y, t) \leq \widetilde{r}^2 - |y|^2 \leq \widetilde{r}^2 - L^2 < \delta^2$$

elde edilir, bu ise imkansızdır.
Şimdi $\Gamma_4 = \emptyset$ ve $\Gamma_5 = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Bu durumda (5.24) eşitsizliğinden

$$\delta^2 < \psi(x, y, t) \leq \widetilde{r}^2 - \beta |t|^2 \leq \widetilde{r}^2 - \beta T^2 < \delta^2$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir.
Ayrıca $\Gamma_1 \subset (\partial D \times G \times (-T, T)) \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ |x - x_0| > \delta\right\}$ olduğundan

$$\Gamma_1 \subset \Gamma \times G \times (-T, T)$$

şeklindedir ve böylece

$$\partial\Omega(\delta) \subset (\Gamma \times G \times (-T, T)) \cup \left(\Omega \cap \left\{(x, y, t) \in \overline{\Omega};\ \psi(x, y, t) = \delta^2\right\}\right) \tag{5.28}$$

olur.

Burada Sobolev uzayları için genişleme teoremini tekrar hatırlayalım (Lions and Magenes 1972, s. 41):

Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık ve sınırlı bir bölgesi olsun. Ω bölgesinin Γ sınırı $n-1$ boyutlu düzgün bir manifold olsun.

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma \,,\ \gamma_1 u = \partial_\nu u|_\Gamma$$

olmak üzere $\sigma > \frac{1}{2}$ için

$$\gamma_0 : H^\sigma(\Omega) \longleftrightarrow H^{\sigma-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,,\ \gamma_1 : H^{\sigma+1}(\Omega) \longleftrightarrow H^{\sigma-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

olup özel olarak

$$\gamma_0 : H^2(\Omega) \longleftrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\,,\ \gamma_1 : H^2(\Omega) \longleftrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

dönüşümleri tanımlıdır.

O halde, τ keyfi pozitif bir sayı olmak üzere genişleme teoreminden

$$\gamma_0 F = g,\ \gamma_1 F = h,\ \ (x,y,t) \in \Gamma \times G \times (-T,T) \tag{5.29}$$

olacak şekilde bir $F \in H^{(2,2,1)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır ve $AF \in L^2(-T,T;\ L^2(D) \times L^2(G))$ yani

$$\begin{aligned} \Delta_x F &\in L^2\left(-T,T;\ L^2(D) \times L^2(G)\right), && (5.30)\\ \Delta_y F &\in L^2\left(-T,T;\ L^2(D) \times L^2(G)\right), && (5.31)\\ \partial_t F &\in L^2\left(-T,T;\ L^2(D) \times L^2(G)\right) && (5.32) \end{aligned}$$

dir. Böylece (5.29) ve (5.30)'dan

$$g \in L^2(-T,T;\ H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times L^2(G)),\ h \in L^2(-T,T;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times L^2(G))$$

olur. (5.29) ve (5.31)'den

$$g \in L^2\left(-T,T;\ H^\tau(\Gamma) \times H^2(G)\right), h \in L^2\left(-T,T;\ H^\tau(\Gamma) \times H^2(G)\right)$$

bulunur. (5.29) ve (5.32)'den

$$g \in H^1\left(-T,T;\ H^\tau(\Gamma) \times L^2(G)\right),\ h \in H^1\left(-T,T;\ H^\tau(\Gamma) \times L^2(G)\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\|F\|^2_{H^{(2,2,1)}(\Omega)} \leq \quad & C\Big(\|g\|^2_{L^2(-T,T;\ H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times L^2(G))} + \|g\|^2_{H^1(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times L^2(G))} \\
& + \|g\|^2_{L^2(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times H^2(G))} + \|h\|^2_{L^2(-T,T;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times L^2(G))} \\
& + \|h\|^2_{H^1(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times L^2(G))} + \|h\|^2_{L^2(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times H^2(G))}\Big) \\
\equiv \quad & CD \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

olur.

Diğer yandan, $v = u - F$ olarak alınırsa (5.10) ve (5.11) bağıntılarından

$$
\begin{aligned}
& Av = f - AF, \ \ (x,y,t) \in \Omega, \\
& \ \ v = \partial_\nu v = 0, \ \ (x,y,t) \in \Gamma \times G \times (-T,T) \qquad (5.34)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bir önceki bölümde ispatladığımız Önerme 5.1'i uygulamak için Cauchy verilerinin $\partial\Omega\,(\delta)$ sınırında sıfır olması gerekir. Bu amaçla $0 \leq \chi\,(x,y,t) \leq 1$ ve

$$
\chi\,(x,y,t) = \begin{cases} 1, & (x,y,t) \in \Omega\,(\delta + 2\varepsilon)\,, \\ 0, & (x,y,t) \in \mathbb{R}^{n+m+1} \backslash \Omega\,(\delta + \varepsilon) \end{cases} \qquad (5.35)
$$

olacak şekilde bir $\chi = \chi\,(x,y,t) \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{n+m+1}\right)$ kesme fonksiyonu tanımlayalım.
Buna göre $w = \chi v$ olsun. (5.34)'deki Cauchy verileri, kesme fonksiyonu tanımı ve (5.28) bağıntılarından $w \in H_0^{(2,2,1)}\left(\Omega\,(\delta)\right)$ olduğu görülür. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
Aw \ \ = \ \ & ia_0 v\,(\partial_t\chi) + 2\nabla_y v \cdot \nabla_y \chi + v\Delta_y\chi - 2\nabla_x v \cdot \nabla_x \chi - v\Delta_x\chi \\
& + \sum_{i=1}^{n} a_i\,(\partial_{x_i}\chi)\,v + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\partial_{y_j}\chi\right)v + (f - AF)\,\chi
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu durumda w fonksiyonuna Carleman değerlendirmesi uygulanabilir:

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_{\Omega(\delta)} \left(s^3\,|w|^2 + s\,|\nabla_y w|^2 + s\,|\nabla_x w|^2\right) e^{2s\varphi} dxdydt \\
& \leq C \int\limits_{\Omega(\delta)} |ia_0 v\,(\partial_t\chi) + 2\nabla_y v \cdot \nabla_y\chi + v\Delta_y\chi - 2\nabla_x v \cdot \nabla_x\chi - v\Delta_x\chi \\
& + \sum_{i=1}^{n} a_i\,(\partial_{x_i}\chi)\,v + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\partial_{y_j}\chi\right)\,v|^2\, e^{2s\varphi} dxdydt \\
& + C \int\limits_{\Omega(\delta)} |f - AF|^2\, e^{2s\varphi} dxdydt. \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan,

$\mu_2 = e^{\gamma(\delta+2\varepsilon)^2}$

olmak üzere (5.35) fonksiyonunun tanımından $\partial_t\chi$, $\nabla_y\chi$, $\nabla_x\chi$, $\Delta_y\chi$, $\Delta_x\chi$ fonksiyonlarının supportu $\Omega(\delta+\varepsilon)/\Omega(\delta+2\varepsilon)$ bölgesinin alt kümeleri olduğundan

$$
\begin{aligned}
&C\int\limits_{\Omega(\delta)} \left|ia_0 v\left(\partial_t\chi\right) + 2\nabla_y v\cdot\nabla_y\chi + v\Delta_y\chi - 2\nabla_x v\cdot\nabla_x\chi - v\Delta_x\chi\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\partial_{x_i}\chi\right)v + \sum_{j=1}^{m} b_j\left(\partial_{y_j}\chi\right)v\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt\\
&\le Ce^{2s\mu_2}\int\limits_{\Omega(\delta+\varepsilon)/\Omega(\delta+2\varepsilon)}\left(|v|^2+|\nabla_y v|^2+|\nabla_x v|^2\right)dxdydt\\
&\le C\|v\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}e^{2s\mu_2}
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte $v = u - F$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega(\delta)}\left(s^3|w|^2 + s|\nabla_y w|^2 + s|\nabla_x w|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt\\
&\le C\|v\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}e^{2s\mu_2} + C\int\limits_{\Omega(\delta)}|f-AF|^2 e^{2s\varphi}dxdydt\\
&\le C\left(\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} + C\|F\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}\right)e^{2s\mu_2} + Ce^{2sC}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega(\delta))} + \|F\|^2_{H^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))}\right)\\
&\le C\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}e^{2s\mu_2} + Ce^{2sC}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega(\delta))} + \|F\|^2_{H^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))}\right)\\
&\le C\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}e^{2s\mu_2} + Ce^{2sC}\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega(\delta))} + D\right)
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

elde edilir. (5.38) de $\int\limits_{\Omega(\delta)}|f-AF|^2 e^{2s\varphi}dxdydt \le 2\int\limits_{\Omega(\delta)}\left(|f|^2+|AF|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt$ ve

$$
\begin{aligned}
&C\int\limits_{\Omega(\delta)}|AF|^2 e^{2s\varphi}dxdydt\\
=\;&C\int\limits_{\Omega(\delta)}\left|ia_0\partial_t F + \Delta_y F - \Delta_x F + \sum_{i=1}^{n}a_i\partial_{x_i}F + \sum_{j=1}^{m}b_j\partial_{y_j}F + cF\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt\\
\le\;&C\int\limits_{\Omega(\delta)}\left(|\partial_t F|^2 + |\Delta_y F|^2 + |\Delta_x F|^2 + |F|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt\\
\le\;&Ce^{2sC}\|F\|^2_{H^{(2,2,1)}(\Omega(\delta))}
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Diğer yandan, (5.36) eşitsizliğinin sol tarafı için $w = \chi v$ eşitliği ve (5.35) dikkate alındığında $\mu_3 = e^{\gamma(\delta+3\varepsilon)^2}$ olmak üzere

$$\int\limits_{\Omega(\delta)} \left(s^3 |w|^2 + s |\nabla_y w|^2 + s |\nabla_x w|^2\right) e^{2s\varphi} dxdydt$$
$$\geq \int\limits_{\Omega(\delta+3\varepsilon)} \left(s^3 \left|v^2\chi^2\right| + s |\nabla_y (v\chi)|^2 + s |\nabla_x (v\chi)|^2\right) e^{2s\varphi} dxdydt$$
$$\geq e^{2s\mu_3} \int\limits_{\Omega(\delta+3\varepsilon)} \left(s^3 |v|^2 + s |\nabla_y v|^2 + s |\nabla_x v|^2\right) dxdydt \tag{5.39}$$

bulunur. Bu durumda (5.38)-(5.39) eşitsizliklerinden

$$e^{2s\mu_3} \int\limits_{\Omega(\delta+3\varepsilon)} \left(s^3 |v|^2 + s |\nabla_y v|^2 + s |\nabla_x v|^2\right) dxdydt$$
$$\leq \; C \|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} e^{2s\mu_2} + Ce^{2sC} \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + D\right)$$

olur, yani her $s \geq s_0$ için

$$\|v\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C \|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} e^{-s\mu} + Ce^{2sC} D_1 \tag{5.40}$$

olacak şekilde bir $s_0 > 0$ sabiti vardır. Burada, $\mu = \mu_3 - \mu_2 > 0$ ve $D_1 = D + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$ şeklindedir.

Son eşitsizlikte s ve C yerine sırasıyla $s + s_0$ ve Ce^{Cs_0} alınırsa her $s \geq 0$ için (5.40) eşitsizliği sağlanır. Değerlendirmenin tamamlanması için iki farklı durum ele alınacaktır.

1. Durum (5.40) eşitsizliğinde $D_1 = 0$ olarak alınırsa $u = v$ bulunur ve $s \to \infty$ iken, $\Omega(\delta + 3\varepsilon)$ bölgesinde $u = 0$ elde edilir. Böylece (5.26) sağlanır.

2. Durum $D_1 > 0$ olsun. İlk olarak eğer $\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} \leq D_1$ ise, bu durumda (5.40) eşitsizliği $s \geq 0$ için $\|v\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq Ce^{2sC} (D_1)^{\frac{1}{2}}$ olarak bulunur. Bu durumda (5.26) sağlanır.

İkinci olarak $\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} > D_1$ olsun.

$$\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} e^{-s\mu} = e^{2sC} D_1, \text{ yani, } s = \frac{1}{2C + \mu} \log \left(\frac{\|u\|^2_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}}{D_1} \right) > 0$$

olur. Bu durumda (5.37) eşitsizliğinden

$$\|v\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C \|u\|^{\frac{2C}{2C+\mu}}_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))} D_1^{\frac{\mu}{2(2C+\mu)}}$$

sağlanır.

Ayrıca $\kappa = \frac{\mu}{2C+\mu}$ olmak üzere

$$\|v\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C\,\|u\|^{1-\kappa}_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}\,(D_1)^{\frac{\kappa}{2}}$$

yazılabilir. İki durum birlikte değerlendirilerek

$$\|v\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C\left(\|u\|^{1-\kappa}_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}\,(D_1)^{\frac{\kappa}{2}} + (D_1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

bulunur. Ayrıca $\|u\| - \|F\| \leq \|u-F\| = \|v\|$ olduğundan

$$\|u\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} - \|F\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C\,\|u\|^{1-\kappa}_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}\,(D_1)^{\frac{\kappa}{2}} + C\,(D_1)^{\frac{1}{2}}$$

olur. $\|F\|^2_{H^{(2,2,1)}(\Omega)} \leq CD$ eşitsizliğinden

$$\|u\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C\left(\|u\|^{1-\kappa}_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta))}\,(D_1)^{\frac{\kappa}{2}} + (D_1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

elde edilir. Son olarak $(a+b)^{\kappa} \leq a^{\kappa} + b^{\kappa}$, $0 < \kappa < 1$ temel eşitsizliğinden

$$\|u\|_{H^{(1,1,0)}(\Omega(\delta+3\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{\kappa}\left(\varepsilon^{1-\kappa} + \|u\|^{1-\kappa}_{H^{(1,1,0)}(\Omega)}\right)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\varepsilon \;=\; & \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(-T,T;\ H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times L^2(G))} + \|g\|_{H^1(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times L^2(G))} \\
& + \|g\|_{L^2(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times H^2(G))} + \|h\|_{L^2(-T,T;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times L^2(G))} \\
& + \|h\|_{H^1(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times L^2(G))} + \|h\|_{L^2(-T,T;\ H^{\tau}(\Gamma)\times H^2(G))}
\end{aligned}$$

olarak alınmıştır. Böylece Teorem 5.5'in ispatı tamamlanır. ∎

BÖLÜM 6

ULTRAHİPERBOLİK SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Bu bölümde, ultrahiperbolik Schrödinger denklemi için bazı ters problemlerin çözümlerinin kararlılığı Carleman değerlendirmeleri kullanılarak araştırılmıştır.
Kabul edelim ki, n, $m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ olmak üzere $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi ∂D düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun. Ayrıca $L > 0$ için $G = \{y \in \mathbb{R}^m;\ |y| < 2L\}$ şeklinde verilsin.
$Q = D \times G \times (-T, T)$ bölgesinde

$$i\partial_t v(x,y,t) + \Delta_y v(x,y,t) - \Delta_x v(x,y,t) - p(x,y)v(x,y,t) = 0,\ (x,y,t) \in Q \tag{6.1}$$

ultrahiperbolik Schrödinger denklemi

$$v(x,y,0) = a(x,y),\ (x,y) \in D \times G \tag{6.2}$$

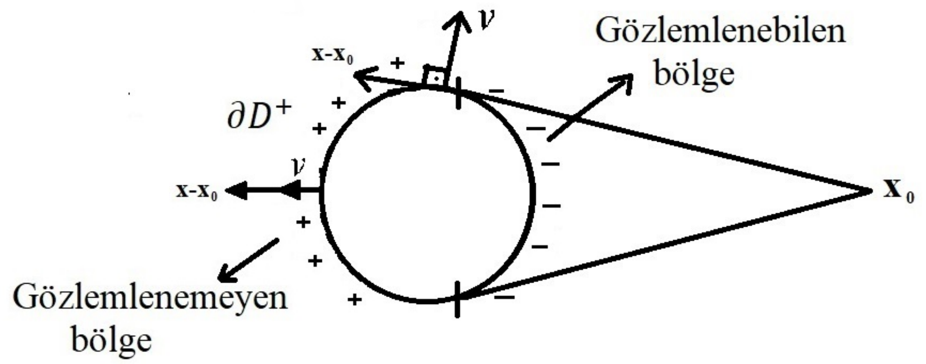
başlangıç koşulu ve

$$v(x,y,t) = 0,\ (x,y,t) \in \partial D \times G \times (-T,T) \tag{6.3}$$

Dirichlet sınır koşulu ile birlikte ele alınmıştır.
$v = v(p)$, (6.1)–(6.3) bağıntılarını sağlasın. Aşağıdaki katsayı ters problemini göz önüne alalım:
Problem 6.1 (6.1) denkleminden (6.2) başlangıç ve (6.3) sınır koşulları altında $p(x,y)$, $(x,y) \in D \times G$ katsayısının $\partial_\nu v(p)|_{\partial D_+ \times G \times (-T,T)}$ ek bilgisi yardımıyla belirlenmesi problemi.
Burada, $x_0 \notin \overline{D}$ için

$$\partial D_+ = \{x \in \partial D;\ (x - x_0) \cdot \nu \geq 0\}$$

şeklinde tanımlı bir sınır parçası olup $\nu \in \mathbb{R}^n$, ∂D sınırına göre birim dış normal vektörü göstermektedir (Şekil 6.1).



Şekil 6.1: Problem 6.1 için geometrik şart.

Problem 6.1 ters kaynak problemine indirgenebilir. Gerçektende $v(p)$ ve $v(q)$ sırasıyla p ve q katsayılı (6.1)–(6.3) bağıntılarının iki çözümü olmak üzere $u = v(p) - v(q)$, $f(x, y) = p(x, y) - q(x, y)$, $R = v(q)(x, y, t)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} Au &= i\partial_t u(x,y,t) + \Delta_y u(x,y,t) - \Delta_x u(x,y,t) - p(x,y)u(x,y,t) \\ &= f(x,y)R(x,y,t),\ (x,y,t) \in Q, \qquad (6.4) \\ u(x,y,0) &= 0,\ (x,y) \in D \times G, \qquad (6.5) \\ u(x,y,t) &= 0,\ (x,y,t) \in \partial D \times G \times (-T,T) \qquad (6.6) \end{aligned}$$

ters kaynak problemi elde edilir.

Problem 6.2 Uygun p ve R fonksiyonları için $f(x, y)$, $(x, y) \in D \times G$ fonksiyonunun $\partial_\nu u|_{\partial D_+ \times G \times (-T,T)}$ ek bilgisi yardımıyla belirlenmesi problemini ele alalım.
Burada $v(p)$ ve $v(q)$ çözümlerinin varlığı kabul edilirken tekliği ile ilgili bir kabul söz konusu değildir. Problem 6.2 için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

6.1 CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Bu bölümde, kararlılık değerlendirmelerinin ispatında kullanacağımız

$$Lw := i\partial_t w\,(x,y,t) + \Delta_y w\,(x,y,t) - \Delta_x w\,(x,y,t) + \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x,y,t)\, w_{x_i}$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} b_j\,(x,y,t)\, w_{y_j} + a_0\,(x,y,t)\, w \qquad (6.7)$$

ultrahiperbolik Schrödinger denklemi için bir Carleman değerlendirmesi verilmiştir. Ayrıca $G^{'} \subset G$ olmak üzere $Q^{'} = D \times G^{'} \times (-T, T)$ alt bölgesini göz önüne alalım. (6.7) denkleminde $0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ için a_i, $b_j \in L^{\infty}(Q^{'})$ olarak kabul edilmektedir.
$x_0 \notin \overline{D}$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, α, $\beta \in (0, 1)$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere

$$\varphi\left(x, y, t\right) = e^{\gamma\psi(x,y,t)} \tag{6.8}$$

şeklinde bir ağırlık fonksiyonu tanımlayalım. Burada

$$\psi\left(x, y, t\right) = |x - x_0|^2 - \alpha|y - y_0|^2 - \beta\left|t\right|^2 \tag{6.9}$$

olarak alınmıştır.

Önerme 6.1 *Kabul edelim ki bir $\delta_0 > 0$ için*

$$|x - x_0|^2 - \alpha^2|y - y_0|^2 > \delta_0, \ \ (x, y) \in D \times G^{'} \tag{6.10}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda her $s \geq s_0$ ve

$$\begin{aligned} w\left(x, y, t\right) &= 0, \ \ (x, y, t) \in \partial D \times G^{'} \times (-T, T), \\ w\left(x, y, t\right) &= \left|\nabla_y w\left(x, y, t\right)\right| = 0, \ \ (x, y, t) \in D \times \partial G^{'} \times (-T, T), \\ w\left(x, y, T\right) &= w\left(x, y, -T\right) = 0, \ \ (x, y) \in D \times G^{'} \end{aligned} \tag{6.11}$$

bağıntılarını sağlayan her $w \in H^1(-T, T;\ H^2(D \times G^{'}))$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \int_{Q^{'}} (s\left|\nabla_y w\right|^2 + s\left|\nabla_x w\right|^2 + s^3\left|w\right|^2) e^{2s\varphi} dxdydt \\ \leq \ & C\int_{Q^{'}} \left|Lw\right|^2 e^{2s\varphi} dxdydt + C\int_{\partial D_+ \times G^{'} \times (-T,T)} s\left|\partial_\nu w\right|^2 e^{2s\varphi} dS_x dydt \end{aligned} \tag{6.12}$$

olacak şekilde $C > 0$ ve $s_0 > 0$ sabitleri vardır.

İspat. İlk olarak, ağırlıklı L_2 normlarını kullanabilmek için yeni bilinmeyen z fonksiyonunu ve P_s operatörünü

$$L_0 w := i\partial_t w + \Delta_y w - \Delta_x w = F \tag{6.13}$$

olmak üzere

$$z\left(x, y, t\right) = e^{s\varphi} w\left(x, y, t\right), \ \ P_s z\left(x, y, t\right) = e^{s\varphi} L_0 w \tag{6.14}$$

şeklinde tanımlayalım. (6.13)-(6.14) bağıntılarından

$$\begin{aligned}P_s z &= e^{s\varphi} L_0 w \\ &= i\partial_t z - is\partial_t \varphi z + \Delta_y z - \Delta_x z - 2s\left(\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y z - \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x z\right) \\ &\quad -s\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) z + s^2\left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) z\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$P_s^+ z = i\partial_t z + \Delta_y z - \Delta_x z + s^2\left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) z, \tag{6.15}$$

$$P_s^- z = -2s\left(\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y z - \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x z\right) - s\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) z \tag{6.16}$$

olmak üzere

$$P_s z + is\partial_t \varphi z = P_s^+ z + P_s^- z \tag{6.17}$$

dir. Burada her $z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N$, $z' = \left(z_1', ..., z_N'\right) \in \mathbb{C}^N$ için $z \cdot z' = \sum_{i=1}^{N} z_i z_i'$ şeklinde tanımlanmıştır. Norm tanımı gereği

$$\|P_s z + is\partial_t \varphi z\|_{L^2(Q')}^2 = \left\|P_s^+ z\right\|_{L^2(Q')}^2 + \left\|P_s^- z\right\|_{L^2(Q')}^2 + 2\operatorname{Re}\left(P_s^+ z, P_s^- z\right)_{L^2(Q')} \tag{6.18}$$

yazılabilir. Diğer yandan, (6.15) ve (6.16) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}I_1 &= -4s\operatorname{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\left(\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y \overline{z} - \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \overline{z}\right) dxdydt, \\ I_2 &= -2s\operatorname{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) \overline{z} dxdydt, \\ I_3 &= -4s\operatorname{Re}\int_{Q'} \Delta_y z\left(\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y \overline{z} - \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \overline{z}\right) dxdydt, \\ I_4 &= -2s\operatorname{Re}\int_{Q'} \Delta_y z\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) \overline{z} dxdydt, \\ I_5 &= 4s\operatorname{Re}\int_{Q'} \Delta_x z\left(\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y \overline{z} - \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \overline{z}\right) dxdydt, \\ I_6 &= 2s\operatorname{Re}\int_{Q'} \Delta_x z\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) \overline{z} dxdydt, \\ I_7 &= -4s^3\operatorname{Re}\int_{Q'} \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) z\left(\nabla_y \varphi \cdot \nabla_y \overline{z} - \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \overline{z}\right) dxdydt, \\ I_8 &= -2s^3\operatorname{Re}\int_{Q'} \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) z\left(\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi\right) \overline{z} dxdydt\end{aligned}$$

olmak üzere

$$2\operatorname{Re}\left(P_s^+ z, P_s^- z\right)_{L^2(Q')} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 \tag{6.19}$$

elde edilir. Şimdi, Green formülü yardımıyla ve $z(x,y,\pm T)=0$ olduğunu da göz önünde bulundurarak I_k, $1\leq k\leq 8$ terimlerini değerlendirelim. Aşağıda yapılan işlemlerde $\Gamma_x=\partial D\times G^{'}\times(-T,T)$ ve $\Gamma_y=D\times\partial G^{'}\times(-T,T)$ olarak tanımlanır.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&= 4s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t z\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt-4s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t z\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&= 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t z\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt-\ 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y zdxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t z\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x zdxdydt\\
&= \ 2s\,\mathrm{Im}\int_{D\times G'} z\,\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}\big|_{-T}^{T}\,dxdy-\ 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t\left(\nabla_y\varphi\right)\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt\\
&\quad -\ 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\nabla_y\varphi\cdot\partial_t(\nabla_y\overline{z})dxdydt-2s\,\mathrm{Im}\int_{D\times G'} z\,\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}\big|_{-T}^{T}\,dxdy\\
&\quad -\ 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t\left(\nabla_x\varphi\right)\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt-\ 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\nabla_x\varphi\cdot\partial_t\left(\nabla_x\overline{z}\right)dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y zdxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x zdxdydt\\
&= -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_y\varphi)\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt-2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\left(\varphi_{y_j}z\partial_t\overline{z}\right)_{y_j}dS_y dxdt\\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\nabla_y z\cdot\nabla_y\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\Delta_y\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y zdxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_x\varphi)\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_i}z\partial_t\overline{z}\right)_{x_i}dS_y dxdt-2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\Delta_x\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x zdxdydt\\
&= -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_y\varphi)\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt-2s\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma_y} z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_y\varphi\cdot\nu\right)dS_y dxdt\\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\nabla_y z\cdot\nabla_y\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\Delta_y\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y zdxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_x\varphi)\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma_x} z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_x\varphi\cdot\nu\right)dS_x dydt-2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\Delta_x\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t\overline{z}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x zdxdydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_y\varphi)\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt - 2s\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma_y} z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_y\varphi\cdot\nu\right)dS_ydxdt \\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\Delta_y\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt + 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_x\varphi)\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt \\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma_x} z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_x\varphi\cdot\nu\right)dS_xdydt - 2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\Delta_x\varphi\partial_t\overline{z}dxdydt. \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

(6.20) eşitliğinde $\mathrm{Re}\,(iz) = -\,\mathrm{Im}\,(z)$ ve $\mathrm{Im}\,(z) - \mathrm{Im}\,(\overline{z}) = 2\,\mathrm{Im}\,(z)$ bağıntıları kullanılmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\overline{z}\left(\Delta_y\varphi - \Delta_x\varphi\right)dxdydt \\
&= -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} \partial_t\overline{z}z\left(\Delta_y\varphi - \Delta_x\varphi\right)dxdydt. \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

(6.21) eşitliğinde $\mathrm{Re}\,(iz) = \mathrm{Im}\,(\overline{z})$ eşitliği göz önüne alınmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \Delta_y z\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt + 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \Delta_y z\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt \\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}\right)dxdydt - 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt \\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}\right)dxdydt + 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt \\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i}\overline{z}_{y_i}\right)dxdydt - 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt \\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}\overline{z}_{y_j}\right)dxdydt + 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt \\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \sum_{j=1}^{n}\left(z_{y_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i}\overline{z}_{y_i}\right)_{y_j}\right)dxdydt + 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt \\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \sum_{i=1}^{m}\left(z_{y_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}\overline{z}_{x_j}\right)_{y_i}\right)dxdydt - 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt \\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \sum_{j=1}^{n} z_{y_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{y_iy_j}\overline{z}_{y_i} + \varphi_{y_i}\overline{z}_{y_iy_j}\right)dxdydt \\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \sum_{i=1}^{m} z_{y_i}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_{x_jy_i}\overline{z}_{x_j} + \varphi_{x_j}\overline{z}_{x_jy_i}\right)dxdydt \\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt + 4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}\overline{z}_{y_i}z_{y_j}dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_i}\overline{z}_{y_iy_j}z_{y_j}dxdydt\\
&\quad +4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt-4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_jy_i}\overline{z}_{x_j}z_{y_i}dxdydt\\
&\quad 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_j}\overline{z}_{x_jy_i}z_{y_i}dxdydt-4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt\\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}\overline{z}_{y_i}z_{y_j}dxdydt+2s\int_{Q'}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i}\left(\left|\nabla_y z\right|^2\right)_{y_i}dxdydt\\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt-4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_jy_i}\overline{z}_{x_j}z_{y_i}dxdydt\\
&\quad -2s\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{x_j}\left(\left|\nabla_y z\right|^2\right)_{x_j}dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt\\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}\overline{z}_{y_i}z_{y_j}dxdydt+2s\int_{Q'}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i}\left(\left|\nabla_y z\right|^2\right)_{y_i}dxdydt\\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt-4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_jy_i}\overline{z}_{x_j}z_{y_i}dxdydt\\
&\quad -2s\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{x_j}\left(\left|\nabla_y z\right|^2\right)_{x_j}dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt\\
&= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}\overline{z}_{y_i}z_{y_j}dxdydt-2s\int_{Q'}\Delta_y\varphi\left|\nabla_y z\right|^2dxdydt\\
&\quad +2s\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu\varphi\right)\left|\nabla_y z\right|^2dS_ydxdt-4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_ydxdt\\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_jy_i}\overline{z}_{x_j}z_{y_i}dxdydt+2s\int_{Q'}\Delta_x\varphi\left|\nabla_y z\right|^2dxdydt\\
&\quad -2s\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu\varphi\right)\left|\nabla_y z\right|^2dS_xdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_ydxdt. \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

(6.22) eşitliğinde $\mathrm{Re}\,z_{y_j}\overline{z}_{y_iy_j}=\frac{1}{2}\left(\left|z_{y_j}\right|^2\right)_{y_i}$ bağıntısı dikkate alınmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\Delta_y z\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dxdydt\\
&= 2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}\right)dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dS_ydxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\nabla_y z\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt\\
&\quad +2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\overline{z}\nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dS_ydxdt\\
&= 2s\int_{Q'}\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\left|\nabla_y z\right|^2dxdydt\\
&\quad +s\int_{Q'}\nabla_y\left(|z|^2\right)\cdot\nabla_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdydt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dS_ydxdt\\
&= 2s\int_{Q'}\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\left|\nabla_y z\right|^2dxdydt\\
&\quad -s\int_{Q'}\Delta_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2dxdydt\\
&\quad +s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)|z|^2dS_ydxdt\\
&\quad -2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dS_ydxdt. \qquad (6.23)
\end{aligned}
$$

(6.23) eşitliğinde $\mathrm{Re}\,\overline{z}\nabla_y z=\frac{1}{2}\nabla_y\left(|z|^2\right)$ ifadeleri kullanılmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_5 &= 4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\Delta_x z\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt-4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\Delta_x z\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\left(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}\right)dxdydt-4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_xdydt\\
&\quad +4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\left(\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}\right)dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_xdydt\\
&= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}z_{x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i}\overline{z}_{y_i}\right)_{x_j}dxdydt-4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_xdydt\\
&\quad +4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{n}z_{x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}\overline{z}_{x_i}\right)_{x_j}dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_xdydt\\
&= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{y_ix_j}\overline{z}_{y_i}z_{x_j}+\varphi_{y_i}\overline{z}_{y_ix_j}z_{x_j}\right)dxdydt\\
&\quad +4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\varphi_{x_ix_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}+\varphi_{x_j}\overline{z}_{x_ix_j}z_{x_j}\right)dxdydt\\
&\quad +4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_xdydt-4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_xdydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i x_j}\overline{z}_{y_i}z_{x_j}dxdydt \\
&\quad -2s\int_{Q'}\sum_{i=1}^{m}\varphi_{y_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_{x_j}\right|^2\right)_{y_i}dxdydt \\
&\quad -4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_xdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{x_i y_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt \\
&\quad +2s\int_{Q'}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{x_j}\left(\sum_{i=1}^{m}|z_{x_i}|^2\right)_{x_j}dxdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_xdydt \\
&= -4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{y_i x_j}\overline{z}_{y_i}z_{x_j}dxdydt-2s\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\Delta_y\varphi\,|\nabla_x z|^2\,dxdydt \\
&\quad -2s\int_{\Gamma_y}(\partial_\nu\varphi)\,|\nabla_x z|^2\,dS_ydxdt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}dS_xdydt \\
&\quad +4s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{x_i x_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt-2s\int_{Q'}\Delta_x\varphi\,|\nabla_x z|^2\,dxdydt \\
&\quad -2s\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu\varphi)\,|\nabla_x z|^2\,dS_xdydt+4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_xdydt. \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

(6.24) eşitliğinde $\mathrm{Re}\,z_{x_j}\overline{z}_{x_j y_i}=\frac{1}{2}\left(\left|z_{x_j}\right|^2\right)_{y_i}$ bağıntısı kullanılmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_6 &= 2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\Delta_x z\,(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\overline{z}dxdydt \\
&= -2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\left((\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\overline{z}\right)dxdydt \\
&\quad +2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\partial_\nu z\,(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\overline{z}dS_xdydt \\
&= -2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\nabla_x z\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt \\
&\quad -2s\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\overline{z}\nabla_x z\cdot\nabla_x\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdydt \\
&\quad +2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\overline{z}dS_xdydt \\
&= -2s\int_{Q'}(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,|\nabla_x z|^2\,dxdydt \\
&\quad -s\int_{Q'}\nabla_x\left(|z|^2\right)\cdot\nabla_x\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right))dxdydt \\
&\quad +2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\overline{z}dS_xdydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2s\int_{Q'}(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\left|\nabla_x z\right|^2 dxdydt \\
&\quad +s\int_{Q'}\Delta_x(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi))\left|z\right|^2 dxdydt \\
&\quad -\int_{\Gamma_x}\partial_\nu(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\left|z\right|^2 dS_x dydt \\
&\quad +2s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi)\,\overline{z}dS_x dydt. \qquad (6.25)
\end{aligned}
$$

(6.25) eşitliğinde $\mathrm{Re}\,\overline{z}\ \nabla_x z=\frac{1}{2}\nabla_x\left(|z|^2\right)$ eşitliği dikkate alınmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_7 &= -4s^3\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)z\left(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}-\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}\right)dxdydt \\
&= -4s^3\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\left((z\nabla_y\overline{z}\cdot\nabla_y\varphi)-z\nabla_x\overline{z}\cdot\nabla_x\varphi\right)dxdydt \\
&= -2s^3\int_{Q'}\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\left(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(|z|^2\right)-\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(|z|^2\right)\right)dxdydt \\
&= -2s^3\int_{Q'}\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(|z|^2\right)dxdydt \\
&\quad +2s^3\int_{Q'}\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(|z|^2\right)dxdydt \\
&= -2s^3\int_{Q'}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right)dxdydt \\
&\quad +2s^3\int_{Q'}\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)|z|^2 dxdydt \\
&\quad +2s^3\int_{Q'}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\right)dxdydt \\
&\quad -2s^3\int_{Q'}\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)|z|^2 dxdydt \\
&= 2s^3\int_{Q'}\Delta_y\varphi\,|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dxdydt \\
&\quad -2s^3\int_{\Gamma_y}(\partial_\nu\varphi)\,|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dS_y dxdt \\
&\quad +2s^3\int_{Q'}|z|^2\,\nabla_y\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\cdot\nabla_y\varphi dxdydt \\
&\quad -2s^3\int_{Q'}\Delta_x\varphi\,|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dxdydt \\
&\quad +2s^3\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu\varphi)\,|z|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dS_x dydt \\
&\quad -2s^3\int_{Q'}|z|^2\,\nabla_x\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\cdot\nabla_x\varphi dxdydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2s^3 \int_{Q'} |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) (\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi)\, dxdydt \\
&\quad -2s^3 \int_{\Gamma_y} (\partial_\nu \varphi)\, |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) dS_y dxdt \\
&\quad +2s^3 \int_{Q'} |z|^2\, \nabla_y \varphi \cdot \nabla_y \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) dxdydt \\
&\quad +2s^3 \int_{\Gamma_x} \partial_\nu \varphi\, |z|^2 \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) dS_x dydt \\
&\quad -2s^3 \int_{Q'} |z|^2\, \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) dxdydt. \qquad (6.26)
\end{aligned}
$$

(6.26) eşitliğinde $\operatorname{Re} z\nabla_y \overline{z} = \frac{1}{2}\left(\nabla_y |z|^2\right)$ ve $\operatorname{Re} z\nabla_x \overline{z} = \frac{1}{2}\left(\nabla_x |z|^2\right)$ bağıntıları kullanılmıştır.

$$
\begin{aligned}
I_8 &= -2s^3 \operatorname{Re} \int_{Q'} \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) (\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi)\, z\overline{z} dxdydt \\
&= -2s^3 \int_{Q'} \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) (\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi)\, |z|^2 dxdydt. \qquad (6.27)
\end{aligned}
$$

O halde, (6.19) eşitliğinden

$$
2 \operatorname{Re} \left(P_s^+ z, P_s^- z\right)_{L^2(Q')} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + B_0
$$

elde edilir. Burada,

$$
\begin{aligned}
J_1 &= -2s \operatorname{Im} \int_{Q'} z\partial_t(\nabla_y \varphi) \cdot \nabla_y \overline{z} dxdydt \\
&\quad +2s \operatorname{Im} \int_{Q'} z\partial_t(\nabla_x \varphi) \cdot \nabla_x \overline{z} dxdydt, \\
J_2 &= 4s \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{Q'} \varphi_{y_i y_j} z_{y_j} \overline{z}_{y_i} dxdydt \\
&\quad -4s \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \int_{Q'} \varphi_{y_i x_j} z_{y_i} \overline{z}_{xj} dxdydt, \\
J_3 &= -s \int_{Q'} |z|^2\, \Delta_y (\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi)\, dxdydt, \\
J_4 &= -4s \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \int_{Q'} \varphi_{y_i x_j} \overline{z}_{y_i} z_{x_j} dxdydt \\
&\quad +4s \operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{Q'} \varphi_{x_i x_j} \overline{z}_{x_i} z_{x_j} dxdydt, \\
J_5 &= s \int_{Q'} |z|^2\, \Delta_x (\Delta_y \varphi - \Delta_x \varphi)\, dxdydt, \\
J_6 &= 2s^3 \int_{Q'} |z|^2\, \nabla_y \varphi \cdot \nabla_y \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) dxdydt \\
&\quad -2s^3 \int_{Q'} |z|^2\, \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x \left(|\nabla_y \varphi|^2 - |\nabla_x \varphi|^2\right) dxdydt
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
B_0 \quad = \quad & -2s\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma_y} z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_y\varphi\cdot\nu\right)dS_ydxdt \\
& +4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}-\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}\right)dS_ydxdt \\
& +2s\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu\varphi\right)\left(\left|\nabla_y z\right|^2-\left|\nabla_x z\right|^2\right)dS_ydxdt \\
& -2s^3\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu\varphi\right)\left|z\right|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dS_ydxdt \\
& -2s\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dS_ydxdt+s\int_{\Gamma_y}\partial_\nu\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\left|z\right|^2dS_ydxdt \\
& +2s\,\mathrm{Im}\int_{\Gamma_x} z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_x\varphi\cdot\nu\right)dS_xdydt \\
& +4s\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\overline{z}-\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\overline{z}\right)dS_xdydt \\
& -2s\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu\varphi\right)\left(\left|\nabla_y z\right|^2-\left|\nabla_x z\right|^2\right)dS_xdydt \\
& +2s^3\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu\varphi\right)\left|z\right|^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2-\left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)dS_xdydt \\
& +2s\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\overline{z}dS_xdydt-s\int_{\Gamma_x}\partial_\nu\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)\left|z\right|^2dS_xdydt
\end{aligned}
$$

dir.

Ağırlık fonksiyonunun aşağıda verilen özelliklerini kullanarak $J_k,\ 1\le k\le 6$ ve B_0 ifadelerini değerlendirelim:

$$
\begin{array}{cc}
\partial_t\varphi=\left(-2\gamma\beta t\right)\varphi, & \varphi_{x_ix_i}=\gamma\varphi\left(2+\gamma\psi_{x_i}^2\right), \\
\varphi_{x_iy_j}=\gamma^2\varphi\psi_{x_i}\psi_{y_j}, & \varphi_{x_ix_j}=\gamma\varphi\left(\psi_{x_ix_j}+\gamma\psi_{x_i}\psi_{x_j}\right), \\
\varphi_{y_iy_j}=\gamma\varphi\left(\psi_{y_iy_j}+\gamma\psi_{y_i}\psi_{y_j}\right), & \nabla_x\varphi=\gamma\varphi\nabla_x\psi, \\
\nabla_y\varphi=\gamma\varphi\nabla_y\psi, & \partial_t(\nabla_x\varphi)=\left(-2\gamma^2\beta t\right)\varphi\nabla_x\psi, \\
\partial_t(\nabla_y\varphi)=\left(-2\gamma^2\beta t\right)\varphi\nabla_y\psi, & \Delta_x\varphi=\gamma\varphi\left(\Delta_x\psi+\gamma\left|\nabla_x\psi\right|^2\right), \\
\Delta_y\varphi=\gamma\varphi\left(\Delta_y\psi+\gamma\left|\nabla_y\psi\right|^2\right), & \Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi=\gamma\varphi d_1\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi d_2\left(\psi\right).
\end{array}
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
d_1\left(\psi\right) &= \Delta_y\psi-\Delta_x\psi, \\
d_2\left(\psi\right) &= \left|\nabla_y\psi\right|^2-\left|\nabla_x\psi\right|^2
\end{aligned}
$$

şeklindedir. O halde

$$
\begin{aligned}
J_1 &= -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_y\varphi)\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt+2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'} z\partial_t(\nabla_x\varphi)\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&= -2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\left(-2\gamma^2\beta t\right)z\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt\\
&\quad +2s\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\left(-2\gamma^2\beta t\right)z\varphi\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt \qquad (6.28)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{Re}\int_{Q'}4s\varphi_{y_iy_j}z_{y_j}\overline{z}_{y_i}dxdydt-\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q'}4sz_{y_i}\overline{z}_{x_j}\varphi_{y_ix_j}dxdydt\\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{Re}\int_{Q'}4s\gamma\varphi\left(\psi_{y_iy_j}+\gamma\psi_{y_i}\psi_{y_j}\right)z_{y_j}\overline{z}_{y_i}dxdydt\\
&\quad -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'}4s\gamma^2\varphi\psi_{x_j}\psi_{y_i}z_{y_i}\overline{z}_{x_j}dxdydt\\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{Re}\int_{Q'}4s\gamma\varphi\psi_{y_iy_j}z_{y_j}\overline{z}_{y_i}dxdydt+\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'}4s\gamma^2\varphi\psi_{y_i}\psi_{y_j}z_{y_j}\overline{z}_{y_i}dxdydt\\
&\quad -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q'}4s\gamma^2\varphi\psi_{x_j}\psi_{y_i}z_{y_i}\overline{z}_{x_j}dxdydt\\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\mathrm{Re}\int_{Q'}4s\gamma\varphi\psi_{y_iy_j}z_{y_j}\overline{z}_{y_i}dxdydt\\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q'}4s\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\cdot\nabla_y z\right|^2dxdydt\\
&\quad -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q'}4s\gamma^2\varphi\left(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y z\right)\left(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\overline{z}\right)dxdydt \qquad (6.29)
\end{aligned}
$$

formunda hesaplanır.

Diğer yandan, J_3 ifadesi için

$$
\begin{aligned}
\Delta_y\left(\varphi d_2\left(\psi\right)\right) &= \left(\Delta_y\varphi\right)d_2\left(\psi\right)+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)+\varphi\Delta_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)\\
&= \gamma\varphi\left(\Delta_y\psi\right)d_2\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2d_2\psi+2\gamma\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)\\
&\quad +\varphi\Delta_y\left(d_2\left(\psi\right)\right),\\
\Delta_y\left(\varphi d_1\left(\psi\right)\right) &= \left(\Delta_y\varphi\right)d_1\left(\psi\right)+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(d_1\left(\psi\right)\right)+\varphi\Delta_y\left(d_1\left(\psi\right)\right)\\
&= \gamma\varphi\left(\Delta_y\psi\right)d_1\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2d_1\psi+2\gamma\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\left(d_1\left(\psi\right)\right)\\
&\quad +\varphi\Delta_y\left(d_1\left(\psi\right)\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
J_3 &= -s\int_{Q'} |z|^2\,\Delta_y\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdydt\\
&= -s\int_{Q'} |z|^2\,\Delta_y\left(\gamma^2\varphi d_2(\psi)+\gamma\varphi d_1(\psi)\right)dxdydt\\
&= -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma^2\Delta_y(\varphi d_2(\psi)dxdydt - s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma\Delta_y(\varphi d_1(\psi))dxdydt\\
&= -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma^2\left(\Delta_y\varphi d_2(\psi)+\varphi\Delta_y(d_2(\psi))+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))\right)dxdydt\\
&\quad -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma\left(\Delta_y\varphi d_1(\psi)+\varphi\Delta_y(d_1(\psi))+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(d_1(\psi))\right)dxdydt\\
&= -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma^2\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_2(\psi)+\gamma\varphi\Delta_y\psi d_2(\psi)\right.\\
&\quad \left.+\varphi\Delta_y(d_2(\psi))+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))\right)dxdydt\\
&\quad -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma^2\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_1(\psi)+\gamma\varphi\Delta_y\psi d_1(\psi)\right.\\
&\quad \left.+\varphi\Delta_y(d_1(\psi))+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y(d_1(\psi))\right)dxdydt\\
&= -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma^2\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_2(\psi)+\gamma\varphi\nabla_y\psi\right.\\
&\quad \left.+\varphi\Delta_y(d_2(\psi))+2\gamma\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))\right)dxdydt\\
&\quad -s\int_{Q'} |z|^2\,\gamma^2\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_1(\psi)+\gamma\varphi\Delta_y\psi d_1(\psi)\right)dxdydt\\
&= -\int_{Q'} s\gamma^2\varphi\,|z|^2\left(d_1(\psi)\,\Delta_y\psi+\Delta_y(d_2(\psi))\right)dxdydt\\
&\quad -\int_{Q'} s\gamma^3\varphi\,|z|^2\left(d_1(\psi)\left|\nabla_y\psi\right|^2+(\Delta_y\psi)\,d_2(\psi)+2\nabla_y\psi\cdot\nabla_y(d_2(\psi))\right)dxdydt\\
&\quad -\int_{Q'} s\gamma^4\varphi\,|z|^2\left|\nabla_y\psi\right|^2 d_2(\psi)\,dxdydt \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.30) eşitliğinde $\nabla_y(d_1(\psi))=0$ ve $\Delta_y(d_1(\psi))=0$ bağıntıları kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
J_4 &= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\varphi_{y_ix_j}\overline{z}_{y_i}z_{x_j}dxdydt+\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\varphi_{x_ix_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt1\\
&= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\gamma^2\varphi\psi_{y_i}\psi_{x_j}\overline{z}_{y_i}z_{x_j}dxdydt\\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\gamma\varphi\left(\psi_{x_ix_j}+\gamma\psi_{x_i}\psi_{x_j}\right)\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt\\
&= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\gamma^2\varphi\psi_{y_i}\psi_{x_j}\overline{z}_{y_i}z_{x_j}dxdydt\\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\gamma\varphi\psi_{x_ix_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt+\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Re}\int_{Q'} 4s\gamma^2\varphi\psi_{x_i}\psi_{x_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& -\operatorname{Re}\int_{Q'} 4s\gamma^2\varphi\left(\nabla_y\psi.\nabla_y\overline{z}\right)\left(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x z\right)dxdydt \\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{Re}\int_{Q'} 4s\gamma\varphi\psi_{x_ix_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt \\
&+\int_{Q'} 4s\gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\cdot\nabla_x z\right|^2 dxdydt. \qquad (6.31)
\end{aligned}
$$

J_5 ifadesinin değerlendirilmesinde

$$
\begin{aligned}
\Delta_x\left(\varphi d_2(\psi)\right) &= \left(\Delta_x\varphi\right)d_2(\psi)+2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)+\varphi\Delta_x\left(d_2(\psi)\right) \\
&= \gamma\varphi\left(\Delta_x\psi\right)d_2(\psi)+\gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\right|^2 d_2\psi+2\gamma\varphi\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2(\psi)\right) \\
&\quad+\varphi\Delta_x\left(d_2(\psi)\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
J_5 &= s\int_{Q'}|z|^2\Delta_x\left(\Delta_y\varphi-\Delta_x\varphi\right)dxdydt \\
&= s\int_{Q'}|z|^2\Delta_x\left(\gamma^2\varphi d_2(\psi)+\gamma\varphi d_1(\psi)\right)dxdydt \\
&= s\int_{Q'}|z|^2\gamma^2\Delta_x\left(\varphi d_2(\psi)\right)dxdydt+s\int_{Q'}|z|^2\gamma\Delta_x\left(\varphi d_1(\psi)\right)dxdydt \\
&= s\int_{Q'}|z|^2\gamma^2\left(\Delta_x\varphi d_2(\psi)+\varphi\Delta_x(d_2(\psi))+2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdydt \\
&\quad+s\int_{Q'}|z|^2\gamma(\Delta_x\varphi d_1(\psi)+\varphi\Delta_x\left(d_1(\psi)\right)+2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(d_1(\psi)\right))dxdydt \\
&= s\int_{Q'}|z|^2\gamma^2\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\right|^2 d_2(\psi)+\gamma\varphi\Delta_x\psi d_2(\psi)\right. \\
&\quad\left.+\varphi\Delta_x d_2(\psi)+2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdydt \\
&\quad+s\int_{Q'}|z|^2\gamma\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\right|^2 d_1(\psi)+\gamma\varphi\Delta_x\psi d_1(\psi)\right. \\
&\quad\left.+\varphi\Delta_x d_1(\psi)+2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(d_1(\psi)\right)\right)dxdydt \\
&= s\int_{Q'}|z|^2\gamma^2\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\right|^2 d_2(\psi)+\gamma\varphi\Delta_x\psi d_2(\psi)\right. \\
&\quad\left.+\varphi\Delta_x d_2(\psi)+2\gamma\varphi\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdydt \\
&\quad+s\int_{Q'}|z|^2\gamma\left(\gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\right|^2 d_1(\psi)+\gamma\varphi\Delta_x\psi d_1(\psi)\right)dxdydt \\
&= \int_{Q'}s\gamma^2\varphi|z|^2\left(d_1(\psi)\Delta_x\psi+\Delta_x\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdydt \\
&\quad+\int_{Q'}s\gamma^3\varphi|z|^2\left(d_1(\psi)\left|\nabla_x\psi\right|^2+\Delta_x\psi d_2(\psi)+2\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2(\psi)\right)\right)dxdydt \\
&\quad+\int_{Q'}s\gamma^4\varphi|z|^2\left|\nabla_x\psi\right|^2 d_2(\psi)\,dxdydt \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

bulunur. (6.32) eşitliğinde $\nabla_x\left(d_1(\psi)\right)=0$ ve $\Delta_x\left(d_1(\psi)\right)=0$ bağıntıları kullanılmıştır.

Ayrıca

$$\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)=2\gamma^4\varphi^3d_2\left(\psi\right)\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\psi+\gamma^3\varphi^3\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)$$

ve

$$\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)=2\gamma^4\varphi^3d_2\left(\psi\right)\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\psi+\gamma^3\varphi^3\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2\left(\psi\right)\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
J_6 &= 2s^3\int_{Q'}|z|^2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)dxdydt\\
&\quad -2s^3\int_{Q'}|z|^2\nabla_x\varphi\cdot\nabla_x\left(|\nabla_y\varphi|^2-|\nabla_x\varphi|^2\right)dxdydt\\
&= 2s^3\int_{Q'}|z|^2\left(2\gamma^4\varphi^3d_2\left(\psi\right)\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\psi+\gamma^3\varphi^3\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right)dxdydt\\
&\quad -2s^3\int_{Q'}|z|^2\left(2\gamma^4\varphi^3d_2\left(\psi\right)\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\psi+\gamma^3\varphi^3\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right)dxdydt\\
&= \int_{Q'}4s^3\gamma^4\varphi^3|z|^2d_2\left(\psi\right)\left(|\nabla_y\psi|^2-|\nabla_x\psi|^2\right)dxdydt\\
&\quad +\int_{Q'}2s^3\gamma^3\varphi^3|z|^2\left(\nabla_y\psi\cdot\nabla_yd_2\left(\psi\right)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right)dxdydt\\
&= 4\int_{Q'}s^3\gamma^4\varphi^3|z|^2\left(d_2\left(\psi\right)\right)^2dxdydt\\
&\quad +\int_{Q'}2s^3\gamma^3\varphi^3|z|^2\left(\nabla_y\psi\cdot\nabla_yd_2\left(\psi\right)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x(d_2\left(\psi\right))\right)dxdydt
\end{aligned}\tag{6.33}$$

elde edilir. Son olarak sınır terimleri

$$\begin{aligned}
B_0 &= -2\operatorname{Im}\int_{\Gamma_y}s\gamma\varphi z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_y\psi\cdot\nu\right)dS_ydxdt\\
&\quad +4\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}s\gamma\varphi\left(\partial_\nu z\right)\left(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\overline{z}-\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\overline{z}\right)dS_ydxdt\\
&\quad +\int_{\Gamma_y}2s\gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)\left(|\nabla_yz|^2-|\nabla_xz|^2\right)dS_ydxdt\\
&\quad -\int_{\Gamma_y}2s^3\gamma^3\varphi^3\partial_\nu\psi\,|z|^2d_2\left(\psi\right)dS_ydxdt\\
&\quad -2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}s\left(\gamma\varphi d_1\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi d_2\left(\psi\right)\right)\overline{z}\left(\partial_\nu z\right)dS_ydxdt\\
&\quad +\int_{\Gamma_y}s\left(\left(\gamma^2\varphi d_1\left(\psi\right)+\gamma^3\varphi d_2\left(\psi\right)\right)\left(\partial_\nu\psi\right)\right.\\
&\quad \left.+\gamma^2\varphi\left(\partial_\nu\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right)\right)|z|^2dS_ydxdt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\operatorname{Im}\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi z\partial_t\overline{z}\left(\nabla_x\psi\cdot\nu\right)dS_xdydt\\
&+4\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi\left(\partial_v z\right)\left(\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\overline{z}-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\overline{z}\right)dS_xdydt\\
&-\int_{\Gamma_x} 2s\gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)\left(\left|\nabla_y z\right|^2-\left|\nabla_x z\right|^2\right)dS_xdydt\\
&+\int_{\Gamma_x} 2s^3\gamma^3\varphi^3\left(\partial_\nu\psi\right)\left|z\right|^2 d_2\left(\psi\right)dS_xdydt\\
&+2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x} s\left(\gamma\varphi d_1\left(\psi\right)+\gamma^2\varphi d_2\left(\psi\right)\right)\overline{z}\left(\partial_\nu z\right)dS_xdydt\\
&-\int_{\Gamma_x} s\left(\left(\gamma^2\varphi d_1\left(\psi\right)+\gamma^3\varphi d_2\left(\psi\right)\right)\left(\partial_\nu\psi\right)\right.\\
&\left.+\gamma^2\varphi\partial_\nu\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right)\left|z\right|^2 dS_xdydt
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

olur. Ayrıca (6.28)-(6.34) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
2\operatorname{Re}\left(P_s^+z,P_s^-z\right)_{L^2(Q')} &= \sum_{i,j=1}^{m}\operatorname{Re}\int_{Q'}4s\gamma\varphi\psi_{y_iy_j}z_{y_j}\overline{z}_{y_i}dxdydt\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{Re}\int_{Q'}4s\gamma\varphi\psi_{x_ix_j}\overline{z}_{x_i}z_{x_j}dxdydt\\
&+\int_{Q'}4s\gamma^2\varphi\left|\nabla_y\psi\cdot\nabla_y z-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x z\right|^2dxdydt\\
&+\int_{Q'}4s^3\gamma^4\varphi^3\left|z\right|^2\left(d_2\left(\psi\right)\right)^2dxdydt+B_0+X_1+X_2
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada,

$$
X_1=\int_{Q'}2s^3\gamma^3\varphi^3\left|z\right|^2 d_5\left(\psi\right)dxdydt,
$$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= -2\operatorname{Im}\int_{Q'}s\left(-2\gamma^2\beta t\right)z\varphi\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt\\
&+2\operatorname{Im}\int_{Q'}s\left(-2\gamma^2\beta t\right)z\varphi\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\overline{z}dxdydt\\
&-\int_{Q'}s\gamma^4\varphi\left|z\right|^2\left(d_2\left(\psi\right)\right)^2dxdydt\\
&-\int_{Q'}s\gamma^2\varphi\left|z\right|^2d_3\left(\psi\right)dxdydt\\
&-\int_{Q'}s\gamma^3\varphi\left|z\right|^2d_4\left(\psi\right)dxdydt
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d_3 &: = d_3\left(\psi\right)=\left(d_1\left(\psi\right)\right)^2+\Delta_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)-\Delta_x\left(d_2\left(\psi\right)\right),\\
d_4 &: = d_4\left(\psi\right)=2\left(d_1\left(\psi\right)d_2\left(\psi\right)+\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2\left(\psi\right)\right)\right),\\
d_5 &: = d_5\left(\psi\right)=\nabla_y\psi\cdot\nabla_y\left(d_2\left(\psi\right)\right)-\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\left(d_2\left(\psi\right)\right)
\end{aligned}
$$

dir.

$$\int_{Q'} 4s\gamma^2\varphi \left|\nabla_y\psi \cdot \nabla_y z - \nabla_x\psi \cdot \nabla_x z\right|^2 dxdydt \geq 0$$

ve (6.10) şartından

$$d_2^2 = 16(|x-x_0|^2 - \alpha^2|y-y_0|^2)^2 \geq 16\delta_0^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\left(P_s^+ z, P_s^- z\right)_{L^2(Q')} \geq\ & 8s\gamma\varphi\left(\int_{Q'} -\alpha|\nabla_y z|^2 dxdydt + \int_{Q'} |\nabla_x z|^2 dxdydt\right) \\ & +64\delta_0^2 \int_{Q'} s^3\gamma^4\varphi^3|z|^2 dxdydt + B_0 + X_1 + X_2 \end{aligned} \tag{6.35}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $|\nabla_x z|^2$ ve $|\nabla_y z|^2$ terimlerinin işaretleri farklı olduğundan başka bir değerlendirme yapmak gerekir:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\left(P_s^+ z + P_s^- z, \varphi z\right)_{L^2(Q')} =\ & 2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\overline{z}\varphi dxdydt + 2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \Delta_y z\overline{z}\varphi dxdydt \\ & -2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} \Delta_x z\overline{z}\varphi dxdydt \\ & +2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} s^2(|\nabla_y\varphi|^2 - |\nabla_x\varphi|^2)\varphi z\overline{z} dxdydt \\ & -4\,\mathrm{Re}\int_{Q'} s\left(\nabla_y\varphi \cdot \nabla_y z - \nabla_x\varphi \cdot \nabla_x z\right)\varphi\overline{z} dxdydt \\ & -2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} s\left(\Delta_y\varphi - \Delta_x\varphi\right) z\varphi\overline{z} dxdydt \\ =\ & K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6. \end{aligned}$$

Şimdi sırasıyla K_j, $1 \leq j \leq 6$ terimlerini değerlendirelim:

$$\begin{aligned} K_1 &= 2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} i\partial_t z\overline{z}\varphi dxdydt \\ &= -2\,\mathrm{Im}\int_{Q'} \partial_t z\overline{z}\varphi dxdydt, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_2 &= 2\operatorname{Re}\int_{Q'} \Delta_y z\varphi\overline{z}dxdydt \\
&= -2\operatorname{Re}\int_{Q'} \nabla_y z\cdot\nabla_y\left(\varphi\overline{z}\right)dxdydt + 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_y dxdt \\
&= -2\operatorname{Re}\int_{Q'} \overline{z}\nabla_y z\cdot\nabla_y\varphi dxdydt - 2\operatorname{Re}\int_{Q'}\varphi\nabla_y z\cdot\nabla_y\overline{z}dxdydt \\
&\quad +2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_y dxdt \\
&= -\int_{Q'}\nabla_y\left(|z|^2\right)\cdot\nabla_y\varphi dxdydt - 2\int_{Q'}\varphi\left(|\nabla_y z|^2\right)dxdydt \\
&\quad +2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_y dxdt \\
&= \int_{Q'}|z|^2\Delta_y\varphi dxdydt - \int_{\Gamma_y}|z|^2\left(\partial_\nu\varphi\right)dxdydt \\
&\quad -2\int_{Q'}\varphi\left(|\nabla_y z|^2\right)dxdydt + 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_y dxdt \\
&= \int_{Q'}|z|^2\left(\gamma\varphi\left(\Delta_y\psi+\gamma\left|\nabla_y\psi\right|^2\right)\right)dxdydt - \int_{\Gamma_y}\gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)|z|^2dxdydt \\
&\quad -2\int_{Q'}\varphi\left|\nabla_y z\right|^2dxdydt + 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_y dxdt \\
&= \int_{Q'}\gamma\varphi|z|^2\Delta_y\psi dxdydt + \int_{\Omega}\gamma^2\varphi|z|^2\left|\nabla_y\psi\right|^2dxdydt \\
&\quad -2\int_{\Gamma_y}\gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)|z|^2dxdydt - 2\int_{Q'}\varphi\left|\nabla_y z\right|^2dxdydt \\
&\quad +2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_y}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_y dxdt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_3 &= -2\operatorname{Re}\int_{Q'}\Delta_x z\overline{z}\varphi dxdydt \\
&= 2\operatorname{Re}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\left(\varphi\overline{z}\right)dxdydt - 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_x dydt \\
&= 2\operatorname{Re}\int_{Q'}\nabla_x z\cdot\nabla_x\overline{z}\varphi dxdydt + 2\operatorname{Re}\int_{Q'}\overline{z}\nabla_x z\cdot\nabla_x\varphi dxdydt \\
&\quad -2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_x dydt \\
&= 2\int_{Q'}\varphi\left|\nabla_x z\right|^2dxdydt + \int_{Q'}\nabla_x\left(|z|^2\right)\cdot\nabla_x\varphi dxdydt \\
&\quad -2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_x dydt \\
&= 2\int_{Q'}\varphi\left|\nabla_x z\right|^2dxdydt - \int_{\Omega}|z|^2\Delta_x\varphi dxdydt \\
&\quad +\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu\varphi\right)|z|^2dS_x dydt - 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right)dS_x dydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{Q'} \varphi \left|\nabla_x z\right|^2 dxdydt - \int_{Q'} \left(\gamma\varphi\left(\Delta_x\psi + \gamma\left|\nabla_x\psi\right|^2\right)\right)\left|z\right|^2 dxdydt \\
&\quad + \int_{\Gamma_x} \gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)\left|z\right|^2 dS_x dydt - 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right) dS_x dydt \\
&= 2\int_{Q'} \varphi\left|\nabla_x z\right|^2 dxdydt - \int_{Q'} \gamma\varphi\Delta_x\psi\left|z\right|^2 dxdydt \\
&\quad - \int_{Q'} \gamma^2\varphi\left|\nabla_x\psi\right|^2\left|z\right|^2 dxdydt + \int_{\Gamma_x}\gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)\left|z\right|^2 dS_x dydt \\
&\quad -2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x}\left(\partial_\nu z\right)\left(\varphi\overline{z}\right) dS_x dydt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= 2\operatorname{Re}\int_{Q'} s^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2 - \left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\varphi z\overline{z} dxdydt \\
&= 2\int_{Q'} s^2\left(\left|\nabla_y\varphi\right|^2 - \left|\nabla_x\varphi\right|^2\right)\varphi\left|z\right|^2 dxdydt \\
&= 2\int_{Q'} s^2\gamma^2\varphi^3\left(\left|\nabla_y\psi\right|^2 - \left|\nabla_x\psi\right|^2\right)\left|z\right|^2 dxdydt \\
&= 2\int_{Q'} s^2\gamma^2\varphi^3 d_2\left(\psi\right)\left|z\right|^2 dxdydt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_5 &= -4\operatorname{Re}\int_{Q'} s\varphi\overline{z}\left(\nabla_y\varphi\cdot\nabla_y z - \nabla_x\varphi\cdot\nabla_x z\right)\varphi\overline{z} dxdydt \\
&= -4\operatorname{Re}\int_{Q'} s\varphi\left(\overline{z}\nabla_y z\cdot\nabla_y\varphi - \overline{z}\nabla_x z\cdot\nabla_x\varphi\right) dxdydt \\
&= -2\int_{Q'} s\varphi\left(\nabla_y\left(\left|z\right|^2\right)\cdot\nabla_y\varphi - \nabla_x\left(\left|z\right|^2\right)\cdot\nabla_x\varphi\right) dxdydt \\
&= -2\int_{Q'} s\nabla_y\left(\left|z\right|^2\varphi\right)\cdot\nabla_y\varphi dxdydt + 2\int_{Q'} s\left|z\right|^2\left|\nabla_y\varphi\right|^2 dxdydt \\
&\quad +2\int_{Q'} s\nabla_x\left(\left|z\right|^2\varphi\right)\cdot\nabla_x\varphi dxdydt - 2\int_{Q'} s\left|z\right|^2\left|\nabla_x\varphi\right|^2 dxdydt \\
&= 2\int_{Q'} s\varphi\left|z\right|^2\Delta_y\varphi dxdydt - 2\int_{\Gamma_y} s\varphi\left(\partial_\nu\varphi\right)\left|z\right|^2\varphi dxdydt \\
&\quad + \int_{Q'} s\left|z\right|^2\left|\nabla_y\varphi\right|^2 dxdydt - 2\int_{Q'} s\varphi\left|z\right|^2\Delta_x\varphi dxdydt \\
&\quad +2\int_{\Gamma_x} s\varphi\left(\partial_\nu\varphi\right)\left|z\right|^2\varphi dxdydt - 2\int_{Q'} s\left|z\right|^2\left|\nabla_x\varphi\right|^2 dxdydt \\
&= 2\int_{Q'} s\varphi\left|z\right|^2\left(\gamma\varphi\left(\Delta_y\psi + \gamma\left|\nabla_y\psi\right|^2\right)\right) dxdydt - 2\int_{\Gamma_y} s\gamma\varphi^2\left(\partial_\nu\psi\right)\left|z\right|^2 dS_y dxdt \\
&\quad +2\int_{Q'} s\gamma^2\varphi^2\left|z\right|^2\left|\nabla_y\psi\right|^2 dxdydt - 2\int_{Q'} s\varphi\left|z\right|^2\left(\gamma\varphi\left(\Delta_x\psi + \gamma\left|\nabla_x\psi\right|^2\right)\right) dxdydt \\
&\quad +2\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi^2\left(\partial_\nu\psi\right)\left|z\right|^2 dS_x dydt - 2\int_{Q'} s\gamma^2\varphi^2\left|z\right|^2\left|\nabla_x\psi\right|^2 dxdydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{Q'} s\varphi^2\gamma\,|z|^2\,d_1(\psi)\,dxdydt + 4\int_{Q'} s\gamma^2\varphi^2\,|z|^2\,d_2(\psi)\,dxdydt \\
&\quad -2\int_{\Gamma_y} s\gamma\varphi^2\,(\partial_\nu\psi)\,|z|^2\,dS_y dxdt + 2\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi^2\,(\partial_\nu\psi)\,|z|^2\,dS_x dydt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_6 &= -2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} s\varphi z\overline{z}\,(\Delta_y\varphi - \Delta_x\varphi)\,dxdydt \\
&= 2\,\mathrm{Re}\int_{Q'} s\varphi\,|z|^2\,(\Delta_y\varphi - \Delta_x\varphi)\,dxdydt \\
&= -2\int_{Q'} s\gamma\varphi^2\,|z|^2\left(\Delta_y\psi + \gamma\,|\nabla_y\psi|^2\right)dxdydt + 2\int_{Q'} s\gamma\varphi^2\,|z|^2\left(\Delta_x\psi + \gamma\,|\nabla_x\psi|^2\right)dxdydt \\
&= -2\int_{Q'} s\gamma\varphi^2\,(\Delta_y\psi - \Delta_x\psi)\,|z|^2\,dxdydt - 2\int_{Q'} s\gamma^2\varphi^2\,|z|^2\left(|\nabla_y\psi|^2 - |\nabla_x\psi|^2\right)dxdydt \\
&= -2\int_{Q'} s\gamma\varphi^2 d_1(\psi)\,|z|^2\,dxdydt - 2\int_{Q'} s\gamma^2\varphi^2\,|z|^2\,d_2(\psi)\,dxdydt
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\int_{Q'}\left(P_s^+ z + P_s^- z\right)\varphi\overline{z}dxdydt &= -2\int_{Q'}\varphi\,|\nabla_y z|^2\,dxdydt + 2\int_{Q'}\varphi\,|\nabla_x z|^2\,dxdydt \\
&\quad +B_1 + X_3 + X_4 \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

olur. Burada,

$$
\begin{aligned}
X_3 &= 2\int_{Q'} s^2\gamma^2\varphi^3 d_2(\psi)\,|z|^2\,dxdydt, \\
X_4 &= -2\,\mathrm{Im}\int_{Q'}\partial_t z\overline{z}\varphi dxdydt + \int_{Q'}\gamma\varphi\,|z|^2\,d_1(\psi)\,dxdydt \\
&\quad +\int_{Q'}\gamma^2\varphi\,|z|^2\,d_2(\psi)\,dxdydt
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca $\Gamma_x \cup \Gamma_y$ sınırında $z = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\int_{\Gamma_y}\gamma\varphi\,(\partial_\nu\psi)\,|z|^2\,dS_y dxdt + 2\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_y}(\partial_\nu z)\,(\varphi\overline{z})\,dS_y dxdt \\
&\quad -2\int_{\Gamma_y} s\gamma\varphi^2\,(\partial_\nu\psi)\,|z|^2\,dS_y dxdt + \int_{\Gamma_x}\gamma\varphi\,(\partial_\nu\psi)\,|z|^2\,dS_x dydt \\
&\quad -2\,\mathrm{Re}\int_{\Gamma_x}(\partial_\nu z)\,(\varphi\overline{z})\,dS_x dydt + 2\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi^2\,(\partial_\nu\psi)\,|z|^2\,dS_x dxdt = 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (6.36) denklemi $\eta > 0$ olmak üzere$-s\gamma\,(4\alpha + \eta)$ ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
-2\,\mathrm{Re}\int_{Q'}(4\alpha + \eta)\left(P_s^+ z + P_s^- z\right)s\gamma\varphi\overline{z}dxdydt &= 2\int_{Q'}(4\alpha + \eta)\,s\gamma\varphi\,|\nabla_y z|^2\,dxdydt \\
&\quad -2\int_{Q'}(4\alpha + \eta)\,s\gamma\varphi\,|\nabla_x z|^2\,dxdydt \\
&\quad +X_5 + X_6 \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

olur. (6.37) eşitliğinde

$$\begin{aligned} X_5 &= -2\int_\Omega (4\alpha+\mu)s^3\gamma^3\varphi^3 d_2(\psi)|z|^2 dxdydt, \\ X_6 &= 2\operatorname{Im}\int_\Omega s\gamma(4\alpha+\mu)\partial_t z\bar{z}\varphi dxdydt \\ &\quad -\int_\Omega (4\alpha+\mu)s\gamma^2\varphi|z|^2 d_1(\psi)dxdydt \\ &\quad -\int_\Omega (4\alpha+\mu)s^2\gamma^3\varphi|z|^2 d_2(\psi)dxdydt \end{aligned}$$

olarak alınmıştır. (6.35) eşitsizliği ve (6.37) denklemi taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re}\left(P_s^+z, P_s^-z\right)_{L^2(Q')} - 2\operatorname{Re}\int_{Q'}(4\alpha+\eta)s\gamma\left(P_s^+z+P_s^-z\right)\varphi\bar{z}dxdydt \\ \geq\ & 2\eta\int_{Q'} s\gamma\varphi|\nabla_y z|^2 dxdydt + (8-8\alpha-2\eta)\int_{Q'} s\gamma\varphi|\nabla_x z|^2 dxdydt \\ & +64\delta_0^2\int_{Q'} s^3\gamma^4\varphi^3|z|^2 dxdydt + B_0 + X_1 + X_2 + X_5 + X_6 \end{aligned} \tag{6.38}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\|P_s z + is\partial_t\varphi z\|_{L^2(Q')}^2 = \left\|P_s^+z\right\|_{L^2(Q')}^2 + \left\|P_s^-z\right\|_{L^2(Q')}^2 + 2\operatorname{Re}\left(P_s^+z, P_s^-z\right)_{L^2(Q')}$$

ve

$$\begin{aligned} & -2\operatorname{Re}\int_{Q'}(4\alpha+\eta)s\gamma(P_s z + is\partial_t\varphi z)\varphi\bar{z}dxdydt \\ \leq\ & (4\alpha+\eta)\left(\int_{Q'}|P_s z + is\partial_t\varphi z|^2 dxdydt + s^2\gamma^2\varphi^2\int_{Q'}|z|^2 dxdydt\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (4\alpha+\eta)\int_{Q'}|P_s z + is\partial_t\varphi z|^2 dxdydt \ \geq\ & \int_{Q'}\left|P_s^+z\right|^2 dxdydt + \int_{Q'}\left|P_s^-z\right|^2 dxdydt \\ & +2\eta s\gamma\int_{Q'}\varphi|\nabla_x z|^2 dxdydt \\ & +(8-8\alpha-2\eta)s\gamma\int_{Q'}\varphi|\nabla_y z|^2 dxdydt \\ & +64\delta_0^2 s^3\gamma^4\int_{Q'}\varphi^3|z|^2 dxdydt + B_0 \\ & +X_1+X_2+X_5+X_6 \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\gamma_1 > 0$ bir sabit olmak üzere keyfi $\gamma > \gamma_1$ için bir γ_1 sabiti vardır, X_1 ve

X_5 terimleri $64\delta_0^2 s^3\gamma^4 \int_{Q'} \varphi^3 |z|^2\, dxdydt$ tarafından absorbe edilebilir ve böylece

$$\begin{aligned}(4\alpha+\eta)\int_{Q'} |P_s z + is\partial_t\varphi z|^2\, dxdydt \;\geq\; & \int_{Q'} \left|P_s^+ z\right|^2 dxdydt + \int_{Q'} \left|P_s^- z\right|^2 dxdydt \\ & +2\eta s\gamma \int_{Q'} \varphi |\nabla_x z|^2\, dxdydt \\ & + (8-8\alpha-2\eta)\, s\gamma \int_{Q'} \varphi |\nabla_y z|^2\, dxdydt \\ & +64\delta_0^2 s^3\gamma^4 \int_{Q'} \varphi^3 |z|^2\, dxdydt + B_0 + X_2 + X_6\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\gamma > \gamma_1$ için $\overline{Q'}$ bölgesinde $\varphi > 0$ olduğundan, her $s > s_1$ için

$$\begin{aligned}(4\alpha+\eta)\int_{Q'} |P_s z + is\partial_t\varphi z|^2\, dxdydt \;\geq\; & \int_{Q'} \left|P_s^+ z\right|^2 dxdydt + \int_{Q'} \left|P_s^- z\right|^2 dxdydt \\ & +C_1(\gamma)\,\eta s \int_{Q'} |\nabla_x z|^2\, dxdydt \\ & +C_1(\gamma)(8-8\alpha-2\eta)\, s \int_{Q'} |\nabla_y z|^2\, dxdydt \\ & +C_1(\gamma)\, s^3 \int_{Q'} |z|^2\, dxdydt + B_0 + X_2 + X_6\end{aligned}$$

olacak şekilde $C_1 = C_1(\gamma)$ ve $s_1 = s_1(\gamma)$ sabitleri vardır. O halde $s_2 = s_2(\gamma) > 0$ seçilebilir öyle ki her $s > s_2$ için X_2 ve X_6 terimleri $\|P_s^+ z\|_{L^2(Q')}^2$, $\|P_s^- z\|_{L^2(Q')}^2$, $C_1 \|\nabla_x z\|_{L^2(Q')}^2$, $C_1 \|\nabla_y z\|_{L^2(Q')}^2$ ve $C_1 s^3 \|z\|_{L^2(Q')}^2$ terimleri tarafından absorbe edilebilir. Böylece yeterince büyük $s > 0$ için

$(4\alpha+\eta)\int_{Q'} |P_s z + is\partial_t\varphi z|^2\, dxdydt \leq (4\alpha+\eta)\left(2\int_{Q'} |P_s z|^2\, dxdydt + C_2 s^2 \int_{Q'} |z|^2\, dxdydt\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}C_3(4\alpha+\eta)\int_{Q'} |P_s z|^2\, dxdydt \;\geq\; & \int_{Q'} \left|P_s^+ z\right|^2 dxdydt + \int_{Q'} \left|P_s^- z\right|^2 dxdydt \\ & +\eta s \int_{Q'} |\nabla_x z|^2\, dxdydt \\ & + (8-8\alpha-2\eta)\, s \int_{Q'} |\nabla_y z|^2\, dxdydt \\ & +s^3 \int_{Q'} |z|^2\, dxdydt + B_0 \end{aligned} \tag{6.39}$$

bulunur. Diğer taraftan (6.11) koşulundan Γ_y sınır parçasındaki tüm integraller sıfır ve

Γ_x sınır parçasında $\nabla_y z = 0$ ve $\nabla_x z = (\partial_\nu z) \cdot \nu$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B_0 &= -4\operatorname{Re}\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi\left(\partial_\nu z\right)\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\overline{z}dS_xdydt + \int_{\Gamma_x} 2s\gamma\varphi\left(\partial_\nu\psi\right)\left|\nabla_x z\right|^2 dS_xdydt \\
&= -8\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi\left|\partial_\nu z\right|^2 (x-x_0)\cdot\nu dS_xdydt + 4\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi\left|\partial_\nu z\right|^2 (x-x_0)\cdot\nu dS_xdydt \\
&= -4\int_{\Gamma_x} s\gamma\varphi\left|\partial_\nu z\right|^2 (x-x_0)\cdot\nu dS_xdydt \\
&\geq -4\int_{\Gamma_x\cap\{(x-x_0)\cdot\nu\geq 0\}} s\gamma\varphi\left|\partial_\nu z\right|^2 (x-x_0)\cdot\nu dS_xdydt
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.39) eşitsizliğinde

$$(8-8\alpha-2\eta) > 0 \tag{6.40}$$

olacak şekilde yeterince küçük $\eta > 0$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\int_{Q'}\left|P_s^+ z\right|^2 dxdydt + \int_{Q'}\left|P_s^- z\right|^2 dxdydt + s\int_{Q'}\left|\nabla_x z\right|^2 dxdydt \\
&+s\int_{Q'}\left|\nabla_y z\right|^2 dxdydt + s^3\int_{Q'}|z|^2 dxdydt. \\
\leq\; & C_4\int_{Q'}\left|P_s z\right|^2 dxdydt + C_4 s\int_{\partial D_+\times G'\times(-T,T)}\left|\partial_\nu z\right|^2 dS_xdydt
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak z fonksiyonunun yerine w fonksiyonu yazılır ve

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= e^{2s\varphi}|w|^2,\ \left|\partial_\nu z\right|^2 = \left|\partial_\nu w\right|^2 e^{2s\varphi},\ (x,y,t)\in\partial D_+\times G'\times(-T,T), \\
\left|\nabla_x w e^{s\varphi}\right|^2 &= \left|\nabla_x z - s\lambda\varphi e^{s\varphi} w\nabla_x\psi\right|^2 \leq 2\left|\nabla_x z\right|^2 + 2s^2\lambda^2\varphi^2\left|\nabla_x\psi\right|^2|z|^2, \\
\left|\nabla_y w e^{s\varphi}\right|^2 &= \left|\nabla_y z - s\lambda\varphi e^{s\varphi} w\nabla_y\psi\right|^2 \leq 2\left|\nabla_y z\right|^2 + 2s^2\lambda^2\varphi^2\left|\nabla_y\psi\right|^2|z|^2, \\
\left|L_0 w\right|^2 &\leq 2|Lw|^2 + 2\left|\sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)\,w_{x_i} + \sum_{j=1}^m b_j(x,y,t)\,w_{y_j} + a_0(x,y,t)\,w(x,y,t)\right|^2
\end{aligned}$$

bağıntıları göz önünde bulundurulursa her $s > s_0$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{Q'}\left(s\left|\nabla_y w\right|^2 + s\left|\nabla_x\right|^2 + s^3|w|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt \\
\leq\; & C_5\int_{Q'}|Lw|^2 e^{2s\varphi}dxdydt + C_5\int_{\partial D_+\times G'\times(-T,T)} s\left|\partial_\nu w\right|^2 e^{2s\varphi}dS_xdydt
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C_5 = C_5(\gamma)$ ve $s_0 > s_2(\gamma)$ pozitif sabitlerinin mevcut olduğu görülür. Böylece Önerme 6.1'in ispatı tamamlanır. ■

6.2 KARARLILIK DEĞERLENDİRMELERİ

Teorem 6.2 *$p \in L^\infty(D \times G)$ olsun ve u fonksiyonu Q bölgesinde (6.4)–(6.6) bağıntılarını sağlasın. Kabul edelim ki*

$$\left\|\partial_t^k u\right\|_{H^1(-T,T;\ H^2(D\times G))} \le M,\ k=1,2, \tag{6.41}$$

$$R \in H^2\left(-T,T;\ L^\infty\left(D\times G\right)\right)$$

ve

$$\left\|\partial_t^k R\right\|_{L^2(-T,T;\ L^\infty(D\times G))} \le M,\ k=1,2$$

sağlansın. Ayrıca

$$|R(x,y,0)| \ge r_0,\ x\in\overline{D},\ y\in\overline{G} \tag{6.42}$$

olacak şekilde bir $r_0>0$ sabiti mevcut olsun ve yeterince küçük α, $\beta>0$ için

$$L > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\max_{x\in\overline{D}}|x-x_0|, \tag{6.43}$$

$$T > \frac{1}{\sqrt{\beta}}\max_{x\in\overline{D}}|x-x_0| \tag{6.44}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda her küçük $\epsilon>0$ için

$$\|f\|_{L^2(D\times\{|y|<L-\epsilon\})} \le C\sum_{k=1}^{2}\left\|\partial_\nu\partial_t^k u\right\|^{\theta}_{L^2(\partial D_+\times G\times(-T,T))}$$

olacak şekilde $\theta\in(0,1)$ ve $C>0$ sabitleri vardır.

İspat. İlk olarak,

$$\widetilde{r} = \max_{x\in\overline{D}}|x-x_0|, \tag{6.45}$$

$$r = \min_{x\in\overline{D}}|x-x_0| \tag{6.46}$$

gösterimleri tanımlansın. Buradan $x_0\notin\overline{D}$ için $r>0$ olduğu açıktır.

Ayrıca

$$\frac{\alpha L^2}{\rho^2} < r^2 \tag{6.47}$$

olacak şekilde yeterince büyük $\rho>1$ seçilsin.

Diğer yandan

$$|y_0| \leq L - \frac{L}{\rho} - \epsilon \tag{6.48}$$

eşitsizliğini sağlayan keyfi $y_0 = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ noktasına bağlı olmak üzere

$$\begin{aligned} G(y_0) &= \{y \in \mathbb{R}^m;\ |y - y_0| < L\}, \\ Q_0(y_0) &= D \times G(y_0) \times \{t = 0\}, \\ Q(y_0) &= D \times G(y_0) \times (-T, T) \end{aligned}$$

bölgeleri tanımlansın. Bu durumda

$$G(y_0) \subset G$$

olduğu görülür. (6.45) ve (6.44) bağıntılarından, eğer $x \in \overline{D}$ ve $|y - y_0| \leq L$ ise,

$$\psi(x, y, \mp T) \leq |x - x_0|^2 - \beta T^2 \leq \widetilde{r}^2 - \beta T^2 < 0 \tag{6.49}$$

olur.
(6.45) ve (6.43) bağıntılarından, eğer $x \in \overline{D}$, $|y - y_0| = L$ ve $|t| \leq T$ ise,

$$\psi(x, y, t) \leq |x - x_0|^2 - \alpha |y - y_0|^2 \leq \widetilde{r}^2 - \alpha L^2 < 0 \tag{6.50}$$

bulunur. Eğer $x \in \overline{D}$ ve $|y - y_0| \leq \frac{L}{\rho}$ ise,

$$\psi(x, y, 0) = |x - x_0|^2 - \alpha |y - y_0|^2 \geq r^2 - \alpha \frac{L^2}{p^2} > 0 \tag{6.51}$$

elde edilir. Böylece, her küçük $\mu > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$\psi(x, y, t) < -\mu,\ x \in \overline{D},\ T - 2\delta \leq |t| \leq T \text{ ya da } L - 2\delta \leq |y - y_0| \leq L \tag{6.52}$$

ve

$$\psi(x, y, t) > \mu,\ x \in \overline{D},\ \ |t| < \delta,\ \ |y - y_0| \leq \frac{L}{\rho} \tag{6.53}$$

eşitsizlikleri sağlanır.
Önerme 6.1'i uygulamak için $\chi(y, t) = \chi_0(t)\, \chi_1(|y - y_0|)$ şeklinde bir kesme fonksiyonu tanımlayalım. Burada $\chi_0,\ \chi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi_0,\ \chi_1 \leq 1$ ve

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 0, & T - \delta \leq |t| \leq T, \\ 1, & \quad |t| \leq T - 2\delta, \end{cases} \tag{6.54}$$

$$\chi_1\left(|y-y_0|\right)=\begin{cases}0, & L-\delta\le|y-y_0|\le L,\\ 1, & |y-y_0|\le L-2\delta\end{cases} \tag{6.55}$$

şeklindedir. Bu durumda $\chi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{m+1}\right),\ 0\le\chi\le 1$ ve

$$\chi\left(y,t\right)=\begin{cases}0, & T-\delta\le|t|\le T \text{ veya } L-\delta\le|y-y_0|\le L,\\ 1, & |t|\le T-2\delta \text{ ve } |y-y_0|\le L-2\delta\end{cases} \tag{6.56}$$

olduğu görülür.

Gerekirse, $\delta>0$ daha küçük seçilirse,

$$\frac{L}{\rho}<L-2\delta \tag{6.57}$$

olur.

$$w_k=\left(\partial_t^k u\right)\chi,\ \ k=1,2 \tag{6.58}$$

şeklinde yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}Aw_k &= f\partial_t^k R\chi+2\left(\nabla_y\partial_t^k u\cdot\nabla_y\chi\right)+\partial_t^k u\left(\Delta_y\chi+i\partial_t\chi\right),\\ x &\in D,\ y\in G\left(y_0\right),\ k=1,2\end{aligned} \tag{6.59}$$

ve

$$\begin{aligned}w_k\left(x,y,t\right) &= \left|\nabla_y w_k\left(x,y,t\right)\right|=0,\ \ (x,y,t)\in D\times\partial G\left(y_0\right)\times(-T,T),\\ w_k\left(x,y,t\right) &= 0,\ \ (x,y,t)\in\partial D\times G\left(y_0\right)\times(-T,T),\\ w_k\left(x,y,T\right) &= w_k\left(x,y,-T\right)=0,\ \ (x,y,t)\in D\times G\left(y_0\right)\end{aligned} \tag{6.60}$$

olur. O halde, Önerme 6.1'in koşulları sağlandığından, $w_1,\ w_2$ fonksiyonlarına Carleman değerlendirmesi uygulanır:

$$\begin{aligned}&\int_{Q(y_0)}\sum_{k=1}^{2}\left(s\left|\nabla_x w_k\right|^2+s\left|\nabla_y w_k\right|^2+s^3\left|w_k\right|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt\\ \le\ & C\int_{Q(y_0)}\sum_{k=1}^{2}\chi^2 f^2\left|\partial_t^k R\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt\\ &+C\int_{Q(y_0)}\sum_{k=1}^{2}\left(\left|2\left(\nabla_y\partial_t^k u\cdot\nabla_y\chi\right)+\partial_t^k u\left(\Delta_y\chi+i\partial_t\chi\right)\right|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt\\ &+C\int_{\partial D_+\times G(y_0)\times(-T,T)}\sum_{k=1}^{2}s\left|\partial_\nu w_k\right|^2 e^{2s\varphi}dS_x dydt\\ =\ & S_1+S_2+S_3.\end{aligned} \tag{6.61}$$

Bundan sonra $C > 0$ sabiti $s > 0$ parametresinden bağımsız sabitleri gösterecektir. R ile ilgili kabullerden,

$$\begin{aligned} S_1 &= C \int_{Q(y_0)} \sum_{k=1}^{2} \chi^2 f^2 \left|\partial_t^k R\right|^2 e^{2s\varphi} dxdydt \\ &\leq C \int_{Q(y_0)} \chi^2 f^2 e^{2s\varphi} dxdydt \end{aligned}$$

elde edilir.

(6.54), (6.56) tanımlarından $|t| \leq T - 2\delta$ veya $T - \delta \leq |t| \leq T$ için $\partial_t \chi = 0$ dır ve benzer olarak (6.55), (6.56) tanımlarından $|y - y_0| \leq L - 2\delta$ veya $L - \delta \leq |y - y_0| \leq L$ için $|\nabla_y \chi| = \Delta_y \chi = 0$ olur. O halde, eğer $|t| \in [0, T - 2\delta] \cup [T - \delta, T]$ ve $|y - y_0| \in [0, L - 2\delta] \cup [L - \delta, L]$ oluyorsa, bu durumda $\partial_t \chi = |\nabla_y \chi| = \Delta_y \chi = 0$ bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} S_2 &= C \left(\int_{\{T-2\delta \leq |t| \leq T-\delta\} \cap Q(y_0)} \sum_{k=1}^{2} \left| 2 \left(\nabla_y \partial_t^k u \cdot \nabla_y \chi \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \partial_t^k u \left(\Delta_y \chi + i \partial_t \chi \right) \right|^2 e^{2s\varphi} dxdydt \right) \\ &\quad + C \left(\int_{\{L-2\delta \leq |y-y_0| \leq L-\delta\} \cap Q(y_0)} \sum_{k=1}^{2} \left| 2 \left(\nabla_y \partial_t^k u \cdot \nabla_y \chi \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \partial_t^k u \left(\Delta_y \chi + i \partial_t \chi \right) \right|^2 e^{2s\varphi} dxdydt \right) \\ &= C \left(\int_{\{T-2\delta \leq |t| \leq T-\delta\} \cap Q(y_0)} \sum_{k=1}^{2} \left| 2 \left(\nabla_y \partial_t^k u \cdot \nabla_y \chi \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \partial_t^k u \left(\Delta_y \chi + i \partial_t \chi \right) \right|^2 \left(\exp(2se^{-\gamma\mu}) \right) dxdydt \right) \\ &\quad + C \left(\int_{\{L-2\delta \leq |y-y_0| \leq L-\delta\} \cap Q(y_0)} \sum_{k=1}^{2} \left| 2 \left(\nabla_y \partial_t^k u \cdot \nabla_y \chi \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \partial_t^k u \left(\Delta_y \chi + i \partial_t \chi \right) \right|^2 \left(\exp(2se^{-\gamma\mu}) \right) dxdydt \right) \\ &\leq C \int_{Q(y_0)} \sum_{k=1}^{2} \left(\left|\partial_t^k u\right|^2 + \left|\nabla_y \partial_t^k u\right|^2 \right) e^{2s\kappa_1} dxdydt \\ &\leq CM^2 e^{2s\kappa_1} \end{aligned} \tag{6.62}$$

olur. (6.62) eşitliğinde (6.52) bağıntısı ve

$$\left(|\partial_t \chi|^2 + |\nabla_y \chi|^2 + |\Delta_y \chi|^2 \right) e^{2s\varphi} \leq Ce^{2s\kappa_1}$$

eşitsizliği kullanılmıştır. Burada,

$$\kappa_1 = e^{-\gamma\mu}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Son olarak

$$
\begin{aligned}
S_3 &= C\int_{\partial D_+\times G(y_0)\times(-T,T)}\sum_{k=1}^{2}s\left|\partial_\nu w_k\right|^2 e^{2s\varphi}dS_x dydt \\
&\le Ce^{Cs}\int_{\partial D_+\times G\times(-T,T)}\sum_{k=1}^{2}\left|\partial_\nu\partial_t^k u\right|^2 dS_x dydt := Ce^{Cs}d^2 \qquad (6.63)
\end{aligned}
$$

bulunur. (6.63) eşitliğinde

$$
d^2=\int_{\partial D_+\times G\times(-T,T)}\sum_{k=1}^{2}\left|\partial_\nu\partial_t^k u\right|^2 dS_x dydt
$$

ile tanımlıdır. Sonuç olarak (6.61) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q(y_0)}\sum_{k=1}^{2}\left(s\left|\nabla_x w_k\right|^2+s\left|\nabla_y w_k\right|^2+s^3\left|w_k\right|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt \\
\le\ & C\int\limits_{Q(y_0)}\chi^2 f^2 e^{2s\varphi}dxdydt+CM^2e^{2s\kappa_1}+Ce^{Cs}d^2 \qquad (6.64)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi (6.56) tanımından $y\in G\left(y_0\right)$ için $\chi(y,-T)=0$ olduğu kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_0(y_0)}\left|\chi\left(y,0\right)\right|^2\left|i\partial_t u\left(x,y,0\right)\right|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)}dxdy \\
=\ & \int\limits_{-T}^{0}\partial_t\left(\int\limits_{Q_0(y_0)}\chi^2\left|\partial_t u\left(x,y,t\right)\right|^2 e^{2s\varphi(x,y,t)}dxdy\right)dt \\
=\ & \int\limits_{-T}^{0}\int_{Q_0(y_0)}\left(2\chi\partial_t\chi\left|\partial_t u\right|^2+\chi^2\partial_t\left(\left|\partial_t u\right|^2\right)+\chi^2\left|\partial_t u\right|^2 2s\partial_t\varphi\right)e^{2s\varphi(x,y,t)}dxdydt \\
=\ & \int\limits_{-T}^{0}\int_{Q_0(y_0)}\left(2\chi\partial_t\chi\left|\partial_t u\right|^2+2\chi^2\operatorname{Re}\partial_t^2u\partial_t\bar{u}+\chi^2\left|\partial_t u\right|^2 2s\partial_t\varphi\right)e^{2s\varphi(x,y,t)}dxdydt \\
\le\ & \int_{Q(y_0)}\left|\chi\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt+\int_{Q(y_0)}\left|\partial_t\chi\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt \\
& +\int_{Q(y_0)}\left|\chi\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt+\int_{Q(y_0)}\left|\chi\partial_t^2 u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt \\
& +Cs\int_{Q(y_0)}\left|\chi\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt \\
\le\ & \int_{Q(y_0)}\left|\partial_t\chi\partial_t u\right|^2 e^{2s\varphi}dxdydt \\
& +C\int_{Q(y_0)}\left(\left|\chi\partial_t u\right|^2+\left|\chi\partial_t^2 u\right|^2+s\left|\chi\partial_t u\right|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt \\
\le\ & CM^2e^{2s\kappa_1}+C\int_{Q(y_0)}\left(\left|w_1\right|^2+\left|w_2\right|^2+s\left|w_1\right|^2\right)e^{2s\varphi}dxdydt
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$\int_{Q_0(y_0)} |\chi(y,0)|^2 |i\partial_t u(x,y,0)|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)} dxdy$$
$$\leq \quad CM^2 e^{2s\kappa_1} + C\int_{Q(y_0)} \left(s|w_1|^2 + |w_2|^2\right) e^{2s\varphi} dxdydt$$

olduğu görülür. O halde son eşitsizlikte (6.64) Carleman değerlendirmesi uygulanarak

$$\int_{Q_0(y_0)} |\chi_1(|y-y_0|)|^2 |i\partial_t u(x,y,0)|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)} dxdy$$
$$\leq \quad \frac{C}{s}\int_{Q(y_0)} \chi_0^2(t)\chi_1^2(|y-y_0|)|f|^2 e^{2s\varphi(x,y,t)} dxdydt + CM^2 e^{2s\kappa_1} + Ce^{Cs}d^2$$
$$\leq \quad \frac{C}{s}\int_{Q_0(y_0)} \chi_1^2(|y-y_0|)|f|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)} dxdy + CM^2 e^{2s\kappa_1} + Ce^{Cs}d^2 \tag{6.65}$$

bulunur. Burada, $x \in D$ ve $y \in G(y_0)$ için $|\chi_0(t)| \leq 1$ ve $e^{2s\varphi(x,y,t)} \leq e^{2s\varphi(x,y,0)}$ olduğu kullanılmıştır.

Diğer yandan (6.4) denkleminde $t = 0$ yerine yazılır, (6.5) koşulu ve (6.42) kabulü dikkate alınırsa

$$f(x,y) = \frac{i\partial_t u(x,y,0)}{R(x,y,0)}, \ x \in \overline{D}, \ y \in \overline{G} \tag{6.66}$$

elde edilir. (6.65) eşitsizliğinde (6.66) eşitliği uygulanırsa her büyük $s > 0$ için

$$\int_{Q_0(y_0)} \chi_1^2(|y-y_0|)|f|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)} dxdy$$
$$\leq \quad \frac{C}{s}\int_{Q_0(y_0)} \chi_1^2(|y-y_0|)|f|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)} dxdy + CM^2 e^{2s\kappa_1} + Ce^{Cs}d^2$$

olur. Son eşitsizlikte $s > 0$ yeterince büyük seçilerek sağ taraftaki ilk terim sol taraftaki terim içine absorbe edilir ve böylece her $s > 0$ için

$$\int_{Q_0(y_0)} \chi_1^2(|y-y_0|)|f|^2 e^{2s\varphi(x,y,0)} dxdy \leq CM^2 e^{2s\kappa_1} + Ce^{Cs}d^2$$

bulunur. $D\times\left\{y;\ |y-y_0| < \dfrac{L}{\rho}\right\} \subset Q_0(y_0)$ olduğundan, $Q_0(y_0)$ bölgesi ile $D \times \left\{y;\ |y-y_0| < \dfrac{L}{\rho}\right\}$ bölgesi yer değiştirilerek (6.53), (6.55), (6.57) yardımıyla her $s \geq s_0$ için

$$e^{2s\kappa_2}\int_{D\times\left\{y;\ |y-y_0|<\frac{L}{\rho}\right\}} |f|^2 dxdy \leq CM^2 e^{2s\kappa_1} + Ce^{cs}d^2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, s_0 bir sabit ve $\kappa_2 = e^{\gamma\mu}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $\kappa_2 > \kappa_1$ olduğundan $\kappa = \kappa_2 - \kappa_1 > 0$ olacak şekilde her $s \geq s_0$ için son eşitsizlikten

$$\int_{D\times\left\{y;\ |y-y_0|<\frac{L}{\rho}\right\}} |f|^2 dxdy \leq CM^2 e^{-2s\kappa} + Ce^{Cs}d^2 \tag{6.67}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte s ve C yerine sırasıyla $s+s_0$ ve Ce^{Cs_0} alınırsa her $s \geq 0$ için (6.67) eşitsizliği sağlanır. Değerlendirmenin tamamlanması için iki farklı durum ele alınacaktır.

1. Durum $M < d$ olsun. O halde (6.67) eşitsizliğinde $s = 0$ alınarak

$$\int_{D\times\left\{y;\ |y-y_0|<\frac{L}{\rho}\right\}} |f|^2 \, dxdy \leq 2Cd^2$$

sonucuna varılır.

2. Durum $M \geq d$ olsun. Bu durumda $M^2e^{-2s\kappa} = e^{Cs}d^2$ eşitliğinden $s = \frac{2}{C+2\kappa}\log\frac{M}{d} \geq 0$ bulunur. (6.67) eşitsizliğinde s yerine yazılırsa

$$\int_{D\times\left\{y;\ |y-y_0|<\frac{L}{\rho}\right\}} |f|^2 \, dxdy \leq Cd^{2\theta}$$

elde edilir. Burada $\theta = \frac{2\kappa}{C+2\kappa} \in (0,1)$ dır. Böylece

$$\int_{D\times\left\{y;\ |y-y_0|<\frac{L}{\rho}\right\}} |f|^2 \, dxdy \leq C\left(d^{2\theta}+d^2\right)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $\left\|\partial_t^k u\right\|_{H^1(-T,T;\ H^2(D\times G))} \leq M$ ön kabulünden, iz teoremi kullanılarak $d \leq CM$ ve buradan $d^{2\theta}+d^2 \leq Cd^{2\theta}$ olur ve

$$\int_{D\times\left\{y;\ |y-y_0|<\frac{L}{\rho}\right\}} |f|^2 \, dxdy \leq Cd^{2\theta}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\bigcup\left\{y\in\mathbb{R}^m;\ \ |y-y_0| \leq \frac{L}{\rho},\ \ |y_0| < L-\frac{L}{\rho}-\varepsilon\right\} = \{y\in\mathbb{R}^m;\ \ |y| < L-\epsilon\}$$

olduğundan

$$\int_{D\times\{y;\ |y|<L-\epsilon\}} |f(x,y)|^2 \, dxdy \leq Cd^{2\theta}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

BÖLÜM 7

SONUÇ

İlk defa 1939 yılında Torsten Carleman tarafından kullanılan ve daha sonra kısmi türevli denklemler teorisinde önemli bir uygulama alanı bulan Carleman eşitsizlikleri, Klibanov ve Bukhgeim (1981) ile ters problemler teorisinde teklik ve kararlılık araştırmalarında önemli bir araç haline gelmiştir.

Bu tez çalışmasında ultrahiperbolik Schrödinger denklemleri için yerel ve global Carleman tipi eşitsizlikler elde edilmiş ve bu eşitsizlikler yardımıyla bazı direkt ve ters problemler için Hölder tipi kararlılık değerlendirmeleri ispatlanmıştır.

Bu çalışmada ele alınan problemler daha önce incelenmemiş olup elde edilen sonuçlar bu alanda bir ilk niteliğindedir.

KAYNAKLAR

Ablowitz M J and Haberman R (1975) Nonlinear Evolution Equations in Two and Three Dimensions. *Physical Review Letters*, 35 (18): 1185.

Adams R A and Fournier J J F (2003) *Sobolev Spaces*. 2nd edition, ISBN: 0-12-044143-8, Elsevier, Academic Press, Amsterdam, 305 pp.

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations.* 1st edition, ISBN: 90-6764-352-1, VSP, Utrecht, 201 pp.

Amirov A and Yamamoto M (2005) Unique Continuation and an Inverse Problem for Hyperbolic Equations Across a General Hypersurface. *Journal of Physics, Conference Series,* 12: 1-12.

Amirov A and Yamamoto M (2005) The Timelike Cauchy Problem and the Inverse Problem. *Doklady Mathematics*, 71 (3): 325-326.

Amirov A and Yamamoto M (2008) Inverse Problems for a Schrödinger-Type Equation. *Doklady Mathematics*, 77 (2): 212-214.

Bardos C, Lebeau G and Rauch J (1992) Sharp Sufficient Conditions for the Observation, Control and Stabilization from the Boundary. *SIAM Journal on Control Optimization,* 30: 1024-1065.

Baudouin L, Crèpeau E and Valein J (2011) Global Carleman Estimate on a Network for the Wave Equation and Application to an Inverse Problem. *Mathematical Control and Related Fields*, 1 (3): 307-330.

Baudouin L and Puel J P (2002) Uniqueness and Stability in an Inverse Problem for the Schrödinger Equation. *Inverse Problems,* 18 (6): 1537.

Baudouin L, Mercado A and Osses A (2007) A Global Carleman estimate in a Transmission Wave Equation and Application to a One-Measurement Inverse Problem. *Inverse Problems,* 23: 1-22.

Bellassoued M and Choulli M (2009) Logarithmic Stability in the Dynamical Inverse Problem for the Schrödinger Equation by Arbitrary Boundary Observation. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees,* 91 (3): 233-255.

Bellassoued M and Yamamoto M (2006a) Inverse Source Problem for a Transmission Problem for a Parabolic Equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems,* 14: 47-56.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Bellassoued M and Yamamoto M (2006b) Logarithmic Stability in Determination of a Coefficient in an Acoustic Equation by Arbitrary Boundary Observation. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 85 (2): 193-224.

Benabdallah A, Dermenjian Y and Le Rousseau J (2007) Carleman Estimates for the One-Dimensional Heat Equation with a Discontinuous Coefficient and Applications to Controllability and an Inverse Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336 (2): 865-887.

Borwein J and Lewis A S (2010) *Convex Analysis and Nonlinear Optimization:Theory and Examples*. Springer Science, Business Media, 317 pp.

Bukhgeim A L and Klibanov M V (1981) Global Uniqueness of a Class of Inverse Problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 260 (2): 269-272.

Calderón A P (1958) Uniqueness in the Cauchy Problem for Partial Differential Equations. *American Journal Mathematics*, 80 (1): 16-36.

Carleman T (1939) Sur Un Probleme D'unicité Pour Les Systemes D'équations Aux Derivées Partiellesa Deux Variables Independentes. *Arkiv for Matematik, Astronomi Och Fysik*, 2: 1-9.

Cauchy A L (1842) Mémoire Sur L'emploi Du Calcul Des Limites Dans *L'intégration Des* Equations Aux Dérivées Partielles. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, XV: 44-58

Cristofol M and Soccorsi E (2011) Stability Estimate in an Inverse Problem for Non-Autonomous Magnetic Schrödinger Equations. *Applicable Analysis*, 90 (10): 1499-1520.

Davey A and Stewartson K (1974) On Three-Dimensional Packets of Surface Waves. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 338 (1613): 101-110.

Demir A (2013) Demir-Celik Uretim Metalurjisi.dosya.sakarya.edu.tr/Dokumanlar/2013/110/ 292374119_demir_celik_metalurjisi.doc.

Djordjevic V D and Redekopp L G (1977) On Two-Dimensional Packets of Capillary-Gavity Waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 79 (04): 703-714.

Doubova A and Osses A (2006) Rotated Weights in Global Carleman Estimates Applied to an Inverse Problem for the Wave Equation. *Inverse Problems*, 22 (1): 265-296.

Drábek P, Kufner A and Nicolosi F (1997) *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities*. Walter de Gruyter, 228 pp.

Duarte F J (2014) *Quantum Optics for Engineers.* CRC Pres, New York, 412 pp.

Egger H, Engl H W and Klibanov M V (2004) Global Uniqueness and Hölder Stability for Recovering a Nonlinear Source Term in a Parabolic Equation. *Inverse problems,* 21 (1): 271-290

Escauriaza L, Kenig C E, Ponce G and Vega L (2011) Unique Continuation for Schrödinger Evolutions, with Applications to Profiles of Concentration and Traveling Waves. *Communications in Mathematical Physics*, 305 (2): 487-512.

Evans L C (1997) *Partial Differential Equations*. 1st edition, Volume 6, American Mathematical Society, Berkeley, 662 pp.

Gilbert R P, Kajiwara J and Xu Y S (2000) *Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics*. Springer Science, Business Media, 451 pp.

Gölgeleyen F and Yamamoto M (2014) Stability of Inverse Problems for Ultrahyperbolic Equations. *Chinese Annals of Mathematics, Series B,* 35 (4): 527-556.

Holmgren E (1901) Über Systeme Von Linearen Partiellen Differentialgleichungen. *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps, Akademiens Forhandlingar*, 58: 91-105.

Hörmander L (1976) *Linear Partial Differential Operators.* Springer, Berlin, 285 pp.

Ichinose W (1990) A Note on the Cauchy Problem for Schrödinger Type Equations on the Riemannian Manifold. *Mathematicae Japonica,* 35: 205-213.

Imanuvilov O Y and Yamamoto M (1998) Lipschitz Stability in Inverse Parabolic Problems by the Carleman Estimate. *Inverse Problems,* 14: 1229-1245.

Imanuvilov O Y and Yamamoto M (2001a) Global Lipschitz Stability in an Inverse Hyperbolic Problem by Interior Observations. *Inverse Problems,* 17 (4): 717-728.

Imanuvilov O Y and Yamamoto M (2001b) Global Uniqueness and Stability in Determining Coefficients of Wave Equations. *Communications in Partial Differential Equations,* 26 (7-8): 1409-1425.

Isakov V (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* pp. 51-88. Springer, New York.

Isakov V and Kim N (2008) Carleman Estimates with Two Large Parameters for Second Order Operators and Applications to Elasticity with Residual Stress. *Applicationes Mathematicae,* 35 (4): 447-465.

Isakov V and Yamamoto M (2000) Carleman Estimate with the Neumann Boundary Condition and its Applications to the Observability Inequality and Inverse Hyperbolic Problems. *Contemporary Mathematics,* 268: 191-226.

Kabanikhin S I (2008) Definitions and Examples of Inverse and Ill-Posed Problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems,* 16: 317–357.

Kenig C E (1986) Carleman Estimates, Uniform Sobolev Inequalities for Second-Order Differential Operators, and Unique Continuation Theorems. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, California, 1: 948-960.

Kenig C E, Ponce G and Vega L (1993) Small Solutions to Nonlinear Schrödinger Equations. *Annales de l'IHP Analyse Non Linéaire,* 10 (3): 255-288.

Kenig C E, Ponce G and Vega L (1998) Smoothing Effects and Local Existence Theory for the Generalized Nonlinear Schrödinger Equations. *Inventiones Mathematicae,* 134 (3): 489-545.

Kenig C E, Ponce G, Rolvung C and Vega L (2006) The General Quasilinear Ultrahyperbolic Schrödinger Equation. *Advances in Mathematics*, 206 (2): 402-433.

Khaĭdarov A (1987) On Stability Estimates and Inverse Problems for Second Order Hyperbolic Equations. *Mathematics of the USSR Sbornik*, 58: 267-277.

Kian Y, Phan Q S and Soccorsi E (2015) Hölder Stable Determination of a Quantum Scalar Potential in Unbounded Cylindrical Domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 426 (1): 194-210.

Kim N (2010) Carleman Estimates for the General Second Order Operators and Applications to Inverse Problems. *Doctoral Dissertation*, Wichita State University, 101 pp.

Klibanov M V (2013) Carleman Estimates for Gobal Uniqueness, Stability and Numerical Methods for Coefficient Inverse Problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems,* 21 (4): 477-560.

Klibanov M V and Yamamoto M (2006) Lipschitz Stability of an Inverse Problem for an Acoustic Equation. *Applicable Analysis*, 85 (5): 515-538.

Konopelchenko B G and Matkarimov B T (1989) On the Inverse Scattering Transform for the Ishimori Equation. *Physics Letters A*, 135 (3): 183-189.

Kowalevsky S (1875) Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung. *Journal für die reine und angewandle Mathematik,* 80: 1-32.

Lavrentiev M M, Romanov V G and Shishatskii S P (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis.* 1 st edition. ISBN:0-82180896-6, American Mathematical Society, Providence, 291 pp.

Lions J L and Magenes E (1972) *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 357 pp.

Liu S and Triggiani R (2012) Global Uniqueness and Stability in Determining the Damping Coefficient of an Inverse Hyperbolic Problem with Non-Homogeneous Dirichlet BC Through an Additional Localized Neumann Boundary Condition. *Applicable Analysis*, 91: 1551-1581.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Lü Q (2012) Carleman Estimate for Stochastic Parabolic Equations and Inverse Stochastic Parabolic Problems. *Inverse Problems*, 28 (4): 045008.

Malmivuo J and Plonsey R (1995) *Bioelectromagnetism: Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*. Oxford University Press, New York, 482 pp.

Martinez-Camara M, Dokmanic I, Ranieri J, Scheibler R, Vetterli M and Stohl A (2013) The Fukushima Inverse Problem, *IEEE International Conference*, 4330-4334.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Revised from the 1976 Russian edition, Mir Publishers, Moskow, 396 pp.

Mercado A, Osses A and Rosier L (2008) Inverse Problems for the Schrödinger Equation Via Carleman Inequalities with Degenerate Weights. *Inverse Problems,* 24 (1): 015017.

Müller C (1954) On the Behavior of the Solutions of the Differential Equation $\Delta U = F(x, U)$ in the Neighborhood of a Point. *Communications Pure Applied Mathematics,* 7 (3): 505-515.

Petrovskii I (1967) *Partial Diffential Equations*. Nauka, Moscow, 410 pp.

Puel J P and Yamamoto M (1996) On a Global Estimate in a Linear Inverse Hyperbolic Problem. *Inverse Problems,* 12 (6): 995.

Reddy B D (1998) *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements.* Springer, New York, 472 pp.

Rakesh (2011) Carleman Estimates for Second Order PDEs. Department of Mathematical Science, University of Delaware, Newark, DE19716, USA.

Romanov V G (2006) Estimate for the Solution to the Cauchy Problem for an Ultrahyperbolic Inequality. *Doklady Mathematics,* 74 (2): 751-754.

Schrödinger E (1926) An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review*, 28 (6): 1049.

Sulem C and Sulem P L (1999) *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse.* New York, Springer-Verlag, 322 pp.

Tatlıdil F and Sayın E R (2011) http://bakka.gov.tr/assets/Planlama1/ DemirCelik_Sektoru_ Mevcut_Durum_Analizi. pdf. 201 s.

Triggiani R and Zhang Z (2015) Global Uniqueness and Stability in Determining the Electric Potential Coefficient of an Inverse Problem for Schrödinger Equations on Riemannian Manifolds. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems,* 23 (6): 587-609.

Vladimirov V S (1971) *Equations of mathematical physics*. MIR, Moscow, 436 pp.

Yamamoto M (2009) Carleman Estimates for Parabolic Equations and Applications. *Inverse problems*, 25 (12): 123013.

Yamamoto M (2013) *Mathematics for Industry: Principle, Reality and Practice, from the Point of View of a Mathematician*. What Mathematics Can Do for You, Springer, Tokyo, 77-99.

Yıldız M (1995) $Lu \equiv x\Delta u + ku_x = xf(x, y)$ Eliptik Denklemi İçin Genelleştirilmiş Fonksiyon Sınıflarında Bazı Problemler. *Doktora Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 86 s.

Yuan G and Yamamoto M (2007) Lipschitz Stability in Inverse Problems for a Kirchhoff Plate Equation. *Asymptotic Analysis,* 53 (1, 2): 29-60.

Yuan G and Yamamoto M (2010) Carleman Estimates for the Schrödinger Equation and Applications to an Inverse Problem and an Observability Inequality. *Chinese Annals of Mathematics, Series B,* 31 (4): 555-578.

Zakharov V E and Kuznetsov E A (1986) Multi-Scale Expansions in the Theory of Systems Integrable by the Inverse Scattering Transform. *Physica D: Nonlinear Phenomena,* 18 (1-3): 455-463.

Zakharov V E and Schulman E I (1980) Degenerative Dispersion Laws, Motion Invariants and Kinetic Equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1 (2): 192-202.

ÖZGEÇMİŞ

Özlem KAYTMAZ, 1983 yılında Hatay'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Hatay'da tamamladı. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2006 yılında mezun oldu. 2009 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'ndan yüksek lisans derecesi aldı. 2014 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Aynı yıl, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres : Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
67100 ZONGULDAK.

Tel : (372) 291 11 00 (2361)
E-posta : ozlem.kaytmaz@beun.edu.tr