

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN EŞ-ZAMANLI İTERATİF**  
**REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİNİN UYGULANMASI**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TUĞÇE LÜLLECİ**

**HAZİRAN 2018**

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN EŞ-ZAMANLI İTERATİF**  
**REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİNİN UYGULANMASI**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tuğçe LÜLLECI**

**DANIŞMAN: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU**

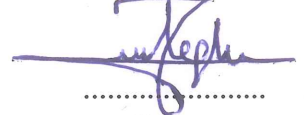
**ZONGULDAK**  
**Haziran 2018**

**KABUL:**

Tuğçe LÜLLECİ tarafından hazırlanan “Tau-p Dönüşümünün Tersine için Eş-Zamanlı İteratif Rekonstrüksiyon Tekniklerinin Uygulanması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/06/2018

**Danışman:** Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi Murat DÜZ

Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü



---

**ONAY:**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../2018



Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*

Tuğçe LÜLLECI



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN EŞ-ZAMANLI İTERATİF REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİNİN UYGULANMASI

Tuğçe LÜLLEÇİ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Haziran 2018, 57 sayfa

$\tau, p \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx$$

integrallerinden  $f(x, y)$  fonksiyonunun bulunması probleminin yaklaşık çözümü için Eş-zamanlı İteratif Rekonstrüksiyon Teknikleri (SIRT- Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques) araştırılmıştır.  $R\{f(x, y)\}(p, \tau)$  dönüşümü sismolojide önemli uygulamalara sahip olup tau-p dönüşümü olarak adlandırılmaktadır. Tau-p dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanılarak bu dönüşümlerin ayrık formları arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Bu problemlerin ayrık modellenmesinden ortaya çıkan denklem sistemleri genellikle kötü-koşullanmış ve büyük ölçekli olup, bu çalışmada ortaya çıkan denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için Landweber, SART, Cimmino, CAV ve DROP yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca yaklaşık çözüm ve kesin çözümün karşılaştırılmasına yönelik örnekler verilmiş, gürültü hatasının yaklaşık çözüme etkisi ve yarı-yakınsama davranışı gösterilmiştir.

## **ÖZET (devam ediyor)**

**Anahtar Kelimeler:** SIRT, Radon Dönüşümü, Tau-p Dönüşümü, Cimmino Yöntemi, Landweber Yöntemi, SART

**Bilim Kodu:** 403.06.01



## ABSTRACT

M. Sc. Thesis

### INVERSION OF TAU-P TRANSFORM BY SIMULTANEOUS ITERATIVE RECONSTRUCTION TECHNIQUES

Tuğçe LÜLLEÇİ

Zonguldak Bülent Ecevit University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Zekeriya USTAOĞLU

June 2018, 57 pages

Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques (SIRT) have been investigated for the approximate solution of the problem of finding the function  $f(x, y)$  from the integrals

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx,$$

where  $\tau, p \in \mathbb{R}$ .  $R\{f(x, y)\}(p, \tau)$  transform has important applications in seismology and is called as tau-p transform. By using the relation between tau-p transform and Radon transform, the relationship between the discrete form of these transforms is obtained. The system of equations derived from the discrete models of these problems are often ill-conditioned and large-scaled, and Landweber, SART, Cimmino, CAV and DROP methods are used for approximating the solution of the resulting equation systems. In addition, examples are given for comparing the approximate solution and exact solution, and the effect of noise error to approximate solution and semi-convergence behavior are shown.

## **ABSTRACT (continued)**

**Keywords:** SIRT, Radon Transform, Tau-p Transform, Cimmino's Method, Landweber Method, SART.

**Science Code:** 403.06.01





## TEŞEKKÜR

Tezin tüm aŐamalarında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, gürüŐ ve önerileriyle yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Zekeriya USTAOğLU'na teşekkür ederim.

Hayatımın tüm aŐamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve sevgili arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ.....	2
BÖLÜM 2 TAU-P VE RADON DÖNÜŞÜMÜ.....	5
2.1 TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ.....	6
2.2 TAU-P VE RADON ARASINDAKİ İLİŞKİ.....	7
2.3 REKONSTRÜKSİYON PROBLEMİ VE AYRIK FORMU.....	9
2.3.1 Rekonstrüksiyon Probleminin Direkt Ayrık Formu.....	11
2.3.2 Rekonstrüksiyon Probleminin Radon Dönüşümü Yoluyla Ayrık Formu.....	12
BÖLÜM 3 EŞ-ZAMANLI İTERATİF REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİ (SIRT).....	13
3.1 EŞ-ZAMANLI İTERATİF REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİ.....	16
3.1.1 Landweber Yöntemi.....	16
3.1.2 Eş-Zamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (SART).....	18
3.1.3 Cimmino Yöntemi.....	20

## İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.1.4 Bileşen Ortalama Yöntemi (CAV).....	21
3.1.5 Diagonal Gevşemiş Ortogonal Projeksiyonlar Yöntemi (DROP).....	23
3.2 SIRT ALGORİTMASININ YAKINSAKLIĞI.....	24
3.3 SIRT ALGORİTMASININ YARI-YAKINSAKLIĞI.....	27
3.3.1 Gürültü Hatasının Analizi .....	32
BÖLÜM 4 TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN SIRT UYGULAMALARI .....	39
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ .....	57

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 $b_N$ vektörünün $Col(\mathbf{A})$ uzayına dikliği.....	14
Şekil 3.2 Eş-zamanlı ART için bir iterasyondaki rekonstrüksiyon.....	18
Şekil 3.3 Cimmino yaklaşımı.....	20
Şekil 4.1 $f$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.1).....	40
Şekil 4.2 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).....	41
Şekil 4.3 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).....	41
Şekil 4.4 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).....	41
Şekil 4.5 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).....	42
Şekil 4.6 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=5 (Örnek 4.0.1).....	44
Şekil 4.7 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).....	44
Şekil 4.8 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).....	45
Şekil 4.9 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).....	45
Şekil 4.10 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).....	46
Şekil 4.11 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).....	46
Şekil 4.12 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).....	47
Şekil 4.13 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).....	47
Şekil 4.14 $f$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.2).....	48
Şekil 4.15 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).....	48
Şekil 4.16 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).....	49
Şekil 4.17 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).....	49
Şekil 4.18 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).....	49

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.19 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=5 (Örnek 4.0.2) .....	51
Şekil 4.20 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2) .....	51
Şekil 4.21 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).....	52
Şekil 4.22 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2) .....	52
Şekil 4.23 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).....	53
Şekil 4.24 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2) .....	53
Şekil 4.25 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).....	54
Şekil 4.26 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; iterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2) .....	54

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>		<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1	$C_i(x,y)$ için parametreler (Örnek 4.0.1).....	40
Çizelge 4.2	%1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1) .....	43
Çizelge 4.3	%3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1) .....	43
Çizelge 4.4	%5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1) .....	43
Çizelge 4.5	$C_i(x,y)$ için parametreler (Örnek 4.0.2).....	48
Çizelge 4.6	%1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2) .....	50
Çizelge 4.7	%3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2) .....	50
Çizelge 4.8	%5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2) .....	50





## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### SİMGELER

$\mathbf{a}^i$	: $\mathbf{A}$ matrisinin $i$ . satırının transpozu
$\mathbf{a}_j$	: $\mathbf{A}$ matrisinin $j$ . sütunu
$\mathbf{A}^T$	: $\mathbf{A}$ matrisinin transpozu
$\mathbf{A}^{-1}$	: $\mathbf{A}$ matrisinin tersi
$\mathbf{f}^{(k)}$	: $k$ . iterasyon yaklaşımı
$\mathcal{H}_i$	: $i$ . hiperdüzlem
$L_{(p,\tau)}$	: Düzlemdeki $p$ eğimli, $\tau$ ofsetli doğru
$L_{(t,\theta)}$	: Düzlemdeki $t, \theta$ parametrelili doğru
$N(\cdot)$	: Sıfır-uzay (Null-space)
$p$	: Doğrunun eğim parametresi
$P(\cdot)$	: Ortogonal projeksiyon
$P_V(\cdot)$	: $\mathbf{V}$ -normlu ortogonal projeksiyon
$R(\cdot)$	: Görüntü uzayı (Range)
$Rf$	: $f$ fonksiyonunun tau-p dönüşümü
$\mathfrak{R}f$	: $f$ fonksiyonunun Radon dönüşümü
$\mathbb{R}_V^n$	: $\mathbf{V}$ -normlu $n$ boyutlu gerçel vektör uzayı
$\mathcal{S}^1$	: Birim çember
$\beta(x, y)$	: Piksel taban fonksiyonu
$\delta(\cdot)$	: Dirac delta
$\rho(\cdot)$	: Spektral yarıçap
$\tau$	: Doğrunun ofset parametresi
$\ \cdot\ _1$	: 1-normu
$\ \cdot\ _2$	: 2-normu (Euclid normu)
$\ \cdot\ _V$	: $\mathbf{V}$ matris normu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Vektörel iç çarpım

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

### KISALTMALAR

- ART** : Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (Algebraic reconstruction technique)
- CAV** : Bileşen ortalama (Component averaging)
- DROP** : Diagonal gevşemiş ortogonal projeksiyonlar (Diagonally-relaxed orthogonal projections)
- RT** : Radon dönüşümü (Radon transform)
- SART** : Eş-zamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (Simultaneous algebraic reconstruction technique)
- SIRT** : Eş-zamanlı iteratif rekonstrüksiyon teknikleri (Simultaneous iterative reconstruction techniques)
- SVD** : Singüler değer ayrışımı (Singular value decomposition)

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Bir fonksiyonun Radon dönüşümü (RT) veya  $tau - p$  dönüşümü verileri kullanılarak, bu fonksiyonun kendisinin bulunması problemi bir (görüntü) rekonstrüksiyon problemidir ve bu problem matematiğin önemli ters problemlerinden biridir. Radon dönüşümü medikal görüntülemelemedeki önemli bir yöntem olan bilgisayarlı tomografide (CT),  $tau - p$  dönüşümü sismik görüntülemelemede, jeofizikte yeraltı yapılarının hareketlerinin ölçümü ile deprem araştırmalarında kullanılmaktadır.

20. yüzyılın ortalarına doğru bilgisayar teknolojilerindeki hızlı gelişmeler ile ters problemlerin yaklaşık çözümlerinin araştırılması önem kazanmış ve yaklaşık çözümlere yönelik çalışmalar artış göstermiştir. Bu tür problemlerin ayrık modellenmesinde ortaya çıkan;  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ve  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

denklem sistemleri genellikle kötü-şartlanmış ve büyük ölçeklidir. Bu problemlerde, sistemin kötü-konulmuşluğu, veri boyutlarının büyüklüğü ve veride yer alan gürültü gibi sebeplerden dolayı direkt yöntemler ile çözüm elde edilemeyebilir. Bunun yerine, daha etkili olan cebirsel rekonstrüksiyon teknikleri (ART) (Gordon et al. 1970), eş-zamanlı iteratif rekonstrüksiyon teknikleri (SIRT) gibi iteratif yöntemler geliştirilmiştir (Gilbert 1972). Küçük boyutlu lineer denklem sistemleri için genellikle direkt çözüm yöntemleri tercih edilirken, büyük boyutlu lineer denklem sistemleri için işlem sayısının çokluğu nedeniyle direkt yöntemler tercih edilmemektedir. Ayrıca  $\bar{\mathbf{b}}$  gürültüsüz sağ taraf ve  $\delta\mathbf{b}$  gürültü bileşeni olmak üzere,

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}$$

verisindeki  $\delta\mathbf{b}$  bileşeninden gelen gürültü hatası (veri hatası) ile bu yöntemlerdeki her iterasyondan gelen iterasyon hatasının (yaklaşım hatası) büyüklükleri arasındaki ilişkiye

göre yöntemin yarı-yakınsaklık davranışı ortaya çıkabilir. Gürültü hatasının büyüklüğü iterasyon hatasının büyüklüğüne ulaştığında veya daha büyük olduğunda toplam hatanın belirli bir iterasyon adımına kadar azalmasına rağmen bu adımdan sonra artmaya başlaması yarı-yakınsaklık olarak ifade edilir (Natterer 1986, s. 89). Gürültü hatasının olmaması veya iterasyon hatasının büyüklüğüne göre önemsenmeyecek büyüklükte olduğunda ise toplam hata, iterasyondan kaynaklanan hataya bağlı olacağından, iterasyon sayısı arttıkça yaklaşık çözüm kesin çözüme veya en küçük kareler probleminin minimal norm çözümüne yakınsar (Jiang and Wang 2003).

## 1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

$Tau - p$  dönüşümü sismolojide önemli uygulamalara sahip olup, bu çalışmada

$\tau, p \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx$$

integralleri bilindiğinde  $f(x, y)$  fonksiyonunun bulunması problemi ve bu problemin yaklaşık çözümü araştırılmıştır. Bunun için öncelikle problemin ayrık formu direkt olarak elde edilmiş olup, daha sonra bu ayrık forma karşılık gelen lineer denklem sisteminin yaklaşık çözümü için eş-zamanlı iteratif rekonstrüksiyon teknikleri (SIRT-Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques) kullanılmıştır. Ayrıca,  $tau - p$  dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki ilişkiyi yararlanarak yaklaşık çözüm için ikinci bir yol ortaya konulmuştur. Bazı örnekler üzerinde yaklaşık çözüm ve kesin çözüm karşılaştırılmış, gürültü hatasının yaklaşık çözüme etkisi ve yakınsama, yarı-yakınsama davranışları gösterilmiştir.

$\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  keyfi olsun.  $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$  gevşeme (relaxation) parametresi,  $\mathbf{M}$  ve  $\mathbf{T}$  simetrik pozitif tanımlı matrisler olmak üzere,  $\mathbf{x}^{(k)}$  iterasyon vektörleri için SIRT algoritması

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{M} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{M}$  matrislerinin seçimine göre yöntemler çeşitlenmektedir.

$\mathbf{M} = \mathbf{I}$  ve  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  alındığında Landweber algoritması

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$\mathbf{D}_r = \text{diag}(\|\mathbf{a}^i\|_1)$ ,  $\mathbf{D}_c = \text{diag}(\|\mathbf{a}_j\|_1)$  olmak üzere,  $\mathbf{M} = \mathbf{D}_c^{-1}$  ve  $\mathbf{T} = \mathbf{D}_r^{-1}$  alındığında eş-zamanlı cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (SART-simultaneous algebraic reconstruction technique)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{D}_r^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}_c^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)})$$

ve  $\mathbf{D} = \frac{1}{m} \text{diag} \left( \frac{w_i}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \right)$  olmak üzere  $\mathbf{M} = \mathbf{D}$  ve  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  için Cimmino algoritması

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{A}^T \mathbf{D} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)})$$

olarak ifade edilir.

$j = 1, 2, \dots, n$  için  $s_j = \text{NNZ}(\mathbf{a}_j)$  (NNZ: sıfırdan farklı bileşenler) olmak üzere,  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$  olarak tanımlansın.  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $\|\mathbf{a}^i\|_{\mathbf{S}}^2 = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{S} \mathbf{a}^i \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 s_j$

normu olmak üzere,  $\mathbf{M} = \mathbf{D}_{\mathbf{S}} = \text{diag} \left( \frac{w_i}{\|\mathbf{a}^i\|_{\mathbf{S}}^2} \right)$  ve  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  için Cimmino algoritmasının bir genişletmesi olarak bileşen ortalama (CAV-component averaging) algoritması

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{A}^T \mathbf{D}_{\mathbf{S}} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)})$$

ve  $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$  ve  $\mathbf{D} = \frac{1}{m} \text{diag} \left( \frac{w_i}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \right)$  için  $\mathbf{M} = m \mathbf{D}$  olmak üzere Cimmino algoritmasının diğer bir genişletmesi olarak diagonal olarak gevşemiş ortogonal projeksiyonlar yöntemi (DROP-diagonally-relaxed orthogonal projections) algoritması

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + m \lambda_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)})$$

olur (Hansen and Saxild-Hansen 2012).

Tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, Radon dönüşümü,  $\tau - p$  dönüşümü ve genel özellikleri ifade edilmiştir. Radon dönüşümü ile  $\tau - p$  dönüşümü arasındaki ilişki yardımıyla rekonstrüksiyon probleminin ayrık modellemelerinden denklem sisteminin elde edilişi verilmiştir. Üçüncü bölümde eş-zamanlı iteratif rekonstrüksiyon teknikleri kapsamında Landweber, SART, Cimmino, CAV ve DROP yöntemleri tanıtılmıştır ve bu yöntemlerin yakınsaklık ve yarı-yakınsaklık davranışları genel bir şema için verilmiştir. Dördüncü bölümde ise  $\tau - p$  dönüşümünün tersi için eş zamanlı iteratif rekonstrüksiyon tekniklerinin uygulanmasına yer verilmiştir.



## BÖLÜM 2

### TAU-P DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde,  $\tau-p$  dönüşümü ve bu dönüşümün temel özellikleri verilecek olup ve Radon dönüşümü ile  $\tau-p$  dönüşümü arasındaki ilişki incelenecektir.

Radon dönüşümünün özel bir hali olarak verilen  $\tau-p$  ( $\tau-p$ ) dönüşümü, sismoloji alanında önemli uygulamalara sahip olup, eğimli – yığılma (*slant – stacking*) dönüşümü olarak da adlandırılmaktadır.  $\tau-p$  dönüşümü,  $f(x, y)$  fonksiyonunun düzlemdeki her bir

$$L_{(p,\tau)} : y = \tau + px, x \in \mathbb{R}$$

doğrusu boyunca,  $x$  değişkenine göre, eğrisel integrallerinin hesaplanması ile elde edilir. Buradaki  $p$  ve  $\tau$ , sırasıyla doğruların eğim ve ofset parametreleridir.

**Tanım 2.0.1 (Tau-p dönüşümü)** Sürekli ve reel değerli bir  $f(x, y)$  fonksiyonunun  $\tau-p$  dönüşümü

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx, \quad \tau, p \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır.

$\tau-p$  dönüşümü Dirac delta,  $\delta(\cdot)$ , kullanılarak,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \delta(y - (\tau + px)) dx dy \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

$R\{f(x, y)\}(p, \tau)$  eğrisel integrali, iki-boyutlu  $p - \tau$  uzayında tanımlı bir fonksiyon olup her bir integrale  $\tau-p$  dönüşümünün bir örneği (sample) denir ve bu eğrisel integrallerin tümü  $f(x, y)$  fonksiyonunun  $\tau-p$  dönüşümünü verir.

## 2.1 TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

**Önerme 2.1.1** *Tau-p dönüşümü aşağıdaki temel özelliklere sahiptir.*

$$(1) R\{\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)\}(p, \tau) = \alpha R\{f_1(x, y)\}(p, \tau) + \beta R\{f_2(x, y)\}(p, \tau).$$

$$(2) R\{f(x - a, y - b)\}(p, \tau) = R\{f(x, y)\}(p, \tau + pa - b).$$

$$(3) R\left\{f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)\right\}(p, \tau) = aR\left\{f(x, y)\right\}\left(\frac{pa}{b}, \frac{\tau}{b}\right).$$

**İspat.**

(1)  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} R\{\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f_1(x, \tau + px) + \beta f_2(x, \tau + px)) dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f_1(x, \tau + px) dx + \beta \int_{\mathbb{R}} f_2(x, \tau + px) dx \\ &= \alpha R\{f_1(x, y)\}(p, \tau) + \beta R\{f_2(x, y)\}(p, \tau) \end{aligned} \quad (2.3)$$

olur.

(2)  $a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} R\{f(x - a, y - b)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - a, \tau + px - b) dx, \quad \{\bar{x} = x - a\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\bar{x}, \tau + pa - b + p\bar{x}) d\bar{x} \\ &= R\{f(x, y)\}(p, \tau + pa - b) \end{aligned} \quad (2.4)$$

olur. Bir doğrunun ötelenmesi ile eğiminin değişmeyeceği dikkate alınırsa  $f(x, y)$  fonksiyonunun ötelenmesi,  $tau - p$  dönüşümünde ofset parametresinin değişmesine neden olur.



(3)  $a, b \in (0, \infty)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
R \left\{ f \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right) \right\} (p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} f \left( \frac{x}{a}, \frac{\tau + px}{b} \right) dx, \quad \left\{ \bar{x} = \frac{x}{a} \right. \\
&= a \int_{\mathbb{R}} f \left( \bar{x}, \frac{\tau}{b} + \frac{pa}{b} \bar{x} \right) d\bar{x} \\
&= aR \left\{ f(x, y) \right\} \left( \frac{pa}{b}, \frac{\tau}{b} \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

olur.

■

## 2.2 TAU-P VE RADON DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, Radon dönüşümü ve  $\tau - p$  dönüşümü arasındaki ilişki, Radon dönüşümü parametreleri ve  $p, \tau$  parametreleri yardımıyla ifade edilecektir.

**Tanım 2.2.1 ((Normal) Radon Dönüşümü)**  $t \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbf{S}^1$  (birim çember) olmak üzere,  $x - y$ -düzlemindeki her bir doğru  $L_{(t,\theta)}$  ile verilsin.  $ds$  yay uzunluğu parametresi için sürekli bir  $f(x, y)$  fonksiyonunun,  $L_{(t,\theta)}$  doğruları boyunca integralleri ile

$$\mathfrak{R} \{ f(x, y) \} (\boldsymbol{\theta}, t) = \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \tag{2.6}$$

olarak tanımlanır.

Düzlemdeki her bir doğru

$$L_{(t,\theta)} : (x(s), y(s)) = (t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta), \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

şeklinde verilsin.

$$\begin{aligned}
x &= t \cos \theta - s \sin \theta \\
y &= t \sin \theta + s \cos \theta, \quad s \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa,  $L_{(t,\theta)}$  doğrularının normal formdaki

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \tag{2.9}$$

denklemleri elde edilir. Burada  $|t|$ ,  $L_{(t,\theta)}$  doğrusunun orjine dik uzaklığı ve  $\theta$  ise orjinden geçen ve  $L_{(t,\theta)}$  doğrusuna dik olan doğrunun  $x$ -ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açıdır.

Radon dönüşümü Dirac delta,  $\delta(\cdot)$ , kullanılarak,

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\}(\theta, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

şeklinde de tanımlanabilir (Toft 1996).

$\theta \in (0, \pi)$  için, (2.9) denkleminde  $L_{(t,\theta)}$  doğruları

$$L_{(t,\theta)} : y = t \csc \theta - x \cot \theta \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} p &= -\cot \theta, \\ \tau &= t \csc \theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak alınırsa,  $\tau - p$  dönüşümü, Radon dönüşümü parametreleri yardımıyla

$$R\{f(x, y)\}(-\cot \theta, t \csc \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t \csc \theta - x \cot \theta) dx \quad (2.12)$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

(2.7) doğrularının, (2.10) formunda yazılması ile yay uzunluğu parametresi,

$$ds = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} dx = |\csc \theta| dx$$

olur. Bu durum dikkate alındığında,  $\theta \in (0, \pi)$  olmak üzere, Radon dönüşümü ve  $\tau - p$  dönüşümü arasındaki ilişki;

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(x, y)\}(\theta, t) &= \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \\ &= \csc \theta \int_{\mathbb{R}} f(x, t \csc \theta - x \cot \theta) dx \\ &= \csc \theta R\{f(x, y)\}(-\cot \theta, t \csc \theta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

eşitliği ile verilir.

Ayrıca,  $p = -\cot \theta$  ve  $\tau = t \csc \theta$  olarak kabul edildiğinden,  $\theta \in (0, \pi)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}\csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{1 + p^2}, \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ \cos \theta &= -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ t &= \frac{\tau}{\sqrt{1 + p^2}}\end{aligned}$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, (2.13) bağıntısında  $\tau - p$  dönüşümünün parametreleri kullanılarak, Radon dönüşümü ve  $\tau - p$  dönüşümü arasındaki ilişki,

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\} \left( -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}, \frac{\tau}{\sqrt{1 + p^2}} \right) = \sqrt{1 + p^2} R\{f(x, y)\}(p, \tau) \quad (2.14)$$

eşitliği ile verilir.

$\tau - p$  dönüşümünün düzlem eğrileri üzerine bir genelleştirmesinin, Radon dönüşümü ile ilişkisi (Ustaoglu 2017) çalışmasında verilmiştir.

### 2.3 REKONSTRÜKSİYON PROBLEMİ VE AYRIK FORMU

Sürekli bir  $f$  fonksiyonunun Radon dönüşümü veya  $\tau - p$  dönüşümü verileri kullanılarak, fonksiyonun kendisinin bulunması problemi bir (görüntü) rekonstrüksiyon problemidir. Özel olarak bu çalışmada,  $\tau, p \in \mathbb{R}$  olmak üzere,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx,$$

integralleri bilindiğinde  $f$  fonksiyonunun bulunması problemi ele alınacaktır.

Radon dönüşümünün kompakt desteğe (support) sahip bir  $f(x, y)$  fonksiyonuna göre lineer olması ve bu  $f(x, y)$  fonksiyonunun Radon dönüşümünün geometrik olarak yorumlanabilmesi, rekonstrüksiyon probleminin cebirsel olarak ifade edilmesine olanak sağlamaktadır (Epstein 2007).

Bu çalışmada,  $f(x, y)$  fonksiyonu için

$$\{\beta_j(x, y) \mid j = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\} \quad (2.15)$$

piksel taban fonksiyonlarının sonlu bir kümesi alınıp, bu fonksiyonun bazı değerleri ile taban fonksiyonlarının lineer kombinasyonu sonucu yaklaştırılabileceği varsayılmaktadır.

Bunun için

$$\left\| f(x, y) - \sum_{j=1}^n f_j \beta_j(x, y) \right\|_2 \quad (2.16)$$

normunu minimum yapan,

$$\{f_j \mid j = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

olacak şekilde  $\{f_j\}$  katsayıları aranmaktadır. Ayrıca

$$\Re f(x, y) \approx \sum_{j=1}^n f_j \Re \beta_j(x, y) \quad (2.17)$$

olacak şekilde rekonstrüksiyon probleminde kullanılan taban fonksiyonları, parçalı sabit fonksiyonlar ailesidir.

$f(x, y)$  fonksiyonunun desteğinin, bir kare bölge üzerinde olduğu varsayalım. Kare bölge, düzgün bir  $N \times N$  hücre olacak şekilde bölünmüş ve  $N \times N$  hücrenin elemanları

$$\beta_j^N(x, y) = \begin{cases} 1 & , (x, y) \in j. \text{ hücre} \\ 0 & , \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (2.18)$$

ile tanımlansın. Eğer  $f_j$ ,  $j$ . karede  $f$  fonksiyonunun ortalaması ise

$$\bar{f}^N = \sum_{j=1}^n f_j \beta_j^N(x, y) \quad (2.19)$$

$f$  fonksiyonuna  $N \times N$  hücrenin elemanları ile yaklaşım yapılabilir. Böylece, rekonstrüksiyon probleminde kompakt desteğe sahip sürekli bir  $f(x, y)$  fonksiyonu için  $\{\bar{f}^N\}$  dizisi  $N \rightarrow \infty$  iken  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsar (Epstein 2007). Radon dönüşümü lineer olduğundan;

$$\Re \bar{f}^N(x, y) = \sum_{j=1}^n f_j \Re \{\beta_j^N(x, y)\} (t, w) \quad (2.20)$$

olur.

Bu yaklaşımda doğrular boyunca alınan her integral için dönüşüm verileri

$$\{(t_i, w_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$$

örneklemeleri yardımıyla  $\Re \{f(x, y)\} (t_i, w_i)$  ile gösterilsin. Bu durumda,

$$a_{ij} = \Re \{\beta_j(x, y)\} (t_i, w_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.21)$$

ve dönüşüm verileri ise

$$b_i = \Re \{\bar{f}^N(x, y)\} (t_i, w_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.22)$$

olarak tanımlanır ise rekonstrüksiyon problemi,

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.23)$$

şeklinde  $n$  bilinmeyenli  $m$  tane denklemden oluşan lineer denklem sistemi olarak ifade edilebilir. Bu lineer denklem sistemi matris formunda,  $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)^T$  ve  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  olmak üzere,

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$$

olarak yazılabilir.

Rekonstrüksiyon problemi ile elde edilen denklem sisteminde,  $i$ . doğrunun geçtiği her bir hücredeki uzunluğu ile o hücrelerdeki  $f_j$  değerlerinin lineer kombinasyonu,  $i$ . denklem olarak tanımlanmaktadır.

### 2.3.1 Rekonstrüksiyon Probleminin Direkt Ayrık Formu

Bu kısımda,  $\tau - p$  dönüşümü için rekonstrüksiyon probleminin ayrık formu direkt olarak ifade edilecektir. Bu ayrık form yazılırken,  $\tau - p$  dönüşümü, (normal) Radon dönüşümü parametreleri ile verilecektir.

$f(x, y)$  fonksiyonu bir kare bölgede kompakt desteğe sahip olsun ve bu bölge  $N \times N$  hücreye ayrılsın.  $n = N^2$ ,  $m$  toplam projeksiyon ( $\tau - p$  dönüşümünün alınması) sayısı,  $f(x, y)$  fonksiyonunun  $j$ . hücredeki sabitlenmiş değeri  $f_j$  ve  $\beta_j^N(x, y)$  taban fonksiyonları için  $f(x, y)$  fonksiyonu

$$\bar{f}^N = \sum_{j=1}^n f_j \beta_j^N(x, y) \quad (2.24)$$

olarak ayrık formda yazıldığında,  $\tau - p$  dönüşümünün lineerliğinden

$$R \{ \bar{f}^N(x, y) \} (-\cot \theta_i, t_i \csc \theta_i) = \sum_{j=1}^n f_j R \{ \beta_j^N(x, y) \} (-\cot \theta_i, t_i \csc \theta_i) \quad (2.25)$$

olur.

$R \{ \beta_j^N(x, y) \} (-\cot \theta_i, t_i \csc \theta_i)$  değerleri yardımıyla  $a_{ij}$ ,  $i$ . doğru ile  $j$ . hücrenin kesiştiği noktaların apsisi arasındaki uzaklık veya  $j$ . hücre ile kesişmiyorsa 0 olarak tanımlanır,  $\tau - p$  dönüşümüne karşılık gelen lineer denklem sistemi

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.26)$$

veya matris formunda

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (2.27)$$

olarak yazılabilir.

### 2.3.2 Rekonstrüksiyon Probleminin Radon Dönüşümü Yoluyla Ayrık Formu

Rekonstrüksiyon probleminin ayrık formu, Bölüm 2.2'de verilen  $\tau - p$  dönüşümü ile Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanılarak yeniden yazılacaktır. Böylece rekonstrüksiyon probleminin yaklaşık çözümü için alternatif bir yol ortaya konulmuş olacaktır.

Radon dönüşümü için rekonstrüksiyon probleminin ayrık formu için,  $\tilde{\mathbf{A}}$  matrisinin  $\tilde{a}_{ij}$  bileşenleri,  $i$ . doğrunun  $j$ . hücredeki parçasının uzunluğu veya  $j$ . hücre ile kesişmiyorsa 0 olarak tanımlanır. Bu durumda,  $\tau - p$  dönüşümü için rekonstrüksiyon probleminin ayrık formunda ortaya çıkan lineer denklem sistemi,  $\tau - p$  dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanarak,  $\theta_i \in (0, \pi)$  için

$$\tilde{b}_i = b_i \csc \theta_i = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.28)$$

olur. Bu denklem sistemi matris formunda,  $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1 \tilde{b}_2 \cdots \tilde{b}_m)^T$  ve  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})$  olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{f} \quad (2.29)$$

olarak ifade edilir.

## BÖLÜM 3

### EŞ-ZAMANLI İTERATİF REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİ (SIRT)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  ve  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (3.1)$$

denkleminin çözümü için direkt ve iteratif yöntemler gibi çeşitli çözüm yöntemleri vardır. Bunlardan Cramer yöntemi, Gauss eliminasyon yöntemi, Gauss-Jordan yöntemi ve Thomas yöntemi direkt yöntemlere örnek verilebilir. Bu yöntemler daha çok küçük boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözümü için kullanılırken iteratif yöntemler ise büyük boyutlu denklem sistemlerinin çözümü için işlemlerin hızlı ve kısa sürede yapılmasından dolayı daha çok tercih edilmektedir.

Ayrıca (3.1) lineer denklem sistemi tutarsız olduğunda

$$\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}$$

farkını minimum (uygun bir norma göre) yapacak bir  $\mathbf{f}$  vektörü aranır.  $\mathbf{A}$  matrisinin sütun uzayı (sütun vektörlerinin gerdiği uzay)  $Col(\mathbf{A})$  olmak üzere, eğer  $\mathbf{b} \in Col(\mathbf{A})$  ise bu sistemin çözümü vardır. Ancak  $\mathbf{b} \notin Col(\mathbf{A})$  ise çözüm yoktur ve bu durumda  $\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}$  farkını minimum yapan bir  $\mathbf{f}$  vektörünün bulunması yöntemi en küçük kareler yöntemi olarak adlandırılır.

$\mathbf{b} \notin Col(\mathbf{A})$  ise,  $\mathbf{b}$  vektörünün  $Col(\mathbf{A})$  uzayı üzerine dik izdüşümü alınarak;

$$\mathbf{b}_P = proj(\mathbf{b}) \in Col(\mathbf{A})$$

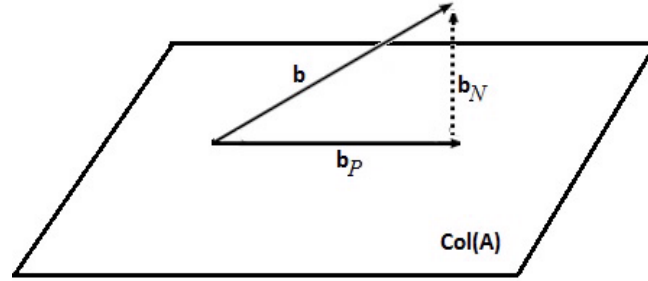
elde edilir. Bu durumda

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_P + \mathbf{b}_N$$

olmak üzere

$$\mathbf{b}_N = \mathbf{b} - \mathbf{b}_P,$$

$Col(\mathbf{A})$  uzayına diktir.



Şekil 3.1  $\mathbf{b}_N$  vektörünün  $Col(\mathbf{A})$  uzayına dikliği.

Buna göre  $\mathbf{b}_N$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin tüm sütun vektörlerine dolayısıyla da  $\mathbf{A}^T$  matrisinin tüm satır vektörlerine dik olduğundan,  $\mathbf{A}$  matrisinin sütun vektörleri  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  olmak üzere,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix} \mathbf{b}_N = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_N \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n^T, \mathbf{b}_N \rangle \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

olur. Ayrıca, (3.1) sisteminin bir en küçük kareler çözümü,

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}_P \tag{3.2}$$

sisteminin gerçek çözümüdür. Ayrıca

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}_P = \mathbf{b} - \mathbf{b}_N$$

olduğundan

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}_N$$

bulunur. Burada  $\mathbf{A}^T \mathbf{b}_N = \mathbf{0}$  olduğundan

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \tag{3.3}$$

elde edilir ve (3.3) denklemi (3.1) lineer denklem sisteminin *normal denklemi* olarak adlandırılır. (3.2) sisteminin çözümü aynı zamanda (3.3) normal denkleminin de çözümüdür. Böylece (3.3) normal denkleminin çözümü (3.1) lineer denklem sisteminin bir en küçük kareler çözümüdür.



Rekonstrüksiyon problemlerinin çözümüne yönelik cebirsel yaklaşımlar temel olarak, cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (ART-Algebraic Reconstruction Technique) ve eş-zamanlı iteratif rekonstrüksiyon tekniği (SIRT-Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques) olmak üzere iki iteratif teknikten oluşur. ART, güncelleme işleminin her projeksiyondan sonra yapıldığı dizisel iteratif bir yöntem iken SIRT, güncelleme işleminin tüm projeksiyonların eş-zamanlı olarak tamamlanmasının ardından yapıldığı eş-zamanlı iteratif bir yöntemdir. ART ve SIRT yaklaşımları için hata aynı şekilde hesaplanır.

Görüntüleme ile ilgili uygulamalarda,  $\mathbf{A}$  katsayılar matrisi, rekonstrüksiyon problemlerinin modellenmesinde kullanılan problemin ayrık hale getirilmesiyle oluşur ve algoritmanın amacı,  $\mathbf{b}$  (gürültülü) verisi kullanılarak  $\mathbf{f}$  görüntüsünü elde etmektir. SIRT algoritmasının bir iterasyonunda (3.1) denklem sistemindeki tüm denklemler aynı anda eş-zamanlı olarak kullanılır.

$\mathbf{f}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  keyfi olsun.  $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$  gevşeme parametresi,  $\mathbf{M}$  ve  $\mathbf{T}$  simetrik pozitif tanımlı matrisler olmak üzere,  $\mathbf{f}^{(k)}$  iterasyon vektörleri için SIRT algoritması

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{M} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

olarak ifade edilebilir.

**Algoritma 3.0.1** (*SIRT Algoritması*)

*Adım 1. Keyfi başlangıç vektörü  $\mathbf{f}^{(0)}$  olsun.*

*Adım 2.  $k = 1, 2, \dots$  için*

*Mevcut  $\mathbf{f}^{(k)}$  iterasyonu ileri projeksiyonlanır:  $\mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)}$ .*

*Bu sonuç, orjinal projeksiyondan çıkarılır:  $(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)})$ .*

*Bulunan fark,  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{M}$  ile ağırlaştırılmış  $\mathbf{A}^T$  tarafından geri projeksiyonlanır.*

*$\mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{M} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)})$  düzeltme faktörü oluşur.*

*Adım 3. Düzeltme faktörü, mevcut iterasyona eklenir ve güncelleme yapılar bir sonraki iterasyona geçilir:  $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)}$ .*

Tüm vektörler sütun vektörleri olmak üzere,  $\mathbf{A}$  matrisinin  $j$ . sütunu  $\mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin  $i$ . satırının transpozu  $\mathbf{a}^i$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$  standart iç çarpım,  $\rho(\cdot)$  spektral yarıçap (en büyük

pozitif özdeğer) olarak tanımlansın. (3.1) sistemindeki her bir lineer denkleme karşılık gelen afin hiperdüzlemler

$$\mathcal{H}_i = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{f} \rangle = b_i\} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanmak üzere, bir  $\mathbf{z}$  vektörünün  $\mathcal{H}_i$  hiperdüzlemleri üzerine ortogonal projeksiyonu

$$\mathcal{P}_i(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \frac{b_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{z} \rangle}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \mathbf{a}^i \quad (3.6)$$

olarak ifade edilebilir.

### 3.1 EŞ-ZAMANLI İTERATİF REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİ

Eş-zamanlı iteratif yöntemler, (3.4) algoritmasında yer alan  $\mathbf{T}$  ve  $\mathbf{M}$  matrislerinin farklı seçimlerine göre sınıflandırılabilir. Eş-zamanlı iteratif yöntemler kapsamında Landweber yöntemi, eş-zamanlı cebirsel rekonstrüksiyon yöntemi (SART), Cimmino yöntemi, bileşen ortalama (CAV) yöntemi ve diagonal gevşemiş ortogonal projeksiyonlar yöntemi (DROP) aşağıda ifade edilecektir.

#### 3.1.1 Landweber Yöntemi

Landweber iterasyonu veya Landweber algoritması ilk olarak Louis Landweber (Landweber 1950) tarafından ortaya konulmuştur ve bir çok genel yöntemin temeli olarak değerlendirilebilir.

Direkt problemlerin iteratif problemlere göre anlaşılması daha kolay olmakla birlikte, özellikle görüntüleme ile ilgili uygulamalarda karşılaşılan denklem sistemlerinin çözümü için genellikle iteratif algoritmalar kullanılır. (3.1) denklem sistemindeki  $\mathbf{A}$  matrisi singüler değil ise,  $\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  bu sistemin açık çözümüdür. Ancak,  $\mathbf{A}$  matrisi singüler ise böyle bir çözüm yoktur. İteratif yöntemlerle çözüm araştırılırken öncelikle

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

normal denklemi ve bu denkleme denk bir

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} - \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{f} - \mathbf{b})$$

sabit nokta denklemi dikkate alınır. Buna göre, en basit haliyle iteratif algoritma

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}), \quad k \in \mathbb{N}$$

olarak ifade edilebilir.

$\mathbf{A}$  matrisinin en büyük singüler değeri  $\sigma_1$  olmak üzere,  $0 < \lambda < \frac{2}{\sigma_1^2}$  şartını sağlayan  $\lambda$  gevşeme parametresi için ve (3.4) algoritmasında  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$  ve  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  alınmasıyla Landweber iterasyonu

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Lineer problemler için standart başlangıç vektörü genellikle  $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0}$  olarak alınır.

Landweber iterasyonu

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}) := \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}\|^2$$

en küçük kareler fonksiyoneli için

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(k+1)} &= \mathbf{f}^{(k)} - \lambda \mathbf{J}'(\mathbf{f}), \quad k \in \mathbb{N} \\ &= \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak tanımlı bir gradient metoda eşittir. Eğer  $\lambda$  yeteri kadar büyük değil ise fonksiyonel, iterasyon boyunca artan değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b} - \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b})\|^2 \\ &= \|\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b})\|^2 \\ &\quad - 2\lambda \langle \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}) \rangle \\ &= \|\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \left( \lambda \|\mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b})\|^2 - 2 \|\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b})\|^2 \right) \\ &\leq \|\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b})\|^2 (\lambda \|\mathbf{A}\|^2 - 2) \\ &\leq \|\mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

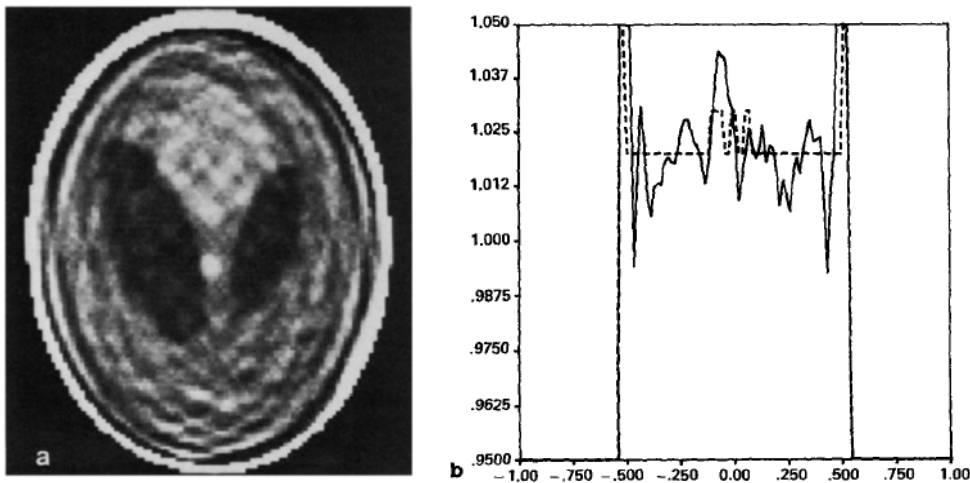
olduğundan, en küçük kareler fonksiyonelinin artan olmadığı gösterilmiş olur (Pietschmann 2012).

### 3.1.2 Eş-Zamanlı Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (SART)

Bu yöntem cebirsel rekonstrüksiyon tekniğinin (ART) geliştirilmiş bir formu olmakla birlikte, her bir iterasyondaki projeksiyonlar eş-zamanlı olarak gerçekleştiğinden SIRT algoritmaları sınıfına dahil edilebilir. ART, ilk defa (Gordon et al. 1970) ve (Hounsfield 1972) çalışmalarında ortaya konmuştur. Ayrıca bu yöntem tutarlı olan lineer denklem sistemlerinin çözümü için Kaczmarz (Kaczmarz 1937) tarafından ortaya konulan temel yöntemin türetilmiş halidir. SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique), üç temele dayanmaktadır: 1) Verilen bir projeksiyonda tüm ışınlar için, ART tarafından hesaplanan hata düzeltme terimlerinin eş-zamanlı uygulanması; 2) ışınlar boyunca geri yayılmış düzeltme terimlerinin uzunlamasına ağırlıklaştırılması; 3) sürekli görüntünün ışın integraline ayrık yaklaşımı için bilineer elemanların kullanılması (Andersen and Kak 1984).

Eğer bu algoritma dizisel olarak değil de, belirli bir projeksiyondaki ışınlar için tüm hata düzeltme terimleri eş-zamanlı olarak uygulanırsa, gürültünün önemli ölçüde azalması sağlanır. Bu yöntem bir SIRT-tipi algoritma gibi görülebilir ve SIRT algoritmasının bazı üstün özelliklerine sahiptir.

Tüm bilgisayarlı görüntülemelerde, sonlu sayı kümeleri (veriler) tarafından  $f(x, y)$  görüntülerinin tanımlanması için bir yol gereklidir. Genel bir yaklaşım, sürekli bir görüntünün  $N$  tane  $\{b_i(x, y)\}$  temel görüntüsünün bir lineer kombinasyonuna genişletilmesidir (Herman and Lent 1976, Herman 1980).



Şekil 3.2 (a) Eş-zamanlı ART için bir iterasyondaki rekonstrüksiyon, (b) Üç küçük tümörden geçen kesit görüntüsü ( $y=-0.605$ ) (Andersen and Kak 1984).

Şekil 3.2’de belirli bir tarama yönü için tüm düzeltme terimlerinin eş-zamanlı bir uygulaması kullanıldığında elde edilen rekonstrüksiyon gösterilmektedir. Bu uygulamada, özgün düzeltme terimleri her zamanki gibi hesaplanır. Bu terimler, görüntüdeki tüm ışınlar hesaplandıktan sonra kaydedilir. Her bir görüntü elemanına göre ortalama düzeltmesi hesaplanarak, güncelleme görüntüsünü oluşturmak için eklenir;

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \frac{\sum_j^n \left[ a_{ij} \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_j^T, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\sum_{i=1}^N a_{ij}} \right]}{\sum_j^n a_{ij}}. \quad (3.9)$$

Buradaki  $j$ ’ye göre toplam, belirli bir tarama yönü için  $i$ . görüntü bileşeni ile kesişen ışınların üzerindedir. Özgün düzeltme terimlerinin paydasındaki  $\sum_{i=1}^N a_{ij}$  faktörü,  $j$ . ışınların gerçek fiziksel uzunluğuna eşittir. Eş-zamanlı yöntemde,  $\langle \mathbf{a}_j^T, \mathbf{f}^{(k)} \rangle$  ifadesinin  $\sum_{i=1}^N a_{ij}$  tarafından değiştirilmesi, yeniden oluşturulan görüntünün değişmezliği nedeniyle yapılır. Ayrıca, güncelleme vektörü için hatasız adımları korur.

Eş-zamanlı tekniğin basit bir formu Oppenheim tarafından (Oppenheim 1977) çalışmasında kullanılmıştır. Bu yöntem, herhangi bir temsili görüntüyle olduğu kadar, örtüşen veya örtüşmeyen ışın şeritli eğimli ışınlar için genel bir görüntü rekonstrüksiyon probleminde avantajlı olarak kullanılabilir.

Dizisel şema için rekonstrüksiyona kıyasla eş-zamanlı yöntem, gürültünün yoğunluğunda bir azalma sağlar. Buna ek olarak yeniden oluşturulmuş görüntüdeki gürültü önceki ile karşılaştırıldığında daha yavaş dalgalanan bir hale gelir. Bu teknik, ART-tipi algoritmaların hızlı bir şekilde yakınsamasını sağlarken aynı zamanda SIRT-tipi algoritmaların gürültü bastırıcı özelliklerine sahiptir (Gilbert 1972). SIRT yönteminde olduğu gibi, eş-zamanlı uygulama da düzeltme terimleri için ek bir dizinin depolanmasını gerektirir. Eş-zamanlı yöntem, belirli bir görüntüdeki tüm ışıklardan gelen düzeltmelerin, sürekli bir gürültü işleviyle sonuçlanması gerektiği iddiasıyla doğrulanır (Solmon 1976).

Son olarak (3.9) eşitliği matris formunda

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{D}_r^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D}_c^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)}) \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\mathbf{T} = \mathbf{D}_r^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\|\mathbf{a}^i\|_1} \right)$  ve  $\mathbf{M} = \mathbf{D}_c^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\|\mathbf{a}_j\|_1} \right)$  olarak alınmıştır (Hansen and Saxild-Hansen 2012).

### 3.1.3 Cimmino Yöntemi

Cimmino yöntemi,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  singüler olmayan reel bir matris ve  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  olmak üzere, (3.1) lineer denklem sisteminin göz önüne alındığı (Cimmino 1938) çalışmasında, Gianfranco Cimmino tarafından ortaya konulmuştur.  $\mathbf{A}$  matrisinin  $i$ . satırı

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \dots \ a_{in})$$

olarak gösterilirse,

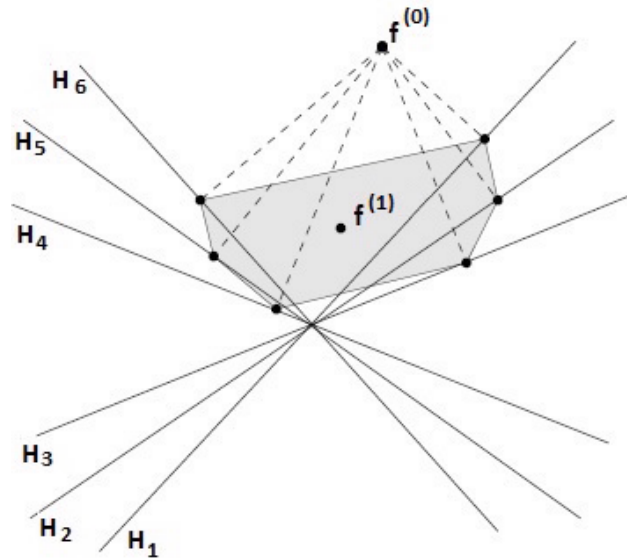
$$\mathcal{H}_i = \{ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f} \rangle = b_i \} \quad (3.11)$$

tarafından tanımlanan  $n$  tane hiperdüzlemin tek kesişim noktası  $\mathbf{f}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  dir. Verilen  $\mathbf{f}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  başlangıç vektörü, her  $i = 1, 2, \dots, m$  için, (3.11) de verilen hiperdüzleme göre  $\mathbf{f}^{(0)}$  başlangıç vektörünün  $\mathbf{f}_i^{(0)}$  projeksiyonları

$$\mathbf{f}_i^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)} + 2 \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(0)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i \quad (3.12)$$

olarak ifade edilir.

Bu algorithmada,  $\mathbf{f}_i^{(0)}$  projeksiyonlarının  $m_i \geq 0$  kütlelerine sahip olduğu varsayılarak, bu noktaların ağırlık merkezini ve  $\mathbf{f}_i^{(0)}$  projeksiyon noktalarını hesaplayarak bir sonraki  $\mathbf{f}^{(1)}$  iterasyonu oluşturulur (Şekil 3.3).



Şekil 3.3 Cimmino yaklaşımı (Nikazad 2008).

$\mathbf{f}^{(0)}$  başlangıç vektörü ve onun (3.11) de verilen  $n$  hiperdüzlemine göre tüm projeksiyonları, merkezi lineer sistemin çözümü olan bir hiperküreye üzerinde uzanır.  $\{m_i\}_{i=1}^m$  kütleler

sisteminin ağırlık merkezi bu hiperkürenin içinde olmalıdır, bu nedenle  $\mathbf{f}^{(1)}$  iterasyonu çözüme daha iyi yaklaşır. Bundan dolayı, bir sonraki  $\mathbf{f}^{(1)}$  iterasyonu çözüme  $\mathbf{f}^{(0)}$  vektöründen daha iyi bir yaklaşımdır. Sonraki iterasyon  $\mathbf{f}^{(1)}$  yeni yaklaşımı ile benzer şekilde devam eder.  $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$  dizisi,  $k \rightarrow \infty$  için  $\mathbf{f}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  ye yakınsar.

$\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}^T \mathbf{D} \\ &= \text{diag} \left( \frac{m_1}{\|\mathbf{a}_1\|^2}, \frac{m_2}{\|\mathbf{a}_2\|^2}, \dots, \frac{m_m}{\|\mathbf{a}_m\|^2} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ve  $\lambda$  gevşeme parametresi için matris formunda

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{D}} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)}) \quad (3.14)$$

yazılabilir.  $\omega_i = \sqrt{m_i}$  olmak üzere,

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i \quad (3.15)$$

bulunur. Tüm  $\omega_i$  ler  $\frac{1}{m}$  olarak alınırsa, Cimmino algoritması

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i \quad (3.16)$$

olarak ifade edilir (Benzi 2005).

### 3.1.4 Bileşen Ortalama (CAV) Yöntemi

Bileşen ortalama (CAV-Component Averaging) yöntemi, büyük ve seyrek yapılandırılmış lineer denklem sistemleri için uygun bir iteratif yöntem olup, bu yöntemde eş-zamanlı olarak tüm sistem hiperdüzlemleri üzerine mevcut iterasyonun projeksiyonu alınır. CAV yöntemi, ortogonal projeksiyonlar ve skaler ağırlıklar yerine eğik projeksiyonlar ve katsayılar matrisinin seyrekliğine bağlı ağırlıklar ile diagonal ağırlık matrislerini kullanır.

Büyük ve seyrek lineer denklem sistemleri birçok önemli pratik uygulamada ortaya çıkmaktadır. Lineer denklemlerin çözümü, konveks fizibilite problemi olarak adlandırılan, bir  $\mathbf{f}^* \in C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$  noktasının bulunması probleminin özel bir durumudur. Buradaki  $C$ , Euclid uzayında  $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  kapalı konveks kümelerinin kesişim noktasıdır.

Eş zamanlı algoritmaların ilki olarak kabul edilen Cimmino yönteminde, öncelikle  $P_{C_i}$ ,  $C_i$  üzerine ortogonal projeksiyon olmak üzere

$$\mathbf{f}^{(k+1),i} = P_{C_i}(\mathbf{f}^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.17)$$

orta noktalarını elde etmek için geçerli  $\mathbf{f}^{(k)}$  iterasyonunun tüm  $C_i$  kümeleri üzerine projeksiyonu alınır. Böylece bir sonraki iterasyon

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \left( \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{f}^{(k-1),i} - \mathbf{f}^{(k)} \right) \quad (3.18)$$

olur, burada  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $\omega_i > 0$  ve  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$  olacak şekilde sabit ağırlıklardır.

Cimmino yöntemi,  $\mathbf{A}$  matrisinin yoğun matris olduğu zaman uygun olan projeksiyonlardan gelen katkıların eşit ağırlığını kullanır. CAV yöntemi ise  $\mathbf{A}$  matrisinin seyrekliğiyle ilgili Cimmino yönteminin bir genişletilmesidir. Cimmino yönteminde, konveks fizibilite problemi için  $\lambda$  gevşeme parametresi ve  $\omega_i = \frac{1}{m}$  ağırlıkları için  $\mathbf{f}^{(k+1)}$  iterasyonu,  $\mathbf{f}^{(k)}$  iterasyonunun projeksiyonlarının ortalamasıdır. CAV algoritmasında ise tamamen farklıdır. Tüm  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $j$ . sütunun sıfırdan farklı elemanlarının sayısı  $s_j = NNZ(\mathbf{a}_j)$  olmak üzere, (3.16) yeniden düzenlenirse,

$$\mathbf{f}_j^{(k+1)} = \mathbf{f}_j^{(k)} + \frac{\lambda}{s_j} \sum_{i=1}^m \frac{b_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \mathbf{a}^i. \quad (3.19)$$

$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matrisi seyrek ise,  $s_j$  değerleri  $m$ 'den daha küçük değerlerdir.

**Tanım 3.1.1** Tüm  $j = 1, 2, \dots, n$  için,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} = (a_j) \in \mathbb{R}^n$  ve  $a \neq 0$  olmak üzere,  $\mathcal{H} = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{f} \rangle = b\}$  hiperdüzlem olsun.  $\mathbf{S}$ ,  $n \times n$  tipinde pozitif tanımlı simetrik matris ve  $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{S}}^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{S}\mathbf{f} \rangle$  olmak üzere,  $\mathbf{S}$ 'ye göre  $\mathcal{H}$  üzerine bir  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  noktasının eğik projeksiyonu tüm  $j = 1, 2, \dots, n$  için,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^{\mathbf{S}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \frac{b - \langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle}{\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{S}^{-1}}^2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{a}$$

olarak tanımlanır, burada  $\mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{S}$  matrisinin tersidir.

$\mathbf{f}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  keyfi verilsin.  $i = 1, 2, \dots, m$  ve  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $s_j = NNZ(a_j)$  olmak üzere, iterasyon yaklaşımı

$$\mathbf{f}_j^{(k+1)} = \mathbf{f}_j^{(k)} + \lambda \sum_{i=1}^m \frac{b_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\sum_{j=1}^n s_j (a_{ij})^2} a_{ij}$$



olarak ifade edilebilir.  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$  ve  $\|\mathbf{a}^i\|_{\mathbf{S}}^2 = \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{S}\mathbf{a}^i \rangle = \sum_{j=1}^n s_j (a_{ij})^2$  olmak üzere,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{S}} = \text{diag} \left( \frac{1}{\|\mathbf{a}^1\|_{\mathbf{S}}^2}, \frac{1}{\|\mathbf{a}^2\|_{\mathbf{S}}^2}, \dots, \frac{1}{\|\mathbf{a}^m\|_{\mathbf{S}}^2} \right) \quad (3.20)$$

olarak tanımlansın. Buradan, CAV algoritması (3.4) formunda  $\mathbf{M} = \mathbf{D}_{\mathbf{S}}$  ve  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  için

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{D}_{\mathbf{S}} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

olarak ifade edilir.  $\mathbf{A}$  matrisi yoğun ise  $\mathbf{S} = m\mathbf{I}$  olur ve Cimmino yöntemi elde edilir (Censor et al. 2001).

### 3.1.5 Diagonal Gevşemiş Ortogonal Projeksiyonlar (DROP) Yöntemi

Bu kısımda, lineer fizibilite probleminin çözümü için eş-zamanlı iteratif yöntemlerden biri olan diagonal gevşemiş ortogonal projeksiyon (DROP-diagonally-relaxed orthogonal projections) yöntemi incelenmiştir. Bir önceki bölümde bahsedilen konveks fizibilite problemleri için projeksiyon algoritmaları, bu tür problemlerin çözümü için merkezi bir rol oynar.  $C_i$  kümeleri üzerine olan bu projeksiyonlar, birçok yöntemde kullanılmasına rağmen, projeksiyonların kullanıldığı her yöntem bu algoritmalar sınıfına ait değildir ve ait olan algoritmalar, projeksiyondan görüntü rekonstrüksiyonunda problemlerin tamamen ayrı modellerine başarıyla uygulanmıştır (Herman 1980).

Konveks kümeler için tamamen eş-zamanlı (paralel) algoritmik şemalar

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda_k \left( \sum_{i=1}^m \omega_i \mathcal{P}_{C_i}(\mathbf{f}^{(k)}) - \mathbf{f}^{(k)} \right) \quad (3.22)$$

formunun benzeri iteratif adımları kullanırlar.  $\mathcal{P}_{C_i}$ ,  $C_i$  kümeleri üzerinde bir  $\mathbf{f}$  noktasının ortogonal projeksiyonu, tüm  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $\omega_i > 0$  ağırlıklarının bir sistemi  $\{\omega_i\}_{i=1}^m$  ve  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ 'dir. (3.22) eş-zamanlı projeksiyonlarında (Censor and Zenios 1997)  $\omega_i = \frac{1}{m}$  olarak yerine yazılırsa

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \frac{\lambda_k}{m} \sum_{i=1}^m (\mathcal{P}_i(\mathbf{f}^{(k)}) - \mathbf{f}^{(k)}) \quad (3.23)$$

bulunur. Burada  $\mathcal{P}_{C_i}$  için (3.6) kullanılırsa,  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $s_j = \text{NNZ}(\mathbf{a}_j)$  (NNZ: sıfırdan farklı bileşenler) ve  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$  olmak üzere

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \frac{\lambda_k}{s_j} \sum_{i=1}^m \frac{b_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \mathbf{a}^i \quad (3.24)$$

olur.  $\mathbf{A}$  matrisi seyrek ise  $s_j < m$  dir. Öyleyse (3.19) eşitliği  $\omega_i$  ağırlıkları için yeniden düzenlenecek olursa

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{S}^{-1} \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{b_i - \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \mathbf{a}^i \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu eşitlik,  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  ve  $\mathbf{D} = \frac{1}{m} \text{diag} \left( \frac{\omega_i}{\|\mathbf{a}^i\|_2^2} \right)$  için  $\mathbf{M} = m\mathbf{D}$  olmak üzere, matris formunda yazılacak olursa DROP algoritması

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + m\lambda_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{D} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}) \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu yöntem de Cimmino yönteminin diğer bir genişletilmiş halidir. CAV'dan farklı olarak,  $s_j$  elemanlarının farklı bir şekilde seçilmesiyle elde edilmiştir.

$$\mathbf{S}^{-1} = m^{-1} \mathbf{I}$$

durumunda  $\mathbf{A}$  matrisi yoğun olduğunda Cimmino yöntemi elde edilir (Hansen and Saxild-Hansen 2012).

### 3.2 SIRT ALGORİTMASININ YAKINSAKLIĞI

SIRT Algoritmasının yakınsaklığı (Jiang and Wang 2003) çalışması temel alınarak gösterilecektir. Yakınsaklık gösterilirken görüntü rekonstrüksiyonu için Landweber metodunu temel alan genel bir iterasyon şeması (eş-zamanlı blok-iteratif) ortaya konulacaktır. ART, SIRT, SART, Cimmino metodunda kullanılan algoritmalar genel şemanın özel bazı örnekleridir.

Ele alınan denklem sisteminin tutarlı veya tutarsız olması durumlarında limit, ağırlıklı en küçük kareler probleminin minimal norm çözümü ve başlangıç görüntüsünün sistem matrisinin sıfır uzayı üzerine eğik projeksiyonunun toplamı olarak bulunur.

(3.4) algoritmasının  $\lambda_k > 0$  olmak üzere  $\mathbf{T} = \mathbf{V}$  ve  $\mathbf{M} = \mathbf{W}$  alınarak yeniden yazılmasıyla elde edilen

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

şemasının yakınsaklığı incelenecektir.

Öncelikle (3.27) iterasyon şemasının daha basit bir formu için yakınsaklık gösterilecektir. (3.27) deki genel durum için yakınsaklık daha sonra gösterilecektir.

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}^{(k)}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} \quad (3.30)$$

olsun. Buradan

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}^{(k)},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{b}}$$

için (3.27) iterasyonundan

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}^{(k)} + \lambda \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \left( \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}^{(k)} \right) \\ &= \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}^{(k)} + \lambda \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \right)^T \left( \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{z}^{(k)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin her iki tarafı soldan  $\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$  ile çarpıldığında

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{G}^T (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{G} \mathbf{z}^{(k)}) \quad (3.31)$$

olur. Ayrıca, (3.1) sistemine karşılık gelen sistem

$$\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{G} \mathbf{z}^{(k)} = \tilde{\mathbf{b}} \quad (3.32)$$

olarak elde edilir.  $\mathbf{G}$  nin

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{z} = \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{b}} \quad (3.33)$$

normal denkleminin minimal norm çözümü  $\mathbf{z}_{\mathbf{I},\mathbf{I}}(\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{b}})$  olsun. Ayrıca (3.32) tutarlıysa,  $\mathbf{z}_{\mathbf{I},\mathbf{I}}(\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{b}})$ , (3.32) denkleminin de minimal norm çözümüdür.

**Teorem 3.2.1 (Jiang and Wang 2003)** *Varsayalım ki  $\|\mathbf{G}\mathbf{G}^T\| \leq 1$  ve tüm  $k \geq 0$  için*

*$0 \leq \lambda_k \leq 2$  olsun. Eğer,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min(\lambda_k, 2 - \lambda_k) = +\infty$$

*sağlanırsa, (3.31) iterasyonu ile oluşturulan  $\{\mathbf{z}^{(k)}\}$  dizisi (3.33) ün bir çözümüne yakınsar ve  $\{\mathbf{z}^{(k)}\}$  dizisinin limiti  $\mathbf{z}_{\mathbf{I},\mathbf{I}}(\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{b}}) + P(\mathbf{G})\mathbf{z}^{(0)}$  olur.*

(3.27) genel iterasyon şemasının yakınsaklığı için (3.28)-(3.30) da tanımlanan dönüşümler kullanılarak (3.33) normal denklemi

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{b} \quad (3.34)$$

olarak yazılabilir. Eğer  $\mathbf{f} = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}$  ise,  $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}}^2 = \|\mathbf{z}\|^2$  olur. Bu sebeple,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{b} \quad (3.35)$$

normal denkleminin minimal norm çözümü

$$\mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{z}_{\mathbf{I},\mathbf{I}}(\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{f}_{\mathbf{V},\mathbf{W}}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

olur.  $\mathbb{R}^n$  den  $N(\mathbf{G})$ 'ye tanımlı  $P(\mathbf{G})$  ortogonal projeksiyonu ve  $\mathbb{R}_{\mathbf{V}}^n$  den  $N(\mathbf{A})$ 'ya tanımlı  $P_{\mathbf{V}}(\mathbf{A})$  ortogonal projeksiyonu için,

$$P_{\mathbf{V}}(\mathbf{A}) = \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} P(\mathbf{G}) \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$$

olduğu görülür.

SVD kullanılarak,  $\|\mathbf{G}\mathbf{G}^T\| = \|\mathbf{G}^T\mathbf{G}\|$  elde edilir ve bu,  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  veya  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$  nin maksimal özdeğerine eşittir.  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  özeşlenik olduğundan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}^T\mathbf{G}\| &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \|z\|=1} \langle \mathbf{G}^T\mathbf{G}z, z \rangle \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \|z\|=1} \|\mathbf{G}z\|^2 \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \|z\|=1} \left\| \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} z \right\|^2 \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \|z\|=1} \left\| \mathbf{A} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}} z \right\|_{\mathbf{W}}^2. \end{aligned}$$

$\mathbf{z} = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}$  dönüşümü tekrar kullanılarak,  $\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}}$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \sqrt{\|\mathbf{G}^T\mathbf{G}\|} &= \sup_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}}=1} \|\mathbf{A}\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}} \\ &= \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{V},\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir ve  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbb{R}_{\mathbf{V}}^n$  den  $\mathbb{R}_{\mathbf{W}}^m$  ye tanımlı bir lineer dönüşüm olarak alındığında  $\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{V},\mathbf{W}}$ ,  $\mathbf{A}$  nin operatör normudur.

Teorem 3.2.1 ve yukarıdaki değerlendirmeler sonucunda (3.27) iterasyon şemasının yakınsaklığı aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

**Theorem 3.2.2 (Jiang and Wang 2003)**  $\rho = \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{V},\mathbf{W}}$  olmak üzere, her  $k \geq 0$  için  $0 \leq \rho^2 \lambda_k \leq 2$  ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min(\rho^2 \lambda_k, 2 - \rho^2 \lambda_k) = +\infty \quad (3.37)$$

şartı sağlanıyorsa, (3.27) iterasyonu ile oluşturulan  $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$  dizisi, (3.1) denklem sistemi tutarsız olsa bile,  $\mathbf{f}_{\mathbf{V},\mathbf{W}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) + P_{\mathbf{V}}(\mathbf{A})\mathbf{f}^{(0)}$  çözümlüne yakınsar.

### 3.3 SIRT ALGORİTMASININ YARI-YAKINSAKLIĞI

En genel haliyle

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda_k \mathbf{T}\mathbf{A}^T \mathbf{M}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{f}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

olarak ifade edilen SIRT algoritmasının yarı-yakınsaklık davranışı (Elfving et al. 2010) ve (Nikazad 2008) çalışmaları temel alınarak incelenecektir.

Yarı-yakınsaklık ile ilgili sonuçları vermeden önce gerekli bazı gösterimler ifade edilecek ve singüler değer ayrışımı (SVD-singular value decomposition) hakkında bilgi verilecektir.

2-normu  $\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}$  olarak tanımlı olsun ve  $\mathbf{M}$  simetrik pozitif tanımlı matris olmak üzere  $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{M} \mathbf{f}}$  olur. Ayrıca  $\mathbf{M}^{1/2}$ ,  $\mathbf{M}$  matrisinin karekökü ve  $\rho(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin spektral yarıçapı ( $\rho(\mathbf{A}) := \max\{|\lambda| : \lambda, \mathbf{A} \text{ matrisinin özdeğeri} \}$ ) olsun.

$\mathbf{A}$ ,  $m \times n$  tipinde bir matris olmak üzere,  $\mathbf{A}$  matrisinin singüler değer ayrışımı

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad (3.39)$$

şeklindedir, burada  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  nin özvektörleri  $\mathbf{U}$  matrisinin sütunları olacak şekilde  $m \times n$  tipinde sütun ortogonal matris,  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  nin özvektörleri  $\mathbf{V}$  matrisinin sütunları olacak şekilde  $n \times n$  tipinde ortogonal matris ve  $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$  olacak şekilde  $\mathbf{A}$  matrisinin *singüler değerlerinden* oluşan  $n \times n$  tipinde bir diagonal matristir.  $\sigma$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin singüler değeri ise  $\sigma^2$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  nin özdeğeri ve  $\text{rank}(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin sıfırdan farklı singüler değerlerinin sayısına eşittir. Ayrıca

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T)(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T)^T = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{D}^T \mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{D}^2 \mathbf{U}^T$$

ve

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T) = \mathbf{V} \mathbf{D}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{D}^2 \mathbf{V}^T$$

olur ve (3.39) eşitliği

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Eğer  $\mathbf{A}$  matrisi  $n \times n$  tipinde singüler olmayan bir matris ise, tersi

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-1}$$

olur, burada

$$\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right).$$

Eğer  $\mathbf{A}$  matrisi singüler ise SVD yardımıyla  $\mathbf{A}$  matrisinin tersi için bir yaklaşım

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T)^{-1} \approx \mathbf{V} \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{U}^{-1}$$

olarak verilir, burada

$$\mathbf{D}_0^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i}, & \sigma_i > t \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (t \text{ küçük eşik değeri}).$$

**Teorem 3.3.1 (Elfving et al. 2010)**  $\rho = \rho(\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A})$  olmak üzere,  $0 \leq \varepsilon \leq \lambda_k \leq \frac{2 - \varepsilon}{\rho}$  olduğu varsayalım.  $\varepsilon > 0$  veya  $\varepsilon = 0$  ve  $\sum_{k=0}^{\infty} \min(\rho \lambda_k, 2 - \rho \lambda_k) = +\infty$  ise SIRT algoritmasının iterasyonları  $\min \|\mathbf{A} \mathbf{f} - \mathbf{b}\|_M$  probleminin bir  $\mathbf{f}^*$  çözümüne yakınsar. Eğer  $\mathbf{f}^{(0)} \in R(\mathbf{A}^T)$  ise  $\mathbf{f}^*$  minimal Euclid normunun tek çözümüdür.

(3.38) ifadesinde  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  ve  $\lambda_k = \lambda$  için genelliği bozmadan  $\mathbf{f}^{(0)} = 0$  olsun. Ayrıca  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}$  ve  $\mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{b}$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(k)} &= \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{M} (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k-1)}) \\ &= \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{b} - \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{c} + \lambda \mathbf{B} \mathbf{f}^{(k-1)} \\ &= (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{f}^{(0)} + \lambda (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B})^{(k-1)} \mathbf{c} + \dots + \lambda (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} + \lambda \mathbf{c} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B})^j \mathbf{c} \end{aligned} \tag{3.40}$$

bulunur (Elfving et al. 2010).

Varsayalım ki,  $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}$  nın singüler değer ayrışımı

$$\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{A}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A} \\ &= (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})^T(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}) \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^T(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T) \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \end{aligned} \tag{3.41}$$

ve  $\rho(\mathbf{B}) = \sigma_1^2$  olur, burada  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ve  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  ortogonal matrisler ve  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p > 0$  ( $rank(\mathbf{A}) = p$ ) için  $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0)$  dir.

(3.41) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{B})^j &= \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{V}\lambda\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^j \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{V}\lambda\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^0 + (\mathbf{I} - \mathbf{V}\lambda\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^1 + \dots + (\mathbf{I} - \mathbf{V}\lambda\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^{k-1} \\ &= \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{V}\lambda\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^1 + \dots + (\mathbf{I} - \mathbf{V}\lambda\mathbf{\Sigma}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^{k-1} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{E}_k\mathbf{V}^T \end{aligned}$$

bulunur (Nikazad 2008), burada

$$\mathbf{E}_k = diag\left(\frac{1 - (1 - \lambda\sigma_1^2)^k}{\lambda\sigma_1^2}, \frac{1 - (1 - \lambda\sigma_2^2)^k}{\lambda\sigma_2^2}, \dots, \frac{1 - (1 - \lambda\sigma_p^2)^k}{\lambda\sigma_p^2}, 0, \dots, 0\right). \tag{3.42}$$

Yukarıda verilen eşitlik daha açık olarak,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{B})^j &= (1 + (1 - \lambda\sigma_1^2)^1 + \dots + (1 - \lambda\sigma_p^2)^{k-1}) \\ \frac{(1 - (1 - \lambda\sigma_i^2)) \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{B})^j}{\lambda\sigma_i^2} &= \frac{(1 - (1 - \lambda\sigma_i^2))(1 + (1 - \lambda\sigma_1^2)^1 + \dots + (1 - \lambda\sigma_p^2)^{k-1})}{\lambda\sigma_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{1^k - (1 - \lambda\sigma_i^2)^k}{\lambda\sigma_i^2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\mathbf{E}_k\mathbf{V}^T &= \mathbf{V} \left( \frac{1^k - (1 - \lambda\sigma_i^2)^k}{\lambda\sigma_i^2} \right) \mathbf{V}^T \\
&= \mathbf{V} \left( \frac{(1 - (1 - \lambda\sigma_i^2))(1 + (1 - \lambda\sigma_1^2)^1 + \dots + (1 - \lambda\sigma_p^2)^{k-1})}{\lambda\sigma_i^2} \right) \mathbf{V}^T \\
&= \mathbf{V}(1 + (1 - \lambda\sigma_1^2)^1 + \dots + (1 - \lambda\sigma_p^2)^{k-1})\mathbf{V}^T \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{B})^j
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(k)} &= \lambda \sum_{j=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{B})^j \mathbf{c} \\
&= \lambda \mathbf{V}\mathbf{E}_k\mathbf{V}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M}\mathbf{b} \\
&= \lambda \mathbf{V}\mathbf{E}_k\mathbf{V}^T (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A})^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}) \\
&= \lambda \mathbf{V}\mathbf{E}_k\mathbf{V}^T (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T)^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}) \\
&= \lambda \mathbf{V}\mathbf{E}_k\mathbf{V}^T \mathbf{V}\Sigma^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{V}(\lambda\mathbf{E}_k)\Sigma^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}) \\
&= \sum_{i=0}^p \frac{\lambda\{1 - (1 - \lambda\sigma_i^2)^k\}}{\lambda\sigma_i^2} \sigma_i u_i^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}) v_i \\
&= \sum_{i=0}^p \{1 - (1 - \lambda\sigma_i^2)^k\} \frac{u_i^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b})}{\sigma_i} v_i
\end{aligned} \tag{3.43}$$

olur ve  $i = 1, 2, \dots$  için  $\phi_i = 1 - (1 - \lambda\sigma_i^2)^k$  filtre çarpanı olarak adlandırılır (Elfving et al. 2010).

Şimdi gürültüsüz sağ taraflı ağırlıklı en küçük kareler probleminin  $\bar{\mathbf{f}}$  minimum-norm çözümü göz önüne alınırsa;

$$\bar{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \bar{\mathbf{b}}\|_{\mathbf{M}}.$$

SVD kullanılarak,

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{V}\mathbf{E}\Sigma^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}}, \tag{3.44}$$

$$\mathbf{E} = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1^2}, \frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_p^2}, 0, \dots, 0 \right) \tag{3.45}$$



olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\bar{\mathbf{f}} &= \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}\bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{b}} \\ \left[(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})^T(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})\right]^{-1}(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})^T(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})\bar{\mathbf{f}} &= \left[(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})^T(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})\right]^{-1}(\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A})^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T)^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}} \\ &= [\mathbf{V}\Sigma^T\Sigma\mathbf{V}^T]^{-1}\mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{E}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}}.\end{aligned}$$

(3.43) ve (3.44) kullanılarak  $k$ . iterasyondaki hata için

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_k - \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{V}(\lambda\mathbf{E}_k)\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}(\bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}) - \mathbf{V}\mathbf{E}\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}[(\lambda\mathbf{E}_k - \mathbf{E})\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\bar{\mathbf{b}} + \lambda\mathbf{E}_k\Sigma^T\mathbf{U}^T\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\delta\mathbf{b}]\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (3.42) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1 &\equiv (\lambda\mathbf{E}_k - \mathbf{E})\Sigma^T \\ &= \text{diag} \left\{ \left( \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda\sigma_1^2)^k)}{\lambda\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sigma_1, \right. \\ &\quad \left. \dots, \left( \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda\sigma_p^2)^k)}{\lambda\sigma_p^2} - \frac{1}{\sigma_p^2} \right) \sigma_p, 0, \dots, 0 \right\} \\ &= \text{diag} \left( \frac{-(1 - \lambda\sigma_1^2)^k}{\sigma_1}, \dots, \frac{-(1 - \lambda\sigma_p^2)^k}{\sigma_p}, 0, \dots, 0 \right) \\ &= -\text{diag} \left( \frac{(1 - \lambda\sigma_1^2)^k}{\sigma_1}, \dots, \frac{(1 - \lambda\sigma_p^2)^k}{\sigma_p}, 0, \dots, 0 \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_2 &\equiv \lambda\mathbf{E}_k\Sigma^T \\ &= \text{diag} \left\{ \left( \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda\sigma_1^2)^k)}{\lambda\sigma_1^2} \right) \sigma_1, \dots, \left( \frac{\lambda(1 - (1 - \lambda\sigma_p^2)^k)}{\lambda\sigma_p^2} \right) \sigma_p, 0, \dots, 0 \right\} \\ &= \text{diag} \left( \frac{1 - (1 - \lambda\sigma_1^2)^k}{\sigma_1}, \dots, \frac{1 - (1 - \lambda\sigma_p^2)^k}{\sigma_p}, 0, \dots, 0 \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer  $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}}$  ve  $\boldsymbol{\delta\beta} = \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta\mathbf{b}}$  olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\mathbf{V},k} &= \mathbf{V}^T (\mathbf{f}_k - \bar{\mathbf{f}}) \\
&= \mathbf{V}^T \left( \mathbf{V} (\lambda \mathbf{E}_k) \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\delta\mathbf{b}}) - \mathbf{V} \mathbf{E} \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}} \right) \\
&= \lambda \mathbf{E}_k \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\delta\mathbf{b}}) - \mathbf{E} \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}} \\
&= (\lambda \mathbf{E}_k - \mathbf{E}) \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{b}} + \lambda \mathbf{E}_k \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta\mathbf{b}} \\
&= \mathbf{D}_1 \bar{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\delta\beta}
\end{aligned}$$

hatası bulunur.

$$\Phi^k(\sigma, \lambda) = \frac{(1 - \lambda\sigma^2)^k}{\sigma} \text{ ve } \Psi^k(\sigma, \lambda) = \frac{1 - (1 - \lambda\sigma^2)^k}{\sigma} \quad (3.46)$$

fonksiyonları tanımlanarak, SVD esasına göre  $\mathbf{e}^{\mathbf{V},k}$  hatasının  $j$ . bileşeni

$$\mathbf{e}_j^{\mathbf{V},k} = v_j^T (\mathbf{f}_k - \bar{\mathbf{f}}) = -\Phi^k(\sigma_j, \lambda) \bar{\boldsymbol{\beta}}_j + \Psi^k(\sigma_j, \lambda) \boldsymbol{\delta\beta}_j, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (3.47)$$

ile verilir.

Hata bileşeninin ilk terimine toplamsal hata veya iterasyon hatası, ikinci terimine ise gürültü hatası veya veri hatası denir. Bu metodun yarı-yakınsaklığı bu iki terim arasındaki karşılıklı etkileşimle açıklanır.

$k$ 'nın küçük değerleri için  $\Psi^k(\sigma, \lambda)$  yardımıyla ifade edilen gürültü hatası göz ardı edilebilir ve iterasyon kesin çözüme yaklaşır. Gürültü hatası, yaklaşım hatasıyla aynı dereceden büyüklüğe ulaşıncaya, yayılan gürültü hatası iterasyon adımında göz ardı edilemez ve toplam hata artmaya başlar.

### 3.3.1 Gürültü Hatasının Analizi

Bu kısımda, yukarıda elde edilen  $\Phi^k(\sigma, \lambda)$  ve  $\Psi^k(\sigma, \lambda)$  fonksiyonlarının, (Elfving et al. 2010) çalışmasında yer alan bazı temel özellikleri verilecektir.

**Önerme 3.3.2 (Elfving et al. 2010)** *Varsayalım ki*

$$0 < \varepsilon \leq \lambda \leq \frac{2}{\sigma_1^2} - \varepsilon \text{ ve } 0 < \sigma \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (3.48)$$

*olsun.*

a)  $\lambda$  ve  $\sigma$  sabit olmak üzere,  $k$  değişkenine bağlı fonksiyonlar olarak  $\Phi^k(\sigma, \lambda)$  fonksiyonu azalan ve konvektir,  $\Psi^k(\sigma, \lambda)$  fonksiyonu ise artan ve konkavdır.

b)  $\forall k \geq 0$  değerleri için,  $\Phi^k(\sigma, \lambda) > 0$ ,  $\Psi^k(\sigma, \lambda) \geq 0$ ,  $\Phi^k(\sigma, 0) = 1/\sigma$  ve  $\Psi^k(\sigma, 0) = 0$  dir.

c)  $\lambda$  sabit olmak üzere, bütün  $k \geq 0$  için  $\sigma$  ya bağlı fonksiyon olarak  $\Phi^k(\sigma, \lambda)$  azalandır.

**İspat.**  $y = y(\sigma) = 1 - \lambda\sigma^2$  olsun. (3.48) ifadesi

$$0 < y \leq 1 - \varepsilon\sigma_p^2 < 1 \quad (3.49)$$

ifadesini gerektirir.

(a)'nın ispatı için  $\Phi^k(\sigma, \lambda) = \frac{y^k}{\sigma}$  ve  $\Psi^k(\sigma, \lambda) = \frac{1 - y^k}{\sigma}$  olarak yazılabilir. Ayrıca  $\Phi_k^k(\sigma, \lambda)$  ve  $\Phi_{kk}^k(\sigma, \lambda)$  sırasıyla,  $k$ 'ya göre  $\Phi^k(\sigma, \lambda)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci türevidir. Yani

$$\begin{aligned} \Phi_k^k(\sigma, \lambda) &= \frac{y^k \ln y}{\sigma}, \\ \Phi_{kk}^k(\sigma, \lambda) &= \frac{y^k (\ln y)^2}{\sigma} \end{aligned}$$

ve bundan dolayı  $y \in (0, 1)$  için  $\Phi_k^k(\sigma, \lambda) < 0$  ve  $\Phi_{kk}^k(\sigma, \lambda) > 0$  olur. Dolayısıyla  $\Phi^k(\sigma, \lambda)$  fonksiyonu azalan ve konvektir.

$$\Psi^k(\sigma, \lambda) = \frac{1}{\sigma} - \frac{y^k}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} - \Phi^k(\sigma, \lambda),$$

$$\Psi_k^k(\sigma, \lambda) = -\Phi_k^k,$$

$$\Psi_{kk}^k(\sigma, \lambda) = -\Phi_{kk}^k$$

olduğundan  $\Psi_k^k(\sigma, \lambda) > 0$  ve  $\Psi_{kk}^k(\sigma, \lambda) < 0$  dir. Dolayısıyla  $\Psi^k(\sigma, \lambda)$  fonksiyonu artan ve konkavdır.

(b) direkt olarak (3.46) ve (3.49) dan görülür;

$$\Phi^k(\sigma, \lambda) > 0 \text{ için } \Psi^k(\sigma, \lambda) \geq 0$$

olur. Ayrıca

$$\Phi^k(\sigma, 0) = \frac{1}{\sigma}$$

olduğundan

$$\Psi^k(\sigma, 0) = \frac{1}{\sigma} - \Phi^k(\sigma, 0) = 0$$

olur.

(c)'nin ispatı için

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} > \sigma'' > \sigma' \geq \sigma_p$$

olsun. Bu durumda  $y(\sigma') = 1 - \lambda(\sigma')^2 \in (0, 1)$  ve  $y(\sigma'') = 1 - \lambda(\sigma'')^2 \in (0, 1)$  olup

$$\begin{aligned}\Phi^k(\sigma', \lambda) &= \frac{y^k(\sigma')}{\sigma'} = \frac{1 - \lambda(\sigma')^2}{\sigma'}, \\ \Phi^k(\sigma'', \lambda) &= \frac{y^k(\sigma'')}{\sigma''} = \frac{1 - \lambda(\sigma'')^2}{\sigma''}\end{aligned}$$

olduğundan  $\Phi^k(\sigma', \lambda) > \Phi^k(\sigma'', \lambda)$  olduğu görülür. ■

**Uyarı 3.3.3** (3.48) deki  $\sigma$  için üst sınır  $\hat{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  dir.  $0 < \varepsilon \leq \lambda \leq \frac{1}{\sigma_1^2}$  olduğunda açıkça  $\hat{\sigma} > \sigma_1$  dir ve  $\frac{1}{\sigma_1^2} < \lambda < \frac{2}{\sigma_1^2}$  olduğunda  $\hat{\sigma} \geq \frac{1}{\sqrt{2/\sigma_1^2}} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}$  dir. Bundan dolayı (3.48) şartını sağlayan bütün  $\lambda$  gevşeme parametreleri için  $\hat{\sigma} \geq \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}$  dir.

**Önerme 3.3.4 (Elfving et al. 2010)** Önerme 3.3.2 deki (3.48) şartı sağlansın ve  $\lambda$  sabit olsun.  $\forall k \geq 2$  için

$$\sigma_k^* = \operatorname{argmax}_{0 < \sigma < 1/\sqrt{\lambda}} \Psi^k(\sigma, \lambda)$$

olacak şekilde bir  $\sigma_k^* \in (0, \frac{1}{\sqrt{\lambda}})$  noktası vardır. Ayrıca,  $\sigma_k^*$  tektir ve

$$\sigma_k^* = \sqrt{\frac{1 - \xi_k}{\lambda}} \quad (3.50)$$

eşitliği ile verilir, burada  $\xi_k$ ,

$$g_{k-1}(y) = (2k - 1)y^{k-1} - (y^{k-2} + \dots + y + 1) = 0 \quad (3.51)$$

eşitliğinin  $(0, 1)$  açık aralığındaki tek köküdür.

**İspat.**  $\Psi^k$ 'nin  $\sigma$  ya göre türevi  $\Psi'$  olsun. Bu durumda

$$\Psi'(\sigma, \lambda) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{(1 - \lambda\sigma^2)^k}{\sigma^2} + 2\lambda k(1 - \lambda\sigma^2)^{k-1}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \Psi'(\sigma, \lambda) &= 2k(1 - \lambda\sigma^2)^{k-1} - \frac{1 - (1 - \lambda\sigma^2)^k}{\lambda\sigma^2} \\
&= 2k(1 - \lambda\sigma^2)^{k-1} - \frac{1 - (1 - \lambda\sigma^2)^k}{1 - (1 - \lambda\sigma^2)} \\
&= 2ky^{k-1} - \frac{1 - y^k}{1 - y} \\
&= 2ky^{k-1} - \frac{(1 - y)(y^{k-1} + \dots + y + 1)}{1 - y} \\
&= 2ky^{k-1} - y^{k-1} - (y^{k-2} + \dots + y + 1) \\
&= (2k - 1)y^{k-1} - (y^{k-2} + \dots + y + 1) \\
&= g_{k-1}(y)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $g_{k-1}$  fonksiyonu süreklidir ve  $g_{k-1}(0) = 1$  ve  $g_{k-1}(1) = k$ . Bundan dolayı  $g_{k-1}(\xi_k) = 0$  olacak şekilde en az bir  $\xi_k \in (0, 1)$  noktası vardır. Gösterim kolaylığı için bu kanıtın geri kalanında  $g = g_{k-1}$ ,  $z = \xi_k$  ve  $\sigma^* = \sigma_k^*$  olarak alınacaktır.

$z = (1 - \lambda\sigma^2)$  olup  $\sigma^* = \sqrt{\frac{1-z}{\lambda}}$  noktası  $\Psi^k$ 'nin  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$  açık aralığında bulunan bir kritik noktasıdır. Şimdi  $z$ 'nin tekliği gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
g(y) - g(z) &= (2k - 1)y^{k-1} - (y^{k-2} + \dots + y + 1) \\
&\quad - (2k - 1)z^{k-1} + (z^{k-2} + \dots + z + 1) \\
&= (y - z) [(2k - 1)y^{k-2} + ((2k - 1)z - 1)y^{k-3} \\
&\quad + \dots + ((2k - 1)z^{k-2} - z^{k-3} - \dots - z - 1)]
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\frac{g(y)}{y - z} &= (2k - 1)y^{k-2} + ((2k - 1)z - 1)y^{k-3} \\
&\quad + ((2k - 1)z^2 - z - 1)y^{k-4} \\
&\quad + \dots + ((2k - 1)z^{k-2} - z^{k-3} - \dots - z - 1) \\
&\equiv Q(y)
\end{aligned}$$

olup  $Q(0) = \frac{g(0)}{-z} = \frac{1}{z} > 0$  dir.  $y > 0$  için  $Q(y)$ 'nin arttığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunun için  $t + \alpha < 1$  olacak şekilde  $0 < t < 1$  ve  $\alpha > 0$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
Q(t + \alpha) - Q(t) &= (2k - 1)((t + \alpha)^{k-2} - t^{k-2}) \\
&\quad + ((2k - 1)z - 1)((t + \alpha)^{k-3} - t^{k-3}) \\
&\quad + ((2k - 1)z^2 - z - 1)((t + \alpha)^{k-4} - t^{k-4}) \\
&\quad + \dots + ((2k - 1)z^{k-3} - z^{k-4} - \dots - z - 1)((t + \alpha) - t).
\end{aligned}$$

$g(z) = (2k - 1)z^{k-1} - (z^{k-2} + \dots + z + 1) = 0$  olduğundan

$$\begin{aligned} z^{k-2}((2k - 1)z - 1) &= (z^{k-3} + z^{k-4} + \dots + z + 1) \\ z^{k-3}((2k - 1)z^2 - z - 1) &= (z^{k-4} + \dots + z + 1) \\ &\vdots \\ z^2((2k - 1)z^{k-3} - z^{k-4} - \dots - z - 1) &= z + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı  $Q(t + \alpha) - Q(t) > 0$  'dır. Böylece  $z$  ve  $\sigma^*$  tektir.

$g(y) = (y - z)Q(y)$  ve  $Q(y) > 0$  olduğundan

$$y > z \text{ iken } g(y) > 0 \text{ ve } y < z \text{ iken } g(y) < 0 \quad (3.52)$$

sonucu elde edilir.  $y < z$  için  $1 - \lambda\sigma^2 < z$  veya  $\sigma > \sqrt{\frac{1-z}{\lambda}}$  olur, yani  $\sigma > \sigma^*$  iken  $\Psi' = \lambda g(y) < 0$  olur ve tersi de doğrudur. Böylece,  $\Psi^k(\sigma, \lambda)$ 'nın bir maksimum noktasının  $\sigma^*$  olduğu gösterilmiş olur. ■

**Önerme 3.3.5 (Elfving et al. 2010)** *Önerme 3.3.4'te tanımlanan  $\{\xi_k\}_{k \geq 2}$  dizisi*

$$0 < \xi_k < \xi_{k+1} < 1$$

*şartını sağlar ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi = 1$ .*

**İspat.** Önerme 3.3.4'ten  $0 < \xi_k < 1$  dir. (3.51) kullanılarak

$$g_k(y) = (2k + 1)y^k - 2ky^{k-1} + g_{k-1}(y) \quad (3.53)$$

bulunur. Şimdi,  $g_k(\xi_k) < 0$  olduğu gösterilecek ve (3.52) ( $g(z) = 0$  olacak şekilde  $g = g_k$  ve  $z = \xi_k$  için) dikkate alınarak  $\xi_k < \xi_{k+1}$  olduğu elde edilmiş olacaktır.

(3.51) ve geometrik seri formülü kullamlarak

$$g_{k-1}(y) = (2k - 1)y^{k-1} - \frac{1 - y^{k-1}}{1 - y} \quad (3.54)$$

elde edilir.  $y = \frac{2k}{2k+1}$  olmak üzere,  $2(2k)^k - (2k + 1)^k > 0$  veya denk olarak  $2^{\frac{1}{k}} > 1 + \frac{1}{2k}$  ise

$$\begin{aligned} g_{k-1}\left(\frac{2k}{2k+1}\right) &= (2k - 1)\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{k-1} - \frac{1 - \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{k-1}}{1 - \left(\frac{2k}{2k+1}\right)} \\ &= \frac{2(2k)^k - (2k + 1)^k}{(2k + 1)^{k-1}} \end{aligned}$$

pozitifdir.  $x > 0$  için  $2^x - \frac{x}{2} - 1 > 0$  olup, eğer bu eşitsizlikte  $x = \frac{1}{k}$  olarak alınırsa  $g_{k-1} \left( \frac{2k}{2k+1} \right) > 0$  olduğu elde edilmiş olur. (3.52)'den

$$\xi_k < \frac{2k}{2k+1} \quad (3.55)$$

dir. Ayrıca (3.53) kullanılarak

$$\begin{aligned} g_k(\xi_k) &= (2k+1)\xi_k^k - 2k\xi_k^{k-1} + g_{k-1}(\xi_k) \\ &= (\xi_k)^{k-1}((2k+1)\xi_k - 2k) < 0. \end{aligned}$$

Bundan dolayı  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi \leq 1$  olur. Şimdi  $\xi = 1$  olduğu gösterilecektir. (3.54),  $y = \xi_k$  ile kullanılarak ve  $\xi_k = 1 - z_k$  yerine konulursa ( $0 < z_k < 1$ )

$$g_{k-1}(1 - z_k) = 0 = (2k-1)(1 - z_k)^{k-1} - \frac{1 - (1 - z_k)^{k-1}}{1 - (1 - z_k)}$$

elde edilir. Buradan  $(1 - z_k)^{k-1}((2k-1)z_k + 1) = 1$  ve  $(1 - z_k)^{-(k-1)} = (2k-1)z_k + 1 < 2k$  olur. Bu nedenle  $k \rightarrow \infty$  için,  $0 < -\ln(1 - z_k) = -\ln \xi_k \leq \ln \frac{2k}{k-1} \rightarrow 0$  olur. Bundan dolayı  $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 1$  elde edilir. ■

**Önerme 3.3.6 (Elfving et al. 2010)**  $\Psi^k(\sigma_k^*, \lambda)$  değeri  $k$  nın artan bir fonksiyonudur.

**İspat.** Önerme 3.3.2 a) dan

$$\Psi^{k+1}(\sigma, \lambda) \geq \Psi^k(\sigma, \lambda), \quad 0 < \sigma \leq \hat{\sigma}$$

olur (bu sonuç,  $\sigma \geq \sigma_p$  olarak kabul edilir, ancak  $\sigma > 0$  için de geçerli olduğu kolayca gösterilebilir). Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} \Psi^{k+1}(\sigma_{k+1}^*, \lambda) &= \max_{0 < \sigma \leq \hat{\sigma}} \Psi^{k+1}(\sigma, \lambda) \\ &\geq \max_{0 < \sigma \leq \hat{\sigma}} \Psi^k(\sigma, \lambda) \\ &= \Psi^k(\sigma_k^*, \lambda). \end{aligned}$$

■

Özet olarak; sabit  $\lambda$  değerleri için  $k$ . iterasyonda,  $\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}$  nın SVD'si kullanılarak elde edilen (3.47) eşitliği ile toplam hatanın, iterasyon hatasını kontrol eden  $\Phi$  ve gürültü hatasını kontrol eden  $\Psi$  fonksiyonlarına bağlı olduğu görülmektedir. Her iki fonksiyon da  $k, \sigma$  ve  $\lambda$  ya bağlıdır. Yarı-yakınsaklık analizi ile ilgili yukarıda ifade edilen sonuçlar dikkate alınarak uygun  $\lambda$  gevşeme parametrelerinin seçimi mümkün olabilmektedir (Elfving et al. 2010).





## BÖLÜM 4

### TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN SIRT UYGULAMALARI

Bu bölümde  $\tau - p$  dönüşümünün tersi için Bölüm 3'te tanımlanan Landweber, SART, Cimmino, CAV ve DROP yöntemlerinin yakınsaklık davranışlarının analizine yönelik bazı uygulamalara yer verilmiştir. Sayısal hesaplamalarda MATLAB programı kullanılmış ve AIR Tools (Hansen and Saxild-Hansen 2012) MATLAB paketinden yararlanılmıştır. AIR Tools MATLAB paketi Radon dönüşümünü temel almakta olup, bu çalışma kapsamında, ilgili program paketinde  $\tau - p$  dönüşümünün uygulanması için gerekli değişiklikler yapılmıştır.

Uygulamalarda öncelikle bir  $f(x, y)$  fonksiyonu tanımlanmış ve bu fonksiyonun  $\tau - p$  dönüşümü verileri hesaplanmıştır. Pratikte, gürültü (noise) etkisinden dolayı, hesaplanan bu dönüşüm verilerini görüntüleme ile ilgili problemlerde direkt olarak kullanabilmek genellikle mümkün değildir. Bu nedenle, eş-zamanlı iteratif rekonstrüksiyon teknikleri kullanılarak  $f(x, y)$  fonksiyonuna yaklaşımlar yapılırken gürültüsüz dönüşüm verilerinin yanı sıra, %1, %3 ve %5 oranında gürültü (Gauss beyaz gürültüsü) eklenen dönüşüm verileri kullanılmıştır.

$f(x, y)$  fonksiyonunun kesin değerleri ile yapılan yaklaşımlar sonucu elde edilen değerlerin karşılaştırılması relatif hata hesabı ile yapılmıştır. Relatif hata, kesin değerlerin  $\mathbf{f}$  vektörü ile  $k$  adet iterasyon ile hesaplanan  $\mathbf{f}^{(k)}$  yaklaşımı için

$$\frac{\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}$$

oranı ile hesaplanmıştır, burada  $\|\cdot\|_2$ , Euclid normudur.

Ele alınan örneklerde  $f(x, y)$  fonksiyonları, desteği  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  kare bölgesinde olacak şekilde

$$C_i(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-r_i^2}{r_i^2 - (x - a_i)^2 - (y - b_i)^2}\right) & , (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 < r_i^2 \text{ ise,} \\ 0 & , \text{ diğ}er \text{ durumda,} \end{cases} \quad (4.1)$$

fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlanmıştır.

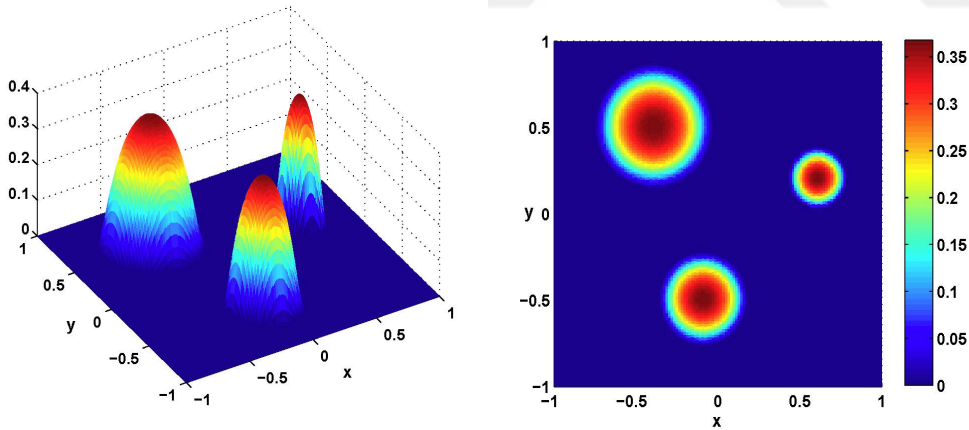
Hesaplamalar,  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  kare bölgesi için  $50 \times 50$  düzgün ızgara oluşturularak, bu ızgaranın her bir düğüm noktasında  $f(x, y)$  fonksiyonunun 2500 ayrık değeri için yapılmıştır.  $(0, \pi)$  aralığında  $\theta = 5^\circ, 10^\circ, \dots, 175^\circ$  olmak üzere,  $\theta$  açısı için 35 farklı değer ve  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  aralığının düzgün parçalanması ile  $t$  için 75 farklı değer kullanılarak toplam 2625 projeksiyon verisinden yararlanılmıştır.

**Örnek 4.0.1**  $f(x, y)$  fonksiyonu Tablo 4.1’de verilen parametreler ile  $C_i(x, y)$  fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlansın.

Tablo 4.1  $C_i(x, y)$  için parametreler (Örnek 4.0.1).

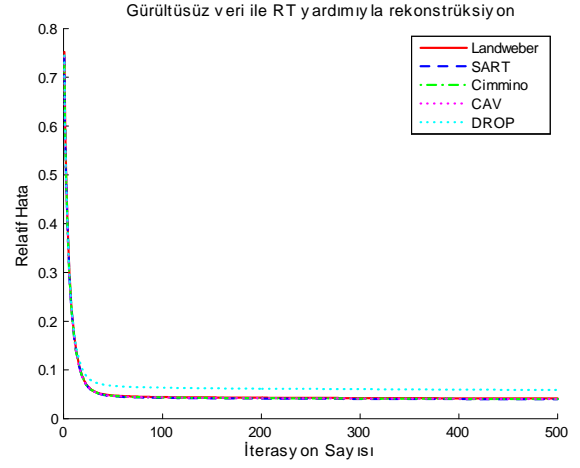
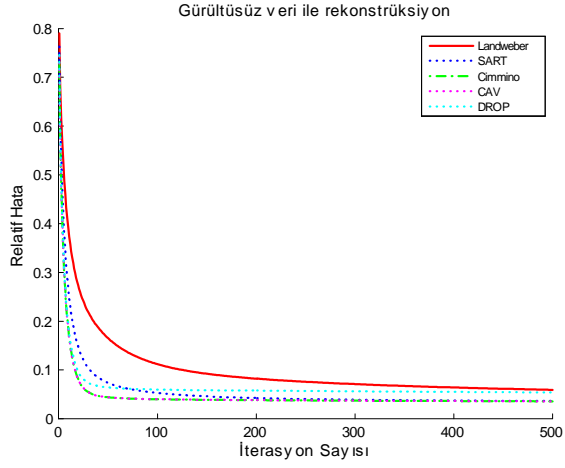
$i$	Merkez $(a_i, b_i)$	Yarıçap $r_i$
1	$(0.6, 0.2)$	0.2
2	$(-0.4, 0.5)$	0.4
3	$(-0.1, -0.5)$	0.3

$f(x, y)$  fonksiyonunun grafiği Şekil 4.1’de verilmiştir.

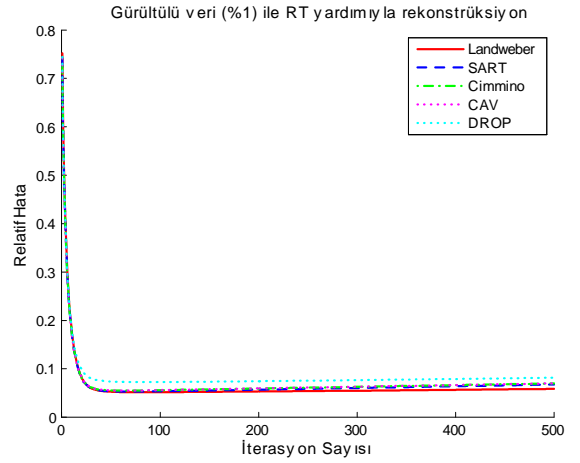
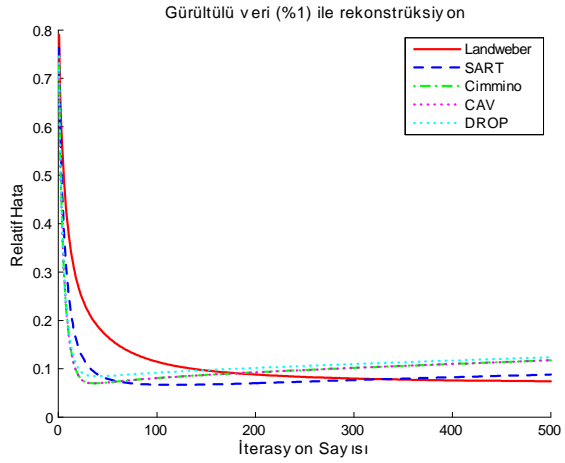


Şekil 4.1  $f$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.1).

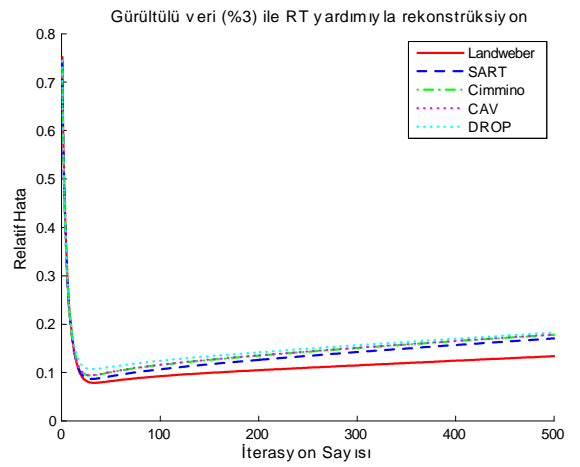
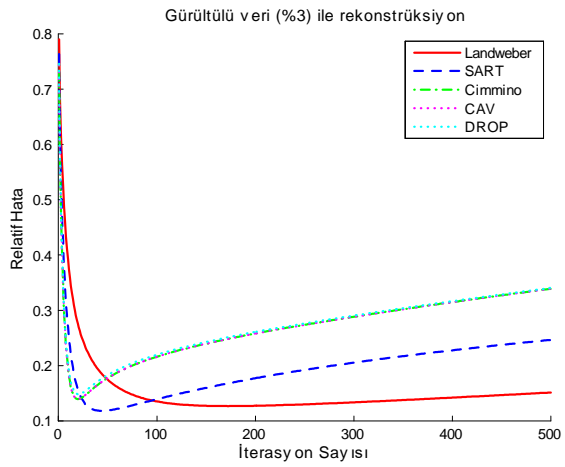
Landweber, SART, Cimmino, CAV ve DROP yöntemleri kullanılarak, ilk 500 iterasyon için relatif hata değerleri, gürültüsüz veri için Şekil 4.2’de ve %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için sırasıyla Şekil 4.3, 4.4 ve 4.5’te verilmiştir. Şekil 4.2’de, gürültüsüz veri kullanıldığında, rekonstrüksiyon probleminin direkt ayrık formu ve Radon dönüşümü yardımıyla ayrık formu için kullanılan beş yöntemin de benzer yakınsama davranışı gösterdiği ve iterasyon sayısı arttıkça relatif hatanın giderek azaldığı görülmektedir.



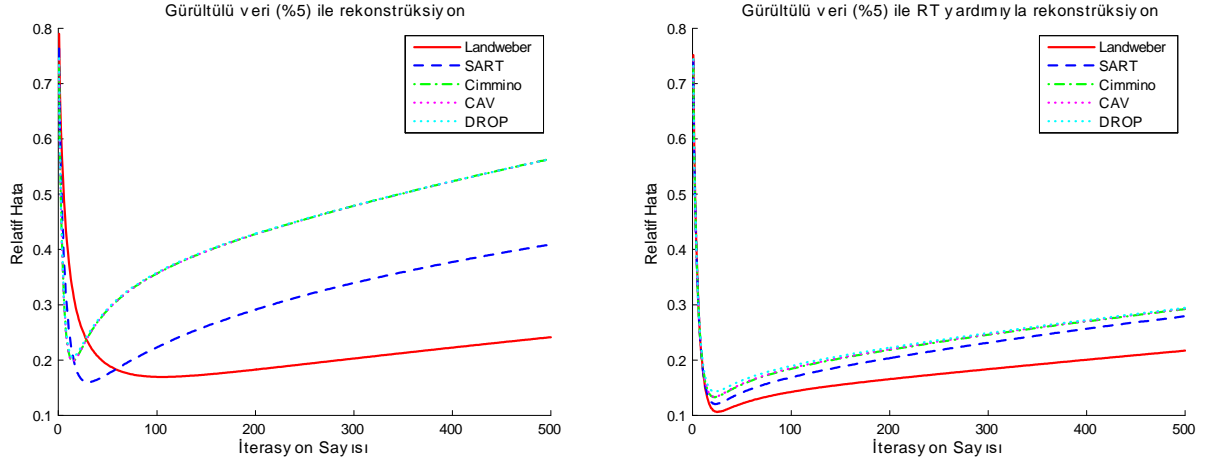
Şekil 4.2 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.3 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.4 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.5 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).

Bununla birlikte Şekil 4.3, 4.4 ve 4.5'te, dönüşüm verilerine dahil edilen gürültü oranındaki artış neden olduğu gürültü hatası ile belirli bir iterasyon adımına kadar azalmakta olan relatif hata değerlerinin daha sonra artmakta olduğu görülmektedir. Bu durum yaklaşım için kullanılan iterasyon yöntemlerinin yarı-yakınsaklık davranışı olarak ifade edilmektedir.

Şekil 4.3, 4.4 ve 4.5'te görülen, %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri ve bu değerlerin hangi iterasyon sayısı için elde edildiği sırasıyla Tablo 4.2, 4.3 ve 4.4'te ifade edilmiştir. Dönüşüm verilerine dahil edilen gürültü oranları artarken minimum relatif hata değerleri de artmakla beraber, bu değerlerin elde edildiği iterasyon sayıları giderek azalmaktadır. Bunun sebebi, artan gürültü hatasının kullanılan yöntemlerdeki azalmakta olan iterasyon hatasına daha düşük iterasyon adımlarında üstün gelmesidir.

Şekil 4.3-4.5 ve Tablo 4.2-4.4'ten, gürültülü veri kullanıldığı zaman, rekonstrüksiyon probleminin Radon dönüşümü yardımıyla ayrık formu için elde edilen relatif hata değerlerinin, direkt ayrık formu için elde edilenlere göre daha küçük olduğu ve genel olarak Landweber ve SART yöntemlerinin, Cimmino, CAV ve DROP yöntemlerine göre gürültü oranından daha az etkilendiği görülmektedir. Landweber ve SART yöntemleri ile elde edilen minimum relatif hata değerleri birbirine yakın olmakla birlikte, bu değerler SART yönteminde Landweber yöntemine kıyasla daha küçük iterasyon sayılarında elde edilir. Bu bakımdan, SART yöntemi kullanılan diğer yöntemlere göre daha üstündür. Ayrıca, Cimmino, CAV ve DROP yöntemleri benzer yakınsama davranışı göstermektedirler.

Tablo 4.2 %1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).

	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Landweber	500*	0.0743	81	0.0518
SART	118	0.0668	67	0.0528
Cimmino	36	0.0700	63	0.0551
CAV	36	0.0701	63	0.0552
DROP	40	0.0846	87	0.0726

\*: Minimum relatif hata 608. iterasyonda elde edilmektedir.

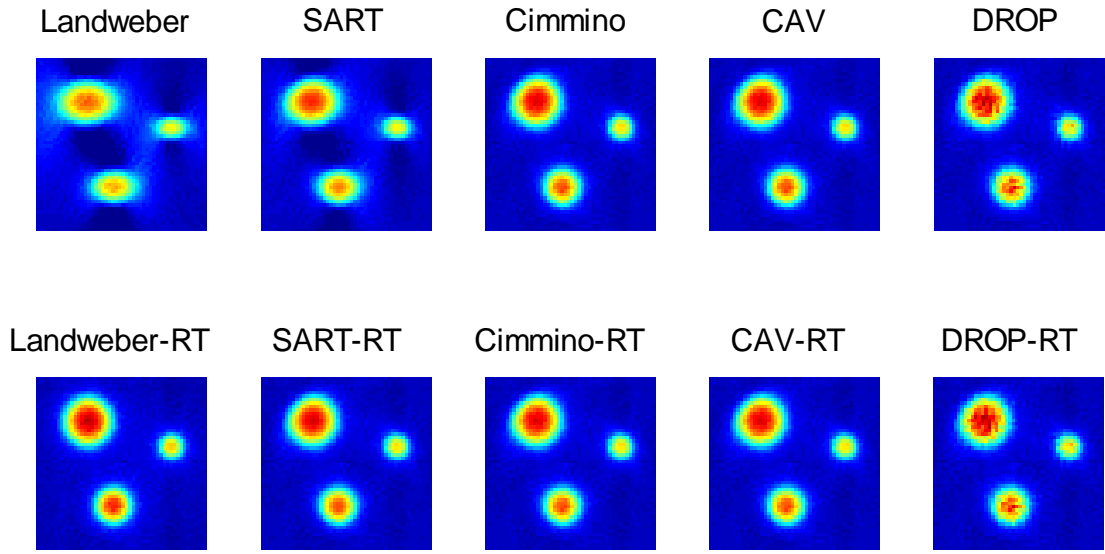
Tablo 4.3 %3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).

	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Landweber	173	0.1270	33	0.0787
SART	44	0.1184	31	0.0867
Cimmino	20	0.1394	29	0.0939
CAV	20	0.1395	29	0.0944
DROP	20	0.1483	31	0.1063

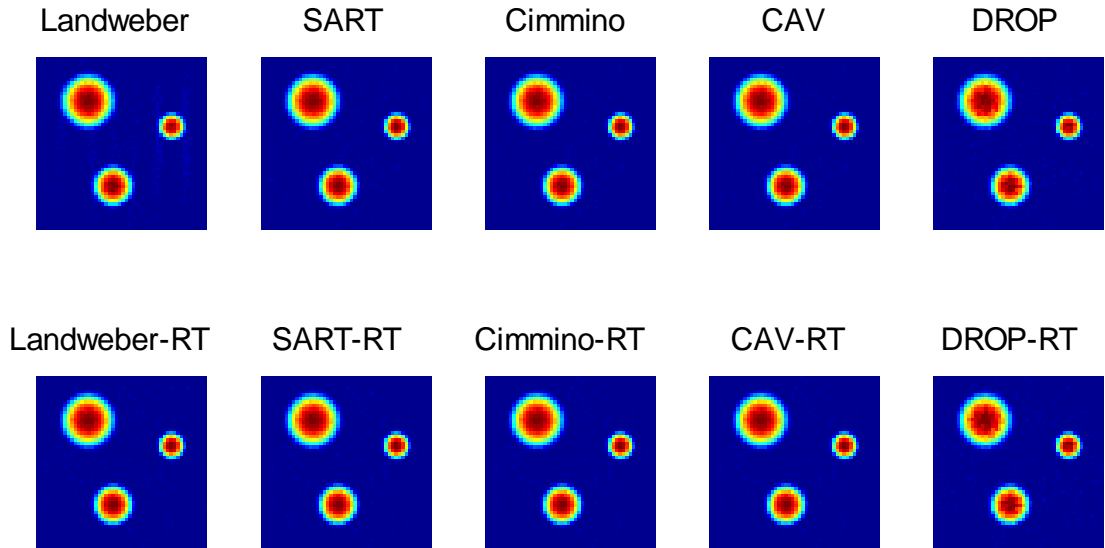
Tablo 4.4 %5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).

	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Landweber	106	0.1696	25	0.1063
SART	30	0.1602	23	0.1205
Cimmino	14	0.1984	23	0.1328
CAV	14	0.1985	23	0.1337
DROP	16	0.2050	23	0.1433

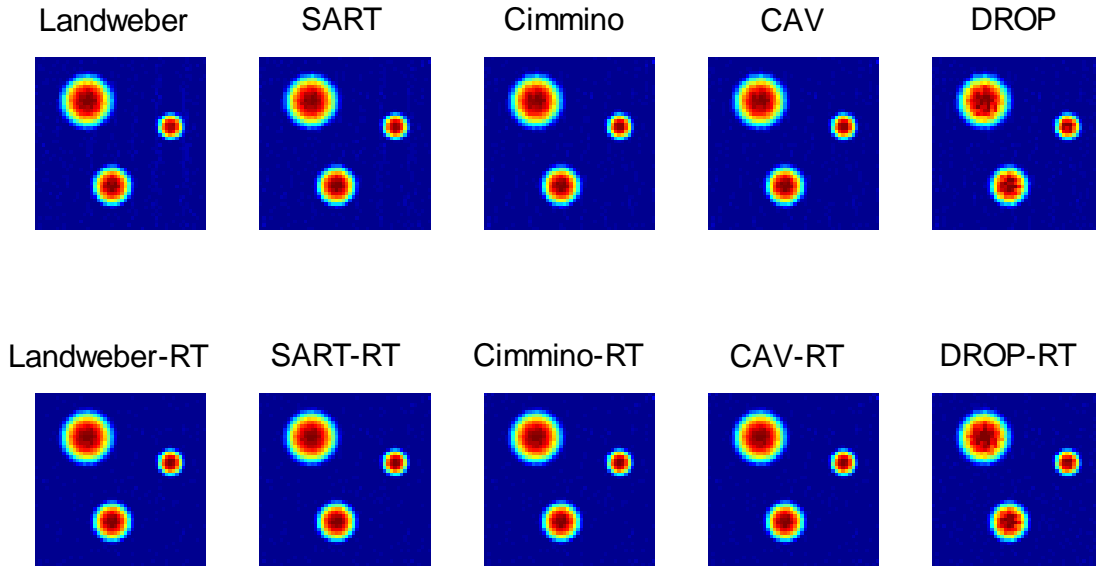
$f$  fonksiyonu için elde edilen yaklaşık görüntüler, gürültüsüz veri için 5 iterasyon ve 500 iterasyon ile Şekil 4.6-4.7'de, %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için ise Tablo 4.2-4.4'te verilen minimum relatif hatanın elde edildiği iterasyon sayısı ve 500 iterasyon ile Şekil 4.8-4.13'te gösterilmiştir.



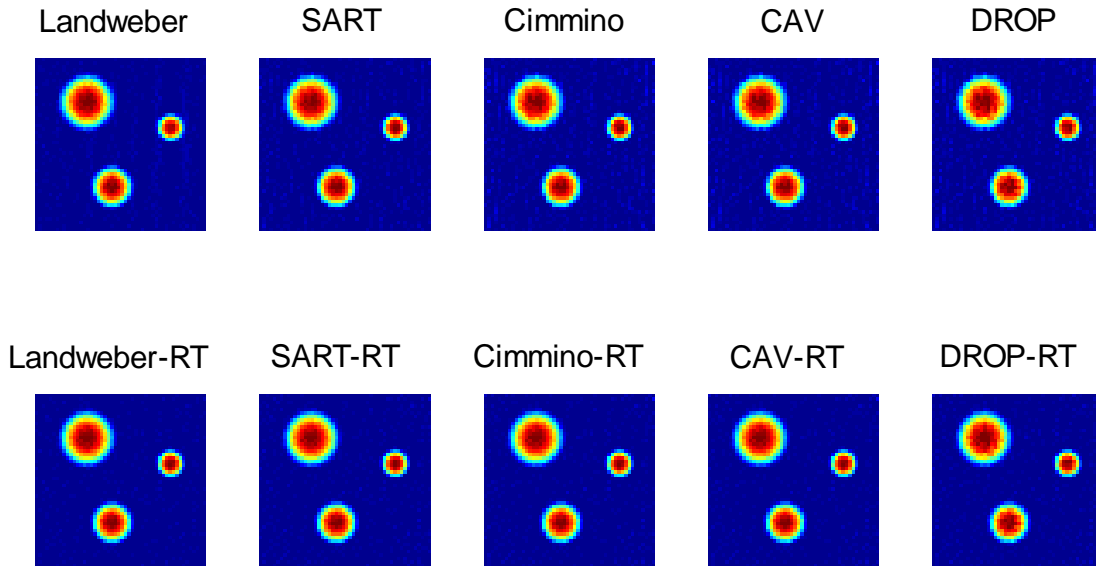
Şekil 4.6 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=5 (Örnek 4.0.1).



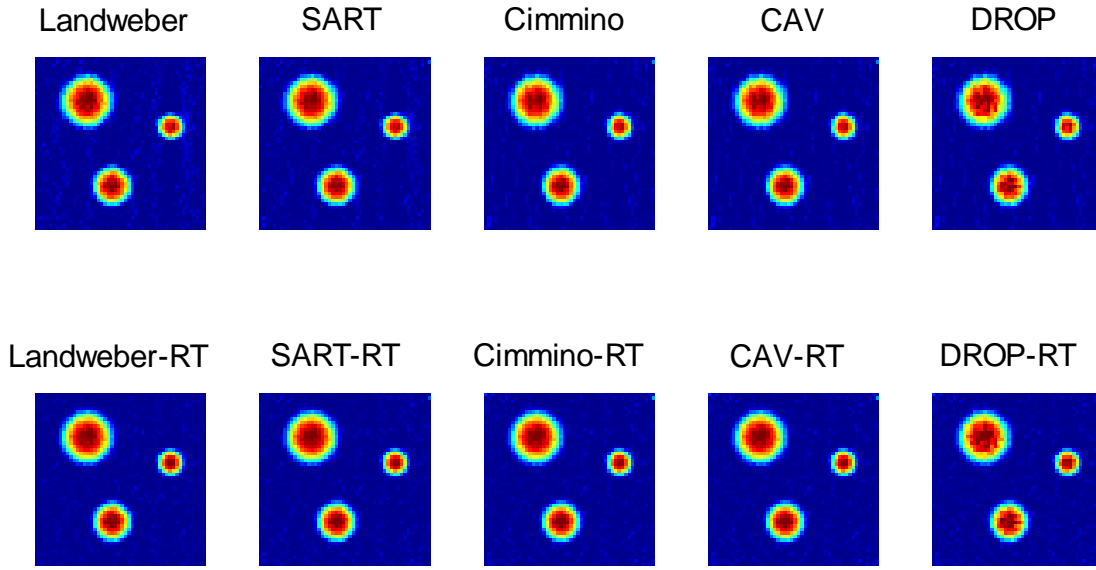
Şekil 4.7 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).



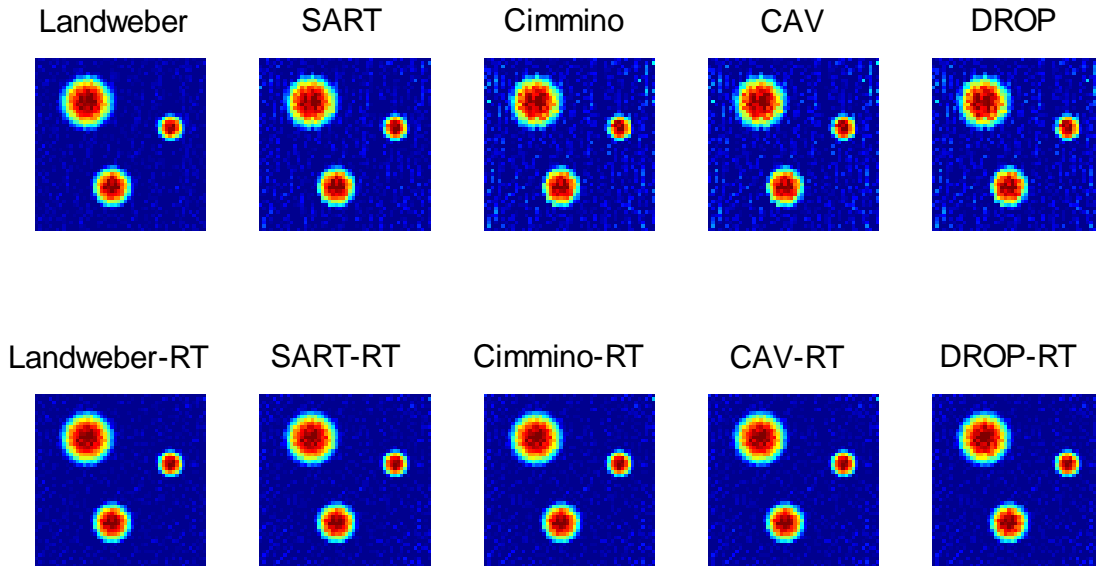
Şekil 4.8 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.9 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).

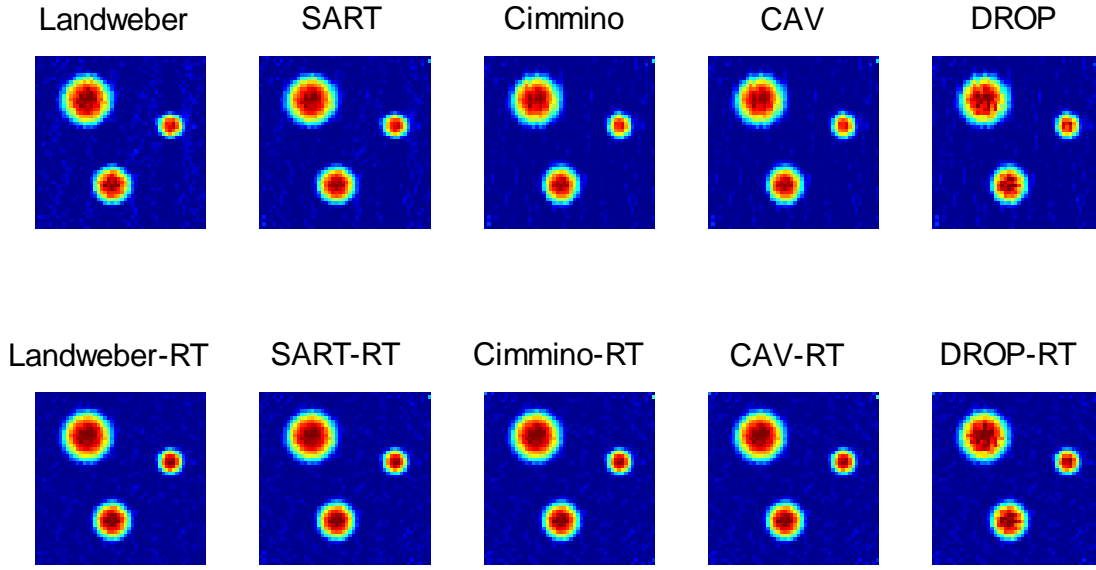


Şekil 4.10 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).

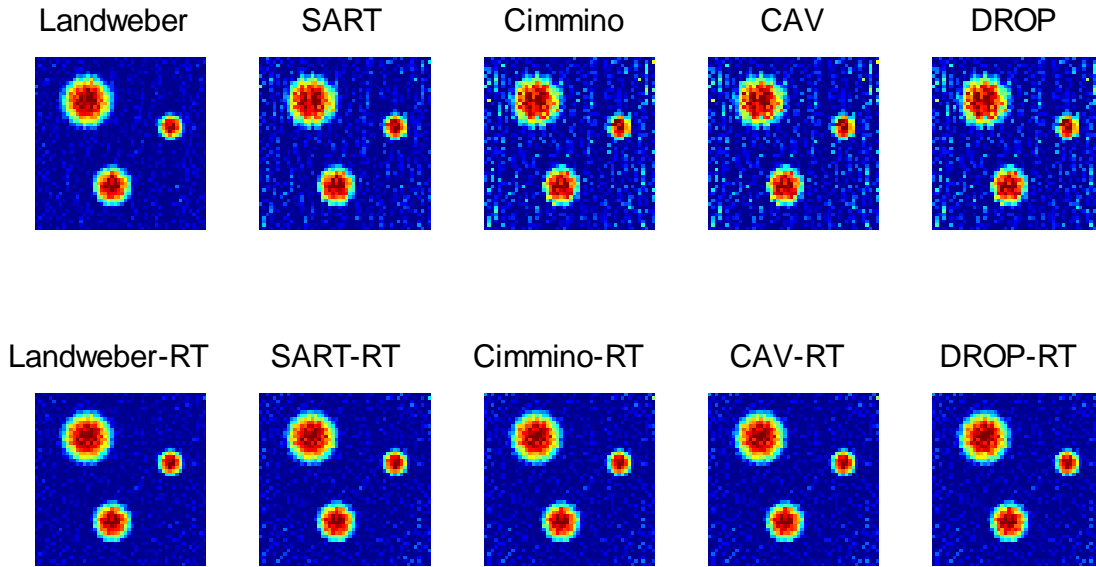


Şekil 4.11 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).





Şekil 4.12 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).



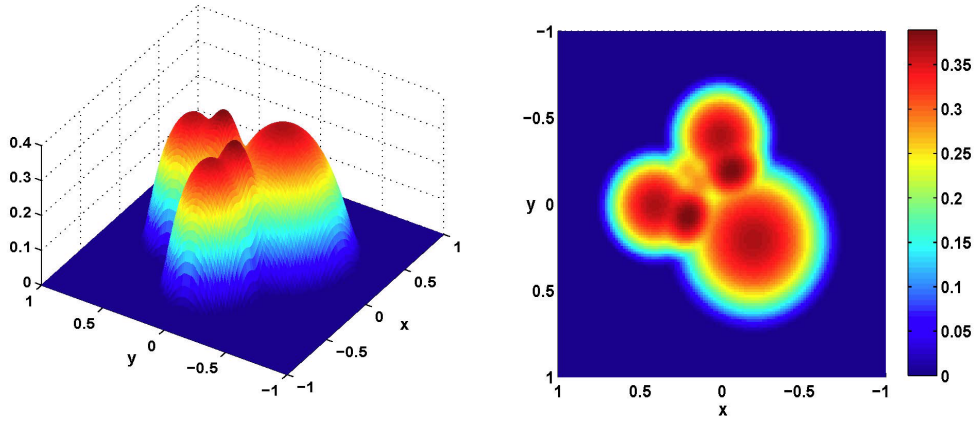
Şekil 4.13 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.1).

**Örnek 4.0.2**  $f(x, y)$  fonksiyonu Tablo 4.5'te verilen parametreler ile  $C_i(x, y)$  fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlansın.

Tablo 4.5  $C_i(x, y)$  için parametreler (Örnek 4.0.2).

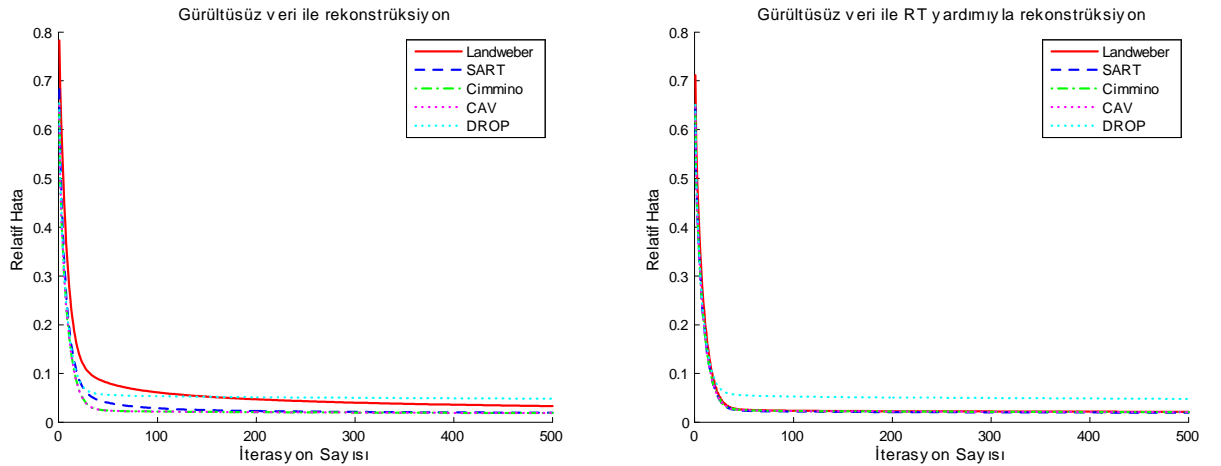
$i$	Merkez $(a_i, b_i)$	Yarıçap $r_i$
1	$(0.2, -0.2)$	0.6
2	$(0, 0.4)$	0.4
3	$(-0.4, 0)$	0.4

$f(x, y)$  fonksiyonunun grafiği Şekil 4.14'te verilmiştir.

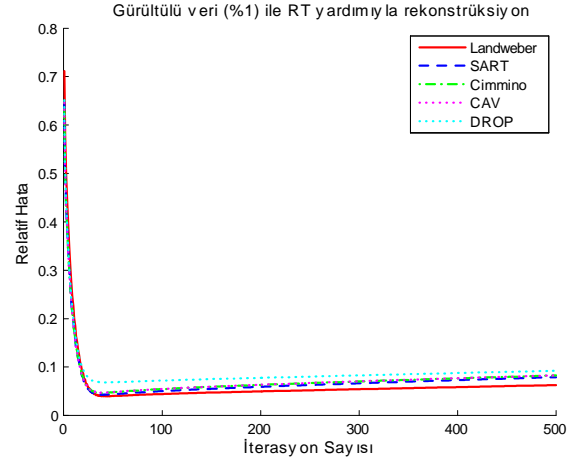
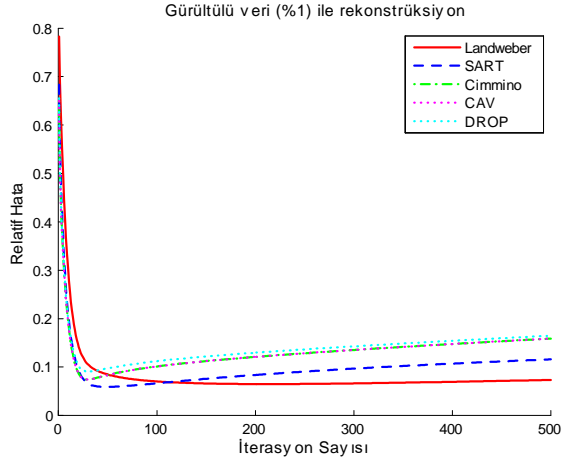


Şekil 4.14  $f$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.2).

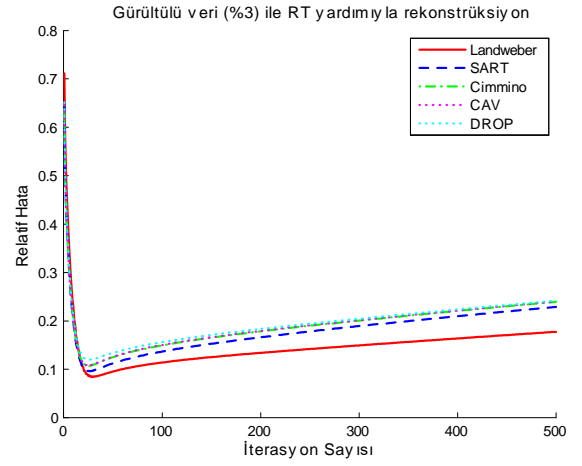
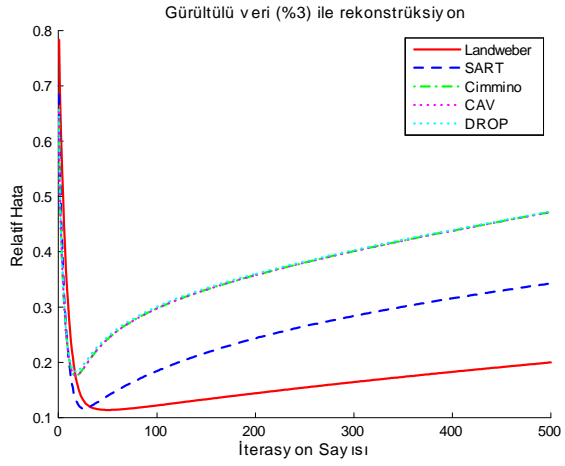
Yukarıda tanımlanan  $f$  fonksiyonunun  $\tau - p$  projeksiyonlarından yaklaşık olarak elde edilmesinde hesaplanan relatif hata değerleri, gürültüsüz veri için ve %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için sırasıyla Şekil 4.15, 4.16, 4.17 ve 4.18'de verilmiştir.



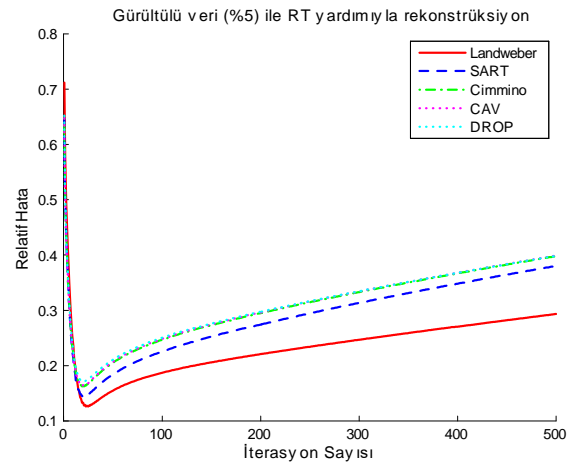
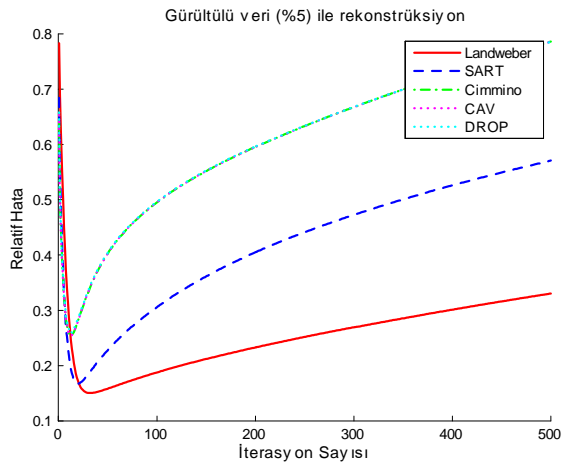
Şekil 4.15 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.16 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.17 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.18 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).

%1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için elde edilen minimum relatif hata değerleri ve bu değerlerin hangi iterasyon sayısı için elde edildiği sırasıyla Tablo 4.6, 4.7 ve 4.8'de ifade edilmiştir. Ayrıca,  $f$  fonksiyonu için yapılan yaklaşımlar ile elde edilen yaklaşık görüntüler

Şekil 4.19-4.26’da gösterilmiştir.

Tablo 4.5’te verilen parametreler ile  $C_i(x, y)$  fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlanan  $f$  fonksiyonu için, rekonstrüksiyon probleminin direkt ayrık formu ve Radon dönüşümü yardımıyla ayrık formu kullanılarak uygulanan yöntemlerin Örnek 4.0.1’deki ile benzer yakınsama davranışı gösterdikleri görülmektedir.

Tablo 4.6 %1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).

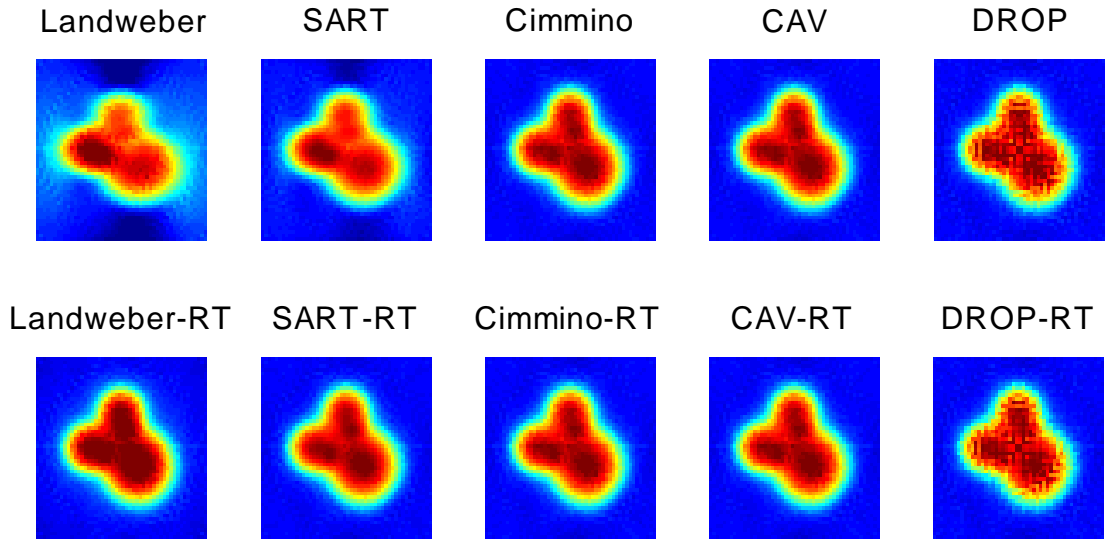
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Landweber	212	0.0649	43	0.0395
SART	50	0.0590	39	0.0424
Cimmino	30	0.0741	37	0.0464
CAV	30	0.0741	37	0.0467
DROP	30	0.0905	43	0.0685

Tablo 4.7 %3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).

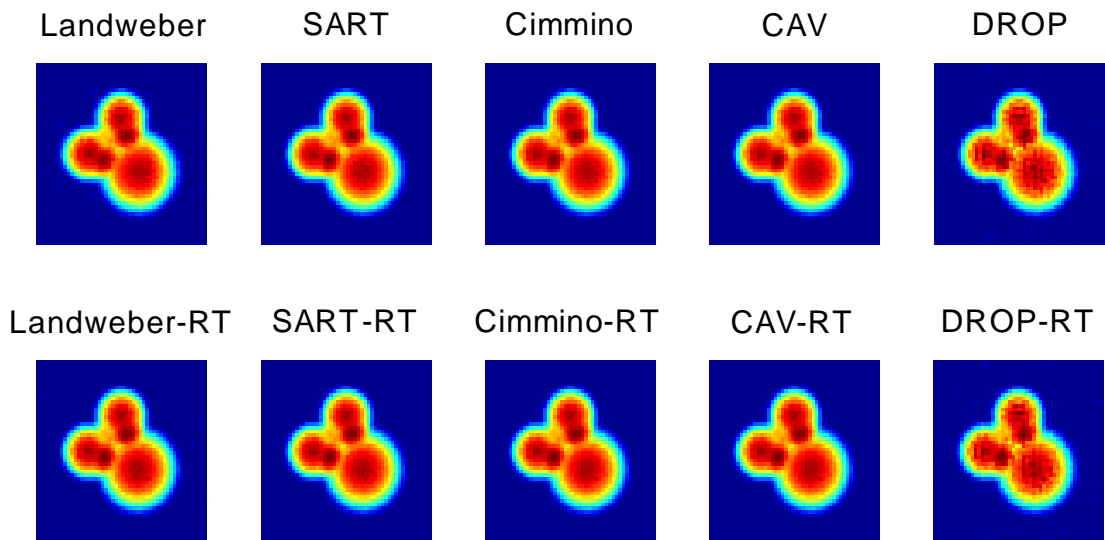
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Landweber	50	0.1142	29	0.0840
SART	26	0.1169	27	0.0957
Cimmino	18	0.1752	25	0.1069
CAV	18	0.1753	25	0.1077
DROP	18	0.1829	27	0.1195

Tablo 4.8 %5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).

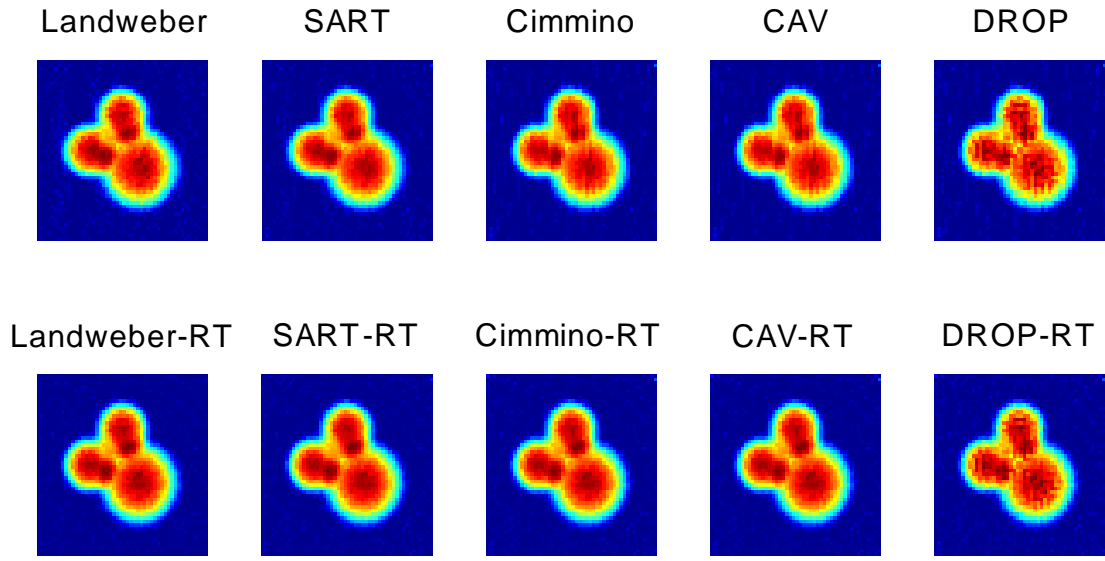
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Landweber	32	0.1506	25	0.1263
SART	20	0.1675	21	0.1441
Cimmino	12	0.2543	19	0.1623
CAV	12	0.2544	19	0.1635
DROP	12	0.2598	21	0.1715



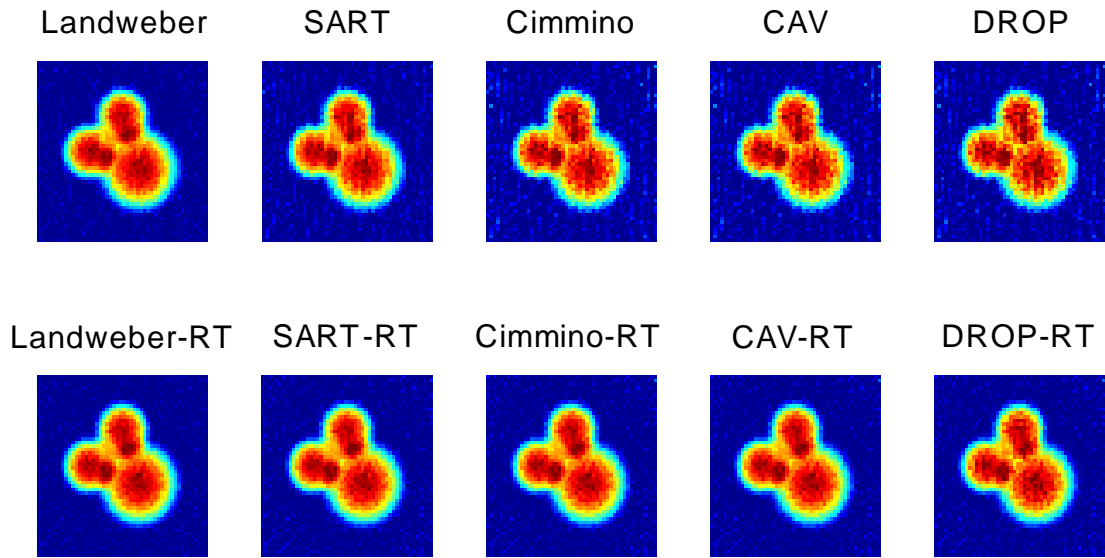
Şekil 4.19 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=5 (Örnek 4.0.2).



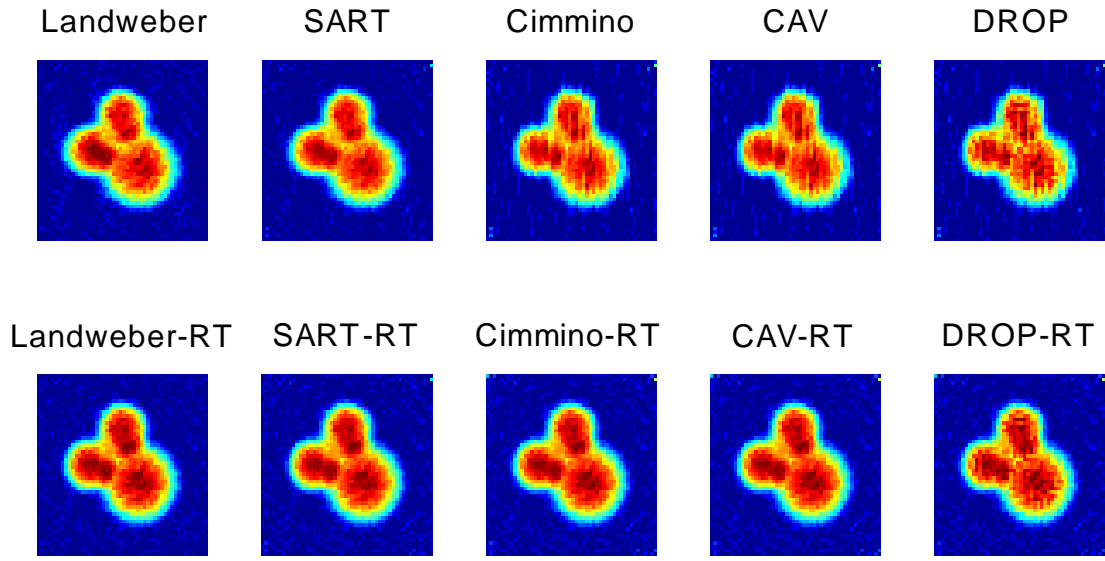
Şekil 4.20 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2).



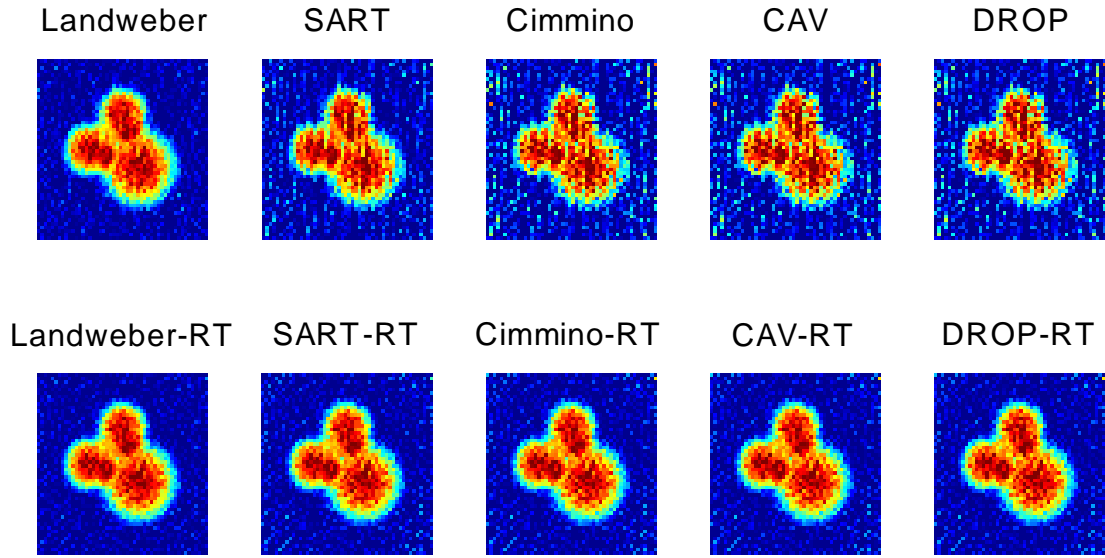
Şekil 4.21 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).



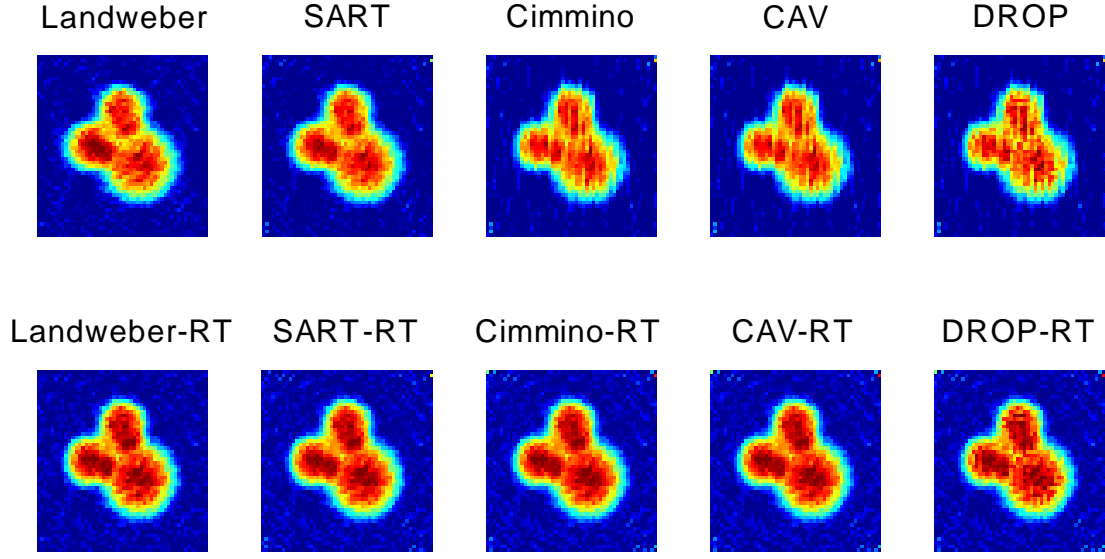
Şekil 4.22 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2).



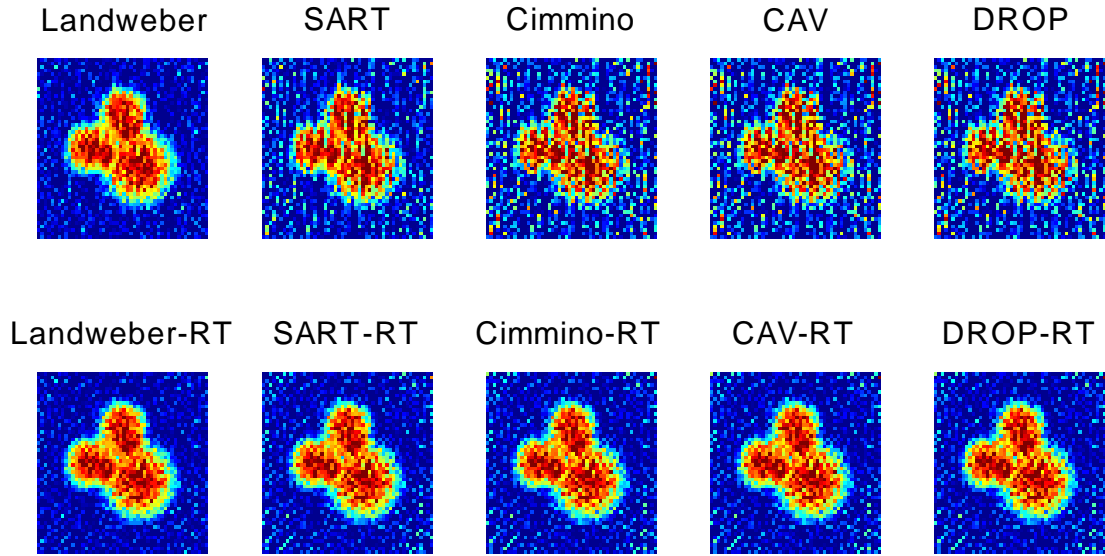
Şekil 4.23 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.24 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.25 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.26 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=500 (Örnek 4.0.2).



## KAYNAKLAR

- Andersen A H and Kak A C** (1984) Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm, *Ultrason Imaging*, 6: 81-84.
- Benzi M** (2005) *Gianfranco Cimmino's Contribution to Numerical Mathematics*, Atti del Seminario di Analisi Matematica dell'Università di Bologna, Technoprint, 87-109.
- Censor Y, Gordon D and Gordon R** (2001) Component averaging: An efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems, *Parallel Comp.*, 27: 777-808.
- Censor Y and Zenios S A** (1997) *Parallel Optimization: Theory, Algorithms, and Applications*, Oxford University Press, New York.
- Cimmino G** (1938) Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari, *La Ric. Sci.*, XVI, Ser. II, Anno IX 1: 326-333.
- Elfving T, Nikazad T and Hansen P C** (2010) Semi-convergence and relaxation parameters for a class of SIRT algorithms, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 37: 321-336.
- Epstein C L** (2007) *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*, Second Edition, SIAM, Pennsylvania, 761.
- Gilbert P** (1972) Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections, *J. Theor. Biol.*, 36: 105-117.
- Gordon R, Bender R and Herman G T** (1970) Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography, *J. Theor. Biol.*, 29: 471-481.
- Hansen P C and Saxild-Hansen M** (2012) AIR Tools - A Matlab package of algebraic iterative reconstruction methods, *J. Comput. Appl. Math.*, 236 (8): 2167-2178.
- Herman G T** (1980) *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, New York.
- Herman G T and Lent A** (1976) Iterative reconstruction algorithms, *Comput. Biol. Med.*, 6: 273-294.
- Hounsfield G N** (1972) A method and apparatus for examination of a body by radiation such as X or Gamma radiation, *Patent Specification 1283915*, London.
- Jiang M and Wang G** (2003) Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction, *IEEE Trans. Med. Imaging*, 22: 569-579.

## KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Kaczmarz S** (1937) Angenaherte auflösung von systemen linearer gleichungen, *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A*, 35: 355-357.
- Landweber L** (1951) An iteration formula for Fredholm integral of the first kind, *Amer. J. Math.*, 73: 615-624.
- Natterer F** (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley Teubner, Stuttgart.
- Nikazad T** (2008) Algebraic reconstruction methods, *PhD Thesis*, Linköping University Institute of Technology.
- Oppenheim B E** (1977) Reconstruction tomography from incomplete projections, *Reconstruction Tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine*, M. M. Ter-Pogossian et al., eds., University Park Press, Baltimore, 155-184.
- Pietschmann J F** (2012) *Mini-Course: Inverse Problems for Partial Differential Equations Part III: Iterative Methods*, CIAM, KTH, Stockholm.
- Radon J** (1917) Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs Akad.*, 69: 262-277.
- Solmon D C** (1976) The X-ray transform, *J. Math. Anal. Appl.*, 56: 61-83.
- Toft P** (1996) The Radon Transform, Theory and Implementation, *PhD Thesis*, Technical University of Denmark, DTU Informatics.
- Trucco E and Verri A** (1998) *Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*, Appendix A.6., Prentice Hall, New Jersey.
- Ustaoglu Z** (2017) On the inversion of a generalized Radon transform of seismic type, *J. Math. Anal. Appl.*, 453: 287-303.

## ÖZGEÇMİŞ

Tuğçe LÜLLECİ, 1992’de Bartın’da doğdu; ilk ve orta öğrenimini Bartın’da tamamladıktan sonra 2010 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun oldu. Halen 2016 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

### **ADRES BİLGİLERİ**

Adres : Demirciler Mah.  
Yukarı Tuna Sok.  
No: 7/2 74100  
Merkez / BARTIN

Tel : (544) 469 94 84  
E-posta : tugcelulleci@gmail.com