BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q –BERNSTEIN CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE ÇETİNKAYA

MAYIS 2018

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q –BERNSTEIN CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Merve ÇETİNKAYA

DANIŞMAN : Doç. Dr. Tülin COŞKUN

ZONGULDAK

MAYIS 2018

KABUL:

Merve ÇETİNKAYA tarafından hazırlanan "q –Bernstein –Chlodowsky Polinomları ile Yaklaşım" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 11/05/2018

Danışman: Doç. Dr. Tülin COŞKUN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN ....
Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN ....
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ...../...../2018

Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Merve ÇETİNKAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

q- BERNSTEIN -CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

Merve ÇETİNKAYA

Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tülin COŞKUN
Mayıs 2018, 151 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; çeşitli fonksiyon uzayları ve doğrusal pozitif operatörlerin genel özellikleri ile bu uzaylar için bazı yaklaşım teoremleri gibi tez boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde; öncelikle tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra tek değişkenli, iki değişkenli ve üç değişkenli fonksiyonlar için Bernstein- Chlodowsky polinomlarının yaklaşım özellikleri verilmiştir. Son olarak iki ve üç değişkenli fonksiyonlar için Bernstein- Chlodowsky polinomlarının yaklaşımı grafiksel olarak gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde; ilk olarak q- Analizin başlıca tanım ve teoremleri verilmiştir. Daha sonra tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için q- Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümdeki düşünceyle önce tek değişkenli, iki ve üç değişkenli fonksiyonlar için q- Bernstein- Chlodowsky polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiş daha sonra iki ve üç değişkenli fonksiyonlar için q –Bernstein -Chlodowsky

polinomlarının yaklaşımı görsel olarak ortaya konulmuştur.

Son bölümde ise tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein ve q -Bernstein polinomlarının yaklaşım hızları süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile incelenmiştir. Ayrıca tek değişkenli, iki ve üç değişkenli fonksiyonlar için Bernstein-Chlodowsky ve q –Bernstein -Chlodowsky polinomlarının yaklaşım hızları aynı şekilde süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Pozitif Operatörler, q −Analiz, Süreklilik modülü, Korovkin Teoremi, Volkov Teoremi, q –Bernstein -Chlodowsky polinomları

Bilim Kodu: 403.03.00.

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATION BY *q*- BERNSTEIN -CHLODOWSKY POLYNOMS

Merve CETINKAYA

Bülent Ecevit University
Granduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Tülin COSKUN
Mayıs 2018, 151 pages

This dissertation includes four chapters. In the first chapter, the general properties of various function spaces and linear positive operators, some approximation theorems for these function spaces and some elementary definitions and theorems which are used throughout the thesis are given.

In the second chapter; firstly the approximation properties for Bernstein polynomial of one variable and Bernstein polynomial of two variables are examined. And then the approximation properties for Bernstein –Chlodowsky polynomials of one variable, two and three variables are considered. Finally, approximation of Bernstein –Chlodowsky polynomials of two and three variables are visualized by means of graphs.

In the third chapter; first of all, primary definitions and theorems of q -Analysis are given. And then approximation properties of q -Bernstein polynomials of one variable and two variables are examined. The approximation properties of q -Bernstein –Chlodowsky polynomials of two and three variables are tackled by using a similar way to the second chapter. In addition to this, the approximation process are plotted.

In the last chapter, the approximation speed of Bernstein and q -Bernstein polynomials of one variable and two variables are studied with the help of modulus of continuity and weighted modulus of continuity. In addition to this, the approximation speed of Bernstein –Chlodowsky polynomials of two and three variables and the approximation speed of q -Bernstein –Chlodowsky polynomials are investigated via modulus of continuity and weighted modulus of continuity in similar way.

Keywords: Linear Positive Operators, q -Analysis, q -Bernstein –Chlodowsky polynomials, Modulus of Continuity, Korovkin Theorem, Volkov Theorem.

Science Code : 403.03.00.

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması konusunda çok değerli görüş ve önerilerini her zaman benimle paylaşan, değerli vaktini bana ayıran danışmanım Sayın Doç. Dr. Tülin COŞKUN'a, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olan ve kıymetli bilgilerini benimle paylaşmaktan hiç çekinmeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN hocama, matematiği bana sevdiren ve değerli bilgileri ile yol gösteren sevgili arkadaşım Öğr. Üyesi Seda KARATEKE'e, yardımlarını benden esirgemeyip bana destek olan arkadaşım Nurullah COŞKUN'a, hayatımın her anında olduğu gibi bu çalışma esnasında da en büyük destekçim olan sevgili aileme ve değerli eşim Faruk ÇETİNKAYA'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B_\rho(\mathbb{R}^m)$: $m = 1,2,3$ için $\mathbb{R}^m$ de ki sınırlı fonksiyonları uzayı

$C[a,b]$: Her $x \in [a,b]$ için a' da soldan b'de sağdan sürekli fonksiyonlar uzayı

$C_\rho(\mathbb{R}^m)$: 1,2,3 için $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı

$C(\mathbb{R}_+^3)$: $\mathbb{R}_+^3 = \{(x,y,z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ olmak üzere bu uzayda tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı

$C(\mathbb{R}_+^2)$: $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0\}$ olmak üzere bu uzayda tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı

$L(f;x)$: Doğrusal pozitif operatörler dizisi

$\|\cdot\|_\rho$: C_ρ ve B_ρ uzaylarında norm

$\|\cdot\|_{C[a,b]}$: $C[a,b]$ uzayında norm

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematiğin önemli dallarından biri olan Yaklaşım Teorisi; verilen bir fonksiyona daha basit ve kullanışlı fonksiyonlarla yaklaşımı inceler.

1912 yılında Bernstein Weierstrass (1885) tarafından kanıtlanan teoremi kendi tanımladığı Bernstein polinomları olarak bilinen polinomları kullanarak yeniden kanıtlamıştır.

Yaklaşım teorisi, olasılık teorisi, sayılar teorisi gibi bir çok alanda Bernstein polinomları önemli bir uygulama alanına sahiptir. Bernstein dan sonra Bernstein polinomlarının bir çok genellemesi yapılarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. 1937 yılında Chlodowsky , Bernstein polinomlarını $[0, b_n]$ aralığında ;

(b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır.

q -Analizin yaklaşım teorisinde klasik analizden daha iyi sonuçlar vermesi araştırmacılar için yeni bir çalışma alanı oluşturmuştur. Literatürde bilinen birçok operatörün q- genellemesi yapılarak yaklaşım durumları incelenmiştir.

Bu tezde Berstein ve Bernstein –Chlodowsky tipi polinomlarının q- versiyonları tanımlanıp bu operatörlerin yaklaşım özellikleri çok değişkenli fonksiyonlar için çalışılmıştır. Berstein ve Bernstein –Chlodowsky polinomlarını q- versiyonlarının yaklaşım hızı süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla gösterilmiştir.

1.1 SONLU ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.1.1

$[a, b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli olmakla birlikte a da soldan b de sağdan sürekli olan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ *aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve kısaca $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. Açıkça $C[a, b]$ bir doğrusal uzaydır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.2

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \tag{1.1}$$

ile $C[a, b]$ uzayında bir norm tanımlanır.

Buna göre $C[a, b]$ uzayı açıkça doğrusal normlu bir uzaydır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev1995).

Önerme 1.1.1

$(f_n) \subset C[a, b]$ fonksiyon dizisinin bir $g \in C[a, b]$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gerçel sayılardan oluşan bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in [a, b]$ için,

$$|f_n(x) - g(x)| < M \cdot \varepsilon_n \tag{1.2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde en az bir $M > 0$ sayısının olmasıdır(Coşkun 1997).

1.2 SONSUZ ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ VE SINIRLI FONKSİYON UZAYLARI

Tanım 1.2.1

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ sürekli ve

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \tag{1.3}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ $uzay$ı denir. ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir(Gadjiev 1976).

Tanım 1.2.2

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}) : f\ sürekli\}$ olarak tanımlı ağırlık uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde doğrusal bir uzaydır.

Tanım 1.2.3

ρ bir ağırlık fonksiyonu ve $f \in B_\rho(\mathbb{R})$ olsun.

$$\|f\|_\rho := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{1.4}$$

ile $B_\rho(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm tanımlanabilir. Bu norm ile $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayları normlu uzaydır(Gadjiev 1976).

Önerme 1.2.1

Bir (f_n) dizisinin (1.4) normuna göre sıfıra yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in \mathbb{R}$ için (ε_n) dizisi sıfır dizisi olmak üzere

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon_n\, \rho(x)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 1.2.4

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli, $\rho(x) \geq 1$ ve

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$$

olan monoton artan bir fonksiyon olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty$ (1.5)

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Açıkça $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayıdır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.3 DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLERİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.3.1

X ve Y fonksiyon uzayları olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f,x) = g(x) \quad (1.6)$$

olan bir $g \in Y$ fonksiyonu varsa L dönüşümüne *X* uzayından *Y*'ye bir *operatördür* denir.

Örnek 1.3.1

i) 1912 yılında S. Bernstein $[0,1]$ üzerinde tanımlı sürekli olan bir fonksiyona yakınsayan polinomu aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$0 \leq x \leq 1$ olmak üzere;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

şeklindedir, $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f;x)$ pozitif doğrusal bir operatördür. Bu operatör Bernstein operatörü olarak adlandırılır(Bernstein 1912).

ii) (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için

$$B_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlı polinomlara Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir(Chlodowsky 1937).

Tanım 1.3.2

X, Y doğrusal uzaylar ve $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$L: X \to Y$ operatörü için,

$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$

eşitliğini sağlayan X üzerindeki L operatörüne doğrusal operatör denir.

Tanım 1.3.3

$X^+ := \{f \in X: f(x) \geq 0\}$, $Y^+ := \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$

olarak tanımlı fonksiyon uzayları ve $L: X \to Y$ doğrusal operatörü için,

$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L *'ye doğrusal pozitif operatör* denir(Korovkin 1960).

Örnek 1.3.2

$i)$ $D \subset C[0,\infty[$ olmak üzere $L: D \to C[0,\infty[$ olsun. Her $x \in [0,\infty[$ için

$$L(f,x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f(k)$$

bir operatördür. Bu operatör Szasz-Mirakjan operatörü olarak adlandırılır(Szasz 1950).

$ii)$ $\alpha_k, \beta_k, (k = 1,2,3)$ pozitif sayıları

$0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$, $\alpha_3 + \beta_3 = 1$

şartlarını sağlamak üzere, f fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı ve her

$$\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} b_n, \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n\right] \subset [0,\infty)$$

hareketli alt sınırı üzerinde sınırlı olsun.

$$\mathcal{P}_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r}$$

olmak üzere, Gadjiev tipli Bernstein-Stancu polinomlarının Chlodowsky tipli genelleştirmesi

$$T_{n,\alpha,\beta}(f;x)=\sum_{r=0}^{n} f\left(\alpha_3 x+\beta_3\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)\mathcal{P}_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x),$$

olarak tanımlanır. Bu operatörler Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörleri olarak adlandırılacaktır **(**Gadjiev and Ghorbanalizadeh 2010).

Uyarı 1.3.1

L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Uyarı 1.3.2

Doğrusal pozitif operatörler monotondur(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Açıkca her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)\le g(x)$ olduğundan $f(x)-g(x)\le 0$'dır

Dolayısıyla $(f-g)(x)\le 0$ dir. Uyarı 1.3.1'den $L(f-g,x)\le 0$ olduğundan

$L(f,x)-L(g,x)\le 0$ dır. Böylece $L(f,x)\le L(g,x)$ olur.

Tanım 1.3.4

X , Y normlu uzaylar ve $L\colon X\to Y$ operatörü doğrusal olsun. Her $f\in X$ için

$\|L(f,x)\|_Y\le C\cdot\|f\|_X$

eşitsizliğini sağlayan bir $C>0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en küçük alt sınırına L operatörünün normu denir.

$$\|L\|_{X\to Y}=\inf\{C\colon\|L(f,x)\|_Y\le C\cdot\|f\|_X\} \tag{1.7}$$

olarak gösterilir.

Uyarı 1.3.3

$\|f\|_X\ne 0$ olmak üzere, sınırlı $L\colon X\to Y$ doğrusal operatörü için

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X\neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \tag{1.8}$$

eşitliği geçerlidir(Rudin 1991).

Sonuç 1.3.1

$L: X \to Y$ doğrusal operatörü sınırlı olsun.

$\|g\|_X = 1$ olmak üzere,

$$\|L\| = sup_{\|g\|_X=1}\|L(g,x)\|_Y \tag{1.9}$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 1.3.1

$L: X \to Y$ doğrusal pozitif bir operatör, her $f \in X$ için

$$|L(f,x)| \leq \mathrm{L}(|f|,x) \tag{1.10}$$

eşitsizliği sağlanır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

1.4 C[a,b], $C_\rho(\mathbb{R})$ VE $C_\rho^k(\mathbb{R})$ UZAYLARINDA KOROVKİN TİPLİ TEOREMLER

Teorem 1.4.1 (Korovkin Teoremi)

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi her $x \in [a,b]$ için $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m,x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu durumda$[a,b]$ de sürekli ve a da soldan b de sağdan sürekli tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı her f fonksiyonu için.

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir(Korovkin 1960).

Teorem 1.4.2

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisinin C_ρ uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yapması için gerekli ve yeterli koşul M_ρ; ρ fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere

$$\|L_n(\rho, x)\|_\rho \leq M_\rho$$

olacak şekilde bir M_ρ sabitinin bulunmasıdır(Gadjiev 1976).

Teorem 1.4.3 (Hacıyev Teoremi)

C_ρ uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yapan bir L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi; $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_\rho$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerlidir(Gadjiev 1976).

Tanım 1.4.1

$\varphi(x)$, $\mathbb{R}$ de monoton artan sürekli bir fonksiyon ve K_f; f e bağlı pozitif bir sabit olmak üzere $\rho(x)$; $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ şeklinde tanımlansın.

$$\lim_{|x|\to\mp\infty} \frac{f(x)}{1+\varphi^2(x)} = K_f$$

eşitliğini sağlayan C_ρ nun elemanlarından oluşan alt uzaya $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayı denir(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Sonuç 1.4.2

C_ρ uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır. C_ρ ağırlıklı uzayında geçerli olmayan Korovkin Tipli bir teorem C_ρ^k alt uzayında geçerlidir.

Teorem 1.4.4 (Bohman)

$0 \le x \le 1,\ n = 1,2,3, \dots$ için

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x)$$

şeklinde tanımlı $L_n(f;x)$ dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul bu dizinin

$$f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2$$

üç fonksiyonu için yaklaşım probleminin çözümü olmasıdır(Bohman 1952).

$$\alpha_{k,n} = \frac{k}{n},\ P_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

özel durumu için $L_n(f;x) = B_n(f;x)$ dır. Yani $L_n(f;x)$ Bernstein polinomlarıdır.

Örnek 1.4.1

$n, m > 0,\ 0 \le \alpha_{k,n}, \beta_{j,m} \le 1$ ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$,

$$P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) = x^k (1-x)^{n-k} y^j (1-y)^{m-j}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) = 1$$

koşullarını sağlayan sürekli pozitif fonksiyonlar olsun. $X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt bir küme ve $f \in C(X)$ olmak üzere

$$T_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

dizisini göz önüne alınsın.

Her $a,b\in\mathbb{R}$, her $f,g\in C(X)$ ve her $n,m\in\mathbb{N}$ için;

$x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$ ve $y^j(1-y)^{m-j}\geq 0$ olduğundan $x^k(1-x)^{n-k}y^j(1-y)^{m-j}\geq 0$ dır. Yani $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\geq 0$ olduğundan $T_{n,m}(f;x,y)\geq 0$ dır.

$$T_{n,m}(af+bg;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(af+bg)(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}af(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}bg(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$=a\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+b\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}g(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$=aT_{n,m}(f;x,y)+bT_{n,m}(g;x,y)$$

olduğundan açıkça $T_{n,m}(f;x,y)$ polinomu doğrusaldır.

Teorem 1.4.5 (Volkov Teoremi):

$\{T_{n,m}f\}$ doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}=0 \tag{1.13}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)}=0 \tag{1.14}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}=0 \tag{1.15}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(X)}=0 \tag{1.16}$$

koşullarını sağlıyorsa gerçel değerli X bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|T_{n,m}f-f\right\|_{C(X)}=0 \tag{1.17}$$

eşitliği sağlanır(Volkov 1957).

Kanıt

$$T_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

şeklinde tanımlanan $T_{n,m}(f;x,y)$ polinomları (1.13)-(1.16) koşullarını sağlasın. $f\in C(X)$ için

$$\begin{aligned}
T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-f(x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-f(x,y)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\left(f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right)P_{k,j}^{(n,m)}\right)\\
&\quad+f(x,y)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\left|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\left(f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)(x,y) - f(x,y) \right) P_{k,j}^{(n,m)} \right) + f(x,y) \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left| f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)(x,y) - f(x,y) \right| P_{k,j}^{(n,m)} + f(x,y) \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right|$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\max_{(x,y)\in X} \left| T_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) \right| \leq \max_{(x,y)\in X} \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left| f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)(x,y) - f(x,y) \right| P_{k,j}^{(n,m)} \right|$$

$$+ \max_{(x,y)\in X} |f(x,y)| \max_{(x,y)\in X} \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\left(f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)(x,y) - f(x,y) \right) P_{k,j}^{(n,m)} \right) \right|$$

olup, $C(X)$ normu tanımından

$$\left\| T_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{C(X)} \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left| f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)(x,y) - f(x,y) \right| P_{k,j}^{(n,m)} \right\|_{C(X)}$$

$$+ \|f\|_{C(X)} \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right\|_{C(X)}$$

olarak yazılabilir. $M > 0$ için

$$\|f\|_{C(X)} = M$$

olmak üzere

$$\left\| T_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{C(X)} \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left| f\left(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}\right)(x,y) - f(x,y) \right| P_{k,j}^{(n,m)} \right\|_{C(X)}$$

$$+ \left\| I_{n,m} \right\|_{C(X)} M \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right\|_{C(X)}$$

olur.

Diğer yandan $f \in C(X)$ olduğundan f fonksiyonu sınırlıdır. O halde $\forall(x,y) \in X$ için

$$|f(x,y)| \leq M$$

sağlanacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Bu durumda her $k = 0,1,\dots,n$ ve $j = 0,1,\dots,m$ için $(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})$ noktaları X bölgesinde olduğundan

$$\left|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)\right| \leq 2M$$

yazılabilir.

$$\mu_{k,j} = (\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}), \mu = (x,y)$$

$$\rho(\mu_{k,j}, \mu) = \sqrt{(\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2}$$

gösterimleri kullanılsın.

f fonksiyonu kapalı X bölgesinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Düzgün süreklilik tanımı gereğince; $\forall\varepsilon > 0$ için $\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ iken

$$\left|f(\mu_{k,j}) - f(\mu)\right| < \varepsilon$$

sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$\rho(\mu_{k,j}, \mu) \geq \delta$ için f fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)\right| \leq 2M$$

gerçeklenir.

$$\frac{\rho(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta} \geq 1$$

olmak üzere

$$\left|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)\right| \leq 2M \frac{\rho^2(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ ve $\rho(\mu_{k,j}, \mu) \geq \delta$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f(x,y)\right|<\varepsilon+2M\frac{\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)}{\delta^2}$$

eşitsizliği yazılabilirdir.

Şimdi $I_{n,m}$ toplamı göz önüne alınırsa

$$I_{n,m}<\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varepsilon+2M\frac{\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)}{\delta^2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$=\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$=\varepsilon I'_{n,m}+\frac{2M}{\delta^2}I''_{n,m}$$

olup,norm özelliklerinden

$$\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)}<\varepsilon\left\|I'_{n,m}\right\|_{C(X)}+\tfrac{2M}{\delta^2}\left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)}$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon I'_{n,m}$ ifadesi

$$\varepsilon I'_{n,m}=\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+\varepsilon-\varepsilon$$

$$=\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right)+\varepsilon$$

olarak göz önüne alınırsa

$$\varepsilon\left\|I'_{n,m}\right\|_{C(X)}\leq\varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}+\varepsilon$$

olur.

$$\rho^2\left(\mu_{k,j},\mu\right)=\left(\alpha_{k,n}-x\right)^2+\left(\beta_{j,m}-y\right)^2$$

$$=\left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right)-2\alpha_{k,n}x-2\beta_{j,m}y+(x^2+y^2)$$

olduğundan $I''_{n,m}$ ifadesi

$$I''_{n,m} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 2x\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$-2y\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) + (x^2+y^2)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - (x^2+y^2)\right]$$

$$+ 2x\left[x - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right]$$

$$+2y\left[y - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right]$$

$$\left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)} \leq \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(X)}$$

$$+ 2\|x\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - x\right\|_{C(X)}$$

$$+2\|y\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - y\right\|_{C(X)}$$

olarak yazılabilir.

$\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)}, \left\|I'_{n,m}\right\|_{C(X)}, \left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)}$ yerine yazılırsa;

$$\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)} < \varepsilon + \varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1\right\|_{C(X)}$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - (x^2+y^2)\right\|_{C(X)}$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)}$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.13)-(4.16) ifadelerinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(X)}=0$$

sonucuna ulaşılır.

1.5 BİR DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.5.1

Boş olmayan $I\subset\mathbb{R}$ sınırlı aralığı için

$d(I)=sup\{|x-y|:x,y\in I\}$

ifadesine I kümesinin çapı denir(Natanson 1964).

Tanım 1.5.2

$I\subset\mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığında sınırlı olsun. $d=d(I)$, I kümesinin çapı olmak üzere,

$w(f,\delta)=sup\{|f(x_1)-f(x_2)|:x_1,x_2\in I,|x_1-x_2|\ \le\delta\}$

$w:]0,d]\to[0,\infty[$ fonksiyonuna I üzerinde f fonksiyonunun süreklilik modülü denir(Natanson 1964).

Tezde kullanılacak süreklilik modülünün temel özellikleri aşağıda verilmiştir(Musayev 2003, Natanson 1964, İzgi 2004).

Özellik 1.5.1

i. $\delta > 0$ için $w(f,\delta) \geq 0$ dır.

$ii.$ $w(f,\delta)$ monoton artandır.

iii. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzrere

$w(f,n\delta) \leq nw(f,\delta)$

sağlanır.

iv. λ pozitif gerçel sayı olmak üzere

$w(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)w(f,\delta)$

eşitsizliği sağlanır.

v. f , I aralığında sürekli olan f fonksiyonu için

$\lim_{\delta\to 0} w(f,\delta) = 0$

eşitliği sağlanır.

vi. $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$

vii. $|f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

1.6 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAM VE KISMİ SÜREKLİLİK MODÜLÜ TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.6.1

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı,sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ olmak üzere,

$$w(f,\delta) = sup\left\{|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|: x,y \in K, \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leq \delta\right\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Tanım 1.6.2

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı,sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere,

$$w_1(f,\delta) = \sup\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)|: (x_1,y),(x_2,y) \in K, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$w_2(f,\delta) = \sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|: (x,y_1),(x,y_2) \in K, |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonlarına, f fonksiyonunun x'e göre ve y'e göre kısmi süreklilik modülü denir(Gazanfer 2015).

Özellik 1.5.1, Tanım 1.6.1 ve Tanım 1.6.2 içinde geçerlidir. İki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülü tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.6.3

Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $x = (x_1, x_2), h = (h_1, h_2)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x \in [0,\infty[\\ |h_1| \leq \delta, |h_2| \leq \delta}} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)|}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|h\|^2)}$$

şeklinde tanımlı ifadeye f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir. $\Omega(f;\delta)$ nin bazı temel özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 1.6.1

$f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $\delta > 0$ olmak üzere $\Omega(f;\delta)$, δ nın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ için

$$\lim_{\delta \to 0} \Omega(f;\delta) = 0$$

olur.

iii. Her $\mu \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;\mu\delta) \leq 4\mu(1 + 2\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

iv. λ nın pozitif her değeri için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 4(1 + \lambda)(1 + 2\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği vardır.

v. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $x = (x_1, x_2), t = (t_1, t_2)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + \|t - x\|^2)(1 + \|x\|^2)\Omega(f; \|t - x\|)$$

eşitsizliği sağlanır.

vi. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $t = (t_1, t_2)$, $x = (x_1, x_2)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta} + 1\right)(1 + \|x\|^2)(1 + \|t - x\|^2)(1 + 2\delta^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.6.1(Cauchy- Schwarz Eşitsizliği)

X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun. O zaman

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

dir. Eşitlik sağlanır ancak ve ancak bazı $\alpha \in \mathbb{R}$ için $y - \alpha x = 0$ dır.

Teorem 1.6.2 (Hölder Eşitsizliği)

$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \mathbb{R}^2$ için

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

1.7 ÜÇ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN TAM VE KISMİ SÜREKLİLİK MODÜLÜ TANIM VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.7.1

$D \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$w(f, \delta) = sup\left\{|f(x_1, y_1, z_1) - f(x_2, y_2, z_2)| : x, y \in K, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \leq \delta\right\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Tanım 1.7.2

$D \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere,

$$w_1(f, \delta) = sup\{|f(x_1, y, z) - f(x_2, y, z)| : (x_1, y, z), (x_2, y, z) \in K, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$w_2(f, \delta) = sup\{|f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)| : (x, y_1, z), (x, y_2, z) \in K, |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

$$w_3(f, \delta) = sup\{|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| : (x, y, z_1), (x, y, z_2) \in K, |z_1 - z_2| \leq \delta\}$$

fonksiyonlarına f fonksiyonunun x'e göre, y'e göre ve z'e göre kısmi süreklilik modülü denir.

Özellik 1.5.1 özellikleri Tanım 1.7.1 ve Tanım 1.7.2 içinde geçerlidir. Üç değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülü tanım ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.7.3

Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}^3)$ ve $x = (x_1, x_2, x_3), h = (h_1, h_2, h_3)$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x \in [0, \infty[\\ |h_1| \leq \delta, |h_2| \leq \delta, |h_3| \leq \delta}} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) - f(x_1, x_2, x_3)|}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|h\|^2)}$$

şeklinde tanımlı ifadeye f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir. $\Omega(f; \delta)$ nin bazı temel özellikleri aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 1.7.1

$f \in C_\rho(\mathbb{R}^3)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $\delta \geq 0$ olmak üzere $\Omega(f; \delta)$, δ'nın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}^3)$ için

$$\lim_{\delta \to 0} \Omega(f; \delta) = 0$$

olur.

iii. Her $\mu \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f; \mu\delta) \leq 4\mu(1 + 3\delta^2)\Omega(f; \delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

iv. λ nın pozitif her değeri için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 4(\lambda+1)(1+3\delta^2)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği vardır.

v. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}^3)$ ve $x = (x_1, x_2, x_3), t = (t_1, t_2, t_3)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + \|t - x\|^2)(1 + \|x\|^2)\Omega(f; \|t - x\|)$$

eşitsizliği sağlanır.

vi. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}^3)$ ve $x = (x_1, x_2, x_3), t = (t_1, t_2, t_3)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 4\left(\frac{\|t-x\|}{\delta} + 1\right)(1 + \|x\|^2)(1 + \|t - x\|^2)(1 + 3\delta^2)\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır(Gazanfer 2015)..

BÖLÜM 2

BERNSTEIN ve BERNSTEIN- CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Bu bölümde tek ve iki değişkenli Bernstein polinomları ile tek, iki ve üç değişkenli Bernstein -Chlodowsky polinomları tanıtılarak yaklaşım özellikleri verilecektir.

2.1 TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN POLİNOMLARI

1912 yılında S. Bernstein [0,1] üzerinde tanımlı, verilen sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinomu aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.1.1 Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere Bernstein polinomu;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır(Bernstein 1912).

Uyarı 2.1.1 $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f;x)$ pozitif doğrusal bir operatördür.

Doğrusallık;

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f, g \in C[0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} B_n(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (\alpha f + \beta g)\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha B_n(f;x) + \beta B_n(g;x). \end{aligned}$$

olacağından açıkça Bernstein polinomları doğrusaldır.

Pozitiflik;

Her $x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve her $k = 0,1, \dots , n$ için $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan açıkça her $f \geq 0$ için $B_n(f;x) \geq 0$ sağlanacağından polinom pozitiftir.

Buna bağlı olarak Korovkin teoreminin koşullarının sağlandığı araştırılmalıdır.

$f(t) = 1$ için

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= (1-x+x)^n$$

$$= 1$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $f(t) = t$ için

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

burada k yerine $k+1$ yazarsak;

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

$$= x(1-x+x)^{n-1}$$

$$= x$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak $f(t) = t^2$ için;

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

eşitliği geçerlidir. Burada toplamın sol tarafında k yerine $k+2$, toplamın sağ tarafına k yerine $k+1$ yazılırsa;

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} (1-x+x)^{n-2} + \frac{x}{n} (1-x+x)^{n-1}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak

$$B_n(1;x) = 1 \tag{2.2}$$

$$B_n(t;x) = x \tag{2.3}$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n} \tag{2.4}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2.1.1. $f \in C[0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği sağlanır(Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt: (2.2), (2.3), (2.4) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} = \lim_{n\to\infty} \left\| x^2 + \frac{x - x^2}{n} - x^2 \right\|_{C[0,1]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{x - x^2}{n} \right|$$

$x = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n}$$

$$= 0$$

sağlanır.

Korovkin teoremi yardımıyla her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

2.2 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN POLİNOMLARI

Tanım 2.2.1

$(x,y) \in D = [0,1]\times[0,1]$ ve $f \in D$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $n, m \in \mathbb{N}$ için iki değişkenli Bernstein polinomları;

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır(Büyükyazıcı 2003).

Tek değişkenli Bernstein polinomlarından $B_{n,m}(f;x,y)$ polinomunun doğrusallığı ve pozitifliği açıkça görülür.

Teorem 2.2.1

f, D karesel bölge üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\| B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{C(D)} = 0$$

eşitliği geçerlidir(Büyükyazıcı 2003).

Kanıt

Öncelikle $B_{n,m}(f;x,y)$ polinomunun Korovkin şartlarının sağladığı gösterilmelidir.

$$B_{n,m}(1;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}(1-y+y)^m$$

$$= (1-x+x)^n$$

$$= 1$$

eşitliği elde edilir.

$$B_{n,m}(f_{1,0};x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\,(1-y+y)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k} = x$$

eşitliği sağlanır.

$$B_{n,m}(f_{0,1};x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}\right)\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}\right)\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j} = y$$

olduğundan

$$B_{n,m}(f_{0,1};x,y) = y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$= y(1-x+x)^n$$

$$= y$$

eşitliği elde edilir.

$$B_{n,m}(f_{2,0};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\,(1-y+y)^m$$

$$B_{n,m}(f_{2,0};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}$$

eşitliği gerçeklenir.

$$B_{n,m}(f_{0,2};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}\right)^2\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}\right)^2\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}$$

$\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}\right)^2\binom{m}{j}(y)^j(1-y)^{m-j}=y^2+\frac{y-y^2}{m}$ olduğundan

$$B_{n,m}(f_{0,2};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}\left(y^2+\frac{y-y^2}{m}\right)$$

elde edilir ve

$$B_{n,m}(f_{0,2};x,y)=(1-x+x)^n\left(y^2+\frac{y-y^2}{m}\right)=\left(y^2+\frac{y-y^2}{m}\right)$$

olur. Sonuç olarak

$$B_{n,m}(1;x,y)=1 \tag{2.6}$$

$$B_{n,m}\left(f_{1,0};x,y\right)=x \tag{2.7}$$

$$B_{n,m}\left(f_{0,1};x,y\right)=y \tag{2.8}$$

$$B_{n,m}\left(f_{2,0};x,y\right)=x^2+\frac{x-x^2}{n} \tag{2.9}$$

$$B_{n,m}\left(f_{0,2};x,y\right)=y^2+\frac{y-y^2}{m} \tag{2.10}$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıda bulunan (2.6), (2.7), (2.8) eşitliklerinden

$$\left\|B_{n,m}(1;x,y)-1\right\|_{C(D)}=0$$

$$\left\|B_{n,m}\left(f_{1,0};x,y\right)-x\right\|_{C(D)}=0$$

$$\left\|B_{n,m}\left(f_{0,1};x,y\right)-y\right\|_{C(D)}=0$$

son olarak (2.9), (2.10) eşitliklerinden her iki tarafın $(x,y)\in D$ olmak üzere, maksimumu alınırsa

$$\left\|B_{n,m}\left(\left(f_{2,0}+f_{0,2}\right);x,y\right)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

olduğunu görürüz. Buradan $n,m\to\infty$ iken

$$\left\|B_{n,m}\left(\left(f_{2,0}+f_{0,2}\right);x,y\right)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)}=0$$

sağlanır. İstenen kanıt tamamlanır.

2.3 TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

1937 yılında Chlodowsky tarafından aşağıdaki polinomlar dizisi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.1 (b_n) dizisi

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $0 \leq x \leq b_n$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı polinomlara Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir(Chlodowsky 1937).

Ayrıca 1995 yılında E. İbikli-E.Gadjiev tarafından Bernstein- Chlodowsky polinomlarının bir genellenmesi ele alınmıştır.

Uyarı 2.3.1 Bernstein-Chlodowsky polinomları doğrusaldır.

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f, g \in C[0,\infty]$ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} B_n^*(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} (\alpha f + \beta g)\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \alpha f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \beta g\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\ &\quad + \beta \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} g\left(\frac{k}{n} b_n\right) \\ &= \alpha B_n^*(f;x) + \beta B_n^*(g;x) \end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan açıkça Bernstein- Chlodowsky polinomları doğrusaldır.

Bernstein-Chlodowsky polinomları pozitiftir. Gerçekten

her $x \in [0, b_n]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \geq 0$ eşitsizliğinden her $f \geq 0$ için $B_n^*(f;x) \geq 0$ olur. Bu ise pozitif olduğunu gösterir.

Önerme 2.3.1

Bernstein-Chlodowsky polinomları için

$$B_n^*(1;x) = 1 \tag{2.12}$$

$$B_n^*(t;x) = x \tag{2.13}$$

$$B_n^*(t^2;x) = x^2 + x\left(\frac{b_n - x}{n}\right) \tag{2.14}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt

$f(t) = 1$ olmak üzere,

$$B_n^*(1;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n$$

$$= 1$$

eşitliği bulunur.

$f(t) = t$ için,

$$B_n^*(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} b_n \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\boxed{k \to k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} b_n \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k+1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} b_n \frac{x}{b_n} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= x \left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-1}$$

$$= x$$

olacaktır.

Polinomun tanımından $f(t) = t^2$olmak üzere,

$$B_n^*(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \frac{k}{n}\frac{k}{n} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {b_n}^2 \frac{x}{b_n}\frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} b_n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$\boxed{k \to k+1}$$

$$= \frac{b_n}{n} x \frac{x}{b_n} \sum_{k=2}^{n} (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$+ \frac{b_n}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}$$

$$= \frac{x^2}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= \frac{x^2}{n} (n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x$$

$$\boxed{k \to k+2}$$

$$= \frac{x^2}{n} (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k} \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 \frac{(n-1)}{n} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 \left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{b_n}{n} x$$

$$= x^2 + x\left(\frac{b_n - x}{n}\right)$$

eşitliği geçerlidir.

Uyarı 2.3.2 Bernstein- Chlodowsky polinomları, tanımlı olduğu $[0, b_n]$ aralığının $n \to \infty$ iken $[0, \infty)$ aralığına dönüşmesinden dolayı KorovkinTeoremi'ni sağlamaz.

2.4 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN -CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Tanım 2.4.1. $\{b_n\}, \{c_m\}$, monoton artan pozitif reel değerli diziler olsun.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{m\to\infty} c_m = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{c_m}{m}\right) = 0$$

olsun. $b_n, c_m > 0$ için $\widetilde{D}_2 \coloneqq D_{b_n,c_m} = \{(x,y) : 0 \le x \le b_n, 0 \le y \le c_m\}$ olarak tanımlansın.

İki değişkenli Bernstein-Chlodowsky operatör dizisi;

$$B^{**}_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n}b_n, \frac{j}{m}c_m\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}.$$

$$.\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \qquad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır(Buyukyazici and Ibikli 2006).

Önerme 2.4.1. (2.15) ile verilen operatör dizisi $B_{n,m}(f;x,y)$, $C_{\widetilde{D}_2} \to C_{\widetilde{D}_2}$ olsun.

$e_{i_1,i_2} = x^{i_1}y^{i_2}$ ve $i_1 + i_2 \le 2$ için

i. $B^{**}_{n,m}(e_{0,0};x,y) = 1$

ii. $B^{**}_{n,m}(e_{1,0};x,y) = x$

iii. $B^{**}_{n,m}(e_{0,1};x,y) = y$

iv. $g(x,y) = e_{2,0}(x,y) + e_{0,2}(x,y)$ olmak üzere;

$B^{**}_{n,m}(g;x,y) = x^2 + \frac{x(b_n-x)}{n} + y^2 + \frac{y(c_m-y)}{m}$

eşitlikleri geçerlidir(Buyukyazici and Ibikli 2006).

Kanıt.

i.

$$B_{n,m}^{**}\left(e_{0,0};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^{m}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n}$$

$$=1$$

ii.

$$B_{n,m}^{**}\left(e_{1,0};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^{m}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=x$$

iii.

$$B_{n,m}^{**}(e_{0,1};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}=y$ olduğundan

$$B_{n,m}^{**}(e_{0,1};x,y)=y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=y\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^n$$

$$=y$$

eşitliği elde edilir.

iv.

$g(x,y,z):=e_{2,0}(x,y)+e_{0,2}(x,y)$ fonksiyonları kullanılarak

$$B_{n,m}^{**}(e_{2,0};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n}$$

$$B_{n,m}^{**}(e_{0,2}; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$\sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} = y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$ olduğundan

$$B_{n,m}^{**}(e_{0,2}; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n \left(y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}\right)$$

$$= y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak

$$B_{n,m}^{**}(g; x, y, z) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} + y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1. $\{b_n\}, \{c_m\}$ dizileri pozitif gerçel sayıların artan bir dizisi olsun. Tanımda verilen $B_{n,m}^{**}(f; x, y)$ polinomlar dizisi için $b < b_n, c < c_m$ olan yeterince büyük b, c sayıları için

$$\lim_{n,m \to \infty} \max_{(x,y) \in \widetilde{D_2}} \left| B_{n,m}^{**}(f; x, y) - f(x, y) \right| = 0$$

eşitliği geçerlidir(Buyukyazici and Ibikli 2006).

Kanıt. Önerme 2.4.1. de ki i,ii,iii,iv,v eşitliklerinden

$$\left\|B_{n,m}^{**}(e_{0,0};x,y)-e_{0,0}(x,y)\right\|_{C(\widetilde{D_2})}=0$$

$$\left\|B_{n,m}^{**}(e_{1,0};x,y)-e_{1,0}(x,y)\right\|_{C(\widetilde{D_2})}=0$$

$$\left\|B_{n,m}^{**}(e_{0,1};x,y)-e_{0,1}(x,y)\right\|_{C(\widetilde{D_2})}=0$$

$$\left\|B_{n,m}^{**}\left((e_{2,0};x,y)+(e_{0,2};x,y)\right)-(x^2+y^2)\right\|_{C(\widetilde{D_2})}$$

$$\leq \frac{b(b_n-b)}{n}+\frac{c(c_m-c)}{m}$$

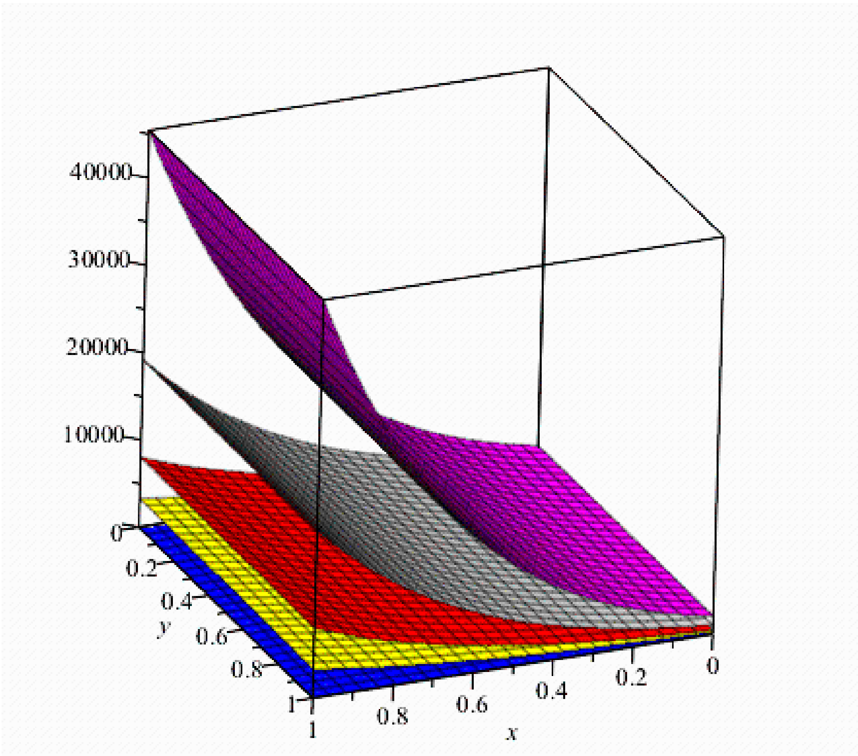
$$\leq b\frac{b_n}{n}+c\frac{c_m}{m}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{m\to\infty}\frac{c_m}{m}=0$$

olduğundan açıkça kanıt tamamlanmış olur.

Örnek 2.4.1 $B_n^{**}(f;x,y)$ polinom dizisinde $b_n=\sqrt{n}, c_m=\sqrt[3]{m}$ alınırak $f(x,y)=x^{1/2}+y^{1/2}+1$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 2.1 gösterilmiştir.



Şekil 2.1 $B_n^{**}(f;x,y)$ polinomlar dizisi ile $f(x,y)=x^{1/2}+y^{1/2}+1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı.($\mathrm{n,m}=10$(sarı), $\mathrm{n,m}=9$(red) , $\mathrm{n,m}=8$(gray), $\mathrm{n,m}=7$(pembe))

2.5 ÜÇ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN -CHLODOWSKY POLİNOMLARI

2006 yılında Büyükyazıcı ve İbikli tarafından verilen iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky polinomlarının üç değişkenli versiyonu aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.1 $\{b_n\},\{c_m\},\{d_r\}$ monoton artan pozitif gerçel değerli diziler olsun.

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{m\to\infty} c_m=\lim_{r\to\infty} d_r=\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{c_m}{m}\right)=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{d_r}{r}\right)=0$$

olsun. $b_n, c_m, d_r>0$ için $\widetilde{D}_3 \coloneqq D_{b_n,c_m,d_r}=\{(x,y,z):0\le x\le b_n, 0\le y\le c_m, 0\le z\le d_r\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda üç değişkenli Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi;

$$B_{n,m,r}^{***}(f;x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,\frac{l}{r}d_r\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}.$$

$$.\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l} \qquad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.5.1 (2.15) ile verilen operatör dizisi $B_{n,m,r}^{***}(f;x,y,z): C_{\widetilde{D}_3}\to C_{\widetilde{D}_3}$ olsun.

$e_{i_1,i_2,i_3}=x^{i_1}y^{i_2}z^{i_3}$ ve $i_1+i_2+i_3\le 2$ için

i. $B_{n,m,r}^{***}(e_{0,0,0};x,y,z)=1$

ii. $B_{n,m,r}^{***}(e_{1,0,0};x,y,z)=x$

iii. $B_{n,m,r}^{***}(e_{0,1,0};x,y,z)=y$

iv. $B_{n,m,r}^{***}(e_{0,0,1};x,y,z)=z$

v. $g(x,y,z)=e_{2,0,0}(x,y,z)+e_{0,2,0}(x,y,z)+e_{0,0,2}(x,y,z)$ olmak üzere;

$B_{n,m,r}^{***}(g;x,y,z)=x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}+y^2+\frac{y(c_m-y)}{m}+z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt

i. Operatörün tanımından

$$B_{n,m,r}^{***}(e_{0,0,0};x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^{l}\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^{l}\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(1-\frac{z}{d_r}+\frac{z}{d_r}\right)^{r}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^{j}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^{m}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n}$$

$$=1$$

eşitliği elde edilir.

ii. $e_{1,0,0}$ fonksiyonu operatörde yerine yazılırsa

$$B_{n,m,r}^{***}\left(e_{1,0,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(1-\frac{z}{d_r}+\frac{z}{d_r}\right)^r$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}b_n\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=x$$

eşitliği bulunur.

iii. Benzer şekilde

$$B_{n,m,r}^{***}\left(e_{0,1,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{j}{m}c_m\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(1-\frac{z}{d_r}+\frac{z}{d_r}\right)^r$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}c_m\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j} = y$ olduğundan

$$B_{n,m,r}^{***}(e_{0,1,0};x,y,z)=y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=y\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^n$$

$$=y$$

eşitliği bulunur.

iv. $e_{0,0,1}$ fonksiyonu polinomlar dizisinde yerine yazılırsa

$$B_{n,m,r}^{***}(e_{0,0,1};x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{l}{r}d_r\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}\frac{l}{r}d_r\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$\sum_{l=0}^{r}\frac{l}{r}d_r\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}=z$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B_{n,m,r}^{***}(e_{0,0,1};x,y,z)&=z\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\\
&=z\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\\
&=z\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^m\\
&=z\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\\
&=z\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^n\\
&=z
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

v. Son olarak

$g(x,y,z)\coloneqq e_{2,0,0}(x,y,z)+e_{0,2,0}(x,y,z)+e_{0,0,2}(x,y,z)$ fonksiyonu kullanılarak

$$B_{n,m,r}^{***}(g;x,y,z)=x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}+y^2+\frac{y(c_m-y)}{m}+z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}$$

$$B_{n,m,r}^{***}\left(e_{2,0,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(1-\frac{z}{d_r}+\frac{z}{d_r}\right)^r$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}b_n^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$=x^2+\frac{x(b_n-x)}{n}$$

$$B_{n,m,r}^{***}\left(e_{0,2,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{j^2}{m^2}c_m^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$. \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} \left(\frac{z}{d_r}\right)^l \left(1 - \frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \left(1 - \frac{z}{d_r} + \frac{z}{d_r}\right)^r$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$\sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} = y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$ olduğundan

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

$$= y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

eşitliği elde edilir.

$$B_{n,m,r}^{***}(e_{0,0,2}; x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{r} \frac{l^2}{r^2} d_r^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$. \binom{r}{l} \left(\frac{z}{d_r}\right)^l \left(1 - \frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{r} \frac{l^2}{r^2} d_r^2 \binom{r}{l} \left(\frac{z}{d_r}\right)^l \left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$\sum_{l=0}^{r} \frac{l^2}{r^2} d_r^2 \binom{r}{l} \left(\frac{z}{d_r}\right)^l \left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l} = \left(z^2 + \frac{z(d_r-z)}{r}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} B_{n,m,r}^{***}&(e_{0,0,2};x,y,z) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \left(z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}\right) \\ &= \left(z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}\right) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\ &= \left(z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}\right) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1-\frac{y}{c_m}+\frac{y}{c_m}\right)^m \\ &= \left(z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}\right) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \left(z^2+\frac{z(d_r-z)}{r}\right)\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^n \\ &= z^2+\frac{z(d_r-z)}{r} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak

$$B_{n,m,r}^{***}(g;x,y,z) = x^2 + \frac{x(b_n-x)}{n} + y^2 + \frac{y(c_m-y)}{m} + z^2 + \frac{z(d_r-z)}{r}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.5.1

$\{b_n\}, \{c_m\}, \{d_r\}$ dizileri pozitif gerçel sayıların artan bir dizisi olsun. Tanımda verilen $B_{n,m,r}^{***}(f;x,y,z)$ polinomlar dizisi için $b < b_n, c < c_m,\ d < d_r$ olan yeterince büyük b, c, d sayıları için

$$\lim_{n,m,r\to\infty} \max_{(x,y,z)\in\widetilde{D_3}} \left|B^{***}_{n,m,r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

Önerme 2.5.1 i-v eşitliklerinden

$$\left\|B^{***}_{n,m,r}\left(e_{0,0,0};x,y,z\right) - e_{0,0,0}(x,y,z)\right\|_{C(\widetilde{D_3})} = 0$$

$$\left\|B^{***}_{n,m,r}\left(e_{1,0,0};x,y,z\right) - e_{1,0,0}(x,y,z)\right\|_{C(\widetilde{D_3})} = 0$$

$$\left\|B^{***}_{n,m,r}\left(e_{0,1,0};x,y,z\right) - e_{0,1,0}(x,y,z)\right\|_{C(\widetilde{D_3})} = 0$$

$$\left\|B^{***}_{n,m,r}\left(e_{0,0,1};x,y,z\right) - e_{0,0,1}(x,y,z)\right\|_{C(\widetilde{D_3})} = 0$$

$$\left\|B^{***}_{n,m,r}\left(\left(e_{2,0,0};x,y,z\right) + \left(e_{0,2,0};x,y,z\right) + \left(e_{0,0,2};x,y,z\right)\right) - (x^2+y^2+z^2)\right\|_{C(\widetilde{D_3})}$$

$$\leq \frac{b(b_n-b)}{n} + \frac{c(c_m-c)}{m} + \frac{d(d_r-d)}{r}$$

$$\leq b\frac{b_n}{n} + c\frac{c_m}{m} + d\frac{d_r}{r}$$

bulunur. Burada dizilerin tanımından açıkça

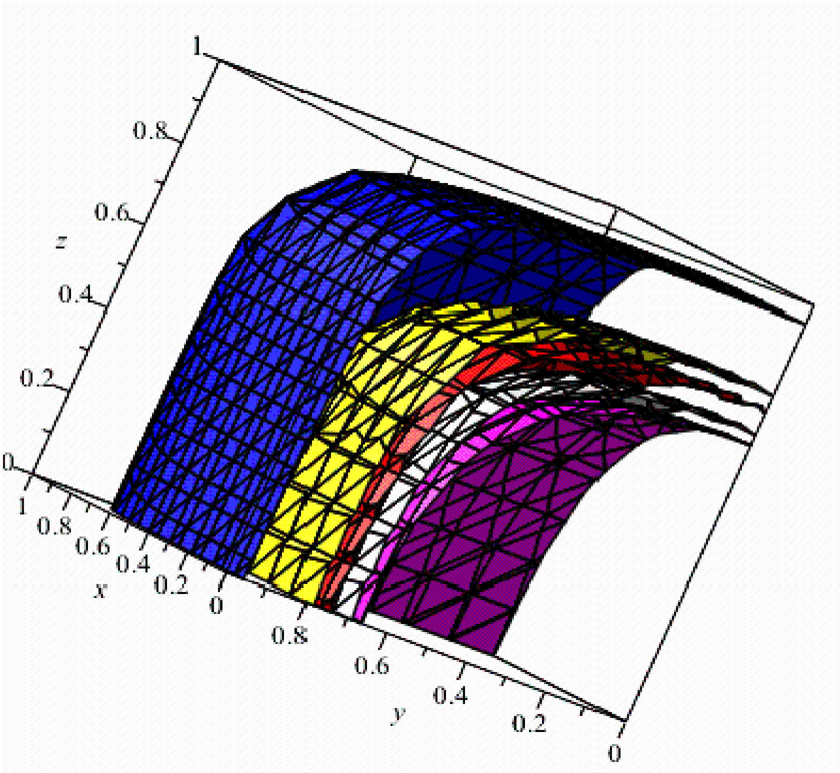
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = \lim_{m\to\infty}\frac{c_m}{m} = \lim_{r\to\infty}\frac{d_r}{r} = 0$$

olacağından istenen kanıtlanmış olur.

Bir sonraki örnekte üç değişkenli Bernstein-Chlodowsky polinomlarının standart yaklaşımını göstereceğiz.

Örnek 2.5.1. $B^{***}_{n,m,r}(f;x,y,z)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n}\,, c_m = \sqrt[3]{m}\,, d_r = \sqrt[4]{r}+1$ alınırak ve $z=1$ için $f(x,y,z) = x^6+y^6+z^6-\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{8}}$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 2.2 gösterilmiştir. $n=49$ $m=50$ $r=51$ (sarı), $n=29$ $m=30$ $r=31$(red) , $n=14$ $m=15$ $r=16$ (gray), $n=9$ $m=10$ $r=11$ (pembe).

```
>restart;with(plots):

with(plottools):

b:=sqrt(n):

c:=sqrt(m):

d:=sqrt(r):

f:=(x,y,z)->x^(6)+y^(6)+z^(6)-(1/6)^(1/8):

 n:=49 : m:=50 : r:=51:
P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*binomial(r,l)*((x/(b))^k)*(1-(x/(b))^(n-k))*((y/(c))^j)*(1-(y/(c))^(m-j))*((z/(d))^l)*(1-(z/(d))^(r-l)):

B((n,m,r),x,y,z):=sum(sum(sum(f(((k/n)*(b)),((j/m)*(c)),((l/r)*(d)))*P[k,j,l](n,m,r,x,y,z),l=0..r),j=0..m),k=0..n):

n:=29 : m:=30 : r:=31:

P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*binomial(r,l)*((x/b)^k)*(1-(x/(b))^(n-k))*((y/c)^j)*(1-(y/(c))^(m-j))*((z/d)^l)*(1-(z/(d))^(r-l)):

B((n,m,r),x,y,z):=sum(sum(sum(f(((k/n)*b),((j/m)*c),((l/r)*d))*P[k,j,l](n,m,r,x,y,z),l=0..r),j=0..m),k=0..n):

n:=14 : m:=15: r:=16:

P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*binomial(r,l)*((x/b)^k)*(1-(x/(b))^(n-k))*((y/c)^j)*(1-(y/(c))^(m-j))*((z/d)^l)*(1-(z/(d))^(r-l)):

B((n,m,r),x,y,z):=sum(sum(sum(f(((k/n)*b),((j/m)*c),((l/r)*d))*P[k,j,l](n,m,r,x,y,z),l=0..r),j=0..m),k=0..n):

n:=9 : m:=10: r:=11:

P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*binomial(r,l)*((x/b)^k)*(1-(x/(b))^(n-k))*((y/c)^j)*(1-(y/(c))^(m-j))*((z/d)^l)*(1-(z/(d))^(r-l)):
B((n,m,r),x,y,z):=sum(sum(sum(f(((k/n)*b),((j/m)*c),((l/r)*d))*P[k,j,l](n,m,r,x,y,z),l=0..r),j=0..m),k=0..n):
implicitplot3d([f(x,y,z)=0,B((49,50,51),x,y,z)=0,B((29,30,31),x,y,z)=0,B((14,15,16),x,y,z)=0,B((9,10,11),x,y,z)=0],x=0..1,y=0..1,z=0..1,color=[blue,sarı,red,gray,pembe],scaling=constrained,axes=boxed);
```



Şekil 2.2 $B^{***}_{n,m,r}(f;x,y,z)$ polinomlar dizisi ile $f(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6 - \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{8}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım.

BÖLÜM 3

q -BERNSTEIN VE q -BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde ilk olarak q -Analizde kullanılan temel tanımlara, teoremlere ve notasyonlara yer verilmiştir. Daha sonra da tek ve iki değişkenli q-Bernstein polinomlarının yanı sıra; tek, iki ve üç değişkenli q -Bernstein-Chlodowsky polinomları tanıtılmış olup, söz konusu polinomların yaklaşım özellikleri verilmiştir.

3.1 q-ANALİZDE KULLANILAN TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Klasik analizin uygulama alanlarından biri olan Yaklaşımlar teorisinin literatürde oldukça önemli bir yeri vardır. Burada, klasik anlamda elde edilemeyen bazı sonuçlar q -Analizde daha kolay elde edileceği gibi bazı durumlarda daha iyi uygulama alanlarına sahip olduğu da bilinmektedir. q -Analizde, q -doğal sayıları kullanılarak yeniden tanımlanan lineer ve pozitif operatörlerin ilgili fonksiyonlara yaklaşımı, klasik operatörlerinkine göre daha hızlıdır.

Tanım 3.1.1

q pozitif gerçel sayı olmak üzere, negatif olmayan bir k sayısının q −genellemesi

$$[k]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^k}{1-q}, & q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır(Andrews, Askey and Roy 1999).

$k = 1,2,3, \dots, n$ için sembolik olarak

$$[k]_q = \{1, \quad 1+q, \quad 1+q+q^2, \quad 1+q+q^2+q^3, \dots, 1+q+\dots+q^{n-1}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2

q −binom katsayısı;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} \quad (n \geq k \geq 0) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır(Andrews, Askey and Roy1999).

Örnek 3.1.1

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = ?$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{[4]_q!}{[2]_q!\,[4-2]_q!} = \frac{[4]_q[3]_q[2]_q[1]_q}{[2]_q[1]_q[2]_q[1]_q} = \frac{[4]_q[3]_q}{[2]_q[1]_q}$$

$$= \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)}{(1+q)} = \frac{1+2q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5}{1+q}$$

$$= \frac{(1+q)(1+q+2q^2+q^3+q^4)}{1+q}$$

$$= 1+q+2q^2+q^3+q^4$$

Tanım 3.1.3

q −faktöriyel

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q[k-1]_q \cdots [1]_q, & k = 1,2,\ldots \\ 1 \quad , & k = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlıdır(Andrews, Askey and Roy 1999).

Teorem 3.1.1 (q -pascal kuralı)

$1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere q −binom katsayıları için;

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

eşitlikleri geçerlidir(Goodman, Oruc and Phillips 1999).

Kanıt

$1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere tanımdan

$[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$

$= 1 + q + q^2 + \cdots + q^j + q^{j+1} + \cdots + q^{n-1}$

$= \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{j-1}\right) + q^j\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-j-1}\right)$

$= [j]_q + q^j [n-j]_q$

eşitliği elde edilir. Kanıtın ikinci kısmı aşağıdaki şekilde gösterilir.

$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q$

eşitliğinden

$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix}_q + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix}_q$

$= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q$

olacaktır. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 3.1.2

$yx = qxy$, $xq = qx$, $yq = qy$ eşitliklerini sağlayan komütatif q −Binom formülü aşağıdaki şekilde verilir(Goodman, Oruc and Phillips 1999).

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q y^{n-j} x^j \tag{3.6}$$

Kanıt

Kanıt için tümevarım yöntemi kullanılır.

$n = 1$ için

$$(x+y) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_q y + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_q x = y + x$$

eşitliği geçerlidir.

$n = k$ için eşitlik doğru olsun. Yani

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j} x^j$$

eşitliği geçerli olsun. Burada $yx = qxy$ eşitliğinden

$$y^k x = y^{k-1} yx = y^{k-1} qxy = qy^{k-1} xy = qy^{k-2} yxy = qy^{k-2} qxy^2 = \cdots = q^k xy^k$$

elde edilir.

Son olarak $n = k + 1$ için önermenin doğruluğu gösterilmelidir.

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)^k (x+y)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j} x^j \right) (x+y)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j} x^j\, x + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j} x^j\, y$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j} x^j\, x + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j+1} x^j$$

eşitliği elde edilir.

$y^{k-j} x = y^{k-j} x q^{k-j}$ eşitliği kullanılarak

$$(x+y)^{k+1}=\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q x^j y^{k-j}\,xq^{k-j}+\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j+1}x^j$$

$$=\sum_{j=1}^{k+1}\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}_q x^j y^{k-j+1}\,q^{k-j+1}+\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j+1}x^j$$

$$=\begin{bmatrix}k\\k+1-1\end{bmatrix}_q x^{k+1}+\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}_q y^{k+1}+\sum_{j=1}^{k}\left(\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}_q q^{k-j+1}\right)y^{k-j+1}x^j$$

$$=x^{k+1}+y^{k+1}+\sum_{j=1}^{k}\left(\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}_q q^{k-j+1}\right)y^{k-j+1}x^j$$

olacaktır. q −pascal kuralından

$$(x+y)^{k+1}\ =x^{k+1}+y^{k+1}+\sum_{j=1}^{k}\begin{bmatrix}k+1\\j\end{bmatrix}_q y^{k-j+1}x^j$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k+1\\k\end{bmatrix}_q y^{k-j+1}x^j$$

elde edilir. O halde $n=k+1$ içinde önerme doğrudur. Böylece her $n\in\mathbb{N}$ için

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q y^{n-j}x^j$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Sonuç 3.1.1

Bir q paremetresi için

$yx=qxy\ \ ,\ \ xq=qx\ \ ,\ \ yq=qy$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q x^k(1-x)^{n-k}=1 \tag{3.7}$$

ve

$$(x + xy)^n = x^n(1 + y)(1 + qy) \dots (1 + q^{n-1}y) \tag{3.8}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt

Açıkça

$$(x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k(1 - x)^{n-k} = 1^n = 1$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
(x + xy)^n \quad &= (x + xy) \dots (x + xy)(x + xy)(x + xy) \\
&= x(1 + y) \dots x(1 + y)x(x + yx)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x(1 + y)x(x + qxy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x(1 + y)x^2(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x(x + yx)x(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x^2(1 + qy)x(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x^2(x + qyx)(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x^2(x + qqxy)(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x^2(x + qxqy)(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x^2(x + xqqy)(1 + qy)(1 + y) \\
&= x(1 + y) \dots x^3(1 + q^2y)(1 + qy)(1 + y) \\
&\vdots \\
&= x^n(1 + q^{n-1}y) \dots (1 + q^2y)(1 + qy)(1 + y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Uyarı 3.1.1

q pozitif gerçel sayıları için

$$(1-x)^{n-k} = \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \tag{3.9}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt.

Sonuç 3.1.1'de (3.8) eşitliğinde ki

$(x+xy)^n = x^n(1+y)(1+qy)\dots(1+q^{n-1}y)$

ifadesinde y yerine $-x$ yazılırsa

$(x-x^2)^n = x^n(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{n-1}x)$

eşitliği doğrudur. Buradan

$x^n(1-x)^n = x^n(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{n-1}x)$

eşitliği elde edilir. n yerine $n-k$ alınırsa

$(1-x)^{n-k} = (1-x)(1-qx)\dots(1-q^{n-k-1}x)$

$$(1-x)^{n-k} = \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

olacaktır.

Sonuç 3.1.2

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) = 1 \tag{3.10}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

Sonuç 3.1.1 de (3.7) eşitliğinden

$$(x+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

olduğu biliniyor.

Yukarıda ki eşitlikten $(1-x)^{n-k}$ yerine

$$\prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

ifadesi yazılırsa

$$(x+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) = 1$$

eşitliği geçerli olur. Bu ise aranan eşitliktir.

Uyarı 3.1.2

q pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{[k]_q}{[n]_q} = \frac{q[k-1]_q + 1}{[n]_q} \tag{3.11}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt

Tanımdan kolayca

$$[k]_q = q[k-1]_q + 1$$

$$= \left(\frac{1-q^{k-1}}{1-q}\right) q + 1$$

$$= \frac{q-q^k}{1-q} + 1$$

$$= \frac{q - q^k + 1 - q}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

$$= [k]_q$$

eşitliği elde edilir.

3.2 TEK DEĞİŞKENLİ q -BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu kısımda tek değişkenli q -Bernstein polinomlarının tanımı ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.2.1

$x \in [0,1]$,$f \in C[0,1]$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda q-Bernstein polinomu

$$B_n(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır(Phillips 1996).

Önerme 3.2.1

(3.12) eşitliği ile tanımlı q -Bernstein polinomları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir(Phillips 1996).

i. $B_n(1;q;x) = 1$ (3.13)

ii. $B_n(t;q;x) = x$ (3.14)

iii. $B_n(t^2;q;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$ (3.15)

Kanıt

i. Sonuç 3.1.2 den açıkça

$$B_n(1;q;x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) = 1$$

eşitliğin sağlandığı görülür.

ii. Benzer şekilde operatörün tanımından

$$B_n(t;q;x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q}{[k]_q} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$k \to k+1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q!}{[k]_q!\,[n-k-1]_q!} x^{k+1} \prod_{s=0}^{n-k-2} (1-q^s x)$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-2} (1-q^s x)$$

$$= x$$

eşitliği sağlanır.

iii. Son olarak

$$B_n(t^2;q;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{{[k]_q}^2}{{[n]_q}^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q}{[k]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$

(3.11) eşitliğinden

$$B_n(t^2;q;x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{q[k-1]_q+1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$

yazılabilir. Buradan

$$B_n(t^2;q;x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{q[k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{q[k-1]_q}{[n]_q}\frac{[n-1]_q[n-2]_q!}{[k-1]_q[k-2]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$

$$=\frac{q[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=2}^{n}\frac{[n-2]_q!}{[k-2]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)$$

$$\boxed{k\to k+2\qquad k\to k+1}$$

$$=\frac{q[n-1]_q}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{[n-2]_q!}{[k-2]_q!\,[n-k-2]_q!}x^{k+2}\prod_{s=0}^{n-k-3}(1-q^sx)$$
$$+\frac{1}{[n]_q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k-1]_q!}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^sx)$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-3} (1 - q^s x)$$

$$+ \frac{1}{[n]_q} x \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-2} (1 - q^s x)$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x$$

$$= \frac{[n]_q - 1}{[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) x^2 + \frac{x}{[n]_q}$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{[n]_q} + \frac{x}{[n]_q}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

eşitliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1'in sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2

$0 < q_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} {q_n}^n = c$ $(c \neq 1)$ olsun. Bu durumda q-Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığında sürekli ve tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı $|f(x)| \leq M_f$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $B_n(f; q; x)$ polinomlar dizisi düzgün yakınsar(Philips 1996).

Kanıt

Bu teoremin sağlanabilmesi için $B_n(f; q; x)$ in doğrusal ve pozitif olduğunu göstermek yeterlidir.

Doğrusallık:

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,1]$ için

$$B_n(af(t)+bg(t);q;x)=\sum_{k=0}^{n}\left(af\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)+bg\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(af)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(bg)\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$=a\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$+b\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$=aB_n(f(t);q;x)+bB_n(g(t);q;x)$$

olduğundan $B_n(f;q;x)$ polinomlar dizisi doğrusaldır.

Pozitiflik:

$k=0,1,\dots;n\in\mathbb{N}$ ve $x\in[0,1]$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\geq 0$$

olduğundan her $f\geq 0$ için $B_n(f;q;x)\geq 0$

olur. Yani $B_n(f;q;x)$ polinomlar dizisi pozitiftir.

3.3 İKİ DEĞİŞKENLİ q -BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu kısımda iki değişkenli q -Bernstein polinomlarının tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.3.1

$0<q_1<1$, $0<q_2<1$ olmak üzere iki değişkenli q-Bernstein polinomu

$$B_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır(Barbasu 2000).

Tanım 3.3.2

$I^2=[0,1]\mathrm{x}[0,1]$, $R^{I^2}=\{f|f:I^2\to R\}$ olsun. $0<q_1<1$, $0<q_2<1$ olmak üzere her $f\in R^{I^2}$ için

$$B_{n_1}^{x}(f;q_1,;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},y\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right) \tag{3.17}$$

ve

$$B_{n_2}^{y}(f;q_2,;x,y)=\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) \tag{3.18}$$

tanımlamaları yapılabilir.

Teorem 3.3.1

$B_{n_1}^{x}$, $B_{n_2}^{y}$ $C(I^2)$ üzerinde (3.17) ve (3.18) de tanımlanan polinom dizilerinde her $f\in C(I^2)$ için $B_{n_1,n_2}:C(I^2)\to C(I^2)$ iki değişkenli q-Bernstein polinomu yardımıyla

$$B_{n_1}^{x}\,B_{n_2}^{y}=\,B_{n_2}^{y}B_{n_1}^{x}=B_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2;x,y) \tag{3.19}$$

eşitliği geçerlidir(Barbasu 2000).

Kanıt

(3.17) ve (3.18) eşitliğinden

$$B_{n_1}^{x}\,B_{n_2}^{y}(f;q_2;x,y)=B_{n_1}^{x}\,\left(B_{n_2}^{y}(f;q_2;x,y)\right)$$

$$= B_{n_1}^x\left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) B_{n_1}^x\left(f\left(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\right)$$

$$= \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) .$$

$$.\left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$B_{n_2}^y B_{n_1}^x(f;q_1;x,y) = B_{n_2}^y\left(B_{n_1}^x(f;q_1;x,y)\right)$$

$$= B_{n_2}^y\left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},y\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right) B_{n_2}^y\left(f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},y\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right).$$

$$.\left(\sum_{k_1=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_2}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_2}}, \frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2}.$$

$$. \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y)$$

olacaktır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Önerme 3.3.2

$i, j = 0,1,2$ olmak üzere $e_{ij}: I^2 \to I^2$, $e_{i,j}(x, y) = x^i y^j$ test fonksiyonları olsun.

Her $(x, y) \in I^2$ için

i. $B_{n_1,n_2}\big(e_{0,0}; q_1, q_2; x, y\big) = e_{0,0}(x, y)$

ii. $B_{n_1,n_2}\big(e_{1,0}; q_1, q_2; x, y\big) = e_{1,0}(x, y)$

iii. $B_{n_1,n_2}\big(e_{0,1}; q_1, q_2; x, y\big) = e_{0,1}(x, y)$

iv. $B_{n_1,n_2}\big(e_{2,0}; q_1, q_2; x, y\big) = e_{2,0}(x, y) + \frac{x(1-x)}{[n_1]_{q_1}}$

v. $B_{n_1,n_2}\big(e_{0,2}; q_1, q_2; x, y\big) = e_{0,2}(x, y) + \frac{y(1-y)}{[n_2]_{q_2}}$

eşitlikleri geçerlidir(Barbosu 2000).

Kanıt

i. Operatör tanımından

$B_{n_1,n_2}\big(e_{0,0}; q_1, q_2; x, y\big)$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} (1 - q_2^{s_2} y)$$

$$= \left\{ \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} (1 - q_1^{s_1} x) \right\} .$$

$$.\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$= 1.1 = e_{0,0}(x,y)$$

bulunur.

ii. $e_{1,0}$ fonksiyonu polinomda yerine yazılırsa

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{1,0};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)=x$$

ve (3.10) eşitliğinden

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{1,0};q_1,q_2;x,y\right)=x.1=x=e_{1,0}(x,y)$$

elde edilir.

iii. Benzer şekilde fonksiyon polinomda yerine yazılırsa

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{0,1};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

(3.10) eşitliğinden ve

$\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)=y$ olduğundan

$B_{n_1,n_2}\left(e_{0,1};q_1,q_2;x,y\right)=1.y=y=e_{0,1}(x,y)$

eşitliği bulunur.

iv.

$e_{2,0}$ fonksiyonu için

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{2,0};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)=\left(x^2+\frac{x(1-x)}{[n_1]_{q_1}}\right)$ ve

(3.10)'dan

$$B_{n_1,n_2}(e_{2,0};q_1,q_2;x,y) = \left(x^2+\frac{x(1-x)}{[n_1]_{q_1}}\right).1 = e_{2,0}(x,y)+\frac{x(1-x)}{[n_1]_{q_1}}$$

eşitliği elde edilir.

v. Son olarak $e_{0,2}$ fonksiyonu ve polinom tanımı birlikte düşünülerek

$$B_{n_1,n_2}(e_{0,2};q_1,q_2;x,y) = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)^2 \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}(1-q_1^{s_1}x)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}(1-q_2^{s_2}y)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}(1-q_1^{s_1}x)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)^2\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}(1-q_2^{s_2}y)\right\}$$

(3.10)'dan ve

$$\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)^2\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}(1-q_2^{s_2}y) = \left(y^2+\frac{y(1-y)}{[n_2]_{q_2}}\right)$$ olduğundan

$$B_{n_1,n_2}(e_{0,2};q_1,q_2;x,y) = 1.\left(y^2+\frac{y(1-y)}{[n_2]_{q_2}}\right) = e_{2,0}(x,y)+\frac{y(1-y)}{[n_2]_{q_2}}$$

eşitliği gösterilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 3.3.2

$q_1 = q_1(n_1)$, $q_2 = q_2(n_2)$ ve $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$ iken $q_1(n_1) \to 1$, $q_2(n_2) \to 1$ olsun. Bu durumda, keyfi $f \in C(I^2)$ için, (3.16) da tanımlanan iki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının dizisi, I^2 üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar(Barbasu 2000).

Kanıt

(3.1) bağlantısını ve $n_1 \to \infty$ iken $q_1(n_1) \to 1$ olduğunda $n_1 \to \infty$ iken$[n_1] \to \infty$ dir hipotezini kullanarak benzer şekilde $n_2 \to \infty$ iken $[n_2] \to \infty$ dur. Hemen sonra, Önerme 3.3.2 yi kullanarak, I^2 üzerinde $n_1, n_2 \to \infty$ iken $B_{n_1,n_2}(e_{i,j}; q_1, q_2; x, y) \Rightarrow e_{i,j}$ düzgün yakınsaklığı elde edilir.

Şimdi iki değişkenli fonksiyonlar için iyi bilinen Korovkin teorimini kullanarak, I^2 üzerinde $B_{n_1,n_2}(f; q_1, q_2; x, y)$ nin $f(x, y)$ ye düzgün yakınsadığını elde ederiz ve kanıt tamamlanır.

3.4 TEK DEĞİŞKENLİ q-BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Bu kısımda tek değişkenli q-Bernstein-Chlodowsky polinomlarının tanımı ve yaklaşım özellikleri ele alınmıştır.

Tanım 3.4.1 (b_n) dizisi

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$

koşulunu sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olsun. Bu durumda $0 \leq x \leq b_n$ için q-Bernstein-Chlodowsky polinomları

$$\widetilde{B_n^{q_n}}(f; q_n; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} b_n\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right) \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlıdır(Karsli and Gupta 2008).

Önerme 3.4.1 q-Bernstein-Chlodowsky polinomları

$$i.\ \widetilde{B_n^{q_n}}(1; q_n; x) = 1 \tag{3.21}$$

$$\text{ii. } \widetilde{B_n^{q_n}}(t; q_n; x) = x \tag{3.22}$$

$$\text{iii. } \widetilde{B_n^{q_n}}(t^2; q_n; x) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}} \tag{3.23}$$

eşitliklerini sağlar(Karsli and Gupta 2008).

Kanıt

i. q-Binom teoreminden

$$\widetilde{B_n^{q_n}}(1;q_n;x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)=1$$

bulunur.

ii. Benzer şekilde

$$\widetilde{B_n^{q_n}}(t;q_n;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=b_n\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=b_n\frac{x}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[k]_{q_n}}\frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$\boxed{k\to k+1}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[n-1]_{q_n}!}{[k]_{q_n}!\,[n-k-1]_{q_n}!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$=x$$

bulunur.

iii. Son olarak

$$\widetilde{B_n^{q_n}}(t^2;q_n;x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$={b_n}^2\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[k]_{q_n}}\frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

olacaktır burada (3.11) eşitliği dikkate alınarak

$$\widetilde{B_n^{q_n}}(t^2; q_n; x) = {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{q_n[k-1]_{q_n} + 1}{[n]_{q_n}} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{q_n[k-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$+ {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n]_{q_n}} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= {b_n}^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{q_n[k-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \frac{[n-1]_{q_n}[n-2]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}[k-2]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$+ \frac{{b_n}^2}{[n]_{q_n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= \frac{q_n {b_n}^2 [n-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \sum_{k=2}^{n} \frac{[n-2]_{q_n}!}{[k-2]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$+ \frac{{b_n}^2}{[n]_{q_n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= \frac{q_n {b_n}^2 [n-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \left(\frac{x}{b_n}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{[n-2]_{q_n}!}{[k-2]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$+ \frac{{b_n}^2}{[n]_{q_n}} \left(\frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[k-1]_{q_n}!\,[n-k]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$\boxed{k \to k+2} \qquad \boxed{k \to k+1}$$

$$= \frac{q_n x^2 [n-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{[n-2]_{q_n}!}{[k]_{q_n}!\,[n-k-2]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-3} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$+ \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_{q_n}!}{[n]_{q_n}!\,[n-k-1]_{q_n}!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-2} \left(1 - {q_n}^s \frac{x}{b_n}\right)$$

$$= \frac{q_n[n-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x$$

$$= \frac{[n]_{q_n} - 1}{[n]_{q_n}} x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{[n]_{q_n}}\right) x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{[n]_{q_n}} + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x$$

$$= x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}$$

bulunur. Burada $0 < q_n < 1$ için $n \to \infty$ iken $[n]_{q_n} \to \frac{1}{1-q}$ olacaktır. Dolayısıyla $\nu = 0,1,2$ için $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olup $n \to \infty$ için $\widetilde{B_n^{q_n}}(t^\nu; q_n; x)$ sırasıyla $1, x, x^2$ ye yakınsar.

3.5 İKİ DEĞİŞKENLİ q -BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Bu kısımda iki değişkenli q –Bernstein -Chlodowsky polinomlarının tanımı ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.5.1 $\alpha_n > 0,\ \beta_m > 0$ artan dizileri için

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{m\to\infty} \beta_m = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}} = 0$ ve $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\beta_m}{[m]_{q_m}} = 0$ olsun.

$$\breve{B}_n^{q_n}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}} \alpha_n, y\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \prod_{s_1=0}^{n-k-1} \left(1 - q_n^{s_1} \frac{x}{\alpha_n}\right) \tag{3.24}$$

ve

$$\breve{B}_m^{q_m}(f; x, y) = \sum_{j=0}^{m} f\left(x, \frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}} \beta_m\right) \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \prod_{s_2=0}^{m-j-1} \left(1 - q_m^{s_2} \frac{y}{\beta_m}\right) \tag{3.25}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$D_{\alpha_n\beta_n} = \{(x, y) : 0 \le x \le \alpha_n, 0 \le y \le \beta_m\}$ bölgesi üzerinde iki değişkenli q-Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanır(Buyukyazici 2009).

Önerme 3.5.1

$i,j=0,1,2$ olmak üzere $e_{i,j}:I^2\to I^2, e_{i,j}(x,y)=x^iy^j$ test fonksiyonları olsun. Bu durumda her $(x,y)\in I^2$ için

i. $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{0,0};x,y\right)=1$ (3.27)

ii. $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{1,0};x,y\right)=x$ (3.28)

iii. $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{0,1};x,y\right)=y$ (3.29)

iv. $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{2,0};x,y\right)=x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}$ (3.30)

v. $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{0,2};x,y\right)=y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}$ (3.31)

eşitlikleri geçerlidir(Buyukyazici 2009).

Kanıt

i- Polinomun tanımından

$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{0,0};x,y\right)$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}$$

(3.10) eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)=1 \text{ ve } \sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)=1$$

olduğundan

$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{0,0};x,y)=1.1=1$

eşitliği elde edilir.

ii- Benzer şekilde $e_{1,0}$ fonksiyonu için polinomun tanımından

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{1,0};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)=x \text{ ve}$$

(3.10)’dan

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{1,0};x,y\right)=x.1=x$$

eşitliği elde edilir.

iii- $e_{0,1}$ fonksiyonu için

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{0,1};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}$$

(3.10)’dan ve

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)=y \text{ olduğundan}$$

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{0,1};x,y\right)=1.y=y$$

eşitliği geçerlidir.

iv- Polinomun tanımından

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}\left(e_{2,0};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)=x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}\text{ ve}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)=1\text{ olduğundan}$$

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{2,0};x,y)=\left(x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}\right).1=x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}$$

$e_{2,0}$ fonksiyonu için aranan eşitlik bulunmuş olur.

v- Son olarak $e_{0,2}$ fonksiyonu için

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{0,2};x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)^2\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)=1\text{ ve}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)^2\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)=y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}} \text{ olduğundan}$$

$$=1.\left(y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}\right)=y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}$$

eşitliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

Teorem 3.5.2

$f\in C(D_{\alpha_n\beta_n})$ olsun. Bu durumda yeterince büyük pozitif $a\leq\alpha_n, b\leq\beta_m$ olan a,b sayıları için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_n})}=0$$

eşitliği geçerlidir(Buyukyazici 2009).

Kanıt.

Önerme 3.5.1 i-v özelliklerinden $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{0,0};x,y)-1\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_n})}=0 \tag{3.32}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{1,0};x,y)-x\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_n})}=0 \tag{3.33}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(e_{0,1};x,y)-y\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_n})}=0 \tag{3.34}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_n})}\leq\lim_{n,m\to\infty}a\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}}+b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}=0 \tag{3.35}$$

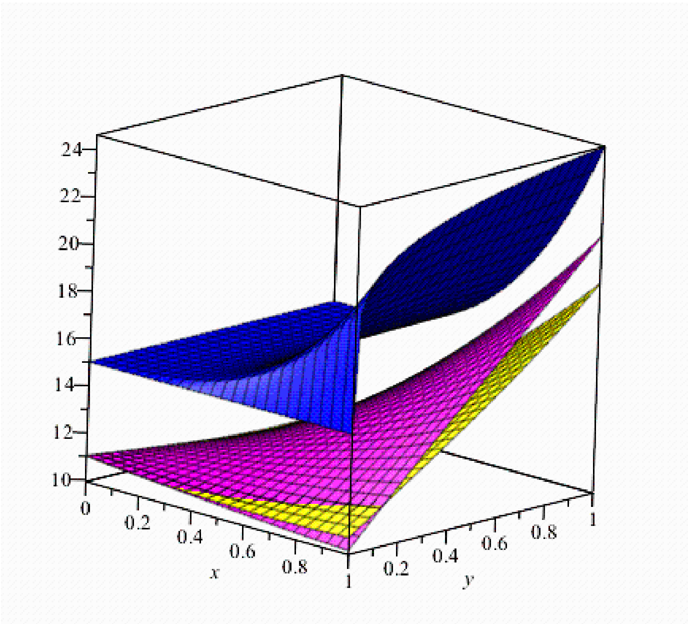
koşullarını sağlıyorsa $C(D_{\alpha_n\beta_n})$ bölgesinde sürekli, gerçel değerli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı her bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)-f\right\|_{C(D_{\alpha_n\beta_n})}=0 \tag{3.12}$$

ifadesi sağlanır.

Örnek 3.5.1

$\tilde{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)$ polinom dizisinde $\alpha_n=\sqrt{n}\,,\beta_m=\sqrt[3]{m}\,,\ q=\frac{1}{6}$ alınırak $f(x,y)=(2x)^3+(3y)^{1/6}+15$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 3.1 $n=2\ m=3$ (sarı), $n=4\ m=5$ (pembe) şeklinde gösterilmiştir.



Şekil 3.1 $\tilde{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)$ polinom dizisi ile $f(x,y)=(2x)^3+(3y)^{1/6}+15$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım.

3.6 ÜÇ DEĞİŞKENLİ q –BERNSTEIN -CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Bu kısımda üç değişkenli q -Bernstein -Chlodowsky Polinomlarının tanımı verilmiş olup bu polinomların yaklaşım özellikleri ele alınmıştır.

Tanım 3.6.1

$q>0$, $[n]_q$ q-tamsayısını göstermek üzere $\{\alpha_n\},\{\beta_m\},\{\gamma_r\}$ dizileri pozitif gerçel sayıların artan bir dizisi olsun. $\{q_n\}$ gerçel sayılar dizisi, $0<q_n\leq 1$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n=1$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{m\to\infty}\beta_m=\lim_{r\to\infty}\gamma_r=\infty$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}=\lim_{r\to\infty}\frac{\gamma_r}{[r]_{q_r}}=0$$

özellikleri geçerli olsun.

$\alpha_n > 0, \beta_m > 0, \gamma_r > 0$ olmak üzere $D_{\tilde{3}}$ bölgesi;

$$D_{\tilde{3}} := D_{\alpha_n,\beta_m,\gamma_r} = \{(x,y,z) : 0 \le x \le \alpha_n\,, \qquad 0 \le y \le \beta_m, \qquad 0 \le z \le \gamma_r\}$$

olarak tanımlanırsa bu durumda üç değişkenli Bernstein-Chlodowsky tipi polinomu

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m,\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}.$$

$$.\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right) \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada

$$\tilde{B}_n^{q_n}(f;x,y,z)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y,z\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) \quad (3.37)$$

$$\tilde{B}_m^{q_m}(f;x,y,z)=\sum_{j=0}^{m} f\left(x,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m,z\right)\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right) \quad (3.38)$$

$$\tilde{B}_r^{q_r}(f;x,y,z)=\sum_{l=0}^{r} f\left(x,y,\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\right)\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right) \quad (3.39)$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.6.1 $i_{1,}i_2,i_3=0,1,2$ olmak üzere $e_{i_1,i_2,i_3}\colon I^3\to I^3$, $e_{i_1,i_2,i_3}(x,y,z)=x^{i_1}y^{i_2}z^{i_3}$ test fonksiyonları her $x,y,z\in I^3$ için;

i. $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,0};x,y,z\right)=1$ (3.40)

ii. $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{1,0,0};x,y,z\right)=x$ (3.41)

iii. $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,1,0};x,y,z\right)=y$ (3.42)

iv. $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,1};x,y,z\right)=z$ (3.43)

i. $g(x,y,z):=e_{2,0,0}(x,y,z)+e_{0,2,0}(x,y,z)+e_{0,0,2}(x,y,z)$ fonksiyonu için

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(g;x,y,z)=x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}+y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}+z^2+\frac{z(\gamma_r-z)}{[r]_{q_r}} \tag{3.44}$$

eşitlikleri geçerlidir(Gonul Bilgin and Cetinkaya 2018).

Kanıt

i- Polinomun tanımından

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{l=0}^{r}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$$=1.1.1=1$$

eşitliği geçerlidir.

ii- $e_{1,0,0}$ fonksiyonu polinomda yerine yazılırsa

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{1,0,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l.$$

$$\cdot \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}$$

$$\cdot\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}\left\{\sum_{l=0}^{r}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)=x$ olduğundan

$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{1,0,0};x,y,z\right)=x.1.1=x$

eşitliği bulunur.

iii- Benzer şekilde fonksiyonun yerine yazılması ile

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,1,0};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l.$$

$$\cdot \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$\cdot\left\{\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}.$$

$$\cdot\left\{\sum_{l=0}^{r}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)=y \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,1,0};x,y,z\right) \;=1.y.1=y$$

eşitliği elde edilir.

iv- $e_{0,0,1}$ fonksiyonu kullanılarak

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,1};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$$\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)=z \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,1};x,y,z\right)=1.1.z=z$$

eşitliği geçerlidir.

v-

$g(x,y,z)\coloneqq e_{2,0,0}(x,y,z)+e_{0,2,0}(x,y,z)+e_{0,0,2}(x,y,z)$ fonksiyonu için kısalık olması bakımından sırasıyla T',T'',T''' tanımlamaları yapılarak ayrı ayrı hesaplanırsa

$$T' = \tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{2,0,0};x,y,z\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{[k]_{q_n}^2}{[n]_{q_n}^2}\alpha_n^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}^2}{[n]_{q_n}^2}\alpha_n^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{q_n}^2}{[n]_{q_n}^2}\alpha_n^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) = x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}$ olduğundan

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{2,0,0};x,y,z\right) = \left(x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}\right).1.1 = x^2+\frac{x(\alpha_n-x)}{[n]_{q_n}}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$T'' = \tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,2,0};x,y,z\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{[j]_{q_m}^2}{[m]_{q_m}^2}\beta_m^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}^2}{[m]_{q_m}^2}\beta_m^2\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{l=0}^{r}\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^{l}\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{[j]_{q_m}^2}{[m]_{q_m}^2}\beta_m^2\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^{j}\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)=y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}$$ olduğundan

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,2,0};x,y,z\right)=1.\left(y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}\right).1=y^2+\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}$$

olur. Son olarak

$$T'''=\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,2};x,y,z\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}^2}{[r]_{q_r}^2}\gamma_r^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^{k}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^{j}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^{l}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^{k}\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{j=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^{j}\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right\}.$$

$$.\left\{\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}^2}{[r]_{q_r}^2}\gamma_r^2\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^{l}\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)\right\}$$

$$\sum_{l=0}^{r}\frac{[l]_{q_r}^2}{[r]_{q_r}^2}\gamma_r^2\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^{l}\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)=z^2+\frac{z(\gamma_r-z)}{[r]_{q_r}}$$ olduğundan

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,2};x,y,z\right)=1.1.\left(z^2+\frac{z(\gamma_r-z)}{[r]_{q_r}}\right)=z^2+\frac{z(\gamma_r-z)}{[r]_{q_r}}$$

eşitliği geçerlidir. Bulunan T', T'', T''' ifadeleri yerlerine yazılırsa;

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(g;x,y,z) = x^2 + \frac{x(\alpha_n - x)}{[n]_{q_n}} + y^2 + \frac{y(\beta_m - y)}{[m]_{q_m}} + z^2 + \frac{z(\gamma_r - z)}{[r]_{q_r}}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 3.6.1

$f \in C(D_{\tilde{3}})$ olsun. Bu durumda yeterince büyük pozitif $a \leq \alpha_n,\ b \leq \beta_m,\ c \leq \gamma_r$ olan a, b, c sayıları için

$$\lim_{n,m,r\to\infty} \max_{(x,y,z)\in D_{\tilde{3}}} \left|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| = 0$$

eşitliği geçerlidir(Gonul Bilgin and Cetinkaya 2018).

Kanıt.

Önerme 3.6.1 i-v özelliklerinden

$$\left\|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,0};x,y,z\right) - e_{0,0,0}(x,y,z)\right\|_{C(D_{\tilde{3}})} = 0$$

$$\left\|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{1,0,0};x,y,z\right) - e_{1,0,0}(x,y,z)\right\|_{C(D_{\tilde{3}})} = 0$$

$$\left\|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,1,0};x,y,z\right) - e_{0,1,0}(x,y,z)\right\|_{C(D_{\tilde{3}})} = 0$$

$$\left\|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(e_{0,0,1};x,y,z\right) - e_{0,0,1}(x,y,z)\right\|_{C(D_{\tilde{3}})} = 0$$

$$\left\|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}\left(\left(e_{2,0,0} + e_{0,2,0} + e_{0,0,2}\right);x,y,z\right) - x^2 + y^2 + z^2\right\|_{C(D_{\tilde{3}})}$$

$$\leq \frac{a(\alpha_n - a)}{[n]_{q_n}} + \frac{b(\beta_m - b)}{[m]_{q_m}} + \frac{c(\gamma_r - c)}{[r]_{q_r}}$$

$$\leq a\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}} + b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}} + c\frac{\gamma_r}{[r]_{q_r}}$$

eşitlikleri geçerlidir. Volkov Teoremi ve $\{\alpha_n\},\{\beta_m\},\{\gamma_r\}$ nin sağladığı eşitlikler kullanılarak

$$\lim_{n,m,r\to\infty} \max_{(x,y,z)\in D_{\tilde{3}}} \left|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| = 0$$

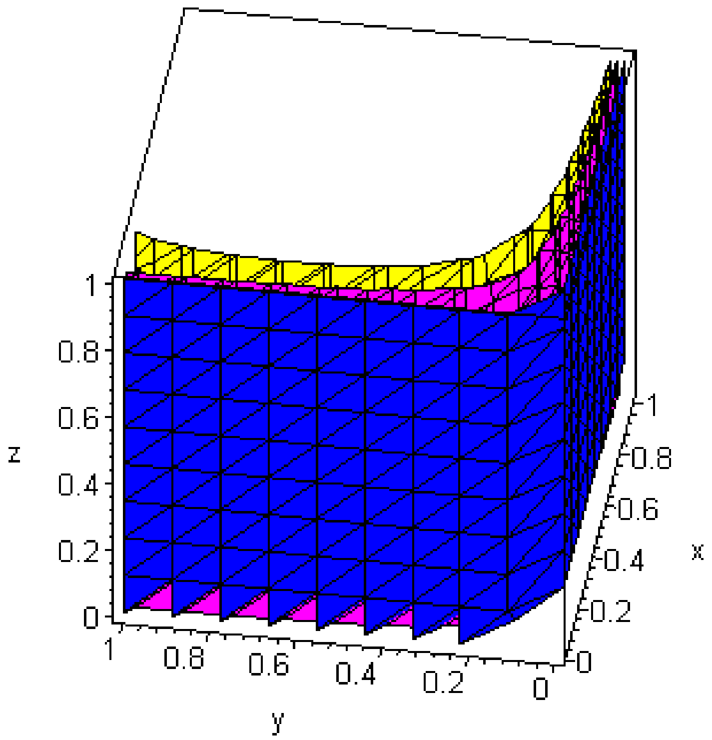
bulunur.

Bu ise kanıtı tamamlar

Örnek 3.6.1 $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z)$ polinom dizisinde $\alpha_n = \sqrt{n}\,, \beta_m = \sqrt[3]{m}\,,\ \ \gamma_r = \sqrt[4]{r} + 1$, $q = \frac{1}{6}$ alınırak ve $z = 1$ için $f(x,y,z) = (2x)^3(3y)^{1/8} + z + 1$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 3.2 $n = 2, m = 3, r = 4$ (sarı), $n = 5, m = 6, r = 7$ (pembe) şeklinde gösterilmiştir.

```
> restart;with(plots):
>  with(plottools):
>  b:=sqrt(n):
 c:=surd(m,3):
 d:=surd(r,4)+1:
 f:=(x,y,z)->((2*x)^3)*((3*y)^(1/8))*(z)+1:q:=1/6:
 kq:=simplify(sum(q^o,o=0..(k-1))):

K1:=simplify(product(kq,k=1..2)):nq:=(simplify(sum(q^o,o=0..(n
-1)))):
 N1:=simplify(product(nq,n=1..2)):g:=n-k:gq:=(1-(q^(n-k)))/(1-
q):
 P1:=1+q:
 Q1:=N1/(K1*P1):
 jq:=subs(k=j,kq):
 J1:=subs(k=j,K1):
 mq:=subs(k=m,kq):
 M1:=subs(k=m,K1):h:=m-j:
 hq:=(1-(q^(m-j)))/(1-q):
 P2:=1+q:
 Q2:=M1/(J1*P2):
 lq:=subs(k=l,hq):
 L1:=subs(k=l,K1):
```

```
rq:=subs(k=r,kq):

R1:=subs(k=r,K1):e:=r-1:

eq:=(1-(q^(r-1)))/(1-q):

P3:=1+q:

Q3:=R1/(L1*P2):

n:=2 : m:=2 : r:=2:

P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)):=Q1*Q2*Q3*((x/(b))^k)*((y/(c))^j)*((z/
(d))^l)*(product((1-((q)^(s1))*(x/b)),s1=0..(n-k-
1)))*(product((1-((q)^(s2))*(y/c)),s2=0..m-j-1))*(product((1-
((q)^(s3))*(z/d)),s3=0..r-l-1)):


B((n,m,r),x,y,z):=sum(sum(sum(f(((kq/nq)*(b)),((jq/mq)*(c)),((
lq/rq)*(d)))*P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)),l=0..r),j=0..m),k=0..n):

n:=5 : m:=5 : r:=5:


P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)):=Q1*Q2*Q3*((x/(b))^k)*((y/(c))^j)*((z/
(d))^l)*(product((1-((q)^(s1))*(x/b)),s1=0..(n-k-
1)))*(product((1-((q)^(s2))*(y/c)),s2=0..m-j-1))*(product((1-
((q)^(s3))*(z/d)),s3=0..r-l-1)):


B((n,m,r),x,y,z):=sum(sum(sum(f(((kq/nq)*(b)),((jq/mq)*(c)),((
lq/rq)*(d)))*P[k,j,l](n,m,r,(x,y,z)),l=0..r),j=0..m),k=0..n):


implicitplot3d([(f(x,y,z))=1,(B((2,2,2),x,y,z))=1,(B((5,5,5),x
,y,z))=1],x=0..1,y=0..1,z=0..1,color=[blue,sarı,pembe],scaling
=constrained,axes=boxed);
```



Şekil 3.2 $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z)$ polinom dizisi ile $f(x,y,z) = (2x)^3(3y)^{1/8} + (z-1)^3 + 1$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım yapılıyor.

BÖLÜM 4

BERNSTEIN VE BERNSTEIN- CHLODOWSKY POLİNOMLARININ SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Bernstein polinomları, Bernstein –Chlodowsky polinomları, q- Bernstein polinomları ve q- Bernstein –Chlodowsky polinomlarının yaklaşım hızları incelenecektir.

4.1 BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Teorem 4.1.1

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında düzgün sürekli olsun. Bu durumda tek değişkenli Bernstein polinomları için

$$|B_n(f;x)-f(x)| \leq 3w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt

$$|B_n(f;x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

olup Özellik 1.5.1 vi özelliğinden

$$|B_n(f;x)-f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} w\left(f;\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla Özellik 1.5.1 vii özelliğinden

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq w(f;\delta) \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \left|\frac{k}{n} - x\right| \delta^{-1}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

bulunur. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq w(f;\delta) \left\{1 + \delta^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

$$.\left\{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq w(f;\delta) \left\{1 + \delta^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \right.\right.$$

$$\left.\left. + x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\right\}$$

$$= w(f;\delta)\{1 + \delta^{-1}(B_n(t^2;x) - 2xB_n(t;x) + x^2)^{1/2}\}$$

$$= w(f;\delta) \left\{1 + \delta^{-1} \left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq w(f;\delta) \left(1 + \delta^{-1} \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

olur. Burada $\delta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ alınırsa süreklilik modülü özelliklerinden

$$|B_n(f;x) - f(x)| = 2w\left(f;\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \leq 3w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 4.1.2

$f \in C[0,1] \times [0,1]$ olsun. $\{B_{n,m}f\}$ fonksiyonunun Bernstein polinomlar dizisi ve $w, w^{(1)}, w^{(2)}$ f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri olmak üzere, her $(x,y) \in D$ için

i. $\left|B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq \frac{3}{2}\left[w^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + w^{(2)}(f;\frac{1}{\sqrt{m}})\right]$

ii. $\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq \frac{3}{2}w\left(f;\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$

eşitsizlikleri sağlanır(Buyukyazici 2003).

Kanıt

i.

$$B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)-f(x,y)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)-f\left(\frac{k}{n},y\right)+f\left(\frac{k}{n},y\right)\right.$$

$$\left.-f(x,y)\right\}$$

her iki taraftan mutlak değer alınır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)-f\left(\frac{k}{n},y\right)+f\left(\frac{k}{n},y\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-f(x,y)\right\}\right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-j} \left\{ f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-j} \left\{ f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right\} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-j} \left| f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) \right|$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-j} \left| f\left(\frac{k}{n}, y\right) - f(x,y) \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ taraftaki toplamları sırasıyla I_1 ve I_2 olarak

$$\left| B_{n,m}(f; x, y) - f(x,y) \right| \leq I_1 + I_2$$

olarak yazılırsa.

Öncelikle I_1 ele alınarak kabulden

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-j} \left| f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) - f\left(\frac{k}{n}, y\right) \right|$$

ve Özellik 1.5.1 vi de ki

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq w^{(2)}(f; |y_1 - y_2|)$$

formülünden

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-j} \, w^{(2)}\left(f; \left|\frac{j}{m} - y\right|\right)$$

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^{m} y^j (1-y)^{m-j} \, w^{(2)}\left(f; \left|\frac{j}{m} - y\right|\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} y^j (1-y)^{m-j} \, w^{(2)}\left(f; \left|\frac{j}{m} - y\right|\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Süreklilik modülünün özelliklerine göre keyfi pozitif δ_m dizisi için

$$w^{(2)}\left(f;\left|\frac{j}{m}-y\right|\right)=w^{(2)}\left(f;\frac{\left|\frac{j}{m}-y\right|}{\delta_m}\delta_m\right)\leq\left\{\frac{\left|\frac{j}{m}-y\right|}{\delta_m}+1\right\}w^{(2)}(f;\delta_m)$$

dır. Bundan dolayı

$$I_1\leq\sum_{j=0}^{m}y^j(1-y)^{m-j}\left\{\frac{\left|\frac{j}{m}-y\right|}{\delta_m}+1\right\}w^{(2)}(f;\delta_m)$$

$$=w^{(2)}(f;\delta_m)\left\{\frac{1}{\delta_m}\sum_{j=0}^{m}y^j(1-y)^{m-j}\left|\frac{j}{m}-y\right|+1\right\}$$

yazılırsa parantezdeki toplamı

$$\sum_{j=0}^{m}y^j(1-y)^{m-j}\left|\frac{j}{m}-y\right|=\sum_{j=0}^{m}\left(y^j(1-y)^{m-j}\right)^{1/2}\left(y^j(1-y)^{m-j}\right)^{1/2}\left|\frac{j}{m}-y\right|$$

biçiminde yazarsak, Cauchy- Schwartz eşitsizliğinden,

$$\sum_{j=0}^{m}y^j(1-y)^{m-j}\left|\frac{j}{m}-y\right|\leq\left(\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}y^j\right)^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}\left(\frac{j}{m}-y\right)^2y^j\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}\left(\frac{j}{m}-y\right)^2y^j\right)^{1/2}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla

$$I_1\leq w^{(2)}(f;\delta_m)\left\{\frac{1}{\delta_m}\left(\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}\left(\frac{j}{m}-y\right)^2y^j\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}\qquad(4.1)$$

$$\left(\frac{j}{m}-y\right)^2=\frac{j^2}{m^2}-2\frac{j}{m}y+y^2$$

olduğundan

$$\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}\left(\frac{j}{m}-y\right)^{2}y^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}y^{j}\frac{j^{2}}{m^{2}}-2y\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}y^{j}\frac{j}{m}+y^{2}\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}y^{j}$$

$$\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}\left(\frac{j}{m}-y\right)^{2}y^{j}=y^{2}+\frac{y-y^{2}}{m}-2y^{2}+y^{2}=\frac{y-y^{2}}{m}$$

eşitsizliği bulunur. $f(y)=y-y^{2}$ fonksiyonu $y_0=\frac{1}{2}$ noktasında maksimuma sahip olduğundan

$$\sum_{j=0}^{m}(1-y)^{m-j}\left(\frac{j}{m}-y\right)^{2}y^{j}\leq\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{m}=\frac{1}{4m}$$

eşitsizliği (4.1)' de yerine yazılırsa

$$I_1\leq w^{(2)}(f;\delta_m)\left\{\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{1}{4m}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}=w^{(2)}(f;\delta_m)\left(\frac{1}{\delta_m 2\sqrt{m}}+1\right)$$

$\left(\frac{1}{\delta_m 2\sqrt{m}}+1\right)$ ifadesini m den bağımsız olacak şekilde $\delta_m=\frac{1}{\sqrt{m}}$ seçimi yapıldığı taktirde,

$$I_1\leq w^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}w^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdide I_2 terimi ele alınacaktır. Tanıma göre

$$I_2=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}x^{k}y^{j}(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left|f\left(\frac{k}{n},y\right)-f(x,y)\right|$$

eşitliği elde edilir ve

$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq w^{(1)}(f;|x_1-x_2|)$ özelliğinden dolayı

$$I_2\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}x^{k}y^{j}(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\,w^{(1)}\left(f;\left|\frac{k}{n},y\right|\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} w^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n}, y\right|\right) \sum_{j=0}^{m} (1-y)^{m-j}$$

dır. Yani

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} w^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n}, y\right|\right) \tag{4.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$w^{(1)}\left(f; \left|\frac{k}{n}, y\right|\right) = w^{(1)}\left(f; \frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} \delta_n\right) \leq w^{(1)}(f; \delta_n)\left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1\right)$$

eşitsizliği (4.2)' de yerine yazılırsa,

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left\{w^{(1)}(f; \delta_n)\left(\frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta_n} + 1\right)\right\}$$

$$= w^{(1)}(f; \delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left|\frac{k}{n} - x\right| + 1\right\} \tag{4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Parantez içindeki

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left|\frac{k}{n} - x\right|$$

ifade

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left|\frac{k}{n} - x\right| = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k y^j (1-x)^{n-k}\right)^{1/2} \left(x^k y^j (1-x)^{n-k}\right)^{1/2} \left|\frac{k}{n} - x\right|$$

şeklinde yazılsın. Cauchy- Schwartz eşitsizliğinden,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left|\frac{k}{n} - x\right|$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right)^{1/2}$$

bulunur. Bu eşitsizlik (4.3)'de yerine yazılırsa,

$$I_2 \leq w^{(1)}(f;\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \tag{4.4}$$

eşitsizliği doğrudur.

$$\left(\frac{k}{n} - x \right)^2 = \frac{k^2}{n^2} - 2\frac{k}{n}x + x^2$$

eşitliği geçerli olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} x^k y^j (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} x^k y^j (1-x)^{n-k}$$

$$+ x^2 \sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 = x^2 + \frac{x - x^2}{n} - 2x^2 + x^2 = \frac{x - x^2}{n} \tag{4.5}$$

$f(x) = x - x^2$ fonksiyonu $x_0 = \frac{1}{2}$ noktasında maksimum değere sahiptir. Bu değer (4.5) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^j (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \leq \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{n} = \frac{1}{4n}$$

eşitsizliği bulunur. Bu değer (4.4) de yerine yazılırsa

$$I_2 \leq w^{(1)}(f;\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left(\frac{1}{4n} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} = w^{(1)}(f;\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n 2\sqrt{n}} + 1 \right\}$$

$\frac{1}{\delta_n 2\sqrt{n}}$ ifadesi n'den bağımsız olacak şekilde $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçimi yapılırsa,

$$I_2 \leq w^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}w^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan

$$\left|B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq \frac{3}{2}\left\{w^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + w^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (i) hesaplanmış olur.

Şimdi (ii) hesaplanacaktır. (i)' nin kanıtında olduğu gibi

$$\begin{aligned}B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x,y)x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) - f(x,y)\right\}$$

yazılabilir ve buradan

$$\left|B_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) - f(x,y)\right\}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\left|f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) - f(x,y)\right|$$

eşitsizliği elde edilir.

$\delta = \sqrt{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{m} - y\right)^2}$ seçimi yapılıp w tam süreklilik modülünün

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leq w\big(f;\rho(\mu_1,\mu_2)\big)$$

özelliğinden

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}.$$

$$.w\left(f;\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}\right) \tag{4.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$w\left(f;\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}\right)=w\left(f;\frac{\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}}{\delta_{n,m}}\delta_{n,m}\right)$$

$$\leq w(f;\delta_{n,m})\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}}{\delta_{n,m}}+1\right)$$

eşitsizliği (4.6)' da yerine yazılırsa

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}.$$

$$.w(f;\delta_{n,m})\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}}{\delta_{n,m}}+1\right)$$

$$=w(f;\delta_{n,m})\left\{\frac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}\,x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right\}$$

$$=w(f;\delta_{n,m})\left\{\frac{1}{\delta_{n,m}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}\,x^k y^j (1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right\} \tag{4.7}$$

eşitsizliğini elde edilir. Parantezdeki toplam ele alınırsa Cauchy -Schwartz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}\,x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2}\,\left(x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$.\left(x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right)^{1/2}$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right\}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$.\left(x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right\}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (4.7) da yerine yazılırsa

$$\left|B_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq w\left(f;\delta_{n,m}\right)\left\{\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right\}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{m}-y\right)^2\right\}x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}-y\right)^2 x^k y^j(1-x)^{n-k}(1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{j}{m} - y\right)^2 y^j (1-y)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \frac{j^2}{m^2} y^j (1-y)^{m-j} - 2y \sum_{j=0}^{m} \frac{j}{m} y^j (1-y)^{m-j} + y^2 \sum_{j=0}^{m} y^j (1-y)^{m-j}$$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{n} - 2x^2 + x^2 + y^2 + \frac{y - y^2}{m} - 2y^2 + y^2$$

$$= \frac{x - x^2}{n} + \frac{y - y^2}{m}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla,

$$\left|B_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\right| \le w\big(f; \delta_{n,m}\big) \left(\frac{1}{\delta_{n,m}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} + 1 \right)$$

dır ve $\delta_{n,m} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$ olarak seçilirse,

$$\left|B_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\right| \le \frac{3}{2} w\left(f; \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da kanıtı tamamlar.

4.2 BERNSTEIN- CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Teorem 4.2.1

f, tüm $\mathbb{R}$ de sürekli ve

$|f(x)| \le M_f(1 + x^2)$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $A > 0$ için $w_{1+A}(f, \delta)$, $[0,1 + A]$ aralığında f fonksiyonunun süreklilik modülü olsun. Bu durumda $[0, A]$ aralığında

$$|B_n^*(f;x)-f(x)| \le C_f w_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan n den bağımsız pozitif bir C_f sabiti vardır(Gadjiev 1998).

Kanıt

$x \in [0, A]$ olmak üzere

$E_1 = \left\{k: \frac{k}{n} b_n \ge 1+A\right\}$ ve $E_2 = \left\{k: \frac{k}{n} b_n \le 1+A\right\}$

kümeleri tanımlansın.

$$|B_n^*(f;x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}b_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - f(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right|$$

$$= \left|\sum_{k\in E_1}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right.$$
$$\left. + \sum_{k\in E_2}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right|$$

$$\le \sum_{k\in E_1}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$
$$+ \sum_{k\in E_2}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

olarak yazılabilir.

$$t_n \coloneqq \sum_{k\in E_1}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$s_n \coloneqq \sum_{k\in E_2}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

olarak tanımlansın. t_n ve s_n ifadeleri ayrı ayrı göz önüne alınırsa; $k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için $|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$ eşitsizliğinden

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \leq M_f\left(2 + \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 + x^2\right)$$

$$\leq M_f\left[\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 + 2x\left(\frac{k}{n}b_n - x\right) + 2(1 + x^2)\right]$$

elde edilir.E_1ve E_2' nin tanımından $\left|\frac{k}{n}b_n - x\right| \geq 1$ eşitsizliği kullanılarak

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \leq 2M_f\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 [4 + 4x + x^2]$$

$$\leq 2M_f(A + 2)^2\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2$$

olur. Burada $B = 2M_f(A + 2)^2$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \leq B\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$t_n \leq B\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$= B\frac{x(b_n - x)}{n}$$

$$\leq BA\frac{b_n}{n}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0$ olduğundan yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{b_n}{n} \leq \sqrt{\frac{b_n}{n}}$$

eşitsizliği doğrudur. Süreklilik modülünün özelliklerinden

$$C_f\sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq w_{1+A}\left(f,\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq \frac{1}{C_f}w_{1+A}\left(f,\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna bağlı $C_f > 0$ sayısı vardır. O halde $M = \frac{BA}{C_f}$ olmak üzere (2.11) eşitliğinden

$$t_n \leq Mw_{1+A}\left(f,\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{4.8}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için süreklilik modülünün özellikleri kullanılarak

$$\left|f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x)\right| \leq w_f^{1+A}\left(\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)$$

$$\leq w_f^{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Cauchy- Schwartz eşitsizliği yardımıyla

$$s_n \leq w_{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]$$

$$\leq w_{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}}\right]$$

$$\leq w_{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x(b_n - x)}{n}}\right]$$

$$\leq w_{1+A}(\delta_n)\left[1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{A}\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right]$$

olarak bulunur. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ ve $K = 1 + \sqrt{A}$ seçimleriyle

$$s_n \leq K w_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda (4.8) ve (4.9) ifadelerinden $C_f = M + K$ olarak alınırsa

$$|B_n^*(f;x) - f(x)| \leq C_f w_{1+A}\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise istenen eşitsizliktir.

Teorem 4.2.2

$A > 1$ olmak üzere $w(f;\delta_n)$, f fonksiyonunun $[0, A]$ aralığı üzerinde tanımlı tam süreklilik modülü olsun. $\widetilde{D_2}$ Tanım 2.4.1 de verilen bölge olmak üzere $f \in C(\widetilde{D_2})$ fonksiyonu $[0, A]$ aralığı üzerinde, yeterince büyük n ler için

$$\left|B_{n,m}^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq 3A\left[w_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\right]$$

eşitsizliğini sağlar(Izgi and Buyukyazici 2006).

Kanıt

$x, y \in [0, A]$ olmak üzere

$$B_{n,m}^{**}(f;x,y) - f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n, \frac{j}{m}c_m\right) - f(x,y)\right].$$

$$.\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[f\left(\frac{k}{n}b_n, \frac{j}{m}c_m\right) - f\left(\frac{k}{n}b_n, y\right) + f\left(\frac{k}{n}b_n, y\right) - f(x,y)\right].$$

$$.\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

eşitliği geçerlidir. Mutlak değere geçilerek

$$\left|B_{n,m}^{**}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m\right)\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{k}{n}b_n,y\right)\right|\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,y\right)-f(x,y)\right|\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w_2\left(f;\left|\frac{j}{m}c_m-y\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

bulunur. Toplamın ilk terimi $\psi_2(x,y)$, ikinci terimi olan ifade ise $\psi_1(x,y)$ olarak adlandırılırsa,

$$\psi_1(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{b_n}\right)^{m-j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n-x\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

eşitliğine ulaşılır. $x,t\in[0,A]$ ve $A>1$ olduğundan süreklilik modülü özelliklerinden ve Cauchy- Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\psi_1(x,y)\leq w_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n-x\right)^2\left[\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]\right]^{1/2}\right\}$$

$$\psi_1(x,y)\leq w_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}}\right\}$$

$$\leq w_1(f;\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{Ab_n}{n}}\right\}$$

elde edilir. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ olarak seçilirse,

$$\psi_1(x,y) \leq w_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\{1+\sqrt{A}\}$$

$$< 2Aw_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \tag{4.10}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan süreklilik modülü özellikleri kullanılarak $\psi_2(x,y)$ ifadesi hesaplanırsa;

$$\psi_2(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_2\left(f;\left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$\leq w_2(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\binom{n}{k}\binom{m}{j}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\right]\right\}$$

$$= w_2(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\right]\right\}$$

$$\leq w_2(f;\delta_m)\left\{1\right.$$
$$+\frac{1}{\delta_m}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}c_m\right)\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} y\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\right]\right\}$$

$$\leq w_2(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}2y\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $y \in [0,A]$ olduğundan,

$$\psi_2(x,y) \leq w_2(f;\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}2A\right\}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Yeterince büyük m ler için $\delta_m = \sqrt{\frac{c_m}{m}}$ olarak seçilirse;

$$\psi_2(x,y) < 3Aw_2\left(f;\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right) \tag{4.11}$$

ifadesine ulaşılır. (4.10) ve (4.11) eşitsizliklerinden

$$\left|B_{n,m}^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq 2Aw_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + 3Aw_2\left(f;\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$w_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f;\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right) < 2Aw_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + 3Aw_2\left(f;\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)$$

$$< 3A\left[w_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f;\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\right]$$

olduğundan

$$\left|B_{n,m}^{**}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq 3A\left[w_1\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f;\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\right]$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.2.3

$x,y,z \in [0,A]$ ve Tanım 2.5.1 de tanımlanan $B_{n,m,r}^{***}(f;x,y,z)$ polinomu yeterince büyük n ler için

$$\left|B_{n,m,r}^{***}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| \leq 2A\big(w_1(f,\delta_n) + w_2(f,\delta_m) + w_3(f,\delta_r)\big)$$

eşitsizliğini sağlar(Izgi and Buyukyazici 2006).

Kanıt

Polinomun tanımından

$$\left|B_{n,m,r}^{***}(f;x,y,z)-f(x,y,z)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,\frac{l}{r}d_r\right)-f(x,y,z)\right|\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}.$$

$$.\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,\frac{l}{r}d_r\right)-f\left(x,\frac{j}{m}c_m,z\right)+f\left(x,\frac{j}{m}c_m,z\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,z\right)-f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,z\right)-f(x,y,z)\right|.$$

$$.\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,z\right)-f\left(x,\frac{j}{m}c_m,z\right)\right|.$$

$$.\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(x,\frac{j}{m}c_m,z\right)-f(x,y,z)\right|.$$

$$.\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,\frac{l}{r}d_r\right)-f\left(\frac{k}{n}b_n,\frac{j}{m}c_m,z\right)\right|.$$

$$.\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_2\left(f;\left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_3\left(f;\left|\frac{l}{r}d_r - z\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \psi_1(x,y,z) + \psi_2(x,y,z) + \psi_3(x,y,z)$$

bulunur. Her biri ayrı ayrı hesaplanırsa ilk olarak $\psi_1(x,y,z)$ için

$$\psi_1(x,y,z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w_1\left(f;\left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

bulunur. $x \in [0, A]$ ve $A > 1$ olmak üzere $t = \frac{k}{n} b_n$ alınırsa

$$|f(t) - f(x)| \leq w_1(f, \delta_n)\left(1 + \tfrac{|t-x|}{\delta_n}\right)$$

olduğundan Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak;

$$\psi_1(x,y,z) \leq w_1(f,\delta_n)\left\{1 + \frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 \binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\leq w_1(f,\delta_n)\left\{1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{x(b_n - x)}{n}}\right\}$$

$$\leq w_1(f,\delta_n)\left\{1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{xb_n}{n}}\right\}$$

$$\leq w_1(f,\delta_n)\left\{1 + \frac{1}{\delta_n}\sqrt{A\frac{b_n}{n}}\right\}$$

bulunur. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ seçilirse;

$$\psi_1(x,y,z) \leq w_1\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\{1 + \sqrt{A}\}$$

$$\leq 2Aw_1\left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

olacaktır. Benzer şekilde $\psi_2(x,y,z)$ için de

$$\psi_2(x,y,z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_2\left(f; \left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1 - \frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{m} w_2\left(f; \left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right) \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} \left(\frac{z}{d_r}\right)^l \left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^{m} w_2\left(f; \left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right) \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} w_2\left(f; \left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right) \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}$$

eşitliği geçerlidir. $y \in [0, A]$ ve $A > 1$ olmak üzere $t = \frac{j}{m}c_m$ alınırsa yeterince büyük n ler için

$$|f(t) - f(y)| \leq w_2(f, \delta_m)\left(1 + \frac{|t-y|}{\delta_m}\right)$$

eşitsizliği geçerli olduğundan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\psi_2(x,y,z) \leq w_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\left[\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{j}{m}c_m - y\right)^2 \binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\leq w_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\sqrt{\frac{y(c_m - y)}{m}}\right\}$$

$$\leq w_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\sqrt{\frac{yc_m}{m}}\right\}$$

$$\leq w_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\sqrt{A\frac{c_m}{m}}\right\}$$

bulunur. Burada $\delta_m = \sqrt{\frac{c_m}{m}}$ olarak seçilirse;

$$\psi_2(x,y,z) \leq w_2\left(f, \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\{1 + \sqrt{A}\}$$

$$\leq 2Aw_2\left(f,\sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Son olarak $\psi_3(x,y,z)$ için

$$\psi_3(x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}w_3\left(f;\left|\frac{l}{r}d_r-z\right|\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\binom{r}{l}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}.$$

$$.\sum_{l=0}^{r}w_3\left(f;\left|\frac{l}{r}d_r-z\right|\right)\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(\frac{y}{c_m}\right)^j\left(1-\frac{y}{c_m}\right)^{m-j}\sum_{l=0}^{r}w_3\left(f;\left|\frac{l}{r}d_r-z\right|\right)\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

$$=\sum_{l=0}^{r}w_3\left(f;\left|\frac{l}{r}d_r-z\right|\right)\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}$$

bulunur. $A>1$ olmak üzere $z,t\in[0,A]$ için $t=\frac{l}{r}d_r$ alınırsa

$$|f(t)-f(z)|\leq w_3(f,\delta_r)\left(1+\frac{|t-z|}{\delta_r}\right)$$

yazılabileceğinden Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak;

$$\psi_3(x,y,z)\leq w_3(f,\delta_r)\left\{1+\frac{1}{\delta_r}\left[\sum_{l=0}^{r}\left(\frac{l}{r}d_r-z\right)^2\binom{r}{l}\left(\frac{z}{d_r}\right)^l\left(1-\frac{z}{d_r}\right)^{r-l}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\leq w_3(f,\delta_r)\left\{1+\frac{1}{\delta_r}\sqrt{\frac{z(d_r-z)}{r}}\right\}$$

$$\leq w_3(f,\delta_r)\left\{1+\frac{1}{\delta_r}\sqrt{\frac{zd_r}{r}}\right\}$$

$$\leq w_3(f,\delta_r)\left\{1+\frac{1}{\delta_r}\sqrt{A\frac{d_r}{r}}\right\}$$

elde edilir. Burada $\delta_r=\sqrt{\frac{d_r}{r}}$ seçilirse;

$$\psi_3(x,y,z)\leq w_3\left(f,\sqrt{\frac{d_r}{r}}\right)\{1+\sqrt{A}\}$$

$$\leq 2Aw_3\left(f,\sqrt{\frac{d_r}{r}}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla

$$\left|B^{***}_{n,m,r}(f;x,y,z)-f(x,y,z)\right|\leq 2A\big(w_1(f,\delta_n)+w_2(f,\delta_m)+w_3(f,\delta_r)\big)$$

eşitsizliği geçerli olup böylece kanıt tamamlanmış olur.

4.3 q- BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Teorem 4.3.1

$0<q<1$, $\lim_{n\to\infty} q=1$, $\lim_{n\to\infty} q^n=c$ $(c\neq 1)$ olmak üzere $f\in C[0,1]$ için Tanım 3.1.1 de verilen q −Bernstein polinomlarının süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\|B_n(f;q;x)-f(x)\|_{C[0,1]}\leq\frac{3}{2}w\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

olarak hesaplanır(Philips 1996).

Kanıt

Kanıt Popoviciu tekniği ile yapılacaktır(Popoviciu 1935).

Polinomun tanımından $0\leq x\leq 1$ için

$$B_n(f;q;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x),$$

olduğundan

$$B_n(1;q;x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla doğrusallıktan

$$|B_n(f;q;x)-f(x)|$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)-f(x)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right|$$

elde edilir. Burada

$\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\geq 0, x^k\geq 0$ ve

$$\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\geq 0$$

eşitsizlikleri yardımıyla üçgen eşitsizliği de kullanılarak

$$|B_n(f;q;x)-f(x)|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \qquad (4.12)$$

bulunur. Süreklilik modülü özelliklerinden;

$$\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right|\leq\left(\frac{\frac{[k]_q}{[n]_q}-x}{\delta}+1\right)w(f;\delta)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu sonuç (4.12) de yerine yazılarak doğrusal pozitif operatörlerin monotonluğu kullanılırsa

$$|B_n(f;q;x)-f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\frac{[k]_q}{[n]_q}-x}{\delta}+1\right)w(f;\delta)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}w(f;\delta)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$
$$+\sum_{k=0}^{n}w(f;\delta)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned}|B_n(f;q;x)-f(x)|&\\ &\leq w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right.\\ &\left.+\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right\}\\ &=w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)+B_n(1;q;x)\right\}\end{aligned}$$

olup açıkca

$$\begin{aligned}|B_n(f;q;x)-f(x)|&\\ &\leq w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)+1\right\}\end{aligned}\tag{4.13}$$

eşitsizliği geçerlidir. (4.13) de

$$T=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

tanımlaması yapılırsa

$$T=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\left(\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{1/2}.$$

$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{1/2}$$

bulunur. Bu eşitliğe Cauchy- Schwartz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$T\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{1/2}$$

elde edilir. Buradan

$$T\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{1/2}B_n(1;q;x)$$

eşitsizliği yazılabileceğinden

$$T\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{1/2}$$

bulunur. Bu sonuç (4.13) de yerine yazılırsa

$$|B_n(f;q;x)-f(x)|$$
$$\le w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{1/2}+1\right\}$$

eşitsizliği geçerli olur. Diğer taraftan

$$\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2=\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}-2x\frac{[k]_q}{[n]_q}+x^2$$

eşitliği kullanılarak

$$|B_n(f;q;x)-f(x)|$$

$$\leq w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}-2x\frac{[k]_q}{[n]_q}+x^2\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$= w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)+x^2\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^sx)\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$= w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(B_n(t^2;q;x)-2xB_n(t;q;x)+x^2B_n(1;q;x)\right)^{1/2}+1\right\}$$

bulunur. Böylece

$$|B_n(f;q;x)-f(x)|\leq w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}-2x.x+x^2.1\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$= w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\frac{x(1-x)}{[n]_q}\right)^{1/2}+1\right\}$$

olacaktır. $x\in[0,1]$ için

$$\max_{0\leq x\leq 1}\left\{\left(x(1-x)\right)^{1/2}\right\}=\frac{1}{2}$$

eşitliğinden kolayca

$$\|B_n(f;q;x)-f(x)\|_{C[0,1]}\leq w(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\frac{1}{2}+1\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\delta=\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}$ ve $q=q_n$ seçimiyle

$$\|B_n(f;q;x)-f(x)\|_{C[0,1]} \le \frac{3}{2} w\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem4.3.2 de verilecek olan yaklaşım hızı hesabı için $f: I^2 \to \mathbb{R}$ ve $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$w(\delta_1,\delta_2) = sup\{|f(x,y)-f(x',y')|\ (x,y)\in I^2, (x',y')\in I^2, |x-x'|<\delta_1, |y-y'| < \delta_2\}$$

şeklinde tanımlı süreklilik modülü tanımı kullanılacaktır. Açıkça $w(\delta_1,\delta_2)$ monoton artan bir fonksiyondur.

Teorem 4.3.2

$f: I^2 \to \mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Süreklilik modülü $w(f;\delta_1,\delta_2)$ kullanılarak Tanım 3.2.1 de verilen iki değişkenli q- Bernstein polinomunun yaklaşım hızı için

$$\left\|B_{n,m}(f)-f\right\| \le \frac{9}{4} w\left(\frac{1}{\sqrt{[n]_q}},\frac{1}{\sqrt{[m]_q}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir(Barbosu 1999).

Kanıt

Polinomun tanımından

$$\left|B_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2;x,y)-f(x,y)\right| = \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)-f(x,y)\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$\cdot\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$\le \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left|f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)-f(x,y)\right|\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1}y^{k_2}.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right) \tag{4.14}$$

yazılabilir. Süreklilik modülünün monotonluğundan

$$\left|f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\right)-f(x,y)\right|\leq w\left(\left|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}-x\right|,\left|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}-y\right|\right)$$

$$\leq\left(\left|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}-x\right|\sqrt{[n_1]_{q_1}}+1\right)\left(\left|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}-y\right|\sqrt{[n_2]_{q_2}}+1\right)w\left(\frac{1}{[n_1]_{q_1}},\frac{1}{[n_2]_{q_2}}\right) \tag{4.15}$$

olacaktır. (4.15) eşitsizliği (4.14)' da yerine yazılır ve

$$K=w\left(\frac{1}{[n_1]_{q_1}},\frac{1}{[n_2]_{q_2}}\right)\left(\sqrt{[n_1]_{q_1}}\sum_{k_1=0}^{n_1}\left|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}-1\right|\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)+1\right).$$

$$.\left([n_2]_{q_2}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}-1\right|\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)+1\right)$$

tanımlaması yapılırsa

$$\left|B_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2;x,y)-f(x,y)\right|\leq K$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Cauchy- Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}-x\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^2=$$

$$\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\left|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}-x\right|\left(\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^{1/2}\left(\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\leq\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}-x\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)$$

$$=\left\{B_{n_1}(e_2;q_1;x)-2xB_{n_1}(e_1;q_1;x)+x^2B_{n_1}(e_0;q_1;x)\right\}B_{n_1}(e_0;q_1;x)$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{[n_1]_q} - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{x(1-x)}{[n_1]_q} \leq \frac{1}{4[n_1]_q} \tag{4.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\left(\sum_{k_2=0}^{n_2} \left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}} - y\right) \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)\right)^2 =$$

$$\left(\sum_{k_2=0}^{n_2} \left|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}} - y\right| \left(\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)\right)^{1/2} \left(\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} \left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}} - y\right)^2 \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)\right) \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} y\right)\right)$$

$$= \left\{B_{n_2}(e_2; q_2; y) - 2xB_{n_2}(e_1; q_2; y) + y^2 B_{n_2}(e_0; q_2; y)\right\} B_{n_2}(e_0; q_2; y)$$

$$= y^2 + \frac{y(1-y)}{[n_2]_q} - 2y^2 + y^2$$

$$= \frac{y(1-y)}{[n_2]_q} \leq \frac{1}{4[n_2]_q} \tag{4.17}$$

olacaktır. (4.16) ve (4.17) değerleri K da yerine yazılırsa

$$\left|B_{n_1,n_2}(f; q_1, q_2; x, y) - f(x,y)\right|$$

$$\leq w\left(\frac{1}{[n_1]_q}, \frac{1}{[n_2]_q}\right) \left(\sqrt{[n_1]_{q_1}} \frac{1}{2\sqrt{[n_1]_{q_1}}} + 1\right) \left(\sqrt{[n_2]_{q_2}} \frac{1}{2\sqrt{[n_2]_{q_2}}} + 1\right)$$

$$= \frac{9}{4} w\left(\frac{1}{[n_1]_q}, \frac{1}{[n_2]_q}\right)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

4.4 q -BERNSTEIN -CHLDOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Teorem 4.4.1

$f \in C[0,\infty)$ fonksiyon olsun. Süreklilik modülü $w(f;\delta)$ kullanılarak Tanım 3.3.1. de verilen tek değişkenli q- Bernstein- Chldowsky polinomunun yaklaşım hızı için

$$\left|\breve{B}_n^{q_n}(f;q_n;x)-f(x)\right| \leq 2w\left(f,\sqrt{\frac{x(b_n-x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir(Karsli and Gupta 2008).

Kanıt

Tanım 3.3.1 de verilen $\breve{B}_n^{q_n}(f;q_n;x)$ kullanılarak

$$\left|\breve{B}_n^{q_n}(f;q_n;x)-f(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)-f(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n\right)-f(x)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x}{\delta}+1\right| w(f,\delta)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$= w(f,\delta)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$
$$+\frac{w(f,\delta)}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)$$

$$= w(f,\delta)+\frac{w(f,\delta)}{\delta}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}b_n-x\right)^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-{q_n}^s\frac{x}{b_n}\right)\right\}^{1/2}$$

$$= w(f,\delta) + \frac{w(f,\delta)}{\delta}\left\{\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}\right\}^{1/2}$$

Eğer $\delta = \frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}$ seçilirse,

$$\left|\breve{B}_n^{q_n}(f; q_n; x) - f(x)\right| \leq 2w\left(f, \sqrt{\frac{x(b_n - x)}{[n]_{q_n}}}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4.2

Teorem 3.4.1'de tanımlı olan $\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f; x, y)$ iki değişkeli q-Bernstein-Chldowsky polinomu için süreklilik modülü;

$f \in C(D_{a,b})$ olsun,

$$\left|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f; x, y) - \mathrm{f}(x, y)\right| \leq 2\left[w^{(1)}\left(f; \sqrt{a\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}}}\right) + w^{(2)}\left(f; \sqrt{b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right)\right]$$

$$\left|\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f; x, y) - \mathrm{f}(x, y)\right| \leq 2w\left(f; \sqrt{a\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}} + b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right)$$

eşitsizlikleri geçerlidir(Buyukyazici 2009).

Kanıt

$$B_{n_1}^x(f; q_1; x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1}x\right) = 1$$

ve

$$B_{n_2}^y(f; q_2,; y) = \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2}y\right) = 1$$

eşitlikleri kullanılacaktır.

$$\breve{B}_{n,m}^{q_n,q_m}(f;x,y)-f(x,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)-f(x,y)\right\}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$\cdot\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\{f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)-f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y\right)+f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y\right)\right.$$

$$\left.-f(x,y)\right\}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$\cdot\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right)-f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y\right)\right|\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$\cdot\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y\right)-f(x,y)\right|\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$\cdot\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w^{(2)}\left(f;\left|\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m-y\right|\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$\cdot\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w^{(1)}\left(f;\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n - x\right|\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$= \Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y)$$

$\Phi_1(x,y)$ ele alınırsa Teorem 3.4.1'den ve süreklilik modülü özelliklerinden

$$\Phi_1(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w^{(2)}\left(f;\left|\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m - y\right|\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j.$$

$$.\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} w^{(2)}\left(f;\left|\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m - y\right|\right)\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

Cauchy -Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\Phi_1(x,y) \le w^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\left[\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m - y\right)^2\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

Teorem 3.4.1 kullanılarak ve kareyi genişletilerek

$$\Phi_1(x,y) \le w^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\sqrt{\frac{y(\beta_m - y)}{[m]_{q_m}}}\right\}$$

$$\le w^{(2)}(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\sqrt{b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right\}$$

$\delta_m = \sqrt{b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}}$ seçilirse

$$\Phi_1(x,y) \leq 2w^{(2)}\left(f; \sqrt{b\frac{\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Aynı şekilde

$$\Phi_2(x,y) \leq 2w^{(1)}\left(f; \sqrt{a\frac{\alpha_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

eşitsizliğinide elde edilir.

Teorem 4.4.3

Her $f \in D_{\mathfrak{Z}}$ olsun. Tanım 3.6.1 de verilen $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z)$ polinomu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

a) $\left|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| \leq 3\left[w_1\left(f; \sqrt{\frac{a\alpha_n}{[n]_{q_n}}}\right) + w_2\left(f; \sqrt{\frac{b\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right) + \left(f; \sqrt{\frac{c\gamma_r}{[r]_{q_r}}}\right)\right]$

b) $\left|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| \leq 3w\left(f; \sqrt{\frac{a\alpha_n}{[n]_{q_n}}} + \sqrt{\frac{b\beta_m}{[m]_{q_m}}} + \sqrt{\frac{c\gamma_r}{[r]_{q_r}}}\right)$

Kanıt

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n\right) = \sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m\right) = \sum_{l=0}^{r} f\left(\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\right)$$

bu eşitlikleri kullanarak $\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z)$ ve $f(x,y,z)$ arasındaki fark hesaplanır.

$$\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left[f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n, \frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m, \frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\right) - f(x,y,z)\right].$$

$$\cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m} \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r} \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k \left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j \left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l \prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1 - q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right) \prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1 - q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right) \prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1 - q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left[f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m,\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\right)-f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y,z\right)+f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y,z\right)\right.$$

$$\left.-f(x,y,z)\right].$$

$$\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

sonra

$$\left|\tilde{B}_{n,m,r}^{q_n,q_m,q_r}(f;x,y,z)-f(x,y,z)\right|\le$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m,\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r\right)-f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y,z\right)\right|.$$

$$\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}\left|f\left(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n,y,z\right)-f(x,y,z)\right|.$$

$$\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}w_2\left(f;\left|\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m-y\right|\right).$$

$$\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r}w_1\left(f;\left|\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\alpha_n-x\right|\right).$$

$$\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix}r\\l\end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_3\left(f;\left|\frac{[l]_{q_r}}{[r]_{q_r}}\gamma_r - z\right|\right).$$

$$\cdot\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

$$=\breve{\psi}_2(x,y,z)+\breve{\psi}_1(x,y,z)+\breve{\psi}_3(x,y,z)$$

Önerme 3.4.1 (i) ve süreklilik modülü özelliklerinden

$$\breve{\psi}_2(x,y,z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{r} w_2\left(f;\left|\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m - y\right|\right).$$

$$\cdot\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_{q_r}\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^k\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\left(\frac{z}{\gamma_r}\right)^l\prod_{s_1=0}^{n-k-1}\left(1-q_n^{s_1}\frac{x}{\alpha_n}\right)\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\prod_{s_3=0}^{r-l-1}\left(1-q_r^{s_3}\frac{z}{\gamma_r}\right)$$

olduğunu biliniyor.

$$=\sum_{j=0}^{m} w_2\left(f;\left|\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m - y\right|\right)\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)$$

$$\leq w_2(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\left[\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{[j]_{q_m}}{[m]_{q_m}}\beta_m - y\right)^2\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q_m}\left(\frac{y}{\beta_m}\right)^j\prod_{s_2=0}^{m-j-1}\left(1-q_m^{s_2}\frac{y}{\beta_m}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

Karesi alınmış terimler genişletilerek ve Lemma2.2(i)(iii)(v) kullanarak

$$\breve{\psi}_2(x,y,z)\leq w_2(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\sqrt{\frac{y(\beta_m-y)}{[m]_{q_m}}}\right\}$$

$$\leq w_2(f;\delta_m)\left\{1+\frac{1}{\delta_m}\sqrt{\frac{b\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right\}$$

olur. Burada $\delta_m=\sqrt{\frac{b\beta_m}{[m]_{q_m}}}$ seçilirse

$$\breve{\psi}_2(x,y,z) \le 3w_2\left(f;\sqrt{\frac{b\beta_m}{[m]_{q_m}}}\right)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\breve{\psi}_1(x,y,z) \le 3w_1\left(f;\sqrt{\frac{a\alpha_n}{[n]_{q_n}}}\right)$$

ve

$\breve{\psi}_3(x,y,z) \le 3w_3\left(f;\sqrt{\frac{c\gamma_r}{[r]_{q_r}}}\right)$ eşitsizliklerini elde edilir.

$A \coloneqq \max\{a,b,c\}$ tanımlanırsa

$$\left|B_{n,m,r}(f;x,y,z) - f(x,y,z)\right| \le 3\mathrm{A}\big(w_1(f,\delta_n) + w_2(f,\delta_m) + w_3(f,\delta_r)\big)$$

elde edilir.

4.5 NÜMERİK HESAPLAMALAR

Aşağıdaki örnekte Tanım 2.5.1 te verilen üç değişkenli Bernstein Chlodowsky polinomları için hata hesabı verilmiştir.

Örnek 4.5.1 $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2+\exp(7)}$ fonksiyonunun

$b_n = \sqrt{n}\,,\ c_m = \sqrt[3]{m}\,,\ d_r = \sqrt[4]{r} + 1$ için hata payının hesaplanması verilmiştir.

Aşağıda hata hesabına dair bir program çıktısı örneği verilmiştir.

```
> restart;
f:=(x,y,z)->((x^2)+(y^2)+(z^2))/(2+exp(7)):
n:=1 : m:=1 : r:=1:
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m; r:=10*r;
beta(n):=sqrt(n):
```

```
beta(m):=surd(m,3):

beta(r):=surd(r,4)+1:

delta(n):=evalf(simplify(sqrt(beta(n)/n)));

delta(m):=evalf(simplify(sqrt(beta(m)/m)));

delta(r):=evalf(simplify(sqrt(beta(r)/r)));

omega1(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1,y=0..1,z=0..1,h=0..delta(n)))):

omega2(f,delta(m)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1,y=0..1,z=0..1,h=0..delta(m)))):

omega3(f,delta(r)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1,y=0..1,z=0..1,h=0..delta(r)))):

errorB:=2*(omega1(f,delta(n))+omega2(f,delta(m))+omega3(f,delt
a(r)));

end do;
```

$$n := 10$$

$$m := 10$$

$$r := 10$$

$$\beta(10) := \sqrt{10}$$

$$\beta(10) := 10^{1/3}$$

$$\beta(10) := 10^{1/4} + 1$$

$$\delta(10) := 0.5270938636$$

$$\delta(10) := 0.5270938636$$

$$\delta(10) := 0.5270938636$$

$$\omega 1(f, 0.5270938636) := 0.003637289640$$

$$\omega 2(f, 0.5270938636) := 0.003637289640$$

$$\omega 3(f, 0.5270938636) := 0.003637289640$$

$$errorB := 0.02182373784$$

$$n := 100$$

$$m := 100$$

$$r := 100$$

$$\beta(100) := 10$$

$$\beta(100) := 10^{2/3}$$

$$\beta(100) := \sqrt{10} + 1$$

$$\delta(100) := 0.2040166086$$

$$\delta(100) := 0.2040166086$$

$$\delta(100) := 0.2040166086$$

$$\omega 1(f, 0.2040166086) := 0.001227860248$$

$$\omega 2(f, 0.2040166086) := 0.001227860248$$

$$\omega 3(f, 0.2040166086) := 0.001227860248$$

$$errorB := 0.007367161488$$

$$n := 1000$$

$$m := 1000$$

$$r := 1000$$

$$\beta(1000) := 10\sqrt{10}$$

$$\beta(1000) := 10$$

$$\beta(1000) := 10^{3/4} + 1$$

$$\delta(1000) := 0.08138435508$$

$$\delta(1000) := 0.08138435508$$

$$\delta(1000) := 0.08138435508$$

$$\omega 1(f, 0.08138435508) := 0.0004625532795$$

$$\omega 2(f, 0.08138435508) := 0.0004625532795$$

$$\omega 3(f, 0.08138435508) := 0.0004625532795$$

$$errorB := 0.002775319677$$

$$n := 10000$$

$$m := 10000$$

$$r := 10000$$

$$\beta(10000) := 100$$

$$\beta(10000) := 10\ 10^{1/3}$$

$$\beta(10000) := 11$$

$$\delta(10000) := 0.03316624790$$

$$\delta(10000) := 0.03316624790$$

$$\delta(10000) := 0.03316624790$$

$$\omega 1(f, 0.03316624790) := 0.0001841356106$$

$$\omega 2(f, 0.03316624790) := 0.0001841356106$$

$$\omega 3(f, 0.03316624790) := 0.0001841356106$$

$$errorB := 0.001104813664$$

$$n := 100000$$

$$m := 100000$$

$$r := 100000$$

$$\beta(100000) := 100\sqrt{10}$$

$$\beta(100000) := 10\ 10^{2/3}$$

$$\beta(100000) := 10\ 10^{1/4} + 1$$

$$\delta(100000) := 0.01370503342$$

$$\delta(100000) := 0.01370503342$$

$$\delta(100000) := 0.01370503342$$

$$\omega 1(f, 0.01370503342) := 0.00007536062762$$

$$\omega 2(f, 0.01370503342) := 0.00007536062762$$

$$\omega 3(f, 0.01370503342) := 0.00007536062762$$

$$errorB := 0.0004521637656$$

$$n := 1000000$$

$$m := 1000000$$

$$r := 1000000$$

$$\beta(1000000) := 1000$$

$$\beta(1000000) := 100$$

$$\beta(1000000) := 10\sqrt{10} + 1$$

$$\delta(1000000) := 0.005711635195$$

$$\delta(1000000) := 0.005711635195$$

$$\delta(1000000) := 0.005711635195$$

$$\omega 1(f, 0.005711635195) := 0.00003128221576$$

$$\omega 2(f, 0.005711635195) := 0.00003128221576$$

$$\omega 3(f, 0.005711635195) := 0.00003128221576$$

$$errorB := 0.0001876932945$$

$$n := 10000000$$

$$m := 10000000$$

$$r := 10000000$$

$$\beta(10000000) := 1000\sqrt{10}$$

$$\beta(10000000) := 100\ 10^{1/3}$$

$$\beta(10000000) := 10\ 10^{3/4} + 1$$

$$\delta(10000000) := 0.002392365618$$

$$\delta(10000000) := 0.002392365618$$

$$\delta(10000000) := 0.002392365618$$

$$\omega 1(f, 0.002392365618) := 0.00001308113071$$

$$\omega 2(f, 0.002392365618) := 0.00001308113071$$

$$\omega 3(f, 0.002392365618) := 0.00001308113071$$

$$errorB := 0.00007848678426$$

$$n := 100000000$$

$$m := 100000000$$

$$r := 100000000$$

$$\beta(100000000) := 10000$$

$$\beta(100000000) := 100\ 10^{2/3}$$

$$\beta(100000000) := 101$$

$$\delta(100000000) := 0.001004987562$$

$$\delta(100000000) := 0.001004987562$$

$$\delta(100000000) := 0.001004987562$$

$$\omega 1(f, 0.001004987562) := 0.000005491328316$$

$$\omega 2(f, 0.001004987562) := 0.000005491328316$$

$$\omega 3(f, 0.001004987562) := 0.000005491328316$$

$$errorB := 0.00003294796989$$

$$n := 1000000000$$

$$m := 1000000000$$

$$r := 1000000000$$

$$\beta(1000000000) := 10000\sqrt{10}$$

$$\beta(1000000000) := 1000$$

$$\beta(1000000000) := 100\, 10^{1/4} + 1$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004228805280$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004228805280$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004228805280$$

$$\omega 1(f, 0.0004228805280) := 0.000002309979116$$

$$\omega 2(f, 0.0004228805280) := 0.000002309979116$$

$$\omega 3(f, 0.0004228805280) := 0.000002309979116$$

$$errorB := 0.00001385987470$$

n,m,r	$f(x,y,z)$ fonksiyonun tam süreklilik modülü için hata payı
10	0.0218237378
10^2	0.0073671615
10^3	0.0027753196
10^4	0.0011048136
10^5	0.0004521637
10^6	0.0001876932
10^7	0.0000784867
10^8	0.0000329479
10^9	0.0000138598

Tablo 4.1 $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2+\exp(7)}$ fonksiyonunun hata hesabı.

Aşağıda ki örnekte Tanım 3.6.1 de verilen üç değişkenli q-Bernstein Chlodowsky polinomları için hata hesabı verilmiştir

Örnek 4.5.2. $f(x,y,z)=\frac{xy+10-z}{10}$ fonksiyonunun $\alpha_n=\sqrt{n}$, $\beta_m=\sqrt[3]{m}$, $\gamma_r=\sqrt[4]{r}+1$ ve $q=1$ için hata payının hesaplanması verilmiştir.

Aşağıda hata hesabına dair bir program çıktısı örneği verilmiştir.

```
> restart;
f:=(x,y,z)->((x*y)+10-z)/(10):q:=1:
n:=1 : m:=1 : r:=1:
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m; r:=10*r;
beta(n):=sqrt(n):
beta(m):=surd(m,3):
beta(r):=surd(r,4)+1:nq:=(simplify(sum(q^o,o=0..(n-1)))):
delta(n):=evalf(simplify(sqrt(beta(n)/nq)));
delta(m):=evalf(simplify(sqrt(beta(m)/nq)));
delta(r):=evalf(simplify(sqrt(beta(r)/nq)));
omega1(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1,y=0..1,z=0..1,h=0..delta(n)))):
omega2(f,delta(m)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1,y=0..1,z=0..1,h=0..delta(m)))):
omega3(f,delta(r)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h,z+h)-f(x,y,z))),x=0..1,y=0..1,z=0..1,h=0..delta(r)))):
errorB:=3*(omega1(f,delta(n))+omega2(f,delta(m))+omega3(f,delt
a(r)));
end do;
```

$$n := 10$$

$$m := 10$$

$$r := 10$$

$$\beta(10) := \sqrt{10}$$

$$\beta(10) := 10^{1/3}$$

$$\beta(10) := 10^{1/4} + 1$$

$$nq := 10$$

$$\delta(10) := 0.5270938636$$

$$\delta(10) := 0.5270938636$$

$$\delta(10) := 0.5270938636$$

$$\omega 1(f, 0.5270938636) := 0.08049218046$$

$$\omega 2(f, 0.5270938636) := 0.08049218046$$

$$\omega 3(f, 0.5270938636) := 0.08049218046$$

$$errorB := 0.7244296242$$

$$n := 100$$

$$m := 100$$

$$r := 100$$

$$\beta(100) := 10$$

$$\beta(100) := 10^{2/3}$$

$$\beta(100) := \sqrt{10} + 1$$

$$nq := 100$$

$$\delta(100) := 0.2040166086$$

$$\delta(100) := 0.2040166086$$

$$\delta(100) := 0.2040166086$$

$$\omega 1(f, 0.2040166086) := 0.02456393852$$

$$\omega 2(f, 0.2040166086) := 0.02456393852$$

$$\omega 3(f, 0.2040166086) := 0.02456393852$$

$errorB := 0.2210754467$

$n := 1000$

$m := 1000$

$r := 1000$

$\beta(1000) := 10\sqrt{10}$

$\beta(1000) := 10$

$\beta(1000) := 10^{3/4} + 1$

$nq := 1000$

$\delta(1000) := 0.08138435508$

$\delta(1000) := 0.08138435508$

$\delta(1000) := 0.08138435508$

$\omega 1(f, 0.08138435508) := 0.008800776837$

$\omega 2(f, 0.08138435508) := 0.008800776837$

$\omega 3(f, 0.08138435508) := 0.008800776837$

$errorB := 0.07920699153$

$n := 10000$

$m := 10000$

$r := 10000$

$\beta(10000) := 100$

$\beta(10000) := 10\ 10^{1/3}$

$\beta(10000) := 11$

$nq := 10000$

$\delta(10000) := 0.03316624790$

$$\delta(10000) := 0.03316624790$$

$$\delta(10000) := 0.03316624790$$

$$\omega 1(f, 0.03316624790) := 0.003426624790$$

$$\omega 2(f, 0.03316624790) := 0.003426624790$$

$$\omega 3(f, 0.03316624790) := 0.003426624790$$

$$errorB := 0.03083962311$$

$$n := 100000$$

$$m := 100000$$

$$r := 100000$$

$$\beta(100000) := 100\sqrt{10}$$

$$\beta(100000) := 10\,10^{2/3}$$

$$\beta(100000) := 10\,10^{1/4} + 1$$

$$nq := 100000$$

$$\delta(100000) := 0.01370503342$$

$$\delta(100000) := 0.01370503342$$

$$\delta(100000) := 0.01370503342$$

$$\omega 1(f, 0.01370503342) := 0.001389286136$$

$$\omega 2(f, 0.01370503342) := 0.001389286136$$

$$\omega 3(f, 0.01370503342) := 0.001389286136$$

$$errorB := 0.01250357522$$

$$n := 1000000$$

$$m := 1000000$$

$$r := 1000000$$

$$\beta(1000000) := 1000$$

$$\beta(1000000) := 100$$

$$\beta(1000000) := 10\sqrt{10} + 1$$

$$nq := 1000000$$

$$\delta(1000000) := 0.005711635195$$

$$\delta(1000000) := 0.005711635195$$

$$\delta(1000000) := 0.005711635195$$

$$\omega 1(f, 0.005711635195) := 0.0005744257972$$

$$\omega 2(f, 0.005711635195) := 0.0005744257972$$

$$\omega 3(f, 0.005711635195) := 0.0005744257972$$

$$errorB := 0.005169832176$$

$$n := 10000000$$

$$m := 10000000$$

$$r := 10000000$$

$$\beta(10000000) := 1000\sqrt{10}$$

$$\beta(10000000) := 100\,10^{1/3}$$

$$\beta(10000000) := 10\,10^{3/4} + 1$$

$$nq := 10000000$$

$$\delta(10000000) := 0.002392365618$$

$$\delta(10000000) := 0.002392365618$$

$$\delta(10000000) := 0.002392365618$$

$$\omega 1(f, 0.002392365618) := 0.0002398089031$$

$$\omega 2(f, 0.002392365618) := 0.0002398089031$$

$$\omega 3(f, 0.002392365618) := 0.0002398089031$$

$$errorB := 0.002158280128$$

$$n := 100000000$$

$$m := 100000000$$

$$r := 100000000$$

$$\beta(100000000) := 10000$$

$$\beta(100000000) := 100\, 10^{2/3}$$

$$\beta(100000000) := 101$$

$$nq := 100000000$$

$$\delta(100000000) := 0.001004987562$$

$$\delta(100000000) := 0.001004987562$$

$$\delta(100000000) := 0.001004987562$$

$$\omega 1(f, 0.001004987562) := 0.0001005997562$$

$$\omega 2(f, 0.001004987562) := 0.0001005997562$$

$$\omega 3(f, 0.001004987562) := 0.0001005997562$$

$$errorB := 0.0009053978058$$

$$n := 1000000000$$

$$m := 1000000000$$

$$r := 1000000000$$

$$\beta(1000000000) := 10000 \sqrt{10}$$

$$\beta(1000000000) := 1000$$

$$\beta(1000000000) := 100\, 10^{1/4} + 1$$

$$nq := 1000000000$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004228805280$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004228805280$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004228805280$$

$$\omega 1(f, 0.0004228805280) := 0.00004230593559$$

$$\omega 2(f, 0.0004228805280) := 0.00004230593559$$

$$\omega 3(f, 0.0004228805280) := 0.00004230593559$$

$$errorB := 0.0003807534204$$

n, m, r	$f(x,y,z)$ fonksiyonun tam q-süreklilik modülü için hata payı
10	0.7244296242
10^2	0.2210754467
10^3	0.0792069915
10^4	0.0308396231
10^5	0.0125035752
10^6	0.0051698321
10^7	0.0021582801

Tablo 4.2 $f(x,y,z) = \frac{xy+10-z}{10}$ fonksiyonunun hata hesabı.

SONUÇ

Bu tezde tek ve iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein polinomları ile tek, iki ve üç değişkenli Bernstein –Chlodowsky polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Daha sonra bu polinomların q- versiyonları verilerek yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

Son olarak Bernstein, Bernstein –Cholodowsky polinomlarının ve bu polinomların q-versiyonlarının yaklaşım hızları süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile gösterilmiştir.

Bu çalışma literatürde yer alan operatörler için q- genelleme ve bu operatörlerle çok değişkenli fonksiyonlara yaklaşım çalışması yapacak araştırmacılara yol gösterici niteliktedir.

KAYNAKLAR

Andrews G E , Askey R, Roy R (1999) *Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1-70.

Barbasu D (2000) Some Generalized Bivariate Bernstein Operators, *Mathematical Notes, Miskolc*, 1(1):3-10.

Bernstein S N (1912) Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilities. *Comm. Soc. Math. Charkow Ser.*, 13(2):1-2.

Büyükyazıcı İ (2003) İki Değişkenli Bernstein Polinomlarının Yaklaşma Hızı Üzerine, *G. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi,* 11:165-174.

Büyükyazıcı İ and İbikli E (2006) İnverse Theorems for Bernstein- Chlodowsky Type Polynomials. *J.Math.Kyoto Univ.*, 46-1, 21-49.

Büyükyazıcı İ (2009) On The Approximations Properties of Two- dimensional q- Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Math. Commun.*, 14(2):255-269.

Bohman H (1952) On Approximation of Continuous and Analytic Functions. *Ark. Math.*, 2:43-46.

Chlodowsky I (1937) Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein, *Compositio Math.*, 4: 380–393.

Coşkun T (1997) *Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions*, Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1 V.47, Ankara, 175-191.

Coşkun E (2002) *Analiz I.* 1.Basım, ISBN: 975-6674-06-7, Alp Yayınevi, Ankara, 349 s.

Gadjiev A D (1976) On P.P. Korovkin type theorems. *Mathem. Zametki*, 20(5):995-998.

Gadjiev A D , Efendiev R O , İbikli E (1998) Generalized Bernstein- Chlodowsky Polynomials, *Rocky Mauntain Jaurnal of Mathematics*, 28(4).

Gadjiev A D and Ghorbanalizadeh A M (2010) Approximation properties of a new type Bernstein-Stancu polynomials of one and two variables. *Appl. Math. Compt.*, 216, 890–901.

Gazanfer A K (2015) Değişken Sınırlı Olan Dörtyüzlü (Üçgen Piramit) Bölgede Üç Değişkenli Sürekli Fonksiyonların Bernstein –Chlodowsky Polinomlarıyla Ağırlıklı Yaklaşımı. *Doktora Tezi,* Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Zonguldak, 147 s.

Goodman T N T , Oruç H , Phillips G M (1999) Convexity and Generalized Bernstein Polynomials, *Proc. Edinburg Math. Soc.* ,179-190.

Gonul Bilgin N and Cetinkaya M (submitted) Approximation By Three –Dimensional q – Bernstein –Chlodowsky Polynomials. *Sakarya University Journal of Science,* 1-13.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı.* A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 1-71.

Herzog F and Hill J D (1946) *The Bernstein Polynomials for Discantnuous Functions,* Amer, J. Math. 68:109-124.

İbikli E (2003) On approximation by Bernstein–Chlodowsky polynomials. *Math. Balkanica (N.S.)*, 17 (3–4): 259-265.

İbikli E (2005) On The Approximation for Functions of Two Variables on A Triangular Domain. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 35(5):1523-1531.

İzgi A and Büyükyazıcı İ (2006) On a Generalization of Bernstein- Chlodowsky Polynomials for Two Variables. *İnternational Mathematical Forum*, 21(1):1001-1015.

Karsli H and Gupta V (2008) Some Approximation Properties of q- Chlodowsky Operators, *Appiles Mathhematics and Computation* , 195:220-229.

Korovkin P P (1960) *Linear Operators and Approximation Theory.* Hindustan Publising Corb. (India) Delhi.

Lorenz G G (1953) *Bernstein Polynomials,* Totonto, 30-50.

Lupaş A (1987) A *q*- Anologue of The Bernstein Operator, Unıversity of Cluj- Napoca, *Seminar on Numerical and Statistical Calculus,* No.9.

Martinez F L (1989) Some Properties of Two- Dimensional Bernstein Polynomials. *Jaurnal of Approximation Theory* , 59:300-306.

Natanson I P (1964) *Constructive Function Theory Volume I Uniform Approximation.* Frederick Ungar Publising Company, New York, USA.

Oruç H and Phillips G M (1997) A Generalization of The Bernstein Polynomials, Dedicated to Philip J. Davis, *Proceedings of The Edinburg Mathematical Society,* 42:403-413.

Phillips G M (1996) *A de Casteljau algorithm for generalized Bernstein polynomials*, BIT 36:1 232-236.

Rudin W (1991) *Functional Analysis*, Kings sport Press, Inc. 6p., United States of America, 87-96.

Szasz O (1950) *Generalization of Bernstein's Polynomials to The Infinite Interval*. Journ. of Research of The Nat. Bureau of Stand, 45: 239-245.

Volkov V I. (1957) On The Convergence of Sequences of Linear Positive Operators in The Space of Two Variables. *Dokl. Akad. Nauk, SSSr(NS).* , 155: 17-19.

ÖZGEÇMİŞ

Merve ÇETİNKAYA 1992' de Karabük' de doğdu. İlk ve ortaöğretimini Karabük' de tamamladı. 2010 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde üniversite öğrenimine başladı. 2015 yılında "iyi" derece ile mezun olduktan sonra Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına kabul edildi.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Aydınlıkevler Mahallesi Doğa Sokak Burcu Sitesi A Blok No:12

Merkez/KARABÜK

Tel : 0(541)5956165

E-posta : merve.altiok5@gmail.com
