

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN CEBİRSEL REKONSTRÜKSİYON
TEKİNİNİN UYGULANMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UMUT ÖZCENGİZ

HAZİRAN 2018

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN CEBİRSEL REKONSTRÜKSİYON
TEKNİĞİNİN UYGULANMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut ÖZCENGİZ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

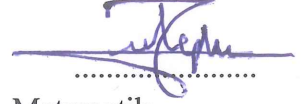
ZONGULDAK
Haziran 2018

KABUL:

Umut ÖZCENGİZ tarafından hazırlanan “Tau-p Dönüşümünün Tersine için Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniğinin Uygulanması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/06/2018

Danışman: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Murat DÜZ

Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylıyorum./....../2018



Doç. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”



Umut ÖZCENGİZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN CEBİRSEL REKONSTRÜKSİYON TEKİNİNİN UYGULANMASI

Umut ÖZCENGİZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Haziran 2018, 55 sayfa

$\tau, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx$$

integrallerinden $f(x, y)$ fonksiyonunun bulunması probleminin yaklaşık çözümü için Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği (ART-Algebraic Reconstruction Technique) araştırılmıştır. $R\{f(x, y)\}(p, \tau)$ dönüşümü sismolojide önemli uygulamalara sahip olup, tau-p dönüşümü olarak adlandırılmaktadır. Tau-p dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanılarak bu dönüşümlerin ayrık formları arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Bu problemlerin ayrık modellemesinden ortaya çıkan denklem sistemleri genellikle kötü-şartlanmış ve büyük ölçekli olup, bu çalışmada ortaya çıkan denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için dizisel iteratif yöntemlerden olan Kaczmarz, simetrik Kaczmarz ve rastgele seçimli Kaczmarz yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca yaklaşık çözüm ve kesin çözümün karşılaştırılmasına yönelik örnekler verilmiş, gürültü hatasının yaklaşık çözüme etkisi ve yarı-yakınsama davranışı gösterilmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Anahtar Kelimeler: Radon Dönüşümü, Tau-p Dönüşümü, Cebirsel Rekonstrüksiyon Tekniği, Kaczmarz Yöntemi, Dizisel İteratif Yöntem.

Bilim Kodu: 403.06.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVERSION OF TAU-P TRANSFORM BY ALGEBRAIC RECONSTRUCTION TECHNIQUE

Umut ÖZCENGİZ

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Zekeriya USTAOĞLU
June 2018, 55 pages

Algebraic reconstruction technique (ART) has been investigated for the approximate solution of the problem of finding the function $f(x, y)$ from the integrals

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx,$$

where $\tau, p \in \mathbb{R}$. $R\{f(x, y)\}(p, \tau)$ transform has important applications in seismology and is called as tau-p transform. By using the relation between tau-p transform and Radon transform, the relationship between the discrete form of these transforms is obtained. The system of equations derived from the discrete models of these problems are often ill-conditioned and large-scaled, and the Kaczmarz, symmetric Kaczmarz and randomized Kaczmarz methods, which are sequential iterative methods, are used for approximating the solution of the resulting equation systems. In addition, examples are given for comparing the approximate solution and exact solution, and the effect of noise error to approximate solution and semi-convergence behavior are shown.

ABSTRACT (continued)

Keywords: Radon Transform, Tau-p Transform, Algebraic Reconstruction Technique, Kaczmarz Method, Sequential Iterative Method.

Science Code: 403.06.01



TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her konuda benden ilgi, alaka ve samimiyetini esirgemeyen pek değerli hocam Sayın Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU'na sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Eđitimim sırasında beni yetiŐtiren, üzerimde emeiği geçen, özveri ile bizlere bilgilerini aktaran Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarına teŐekkürü borç bilirim.

Bu tez çalıŐmam boyunca teŐviklerini ve desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Sercan GÖÇ, Dođanay ÖZORUÇ, Burhan BAYKARA ve Melih TOLUNAY'a teşekkür ederim.

Son olarak beni bu günlere getiren, beni yetiŐtiren, hayatım boyunca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ.....	3
BÖLÜM 2 TAU-P DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ	5
2.1 TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ.....	8
2.1.1 Türevlerin Tau-p Dönüşümü.....	10
2.1.2 Tau-p Dönüşümünün Türevleri.....	11
2.2 AYRIK TAU-P DÖNÜŞÜMÜ.....	11
2.2.1 En Yakın Komşu Yaklaşımı	12
2.2.2 Lineer İnterpolasyon	13
2.3 TAU-P VE RADON DÖNÜŞÜMÜ ARASINDA İLİŞKİ.....	13
2.4 REKONSTRÜKSİYON PROBLEMİ VE AYRIK FORMU.....	15
2.4.1 Rekonstrüksiyon Probleminin Direkt Ayrık Formu	18
2.4.2 Rekonstrüksiyon Probleminin Radon Dönüşümü Yoluyla Ayrık Formu.....	18
BÖLÜM 3 CEBİRSEL REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİ (ART)	21

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.1 KLASİK KACZMARZ YÖNTEMİ.....	23
3.1.1 Gevşeme (Relaxation) Parametrelı Kaczmarz Yöntemi.....	26
3.2 KACZMARZ YÖNTEMİNİN ÇEŞİTLERİ	27
3.2.1 Simetrik Kaczmarz Yöntemi	27
3.2.2 Rastgele Seçimli Kaczmarz Yöntemi	28
3.3 YAKINSAKLIK	29
3.4 YARI-YAKINSAKLIK.....	34
BÖLÜM 4 TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN ART UYGULAMALARI.....	37
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 A matrisinin <i>i</i> . satır elemanlarının tanımlanması.....	17
Şekil 3.1 Kaczmarz yaklaşımı.....	25
Şekil 3.2 Dik doğrular için Kaczmarz yaklaşımı.	26
Şekil 3.3 Gevşeme parametresinin projeksiyonlara etkisi.	26
Şekil 3.4 Simetrik Kaczmarz yaklaşımı.	27
Şekil 4.1 <i>f</i> fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.1).	38
Şekil 4.2 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).	39
Şekil 4.3 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).	39
Şekil 4.4 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).	40
Şekil 4.5 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).	40
Şekil 4.6 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=3 (Örnek 4.0.1).	42
Şekil 4.7 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).	42
Şekil 4.8 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).....	43
Şekil 4.9 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).	43
Şekil 4.10 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).....	44
Şekil 4.11 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).	44
Şekil 4.12 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).....	45
Şekil 4.13 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).	45
Şekil 4.14 <i>f</i> fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.2).	46
Şekil 4.15 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).	47

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.16 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).	47
Şekil 4.17 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).	47
Şekil 4.18 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).	48
Şekil 4.19 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=3 (Örnek 4.0.2).	49
Şekil 4.20 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).	49
Şekil 4.21 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).....	50
Şekil 4.22 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).	50
Şekil 4.23 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).....	51
Şekil 4.24 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).	51
Şekil 4.25 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).....	52
Şekil 4.26 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).	52

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 $C_i(x,y)$ için parametreler (Örnek 4.0.1).	38
Çizelge 4.2 %1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).....	41
Çizelge 4.3 %3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).	41
Çizelge 4.4 %5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).	41
Çizelge 4.5 $C_i(x,y)$ için parametreler (Örnek 4.0.2).	46
Çizelge 4.6 %1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).....	48
Çizelge 4.7 %3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).	48
Çizelge 4.8 %5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).	48



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

\mathbf{a}_i	: \mathbf{A} matrisinin i . satırı
\mathbf{A}^T	: \mathbf{A} matrisinin transpozu
ds	: Eğrisel integral için yay uzunluğu elemanı
f_j	: f fonksiyonunun j . hücredeki değeri
$\mathbf{f}^{(k)}$: k . iterasyon yaklaşımı
$L_{(p,\tau)}$: Düzlemdeki p eğimli, τ ofsetli doğru
$L_{(t,\theta)}$: Düzlemdeki t, θ parametrelili doğru
p	: Doğrunun eğim parametresi
$r(i)$: Rastgele seçim indisi
$\mathcal{R}f$: f fonksiyonunun tau-p dönüşümü
$\mathfrak{R}f$: f fonksiyonunun Radon dönüşümü
\mathcal{S}^1	: Birim çember
$\beta(x, y)$: Piksel taban fonksiyonu
$\delta(\cdot)$: Dirac delta
λ	: Gevşeme (relaxation) parametresi
τ	: Doğrunun ofset parametresi
$\ \cdot\ _2$: 2-Normu (Euclid normu)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Vektörel iç çarpım

KISALTMALAR

ART	: Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (Algebraic reconstruction technique)
RT	: Radon dönüşümü



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Radon dönüşümü, Avusturyalı matematikçi Johann Radon (1887-1956) tarafından ortaya konulmuş olup (Radon 1917), Radon dönüşümü ile bir fonksiyonun projeksiyonlarından yeniden elde edilebileceği gösterilmiştir.

Tıp ve mühendislikte; bilgisayarlı tomografi, barkod okuyucular, araç plaka tanıma sistemleri, elektron mikroskopu, sismoloji gibi önemli bir çok alanda Radon dönüşümü ve bu dönüşümün tersinden yararlanılmaktadır (Deans 2000, Debnath and Bhatta 2015, Feeman 2010, Helgason 1999).

Sismolojide, eğimli doğrular kullanılarak verilen Radon dönüşümünün, τ - p dönüşümü veya eğimli-yığıma (slant-stacking) olarak adlandırılan özel bir formu kullanılmaktadır (Schultz and Claerbout 1978).

İki-değişkenli sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun τ - p dönüşümü, $\tau, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$L_{(p,\tau)} : y = \tau + px, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

doğruları boyunca bu fonksiyonun x -değişkenine göre eğrisel integralinin alınması ile

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx \quad (1.2)$$

olarak tanımlanır, bu integral $L_{(p,\tau)}$ doğruları boyunca $f(x, y)$ değerlerinin yığılmasını ifade eder (Toft 1996).

Radon dönüşümü ile ilgili uygulamalarda karşılaşılan problemlerde amaç, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun dönüşüm verileri yardımıyla, bu fonksiyonun kendisinin bulunmasıdır. Bu problemler (görüntü) rekonstrüksiyon problemi olarak adlandırılmakta olup, çözüm için giriş verileri ile çıkış verileri arasındaki zayıflama (attenuation) miktarı dikkate alınır. Pratikte karşılaşılan önemli zorluklardan birisi sınırlı sayıda dönüşüm verisi kullanılabilmesidir.

Radon veya τ - p dönüşümü verilerinden yararlanarak $f(x, y)$ fonksiyonunu elde etmek için, genellikle analitik ve iteratif olmak üzere iki farklı yöntem kullanılmaktadır. Analitik yöntemler, Fourier kesit (Fourier slice) teoremine dayanmaktadır (Natterer 1986). İteratif yöntemlerde ise ardışık adımlar ile elde edilen bir $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisi yardımıyla çözüme yaklaşım yapılmaya çalışılır. İteratif yöntemler, analitik yöntemlere göre daha basit yapıda olup, sınırlı sayıda dönüşüm verisi için daha iyi sonuçlar vermekte ve gürültü hatasının modellenmesine olanak sağlamaktadır (Rezvani 2012).

İteratif bir yöntem olan cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (ART-Algebraic Reconstruction Technique), rekonstrüksiyon problemlerinde Radon dönüşümünün tersini bulmak amacıyla, ilk olarak (Gordon et al. 1970) çalışması ile ortaya konulmuştur. Bu teknikte, $f(x, y)$ fonksiyonunun desteği (support) $N \times N$ hücreye ayrılır ve her bir hücrede $f(x, y)$ fonksiyonunun ayırık bileşenleri yer alır, daha sonra bilinmeyenleri $f(x, y)$ fonksiyonunun ayırık bileşenleri olan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemindeki her bir denklem, bir dönüşüm verisinin, belirli bir doğrunun geçtiği her bir hücredeki uzunlukları ile $f(x, y)$ fonksiyonunun bu hücrelerdeki ayırık bileşenlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılması sonucu elde edilir. Buna göre, bu denklem sistemi ile rekonstrüksiyon probleminin bir ayırık formu elde edilmiş olur.

Cebirsel rekonstrüksiyon tekniği, denklem sistemlerinin çözümü için kullanılan Kaczmarz yöntemini (Kaczmarz 1937) temel almaktadır. Polonyalı matematikçi Stefan Kaczmarz (1895-1939/1940) tarafından ortaya konulan bu yöntem, ardışık olarak denklem sistemindeki satırlar üzerinden diğer satırlara projeksiyonlar ile çözüme yaklaşım yapılan dizisel bir iteratif yöntemdir. Burada denklem sisteminin her bir satırı bir hiperdüzlem olarak düşünülüp, projeksiyonlara tahmini bir başlangıç vektörü ile başlanır ve her bir projeksiyon, belirli bir adımdaki iterasyon vektöründen ilgili hiperdüzleme ait normal vektörünün bir katının çıkarılması şeklinde ifade edilir. Rekonstrüksiyon problemlerinde karşılaşılan denklem sistemleri genelde tutarsız ve aşırı belirgindir (overdetermined). Kaczmarz yönteminde iterasyon adımları ile elde edilen dizi, denklem sistemi tutarsız olsa bile bir çözüme yaklaşır ve bu durumda dizinin limiti minimum norm çözümdür (Jiang and Wang 2003).

Kaczmarz yönteminin, simetrik Kaczmarz (Björck and Elfving 1979) ve rastgele seçimli Kaczmarz (Strohmer and Vershynin 2009) yöntemleri gibi satırların projeksiyon sırasının

seçimine göre farklılık gösteren formları vardır. Bu yöntemlerin çözüme yaklaşma sürecinde diğer önemli bir etken gevşeme (relaxation) parametresinin seçimidir (Censor et al. 1983, Eggermont et al. 1981, Hanke and Niethammer 1990, Herman et al. 1973).

Dönüşüm verilerinde gürültü hatasının dikkate alınması durumunda, cebirsel rekonstrüksiyon tekniği yarı-yakınsaklık (semi-convergence) davranışı gösterir (Natterer 1986, s. 89). Yarı-yakınsaklık, belirli bir iterasyon adımına kadar iterasyon hatası ve gürültü hatasından oluşan toplam hatanın azalması ve bu adımdan sonra gürültü hatasının etkisiyle toplam hatanın artmaya başlaması olarak ifade edilmektedir. Kaczmarz yönteminin blok versiyonları için yarı-yakınsaklık analizi (Elfving et al. 2014) çalışmasında yapılmıştır ve her bir bloğun, katsayılar matrisinin satırları olarak alınmasıyla klasik Kaczmarz yöntemi için de sonuç geçerli olur.

1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

Bu tez kapsamında, Radon dönüşümünün sismoloji alanına uyarlanması olan ve (1.2) ile tanımlanan τ - p dönüşümü ve bu dönüşümün tersini bulmak için cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (ART) araştırılmıştır.

τ - p dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanarak bu dönüşümlerin ayrık formları arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Bu problemlerin ayrık formlarında ortaya çıkan denklem sistemleri genellikle kötü-şartlanmış (ill-conditioned) ve büyük ölçekli olup, ortaya çıkan denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için dizisel iteratif bir yöntem olan Kaczmarz yöntemi kullanılmıştır.

Kaczmarz yönteminde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(0,0)} &= \mathbf{f}^{(0)}, \\ \mathbf{f}^{(k-1,i)} &= \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} + \lambda_k \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|_2^2} \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{f}^{(k)} &= \mathbf{f}^{(k-1,m)}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

algoritmasıyla elde edilen $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisinin yakınsaklık durumu ve bu dizinin limitinin, rekonstrüksiyon probleminin çözümü ile ilişkisi incelenmiştir.

Kaczmarz algoritmasında projeksiyon sırasının seçimi yakınsaklık sürecini etkilemekte olup, simetrik Kaczmarz yönteminde, $i = 1, 2, \dots, m - 1, m, m - 1, \dots, 2$ olarak alınır

ve rastgele seçimli Kaczmarz yönteminde ise i seçimi $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinden $\|\mathbf{a}_i\|_2^2$ ye orantılı olasılıkla rastgele bir şekilde yapılır. Bu çalışmada, Kaczmarz, simetrik Kaczmarz ve rastgele seçimli Kaczmarz yöntemleri kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümler ile kesin çözümün karşılaştırılması yapılmış, gürültü hatasının yaklaşık çözüme etkisi ve yarı-yakınsama davranışı gösterilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde τ - p dönüşümünün tanımı ve temel özellikleri verilmiş, Radon dönüşümü ile τ - p dönüşümü arasındaki ilişki ifade edilmiş ve ayrı τ - p dönüşümü için bazı temel yaklaşımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Kaczmarz, simetrik Kaczmarz ve rastgele seçimli Kaczmarz yöntemleri tanıtılmış ve bu yöntemlerin yakınsaklık ve yarı-yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde τ - p dönüşümünün tersi için cebirsel rekonstrüksiyon tekniğinin uygulanmasına dair örnekler verilmiştir.

BÖLÜM 2

TAU-P DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Radon dönüşümünün (RT) özel bir hali olarak verilen $tau-p$ ($\tau - p$) dönüşümü, sismoloji alanında önemli uygulamalara sahiptir. $Tau-p$ dönüşümü, $f(x, y)$ fonksiyonunun düzlemde tüm $y = \tau + px$ denklemlerli doğrular boyunca x -değişkenine göre eğrisel integrallerinin hesaplanması ile elde edilir.

Tanım 2.0.1 ($Tau-p$ dönüşümü) Sürekli ve reel değerli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun $tau-p$ dönüşümü,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx, \quad \tau, p \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır.

Sismolojide bu dönüşüm *eğimli - yığılma* (*slant - stacking*) dönüşümü olarak da adlandırılmakta olup, p ve τ , sırasıyla doğruların eğim ve ofset parametreleridir.

$Tau-p$ dönüşümü Dirac delta, $\delta(\cdot)$, kullanılarak,

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \delta(y - (\tau + px)) dx dy \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

$R\{f(x, y)\}(p, \tau)$ eğrisel integrali, iki-boyutlu $p-\tau$ uzayında tanımlı bir fonksiyon olup, her bir integrale, $tau-p$ dönüşümünün bir örneği (sample) denir ve bu eğrisel integrallerin tümü $f(x, y)$ fonksiyonunun $tau-p$ dönüşümünü verir.

Örnek 2.0.1 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ fonksiyonunun tau-p dönüşümü;

$$\begin{aligned}
R\{e^{-x^2-y^2}\}(p, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-(\tau+px)^2} dx \\
&= e^{-\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+p^2)x^2-2p\tau x} dx \\
&= e^{-\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{1+p^2}x + \frac{p\tau}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 + \frac{(p\tau)^2}{1+p^2}} dx \\
&= e^{\frac{(p\tau)^2}{1+p^2} - \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{1+p^2}x + \frac{p\tau}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2} dx, \quad \left\{ u = \sqrt{1+p^2}x + \frac{p\tau}{\sqrt{1+p^2}} \right. \\
&= e^{\frac{(p\tau)^2}{1+p^2} - \tau^2} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du
\end{aligned}$$

olur ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

olduğundan son durumda $f(x, y)$ fonksiyonunun tau-p dönüşümü;

$$R\{e^{-x^2-y^2}\}(p, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{1+p^2}} e^{-\frac{\tau^2}{1+p^2}}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.0.2

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun tau-p dönüşümü, $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile $y = \tau + px$ doğrularının kesişim noktalarının apsisi arasındaki uzaklık olacağından

$$R\{f(x, y)\}(p, \tau) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{p^2 - \tau^2 + 1}}{1+p^2}, & \tau^2 - p^2 < 1 \\ 0, & \tau^2 - p^2 \geq 1 \end{cases}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.0.3 (Toft 1996) $f(x, y) = \delta(y - \tau' - p'x)$ fonksiyonunun tau-p dönüşümü;

$$\begin{aligned}
 R\{f(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta(y - \tau' - p'x) \delta(y - \tau - px) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \delta((p - p')x + \tau - \tau') dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{|p-p'|}, & p \neq p' \\ 0, & p = p' \text{ ve } \tau \neq \tau' \\ \int_{\mathbb{R}} \delta(0) dx, & p = p' \text{ ve } \tau = \tau' \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Örnek 2.0.4 (Toft 1996) $f(x, y) = \delta^2(x, y)$ (Noktasal kaynak) fonksiyonunun tau-p dönüşümü;

$$\begin{aligned}
 R\{f(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \delta^2(x, \tau + px) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \delta(\tau + px) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \delta(y) \delta(y - (\tau + px)) dx dy \\
 &= \delta(\tau)
 \end{aligned}$$

bulunur. Noktasal kaynak koordinat düzleminin herhangi bir yerinde bulunabilir.

$$f(x, y) = \delta^2(x - x^*, y - y^*) = \delta(x - x^*) \delta(y - y^*)$$

fonksiyonunun tau-p dönüşümü;

$$\begin{aligned}
 R\{f(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x^*) \delta(y - y^*) \delta(y - \tau - px) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik(y - \tau - px)} \delta(x - x^*) \delta(y - y^*) dx dy dk \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{ik\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ikpx} \delta(x - x^*) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iky} \delta(y - y^*) dy \right) dk \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{ik(\tau + px^* - y^*)} dk \\
 &= \delta(\tau + px^* - y^*).
 \end{aligned}$$

Buradan, herhangi bir fonksiyon noktasal kaynakların ağırlıklı integrali olarak yazılabileceğinden;

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x^*, y^*) \delta(x - x^*) \delta(y - y^*) dx^* dy^*$$

fonksiyonunun tau-p dönüşümü;

$$\begin{aligned} R\{f(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x^*, y^*) \delta(x - x^*) \delta(\tau + px - y^*) dx^* dy^* dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x^*, y^*) \delta(\tau + px^* - y^*) dx^* dy^* \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1 TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

Önerme 2.1.1 *Tau-p dönüşümü için aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

$$(1) R\{\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)\}(p, \tau) = \alpha R\{f_1(x, y)\}(p, \tau) + \beta R\{f_2(x, y)\}(p, \tau).$$

$$(2) R\{f(x - a, y - b)\}(p, \tau) = R\{f(x, y)\}(p, \tau + pa - b).$$

$$(3) R\left\{f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)\right\}(p, \tau) = aR\left\{f(x, y)\right\}\left(\frac{pa}{b}, \frac{\tau}{b}\right).$$

$$(4) R\{f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)\}(p, \tau) = \frac{R\{f(x, y)\}\left(\frac{p - \tan \theta}{1 + p \tan \theta}, \frac{\tau}{\cos \theta + p \sin \theta}\right)}{\cos \theta + p \sin \theta}.$$

$$(5) R\{f(ax + by, cx + dy)\}(p, \tau) = \frac{1}{a + bp} R\{f(x, y)\}\left(\frac{c + dp}{a + bp}, \frac{\tau(ad - bc)}{a + bp}\right).$$

İspat.

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} R\{\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f_1(x, \tau + px) + \beta f_2(x, \tau + px)) dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f_1(x, \tau + px) dx + \beta \int_{\mathbb{R}} f_2(x, \tau + px) dx \\ &= \alpha R\{f_1(x, y)\}(p, \tau) + \beta R\{f_2(x, y)\}(p, \tau) \end{aligned} \quad (2.3)$$

olur.

(2) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
R\{f(x-a, y-b)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a, \tau+px-b) dx, \quad \{\bar{x} = x-a\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\bar{x}, \tau+pa-b+p\bar{x}) d\bar{x} \\
&= R\{f(x, y)\}(p, \tau+pa-b)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

olur. Bir doğrunun ötelenmesi ile eğiminin değişmeyeceği dikkate alınırsa $f(x, y)$ fonksiyonunun ötelenmesi, $tau-p$ dönüşümünde ofset parametresinin değişmesine neden olur.

(3) $a, b \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
R\left\{f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)\right\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{a}, \frac{\tau+px}{b}\right) dx, \quad \left\{\bar{x} = \frac{x}{a}\right\} \\
&= a \int_{\mathbb{R}} f\left(\bar{x}, \frac{\tau}{b} + \frac{pa}{b}\bar{x}\right) d\bar{x} \\
&= aR\{f(x, y)\}\left(\frac{pa}{b}, \frac{\tau}{b}\right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

olur.

(4) $x-y$ koordinat düzleminin orjin merkezli, θ kadar döndürülmesi ile elde edilen $x'y'$ düzlemi için

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\
y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.6}$$

olduğu bilinmektedir.

$$\begin{aligned}
&R\{f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)\}(p, \tau) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x \cos \theta + (\tau+px) \sin \theta, -x \sin \theta + (\tau+px) \cos \theta) dx \\
&= \frac{1}{\cos \theta + p \sin \theta} \int_{\mathbb{R}} f\left(\bar{x}, \frac{\tau}{\cos \theta + p \sin \theta} + \frac{p - \tan \theta}{1 + p \tan \theta} \bar{x}\right) d\bar{x} \\
&= \frac{1}{\cos \theta + p \sin \theta} R\{f(x, y)\}\left(\frac{p - \tan \theta}{1 + p \tan \theta}, \frac{\tau}{\cos \theta + p \sin \theta}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

olup, burada $\bar{x} = x \cos \theta + (\tau + px) \sin \theta$ değişken değişimi yapılmıştır.

(5) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& R\{f(ax + by, cx + dy)\}(p, \tau) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(ax + b(\tau + px), cx + d(\tau + px)) dx \\
&= \frac{1}{a + bp} \int_{\mathbb{R}} f\left(\bar{x}, \frac{(ad - bc)\tau}{a + bp} + \frac{c + dp}{a + bp}\bar{x}\right) d\bar{x} \\
&= \frac{1}{a + bp} R\{f(x, y)\}\left(\frac{c + dp}{a + bp}, \frac{\tau(ad - bc)}{a + bp}\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

olur. Burada

$$\bar{x} = x(a + bp) + b\tau, \quad dx = \frac{1}{a + bp} d\bar{x}$$

değişken değişimi yapılmıştır. Özel olarak $a = \cos \theta, b = \sin \theta, c = -b$ ve $d = a$ alınır, dönme özelliği elde edilir.

■

2.1.1 Türevlerin Tau-p Dönüşümü

$f(x, y)$ fonksiyonunun x -değişkenine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \tag{2.9}$$

olup, her iki taraf için τ - p dönüşümü uygulandığında;

$$\begin{aligned}
R\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right\}(p, \tau) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R\{f(x + h, y)\}(p, \tau) - R\{f(x, y)\}(p, \tau)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x + h, \tau + px) dx - R\{f(x, y)\}(p, \tau)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R\{f(x, y)\}(p, \tau - ph) - R\{f(x, y)\}(p, \tau)}{h} \\
&= -p \frac{\partial}{\partial \tau} R\{f(x, y)\}(p, \tau)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

bulunur. Benzer şekilde y -değişkenine göre kısmi türev olan

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \tag{2.11}$$

için τ - p dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
R\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right\}(p, \tau) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R\{f(x, y+h)\}(p, \tau) - R\{f(x, y)\}(p, \tau)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \tau + px + h) dx - R\{f(x, y)\}(p, \tau)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R\{f(x, y)\}(p, \tau + h) - R\{f(x, y)\}(p, \tau)}{h} \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau} R\{f(x, y)\}(p, \tau)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir.

2.1.2 Tau-p Dönüşümünün Türevleri

τ - p dönüşümünün türevleri ile ilgili özellikler için Dirac delta'nın türevlerini içeren,

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) = -\frac{\partial}{\partial y} \delta(x - y) \tag{2.13}$$

özelliklerinden yararlanılacaktır. (2.13) eşitliğinde y , by ile değiştirilirse

$$\frac{\partial}{\partial (by)} \delta(x - by) = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - by) = -\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - by) \tag{2.14}$$

olur (Debnath and Bhatta 2015). Buna göre,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p} R\{f(x, y)\}(p, \tau) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \frac{\partial}{\partial p} \delta(y - (\tau + px)) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x f(x, y) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(y - (\tau + px)) dx dy \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x f(x, y) \delta(y - (\tau + px)) dx dy \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau} R\{x f(x, y)\}(p, \tau).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2 AYRIK TAU-P DÖNÜŞÜMÜ

Her fonksiyonun τ - p dönüşümü analitik olarak hesaplanamayabilir. Ancak, ayrık yaklaşım yardımıyla analitik durumdaki τ - p dönüşümüne yaklaşım yapılabilir. Ayrık τ - p dönüşümü için en yakın komşu yaklaşımı ve lineer interpolasyon yaklaşımı (Toft 1996) çalışmasından yararlanılarak aşağıda verilmiştir.

Ayrık yaklaşım için tanım bölgesi ve $tau-p$ dönüşümündeki doğru parametrelerinin örneklemleri, ilk elemanları $x_{\min}, y_{\min}, p_{\min}, \tau_{\min}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= x_m = x_{\min} + m\Delta x, & m &= 0, 1, \dots, M-1 \\ y &= y_n = y_{\min} + n\Delta y, & n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ p &= p_k = p_{\min} + k\Delta p, & k &= 0, 1, \dots, K-1 \\ \tau &= \tau_h = \tau_{\min} + h\Delta\tau, & h &= 0, 1, \dots, H-1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada $\Delta x, \Delta y, \Delta p, \Delta\tau$ sırasıyla x, y, p, τ nun her bir örnekleme elemanı arasındaki uzaklık ve m, n, k, h ise sırasıyla x, y, p, τ için M, N, K, H elemanlı örneklemleri belirtmek için kullanılan ayrık indislerdir. Bu örneklemler yardımıyla (2.1) lineer dönüşümüne ayrık yaklaşım için toplam yaklaşımı,

$$R\{f(x, y)\}(p_k, \tau_h) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau_h + p_k x) dx \approx \Delta x \sum_{m=0}^{M-1} f(x_m, \tau_h + p_k x_m) \quad (2.17)$$

olarak yazılabilir.

$f(x, y)$ fonksiyonunun örneklemlerini temsil ederken $f(x_m, y_n)$ yerine $f(m, n)$ ve $tau-p$ dönüşümü için $R\{f(x_m, y_n)\}(p_k, \tau_h) = R\{f(m, n)\}(k, h)$ kullanılacaktır.

2.2.1 En Yakın Komşu Yaklaşımı

Oluşturulan örneklemlerde tüm değişkenler için lineer örneklemler genellikle birbirlerini karşılamazlar. Yani, y_n örnekleme ile $\tau_h + p_k x_m$ her zaman eşit olmaz. Bu duruma en yakın komşu yaklaşımı kullanılarak çözüm getirilebilmektedir. En yakın komşu yaklaşımında $y_{\min} + n\Delta y \approx \tau_h + p_k x_m$ durumundan yola çıkarak en yakın n -tam sayısı hesaplanır. Bu durumda en yakın komşu yaklaşımında $tau-p$ dönüşümü;

$$\begin{aligned} R\{f(m, n)\}(k, h) &\approx \Delta x \sum_{m=0}^{M-1} f(m, n(m; k, h)), \\ n(m; k, h) &= \left\lceil \frac{\tau_h + p_k x_m - y_{\min}}{\Delta y} \right\rceil \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $[\cdot]$ gösterimi en yakın tam sayıya yuvarlama anlamına gelmektedir. Bazen $(m, n(m; k, h))$ noktaları ilgilenilen bölgenin dışında yer alabilirler. Öyle bir durumda $f(m, n)$ değerleri sıfır olarak ayarlanabilir. Burada gereksiz hesaplamalardan kaçınmak için, m değerleri uygun bir aralıktan alınacak şekilde düzenlemeler yapılabilir.

2.2.2 Lineer İnterpolasyon

Ayrık τ - p dönüşümü için bir diğer yaklaşım, $f(m, n)$ değerlerinin y -ekseni boyunca lineer interpolasyonundan yararlanılarak da verilebilir;

$$\Re \{f(m, n)\} (k, h) \approx \Delta x \sum_{m=0}^{M-1} (1 - \alpha) f(m, n) + \alpha f(m, n + 1). \quad (2.19)$$

Burada,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\tau h + p_k x_m - y_{\min}}{\Delta y}, \\ n &= \lfloor \eta \rfloor \quad \alpha = \eta - n \end{aligned} \quad (2.20)$$

olup, $\lfloor \cdot \rfloor$ gösterimi en yakın alt tam sayıya yuvarlama anlamına gelir.

Lineer interpolasyonda η -sayısındaki $f(m, \eta)$ değeri; $f(m, n)$ ve $f(m, n + 1)$ değerlerinin ağırlıkları alınarak hesaplanmış olur. Doğrusal interpolasyon, en yakın komşu yaklaşımına göre iki kat örnekleme gerektirir.

2.3 TAU-P VE RADON DÖNÜŞÜMÜ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, (normal) Radon dönüşümü ve τ - p dönüşümü arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. İki dönüşüm arasındaki ilişki, Radon dönüşümü parametreleri ile yazılacak olup, daha sonra bu ilişki p ve τ parametreleri yardımıyla yeniden ifade edilecektir.

Tanım 2.3.1 ((Normal) Radon dönüşümü) $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbf{S}^1$ (birim çember) olmak üzere, $x - y$ -düzlemindeki her bir doğru $L_{(t, \theta)}$ ile verilsin. ds yay uzunluğu elemanı için sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonunun, $L_{(t, \theta)}$ doğruları boyunca integralleri ile Radon dönüşümü,

$$\Re \{f(x, y)\} (\boldsymbol{\theta}, t) = \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır.

Düzlemdeki her bir doğru

$$L_{(t, \theta)} : (x(s), y(s)) = (t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta), \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

şeklinde verilsin.

$$\begin{aligned} x &= t \cos \theta - s \sin \theta \\ y &= t \sin \theta + s \cos \theta \end{aligned}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

eşitlikleri dikkate alınırsa, $L_{(t,\theta)}$ doğrularının normal formdaki

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.24)$$

denklemini elde edilir. Burada $|t|$, $L_{(t,\theta)}$ doğrusunun orjine dik uzaklığı ve θ ise orjinden geçen ve $L_{(t,\theta)}$ doğrusuna dik olan doğrunun x -ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açısıdır.

Radon dönüşümü Dirac delta, $\delta(\cdot)$, kullanılarak,

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\}(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

şeklinde de tanımlanabilir (Toft 1996).

$\theta \in (0, \pi)$ için, (2.24) denkleminde $L_{(t,\theta)}$ doğruları

$$L_{(t,\theta)} : y = t \csc \theta - x \cot \theta \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} p &= -\cot \theta, \\ \tau &= t \csc \theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

olarak alınırsa, τ - p dönüşümü, Radon dönüşümü parametreleri yardımıyla,

$$R\{f(x, y)\}(-\cot \theta, t \csc \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t \csc \theta - x \cot \theta) dx \quad (2.27)$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

(2.22) doğrularının, (2.25) formunda yazılması ile yay uzunluğu parametresi,

$$ds = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} dx = |\csc \theta| dx$$

olur. Bu durum dikkate alındığında, $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere, Radon dönüşümü ve τ - p dönüşümü arasındaki ilişki;

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{f(x, y)\}(\theta, t) &= \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \\ &= \csc \theta \int_{\mathbb{R}} f(x, t \csc \theta - x \cot \theta) dx \\ &= \csc \theta R\{f(x, y)\}(-\cot \theta, t \csc \theta) \end{aligned} \quad (2.28)$$

eşitliği ile verilir.

Ayrıca, $p = -\cot \theta$ ve $\tau = t \csc \theta$ olarak kabul edildiğinden, $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{1 + p^2}, \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ \cos \theta &= -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ t &= \frac{\tau}{\sqrt{1 + p^2}}\end{aligned}$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, (2.28) bağıntısında τ - p dönüşümünün parametreleri kullanılarak, Radon dönüşümü ve τ - p dönüşümü arasındaki ilişki,

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\} \left(-\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}, \frac{\tau}{\sqrt{1 + p^2}} \right) = \sqrt{1 + p^2} R\{f(x, y)\}(p, \tau) \quad (2.29)$$

eşitliği ile verilebilir.

τ - p dönüşümünün düzlem eğrileri üzerine bir genelleştirmesinin, Radon dönüşümü ile ilişkisi (Ustaoglu 2017) çalışmasında verilmiştir.

2.4 REKONSTRÜKSİYON PROBLEMİ VE AYRIK FORMU

Sürekli bir f fonksiyonunun Radon dönüşümü veya τ - p dönüşümü verilerinden yararlanarak, fonksiyonun kendisinin bulunması problemi bir (görüntü) rekonstrüksiyon problemidir. Özel olarak bu çalışmada, $\tau, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$Rf(p, \tau) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \tau + px) dx,$$

integralleri bilindiğinde f fonksiyonunun bulunması problemi ele alınacaktır.

Radon dönüşümünün kompakt desteğe sahip bir $f(x, y)$ fonksiyonuna göre lineer olması ve bu $f(x, y)$ fonksiyonunun Radon dönüşümünün geometrik olarak yorumlanabilmesi, rekonstrüksiyon probleminin cebirsel olarak ifade edilebilmesine olanak sağlamaktadır (Epstein 2007).

Teorik olarak, aranan $f(x, y)$ fonksiyonu için

$$\{\beta_j(x, y) \mid j = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}\} \quad (2.30)$$

piksel taban fonksiyonlarının sonlu bir kümesi alınır. Bununla birlikte bazı $f(x, y)$ değerleri ile taban fonksiyonlarının lineer kombinasyonu sonucu, $f(x, y)$ fonksiyonunun yaklaştırılabileceği varsayılmaktadır. Bunun için

$$\left\| f(x, y) - \sum_{j=1}^n f_j \beta_j(x, y) \right\|_2 \quad (2.31)$$

normunu minimum yapan,

$$\{f_j \mid j = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

olacak şekilde $\{f_j\}$ katsayıları aranmaktadır. Ayrıca

$$\Re f(x, y) \approx \sum_{j=1}^n f_j \Re \beta_j(x, y) \quad (2.32)$$

olacak şekilde rekonstrüksiyon probleminde kullanılan taban fonksiyonları, parçalı sabit fonksiyonlar ailesidir.

$f(x, y)$ fonksiyonunun desteğinin, bir kare bölge üzerinde olduğu varsayalım. Kare bölge, düzgün bir $N \times N$ hücre olacak şekilde bölünsün ve $N \times N$ hücrenin elemanları

$$\beta_j^N(x, y) = \begin{cases} 1 & , (x, y) \in j. \text{ hücre} \\ 0 & , \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (2.33)$$

ile tanımlansın. Eğer f_j , j . karede f fonksiyonunun ortalaması ise

$$\bar{f}^N = \sum_{j=1}^n f_j \beta_j^N(x, y) \quad (2.34)$$

f fonksiyonuna $N \times N$ hücrenin elemanları ile yaklaşım yapılabilir. Böylece, rekonstrüksiyon probleminde kompakt desteğe sahip sürekli bir $f(x, y)$ fonksiyonu için $\{\bar{f}^N\}$ dizisi $N \rightarrow \infty$ iken f fonksiyonuna düzgün yakınsar (Epstein 2007). Radon dönüşümü lineer olduğundan;

$$\Re \bar{f}^N(x, y) = \sum_{j=1}^n f_j \Re \{\beta_j^N(x, y)\} (t, w) \quad (2.35)$$

olur. Bu yaklaşımda doğrular boyunca alınan her integral için dönüşüm verileri

$$\{(t_i, w_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$$

örneklemeleri yardımıyla $R \{f(x, y)\} (t_i, w_i)$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$a_{ij} = \Re \{ \beta_j(x, y) \} (t_i, w_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.36)$$

ve dönüşüm verileri ise

$$b_i = \Re \{ \bar{f}^N(x, y) \} (t_i, w_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.37)$$

olarak tanımlanır ise rekonstrüksiyon problemi,

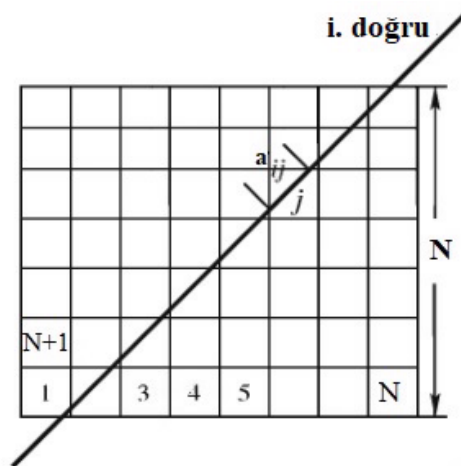
$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.38)$$

şeklinde n bilinmeyenli m tane denklemden oluşan lineer denklem sistemi olarak ifade edilebilir. Bu lineer denklem sistemi matris formunda, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T$, $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)^T$ ve $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ olmak üzere,

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{b}$$

olarak yazılabilir.

Rekonstrüksiyon problemi ile elde edilen denklem sistemindeki i . denklemin tanımlanması Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Burada i . doğrunun geçtiği her bir hücredeki uzunluğu ile o hücrelerdeki f_j değerlerinin lineer kombinasyonu, i . denklem olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 2.1 \mathbf{A} matrisinin i . satır elemanlarının tanımlanması (Epstein 2007).

Kare bölge, $n = 128 \times 128$ hücre olacak şekilde bölünürse, yaklaşık olarak 16.000 bilinmeyen elde edilir. 128 eşit aralıklı açının her birinde 150 Radon dönüşümü örneği alınrsa, $m \approx 19.000$ olur. Sonuç olarak, 19.000×16.000 boyutunda denklem sistemi ortaya çıkar (Epstein 2007).

2.4.1 Rekonstrüksiyon Probleminin Direkt Ayrık Formu

Bu kısımda, τ - p dönüşümü için rekonstrüksiyon probleminin ayrık formu direkt olarak ifade edilecektir. Bu ayrık form yazılırken, τ - p dönüşümü, (normal) Radon dönüşümü parametreleri ile verilecektir.

$f(x, y)$ fonksiyonu bir kare bölgede kompakt desteğe sahip olsun ve bu bölge $N \times N$ hücreye ayrılsın. $n = N^2$, m toplam projeksiyon (τ - p dönüşümünün alınması) sayısı, $f(x, y)$ fonksiyonunun j . hücredeki sabitlenmiş değeri f_j ve $\beta_j^N(x, y)$ taban fonksiyonları için $f(x, y)$ fonksiyonu,

$$\bar{f}^N = \sum_{j=1}^n f_j \beta_j^N(x, y) \quad (2.39)$$

olarak ayrık formda yazıldığında, τ - p dönüşümünün lineerliğinden

$$R \{ \bar{f}^N(x, y) \} (-\cot \theta_i, t_i \csc \theta_i) = \sum_{j=1}^n f_j R \{ \beta_j^N(x, y) \} (-\cot \theta_i, t_i \csc \theta_i) \quad (2.40)$$

olur.

$R \{ \beta_j^N(x, y) \} (-\cot \theta_i, t_i \csc \theta_i)$ değerleri yardımıyla a_{ij} , i . doğru ile j . hücrenin kesiştiği noktaların apsisi arasındaki uzaklık veya j . hücre ile kesişmiyorsa 0 olarak tanımlanırsa, τ - p dönüşümüne karşılık gelen lineer denklem sistemi

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.41)$$

veya matris formunda,

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (2.42)$$

olarak yazılabilir.

2.4.2 Rekonstrüksiyon Probleminin Radon Dönüşümü Yoluyla Ayrık Formu

Rekonstrüksiyon probleminin ayrık formu, Bölüm 2.3'te verilen τ - p dönüşümü ile Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanılarak yeniden yazılacaktır. Böylece rekonstrüksiyon probleminin yaklaşık çözümü için alternatif bir yol ortaya konulmuş olacaktır.

Radon dönüşümü için rekonstrüksiyon probleminin ayrık formu için, $\tilde{\mathbf{A}}$ matrisinin \tilde{a}_{ij} bileşenleri, i . doğrunun j . hücredeki parçasının uzunluğu veya j . hücre ile kesişmiyorsa 0

olarak tanımlanır. Bu durumda, τ - p dönüşümü için rekonstrüksiyon probleminin ayrık formunda ortaya çıkan lineer denklem sistemi, τ - p dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki ilişkiden yararlanarak, $\theta_i \in (0, \pi)$ için

$$\tilde{b}_i = b_i \csc \theta_i = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.43)$$

olur. Bu denklem sistemi matris formunda, $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1 \ \tilde{b}_2 \ \dots \ \tilde{b}_m)^T$ ve $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ olmak üzere,

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{f} \quad (2.44)$$

olarak ifade edilir.





BÖLÜM 3

CEBİRSEL REKONSTRÜKSİYON TEKNİKLERİ (ART)

Radon dönüştürümü verilerinden yararlanarak görüntü elde etmek için kullanılan ilk cebirsel yöntem "cebirsel rekonstrüksiyon tekniği (ART-Algebraic Reconstruction Technique)" olarak adlandırılmakla birlikte, bu yöntemin temeli Kaczmarz yöntemidir. Görüntüleme alanında, ART ve Kaczmarz yöntemi genellikle aynı anlamda kullanılmaktadır. Bu bölümde, Kaczmarz yöntemi tanıtılacak ve bu yöntemin yakınsaklığı ile ilgili bazı önemli sonuçlar ifade edilecektir.

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere, bir

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (3.1)$$

denkleminde \mathbf{f} çözümünün bulunması için bir çok yöntem mevcuttur. Özellikle küçük ölçekli denklemlerinin çözümünde katsayılar matrisinin tersini bulmak için, Gauss eliminasyonu, Cramer veya Gauss-Jordan gibi direkt yöntemler kullanılabilir. Ancak denklemleri büyük ölçekli olduğunda bu yöntemler ile çözüm bulunması uzun zaman alır. Bu nedenle iteratif yöntemler tercih edilmektedir. Rekonstrüksiyon problemi gibi uygulamalarda karşılaşılan denklemleri genellikle büyük ölçekli, aşırı belirgin ve tutarsız yapıda olup, böyle denklemlerinin çözümü için tercih edilen iteratif yöntemlerden biri Kaczmarz yöntemidir. Ayrıca Kaczmarz yöntemi, basit bir matematiksel modele sahiptir ve tüm denklemleri için uygulanabilmektedir.

(3.1) lineer denkleminin tutarsız, aşırı belirgin veya tam ranksız olması durumunda,

$$\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b} \quad (3.2)$$

farkını minimum yapan bir \mathbf{f} vektörü aranır. Uygun bir norm seçimi (bu norm genellikle Euclid normu olarak alınır) ile hata fonksiyonu

$$\|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}\| \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. (3.3) ifadesini minimum yapabilmek için en küçük kareler yöntemine ihtiyaç duyulur.

$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, tüm \mathbf{v} vektörleri için

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}(\mathbf{f} + t\mathbf{v}) - \mathbf{b}\|_2 \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \langle \mathbf{A}(\mathbf{f} + t\mathbf{v}) - \mathbf{b}, \mathbf{A}(\mathbf{f} + t\mathbf{v}) - \mathbf{b} \rangle \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \langle (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}) + t\mathbf{A}\mathbf{v}, (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}) + t\mathbf{A}\mathbf{v} \rangle \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} (\langle \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b} + t\mathbf{A}\mathbf{v} \rangle + \langle t\mathbf{A}\mathbf{v}, (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}) + t\mathbf{A}\mathbf{v} \rangle) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} (t^2 \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle + 2t \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b} \rangle) \right|_{t=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği dikkate alınırsa,

$$2t \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle + 2 \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b} \rangle \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.4)$$

olur. Bu durumda, $t = 0$ için iç çarpımın türevi sıfırdır ancak ve ancak

$$2 \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b} \rangle = 2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}) \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Böylece, \mathbf{v} vektörü keyfi olduğundan,

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

veya

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.7)$$

olur ve bu eşitlik *normal denklem* olarak adlandırılır. (3.7) denkleminde

$$\mathbf{f} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.8)$$

yazılabilmesi nedeniyle $\|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{b}\|$ ifadesini minimum yapan \mathbf{f} elemanı tektir (Epstein 2007).

3.1 KLASİK KACZMARZ YÖNTEMİ

(Klasik) Kaczmarz yöntemi, Polonyalı matematikçi Stefan Kaczmarz tarafından, lineer denklem sistemlerinin çözümü için ortaya konulmuş iteratif bir yöntemdir. Kaczmarz yönteminde, öncelikle bir başlangıç vektörü seçilir ve daha sonra denklem sisteminde yer alan satırlar üzerine art arda projeksiyonlar yapılarak denklem sisteminin çözümüne bir iterasyon ile yaklaşım yapılmaya çalışılır.

(3.1) denklem sisteminin satırları üzerinden projeksiyon yapmak için öncelikle denklem sisteminin her bir satırı, $n - boyutlu$ Euclid uzayında

$$H_i = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f} \rangle = b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.9)$$

ile hiperdüzlemler şeklinde tanımlanır. Burada H_i hiperdüzleminin denklemi, (3.1) deki denklem sisteminin i . denklemdir.

Algoritma 3.1.1 (*Kaczmarz algoritması*)

Adım 1. Keyfi başlangıç vektörü $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0,0)}$.

Adım 2. $k = 1, 2, \dots$ için

$\mathbf{f}^{(k-1,1)} : H_1$ hiperdüzlemi üzerine $\mathbf{f}^{(k-1,0)}$ vektörünün dik projeksiyonu.

$\mathbf{f}^{(k-1,2)} : H_2$ hiperdüzlemi üzerine $\mathbf{f}^{(k-1,1)}$ vektörünün dik projeksiyonu.

\vdots

$\mathbf{f}^{(k-1,m)} : H_m$ hiperdüzlemi üzerine $\mathbf{f}^{(k-1,m-1)}$ vektörünün dik projeksiyonu.

Adım 3. k . iterasyon sonucu $\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1,m)}$.

Bu algorithmada verilen adımları gerçekleştirmek amacıyla kullanılan iterasyon formülünün elde edilişi aşağıda açıklanmıştır.

İlk iterasyon için $\mathbf{f}^{(0)}$ başlangıç vektörünün H_1 hiperdüzlemi üzerine dik projeksiyonu, $\mathbf{f}^{(0)}$ vektöründen H_1 hiperdüzleminin \mathbf{a}_1 normal vektörünün bir katını çıkararak elde edilir;

$$\mathbf{f}^{(0,1)} = \mathbf{f}^{(0,0)} - K_1 \mathbf{a}_1. \quad (3.10)$$

$\mathbf{f}^{(0,1)}$ vektörü H_1 hiperdüzlemi üzerinde olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{f}^{(0,1)} \rangle &= b_1, \\ \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{f}^{(0,0)} - K_1 \mathbf{a}_1 \rangle &= b_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

veya

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{f}^{(0,0)} \rangle - K_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle = b_1 \quad (3.12)$$

yazılabilir. Böylece, (3.12) eşitliğinden

$$K_1 = \frac{\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{f}^{(0,0)} \rangle - b_1}{\|\mathbf{a}_1\|_2^2}, \quad \{\|\mathbf{a}_1\|_2^2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle\} \quad (3.13)$$

elde edilir ve K_1 , (3.10) eşitliğinde yazılırsa,

$$\mathbf{f}^{(0,1)} = \mathbf{f}^{(0,0)} + \frac{b_1 - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{f}^{(0,0)} \rangle}{\|\mathbf{a}_1\|_2^2} \mathbf{a}_1 \quad (3.14)$$

bulunur. Elde edilen $\mathbf{f}^{(0,1)}$ vektörünün, H_2 hiperdüzlemi üzerine dik projeksiyonu

$$\mathbf{f}^{(0,2)} = \mathbf{f}^{(0,1)} - K_2 \mathbf{a}_2, \quad (3.15)$$

H_2 hiperdüzlemi üzerinde olduğundan

$$\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{f}^{(0,1)} \rangle - K_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle = b_2$$

yazılabilir ve

$$K_2 = \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{f}^{(0,1)} \rangle - b_2}{\|\mathbf{a}_2\|_2^2}$$

elde edilir. K_2 , (3.15) eşitliğinde yazılırsa;

$$\mathbf{f}^{(0,2)} = \mathbf{f}^{(0,1)} + \frac{b_2 - \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{f}^{(0,1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_2\|_2^2} \mathbf{a}_2 \quad (3.16)$$

olur. Bu projeksiyonların, $m - 1$ tane hiperdüzlem için tekrarlanması ardından ilk iterasyonun m . adımında

$$\mathbf{f}^{(0,m)} = \mathbf{f}^{(0,m-1)} + \frac{b_m - \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{f}^{(0,m-1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_m\|_2^2} \mathbf{a}_m$$

vektörü ($\mathbf{f}^{(1)}$) elde edilir ve böylece ilk iterasyon tamamlanmış olur.

Sonuç olarak, iterasyon sayısı k olmak üzere, k . iterasyonda kullanılan formül

$$\mathbf{f}^{(k-1,i)} = \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} + \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|_2^2} \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.17)$$

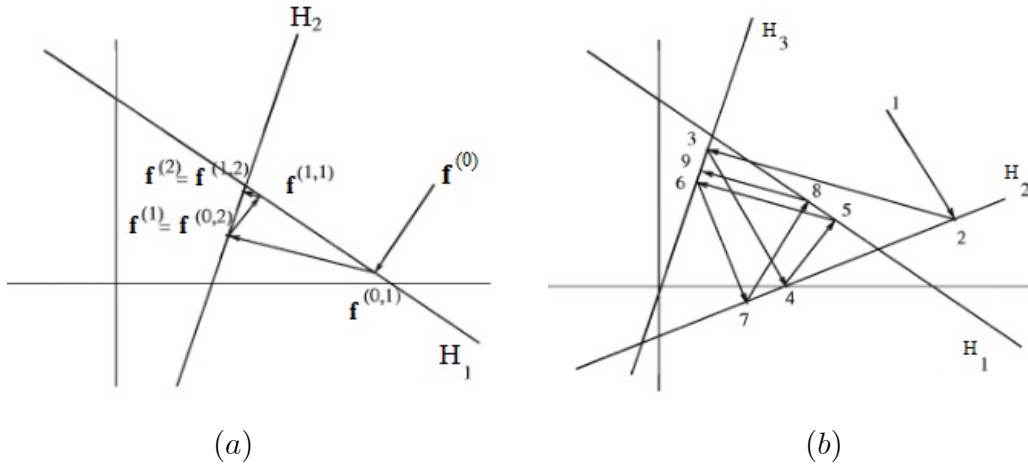
şeklinde yazılabilir ve k . iterasyon sonucu $\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1,m)}$ elde edilir.

Böylece, Kaczmarz algoritmasındaki k . iterasyonun adımları

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(k-1,0)} &\mapsto \mathbf{f}^{(k-1,0)} + \frac{b_1 - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{f}^{(k-1,0)} \rangle}{\|\mathbf{a}_1\|_2^2} \mathbf{a}_1 = \mathbf{f}^{(k-1,1)} \\
\mathbf{f}^{(k-1,1)} &\mapsto \mathbf{f}^{(k-1,1)} + \frac{b_2 - \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{f}^{(k-1,1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_2\|_2^2} \mathbf{a}_2 = \mathbf{f}^{(k-1,2)} \\
&\vdots \\
\mathbf{f}^{(k-1,m-1)} &\mapsto \mathbf{f}^{(k-1,m-1)} + \frac{b_m - \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{f}^{(k-1,m-1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_m\|_2^2} \mathbf{a}_m = \mathbf{f}^{(k-1,m)} = \mathbf{f}^{(k)}
\end{aligned}$$

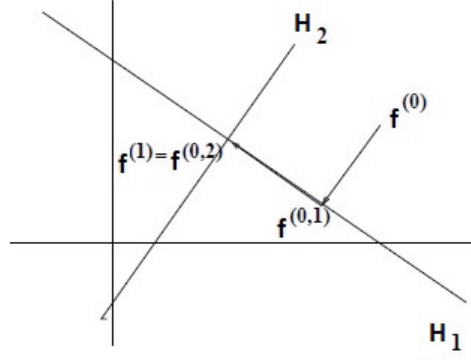
iterasyon formülleri kullanılarak gerçekleştirilir (Epstein 2007).

Kaczmarz algoritması ile ortaya çıkan $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisinin yakınsaklığı, denklem sistemindeki hiperdüzlemlerin birbirleriyle olan durumlarına bağlıdır. Eğer hiperdüzlemler kesişiyorsa, denklem sisteminin kesin çözümü vardır ve bu durumda Kaczmarz algoritması ile oluşturulan $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisi, $k \rightarrow \infty$ iken denklem sisteminin çözümüne yakınsar ($\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}$). Ancak, hiperdüzlemler tek bir noktada kesişmiyorsa, yani denklem sistemi tutarsız ise, Kaczmarz algoritması ile oluşturulan $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisi denklem sisteminin minimum norm çözümüne yakınsar. Bu iki durum Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 (a) 2×2 tutarlı denklem sistemi için Kaczmarz yaklaşımı, (b) Aşırı belirgin denklem sistemi için Kaczmarz yaklaşımı (Epstein 2007).

Kaczmarz algoritmasında, hiperdüzlemlerin birbirleriyle olan durumları, yöntemin çözüme yaklaşma sürecini etkilemektedir. Hiperdüzlemler arasındaki açı arttıkça yakınsama daha hızlı gerçekleşmektedir. Hiperdüzlemler birbirine dik ise çözüm birinci iterasyonda bulunur. Bu durum, 2×2 tipinde bir sistem için Şekil 3.2'de görülmektedir.



Şekil 3.2 Dik doğrular için Kaczmarz yaklaşımı (Epstein 2007).

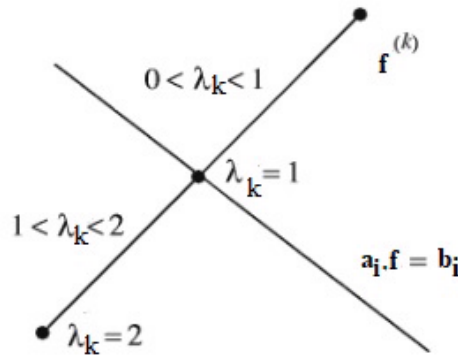
3.1.1 Gevşeme (Relaxation) Parametrelili Kaczmarz Yöntemi

Rekonstrüksiyon problemlerinde karşılaşılan denklem sistemlerinin genelde tutarsız oluşu ve verideki gürültü nedeniyle Kaczmarz yöntemlerinin çözüme yaklaşma süreci etkilenmektedir. Gevşeme parametrelerinin kullanılması ile gürültünün etkisi azaltılabilir ve çözüme yaklaşım süreci hızlandırılabilir. Gevşeme parametrelili Kaczmarz algoritmasında

$$\mathbf{f}^{(k-1,i)} = \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} + \lambda_k \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|_2^2} \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.18)$$

iterasyon formülü kullanılır.

Gevşeme parametreleri, algoritmanın çözüme yaklaşma sürecinde her bir iterasyon için seçilebilir veya sabit olarak alınabilir. Şekil 3.3'te gevşeme parametrelerinin alacağı değerlere göre iterasyon vektörlerinin bulunacağı bölgeler gösterilmektedir.



Şekil 3.3 Gevşeme parametresinin projeksiyonlara etkisi (Epstein 2007).

* $\lambda_k = 1$ ise klasik Kaczmarz algoritması elde edilir.

* $0 < \lambda_k < 1$ ise $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{f}^{(k-1)}$ ile ilgili hiperdüzlemin aynı tarafındadır.

* $\lambda_k = 2$ ise $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{f}^{(k-1)}$ in ilgili hiperdüzleme göre yansımalarıdır.

* $1 < \lambda_k < 2$ ise $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{f}^{(k-1)}$ e göre hiperdüzlemin ters tarafındadır.

Her k için, $0 < \lambda_k < 2$ ve denklem sistemi bir çözüme sahip olduğu sürece gevşeme parametrelili Kaczmarz algoritması bir çözüme yakınsar. Eğer $\{\lambda_k\}$ dizisi sifira yakınsayan bir dizi olarak seçilirse denklem sistemi bir çözüme sahip olmasa bile bir limit elde edilmektedir ve bu limit, denklem sisteminin minimum norm (en küçük kareler) çözümlüdür (Jiang and Wang 2003).

3.2 KACZMARZ YÖNTEMİNİN ÇEŞİTLERİ

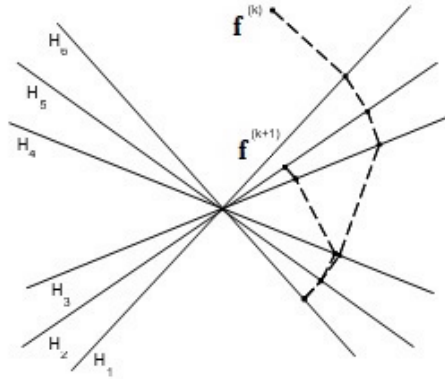
Kaczmarz algoritması, birkaç iterasyonda denklem sistemlerinin çözümüne daha iyi yaklaşım yapmak veya gürültü ve modelleme hatasının etkilerini azaltmak için farklı formlarda verilebilir. Bu formlar, hiperdüzlemlere olan projeksiyon sırasının seçimine göre belirlenir.

3.2.1 Simetrik Kaczmarz Yöntemi

Bir iterasyonda, hiperdüzlemlere olan projeksiyon sıralamasının simetrik olarak gerçekleştirildiği, Kaczmarz yönteminin bir çeşidi, simetrik Kaczmarz yöntemidir. Bu yöntemin algoritmasında, hiperdüzlemler bir tam tur dolaşıldıktan sonra geriye doğru sıralama ile projeksiyonlar alınarak bir iterasyon tamamlanır;

$$\mathbf{f}^{(k-1,i)} = \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} + \frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|_2^2} \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, m, m-1, \dots, 3, 2. \quad (3.19)$$

Tutarlı bir sistem için simetrik Kaczmarz algoritmasının bir iterasyonu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Simetrik Kaczmarz yaklaşımı (Hansen 2010).

Simetrik Kaczmarz algoritmasında bir iterasyonda m -tane hiperdüzlem üzerinde toplam $2(m - 1)$ projeksiyon yapılır.

Simetrik Kaczmarz yöntemi gevşeme (relaxation) parametreleri için uygun bir yöntemdir. $\lambda \in (0, 2)$ olarak alınabileceği gibi, her bir iterasyon adımı λ_k parametrelerine bağlı olarak da gerçekleştirilebilir.

3.2.2 Rastgele Seçimli Kaczmarz Yöntemi

Kaczmarz yönteminin bir diğer çeşidi, rastgele seçimli Kaczmarz yöntemidir. Rastgele seçimli Kaczmarz algoritmasında, projeksiyon yapılacak olan hiperdüzlem rastgele bir şekilde seçilir.

Bir $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümüne yaklaşım yapmak için keyfi başlangıç vektörü $\mathbf{f}^{(0)}$ olmak üzere rastgele seçimli Kaczmarz yöntemi için iterasyon formülü,

$$\mathbf{f}^{(k,r(i))} = \mathbf{f}^{(k-1,r(i-1))} + \frac{b_{r(i)} - \langle \mathbf{a}_{r(i)}, \mathbf{f}^{(k-1,r(i-1))} \rangle}{\|\mathbf{a}_{r(i)}\|_2^2} \mathbf{a}_{r(i)} \quad (3.20)$$

formunda verilmektedir. Burada $r(i)$, $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinden rastgele bir şekilde, $\|\mathbf{a}_{r(i)}\|_2^2$ ile orantılı olasılıkta seçilir.

Denklem sisteminin aşırı belirgin ve tutarlı olması durumunda, rastgele seçimli Kaczmarz algoritması ile elde edilen $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisinin üstel bir hızla denklem sisteminin çözümüne yakınsadığı ve bu yakınsamanın, \mathbf{A} matrisinin ölçeklenmiş koşul sayısına (Demmel 1988) bağlı olduğu (Strohmer and Vershynin 2009) çalışmasında gösterilmiştir. Ayrıca rastgele seçimli Kaczmarz yöntemi, sistemdeki denklem sayısından bağımsız olarak çözüme yaklaşır ve denklem sistemindeki denklemlerin tümünün yerine rastgele bir kısmının bilinmesi yeterlidir (Strohmer and Vershynin 2009).

Rastgele seçimli Kaczmarz yöntemi, karşılaşılan denklem sistemlerinin tutarsızlığı durumunda minimum hata ile yaklaşık çözüm elde etmek amacıyla, bir $\lambda \in (0, 2)$ sabiti ile gevşeme parametrelerinin kullanımına uygun bir yöntemdir.

3.3 YAKINSAKLIK

Teorem 3.3.1 (Epstein 2007) *Eğer*

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (3.21)$$

denklem sisteminin bir çözümü var ise Kaczmarz algoritması bu çözüme yakınsar.

İspat. Teoremin ispatı için

$$\mathbf{f}^{(0,1)}, \dots, \mathbf{f}^{(0,m)}, \mathbf{f}^{(1,0)}, \dots, \mathbf{f}^{(1,m)}, \dots \quad (3.22)$$

yerine sırasıyla

$$\mathbf{f}^{(0)}, \mathbf{f}^{(1)}, \dots, \mathbf{f}^{(k)}, \dots \quad (3.23)$$

gösterimlerini kullanmak daha uygundur. Böylece $\mathbf{f}^{(j,k)} \longleftrightarrow \mathbf{f}^{(jm+k)}$ olur. Denklem sisteminin herhangi bir çözümü \mathbf{z} olarak tanımlansın. $\mathbf{f}^{(k)}$ dan $\mathbf{f}^{(k+1)}$ e gitmek bir $\mathbf{a}_{i_k}\mathbf{f} = b_{i_k}$ hiperdüzlemine projeksiyon gerektirir. $\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}^{(k+1)}$ farkı bu hiperdüzleme diktir; $\mathbf{f}^{(k+1)}$ ve \mathbf{z} nin her ikisi de bu hiperdüzlemin üzerinde olduğundan

$$\langle \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}^{(k+1)}, \mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{z} \rangle = 0 \quad (3.24)$$

olur. Pisagor teoreminden, $\|\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}^{(k+1)}\|^2 = \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{z}\|^2$ olup,

$$\|\mathbf{f}^{(k+1)} - \mathbf{z}\|^2 \leq \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{z}\|^2. \quad (3.25)$$

$\{\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{z}\|^2\}$ dizisi negatif olmayan ve azalan olup, bir limit değerine yakınsar. Bu $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisinin sonlu yarıçaplı bir top içerisinde olduğunu gösterir ve Bolzano-Weierstrass teoreminden bu dizinin yakınsak bir $\mathbf{f}^{(k_j)} \longrightarrow \mathbf{f}^*$ alt dizisi vardır.

Her k_j indisi, $l_j \in \{0, \dots, m-1\}$ olmak üzere, $l_j + nm$ formundadır. Bu durumda bir l için $k_{j_i} = l + n_i m$ olacak şekilde sonsuz bir $\{k_{j_i}\}$ alt dizisinin var olması demektir. Tüm $\{\mathbf{f}^{(k_{j_i})} : i = 1, 2, \dots\}$ vektörleri $\mathbf{a}_l \mathbf{f} = b_l$ hiperdüzleminindedir. Bir hiperdüzlem kapalı bir küme olduğundan,

$$\mathbf{f}^* = \lim_t \mathbf{f}^{(k_{j_t})} \quad (3.26)$$

limiti de $\mathbf{a}_l \mathbf{f} = b_l$ hiperdüzlemine ait olur.

Diğer taraftan, (3.25) dikkate alınarak, $\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{z}\|$ normunun yakınsaklığından

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}^{(k_j+1)} - \mathbf{f}^{(k_j)}\| = 0. \quad (3.27)$$

Böylece $\mathbf{f}^{(k_j+1)}$ de \mathbf{f}^* limit değerine yakınsaktır. Kaczmarz algoritmasının tanımı gereği $\mathbf{f}^{(k_j+1)} \in \{\mathbf{f} : \mathbf{a}_{l+1}\mathbf{f} = b_{l+1}\}$ dir. Bu durumda, \mathbf{f}^* limiti bu hiperdüzlem üzerinde olur. Bu durum, m defa tekrar ettirilerek

$$\mathbf{f}^* \in \{\mathbf{a}_i\mathbf{f} = b_i\}, \quad \text{tüm } i = 1, 2, \dots, m \text{ için} \quad (3.28)$$

sonucuna ulaşılır. Yani \mathbf{f}^* , orjinal denklem sisteminin bir çözümlüdür. İspatı tamamlamak için ilk tanımlanan $\{\mathbf{f}^{(k)}\}$ dizisinin \mathbf{f}^* değerine yakınsadığı gösterilmelidir. Herhangi bir \mathbf{z} çözümü için, $\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{z}\|$ normu $k \rightarrow \infty$ iken bir limit değerine sahiptir. Özel olarak $\mathbf{z} = \mathbf{f}^*$ için $\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}^*\| \rightarrow \lambda$ olsun. $\{k_j\}$ alt dizisi için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}^{(k_j)} - \mathbf{f}^*\| = 0 \quad (3.29)$$

elde edilir. Böylece $\lambda = 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^*$ olur. ■

Eğer denklem sisteminin birden fazla çözümü varsa ve başlangıç vektörü olarak sıfır vektörü alırsa, Kaczmarz algoritması minimum norm çözümüne yakınsar (Epstein 2007).

Lemma 1 (Epstein 2007) *Eğer $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0}$ ise \mathbf{f}^* , minimum l_2 normu ile (3.1) denklem sisteminin minimum norm çözümüdür.*

İspat. $m \leq n$ olmak üzere $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ maksimum ranklı matris olsun. Minimum l_2 -normu ile $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{y}$ denklem sisteminin çözümü, \mathbf{u} , $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{y}$ için tek çözüm olmak üzere, $\mathbf{A}^T\mathbf{u}$ ile verilsin. Bunu görmek için; $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{y}$ nin herhangi bir çözümü \mathbf{f}_0 ve $\mathbf{v} \in \ker\mathbf{A}$ olsun öyle ki $\|\mathbf{f}_0 + \mathbf{v}\|^2$ minimaldir. Minimum norm çözümü, $\ker\mathbf{A}$ ya diktir öyle ki

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{f}_0 + \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{f}_0 + \mathbf{v} + t\mathbf{w} \rangle |_{t=0} = 2 \langle \mathbf{f}_0 + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in \ker\mathbf{A}. \quad (3.30)$$

Böylece, \mathbf{A}^T nin görüntüsünün $\ker\mathbf{A}$ nin ortogonal tümleyeni olduğu dikkate alınarak istenen gösterilmiş olur.

Kaczmarz yöntemi uygulamasında bir \mathbf{u} için bir $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}$ başlangıç vektörünün kullanıldığı kabul edilsin. Algoritma formülünden, sonraki yinelemeler de bu formdadır. Bu nedenle, bir \mathbf{u} için $\mathbf{f}^* = \mathbf{A}^T\mathbf{u}$ olur ve $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{b}$ eşitliği sağlanır. Bu durumda, \mathbf{f}^* en küçük kareler çözümüdür. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ alırsa $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0}$ olur ve lemmanın ispatı tamamlanır. ■

Aşağıda, (Strohmer and Vershynin 2009) çalışmasında yer alan rastgele seçimli Kaczmarz yönteminin yakınsaklığı ifade edilmiştir.

Teorem 3.3.2 (Strohmer and Vershynin 2009) $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözümü \mathbf{f} olsun. Rastgele seçimli Kaczmarz yöntemi

$$E \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2 \leq (1 - \kappa(\mathbf{A})^{-2})^k \|\mathbf{f}^{(0)} - \mathbf{f}\|_2^2 \quad (3.31)$$

ortalama hatası ile beklentide (expectation) \mathbf{f} çözümüne yakınsar.

İspat. Her $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{i=1}^m |\langle \mathbf{z}, \mathbf{a}_i \rangle|^2 \geq \frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_2^2} \quad (3.32)$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.32), $\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{a}_i\|_2^2$ kullanılarak

$$\sum_{i=1}^m \frac{\|\mathbf{a}_i\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_F^2} \left| \left\langle \mathbf{z}, \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|_2} \right\rangle \right|^2 \geq \kappa(\mathbf{A})^{-2} \|\mathbf{z}\|_2^2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. İspatın temel noktası (3.33) eşitsizliğinde sol tarafın, bazı rastgele değişkenlerin bir beklentisi olarak değerlendirilmesidir. Yani $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin i . denkleminin çözüm uzayı, normali $\frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|_2}$ olan $\{y : \langle y, \mathbf{a}_i \rangle = b_i\}$ hiperdüzlemidir. Rastgele Kaczmarz algoritmasındaki olasılıklar ile birlikte $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ sisteminin tüm denklemlerinin normalleri olan bir rastgele \mathbf{Z} vektörü tanımlansın:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|_2}, \quad \frac{\|\mathbf{a}_i\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_F^2} \text{ olasılığı ile, } i = 1, \dots, m. \quad (3.34)$$

(3.33) eşitsizliğinden

$$E |\langle \mathbf{z}, \mathbf{Z} \rangle|^2 \geq \kappa(\mathbf{A})^{-2} \|\mathbf{z}\|_2^2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.35)$$

$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin rastgele bir denkleminin çözüm uzayına P dik projeksiyonu, $P\mathbf{z} = \mathbf{z} - \langle \mathbf{z} - \mathbf{f}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Z}$ ile verilir.

$\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2$ hatasının her adımda ortalama olarak (önceki adımlara göre koşullandırılmış) en az $(1 - \kappa(\mathbf{A})^{-2})$ çarpımı kadar azaldığı gösterilmelidir. Bir sonraki $\mathbf{f}^{(k)}$ yaklaşımı $\mathbf{f}^{(k-1)}$ den $\mathbf{f}^{(k)} = P_k \mathbf{f}^{(k-1)}$ olarak hesaplanır, burada P_1, P_2, \dots rastgele P projeksiyonun bağımsız olarak gerçekleşmesi durumlarıdır. $\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}^{(k)}$ vektörü, P_k nın çekirdeğindedir ve üzerine

P_k projeksiyonunun yapıldığı, $\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}$ vektörünü içeren, denklemin çözüm uzayına diktir (\mathbf{f} vektörü tüm denklemlerin çözümüdür). Bu iki vektörün dikliğinden,

$$\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2 = \|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2^2 - \|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}^{(k)}\|_2^2$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için $\|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}^{(k)}\|_2^2$ alttan sınırlandırılmalıdır. $\mathbf{f}^{(k)}$ nın tanımı ile

$$\|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}^{(k)}\|_2^2 = \langle \mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}, \mathbf{Z}_k \rangle$$

olur, burada $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots$, rastgele \mathbf{Z} vektörünün bağımsız gerçekleşmesi durumlarıdır. Böylece

$$\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2 \leq \left(1 - \left| \left\langle \frac{\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2}, \mathbf{Z}_k \right\rangle \right|^2\right) \|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2^2$$

olur. Şimdi, rastgele $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_{k-1}$ vektörlerinin seçimine bağlı olarak her iki tarafın beklentisi alınır

$$E_{\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k-1}\}} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2 \leq \left(1 - E_{\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k-1}\}} \left| \left\langle \frac{\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2}, \mathbf{Z}_k \right\rangle \right|^2\right) \|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2^2.$$

(3.35) ve bağımsızlık kabulü ile

$$E_{\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k-1}\}} \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2 \leq (1 - \kappa(\mathbf{A})^{-2}) \|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2^2.$$

Her iki tarafın tam beklentisi dikkate alınır

$$E \|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2^2 \leq (1 - \kappa(\mathbf{A})^{-2}) E \|\mathbf{f}^{(k-1)} - \mathbf{f}\|_2^2$$

olur ve tümevarım ile ispat tamamlanır. ■

Kaczmarz yönteminin genelleştirilmiş formu olan blok versiyonu (Eggermont et al. 1981) için yakınsaklık çalışmaları yapılarak, bazı sonuçlar ortaya konulmuştur. Bu yakınsaklık sonuçları, \mathbf{A} matrisinin her bir satırı blok olarak alındığında klasik Kaczmarz yöntemi için de geçerli olmaktadır:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)} + \lambda_n \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}_{[n]}^T \mathbf{W}_{[n]} (b_{[n]} - \mathbf{A}_{[n]} \mathbf{f}^{(n)}) \quad (3.36)$$

burada, λ_n , gevşeme parametresi, \mathbf{V} ve \mathbf{W} sırasıyla n ve m -mertebeden pozitif tanımlı köşegen matrisler olup, \mathbf{A} matrisinin belirli sayıdaki satırları ile iterasyonlar yapılır. Bir $B = \{1, \dots, m\}$ indis kümesi T adet boş olmayan B_t alt kümelerine parçalsın öyle ki,

$$B = \{1, \dots, m\} = \bigcup_{1 \leq t \leq T} B_t. \quad (3.37)$$

B_t alt kümeleri, $M(t) \geq 1$ indislerinden oluşan

$$B_t = \{i_1^t, \dots, i_{M(t)}^t\} \quad (3.38)$$

kümeleridir ve ayrık olmalarına gerek yoktur.

$n \geq 0$ için $[n] \triangleq n \pmod{T} + 1$ olsun. Böylece \mathbf{A} , \mathbf{b} ve \mathbf{W} matrislerinin blok yapıları şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{i_1^t} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{i_{M(t)}^t} \end{pmatrix}_{M(t) \times N}, \quad \mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} b^{i_1^t} \\ \vdots \\ b^{i_{M(t)}^t} \end{pmatrix}_{M(t) \times 1}, \\ \mathbf{W}_t &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{i_1^t} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{W}^{i_{M(t)}^t} \end{pmatrix}_{M(t) \times M(t)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Burada $\mathbf{A}^{i_1^t}$, \mathbf{A} nin i . satırı, $b^{i_1^t}$, \mathbf{b} nin i . bileşeni ve $\mathbf{W}^{i_1^t}$, \mathbf{W} nin i . köşegen elemanıdır. İterasyonlar $n = kT$ den $n = (k+1)T - 1$ e kadardır. Yani bir iterasyon $\mathbf{f}^{(kT)}$ den başlar $\mathbf{f}^{((k+1)T)}$ de son bulur.

(3.36) iterasyon şemasından $\mathbf{V} = \mathbf{I}$, $\mathbf{W}^i = \frac{1}{\|\mathbf{A}_i\|^2}$, $B_t = \{t\}$, $t = 1, \dots, M$, $T = M$ ve $\lambda_n = 1$ için (klasik) Kaczmarz yöntemi elde edilir.

Theorem 3.3.3 (Jiang and Wang 2003) $t = 1, \dots, T$ için, $\|\mathbf{A}_t\|_{\mathbf{V}, \mathbf{W}} \leq \rho$ ve her $k \geq 0$ için, $0 \leq \rho^2 \lambda_k \leq 2$ olacak şekilde $\rho > 0$ var olsun. $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ tutarlı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min(\rho^2 \lambda_k, 2 - \rho^2 \lambda_k) = +\infty \quad (3.40)$$

koşulu sağlanıyorsa, ya da $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ tutarlı veya tutarsız olmak üzere, (3.37) ayrık ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = +\infty \quad (3.41)$$

koşulu sağlanıyorsa, (3.36) ile oluşan $\{\mathbf{f}^{(n)}\}$ dizisi (3.7) normal denkleminin çözümüne yakınsar.

Bu teoremin ispatı, (3.36) iterasyon şemasının daha basit formu için elde edilen ve aşağıda verilen (3.42) iterasyon şemasının yakınsaklığına dayanmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(n)} &= \mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}^{(n)}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}}, \\ \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{b} \end{aligned}$$

olsun. $t = 1, 2, \dots, T$ için (3.39) ile

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{W}_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}_t \mathbf{V}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\bar{\mathbf{b}}_t = \mathbf{W}_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}_t$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \mathbf{z}^{(n)} + \lambda_n \mathbf{G}_{[n]}^T (\bar{\mathbf{b}}_{[n]} - \mathbf{G}_{[n]} \mathbf{z}^{(n)}) \quad (3.42)$$

elde edilir. $\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{b}$ sistemi,

$$\mathbf{G}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{b}} \quad (3.43)$$

sistemine döndürür ve bu sisteminin normal denklemi

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{z} = \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{b}} \quad (3.44)$$

olur.

Teorem 3.3.4 (Jiang and Wang 2003) $t = 1, \dots, T$ için, $\|\mathbf{G}_t \mathbf{G}_t^T\| \leq \rho^2$ ve her $k \geq 0$ için, $0 \leq \rho^2 \lambda_k \leq 2$ olacak şekilde $\rho > 0$ var olsun. (3.43) tutarlı olmak üzere, (3.40) koşulu sağlanıyorsa, ya da (3.43) tutarlı veya tutarsız olmak üzere (3.37) ayrık ve (3.41) geçerli ise $\{\mathbf{z}^{(n)}\}$ (3.44) normal denkleminin çözümüne yakınsar.

3.4 YARI-YAKINSAKLIK

Rekonstrüksiyon problemlerinde karşılaşılan gürültülü veri içeren

$$\mathbf{A}\mathbf{f} \simeq \mathbf{b} \quad (3.45)$$

denklemlerinin genellikle tutarsız yapıda olması nedeniyle, çözüm yaklaşık olarak araştırılmaktadır. (3.45) sisteminde $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + \delta\mathbf{b}$ biçiminde, $\bar{\mathbf{f}}$ kesin çözüm (görüntü) olmak üzere, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{f}}$ gürültüsüz verisi ve $\delta\mathbf{b}$ toplamsal gürültüsünün toplamıdır.

Kaczmarz yöntemi ile (3.45) sisteminin çözümüne yaklaşım yapılırken karşılaşılan hata değerleri ilk birkaç iterasyonda azalmakta iken belirli bir iterasyon adımından sonra bu hata, gürültü hatasının etki etmeye başlamasıyla giderek artmaktadır.

Hata verisinin

$$\mathbf{f}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}^{(k)} + \bar{\mathbf{f}}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}} \quad (3.46)$$

şeklinde ayrıştırılması durumunda (Engl et al. 1996), her bir iterasyon adımı için hata

$$\|\mathbf{f}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}\|_2 \leq \left\| \mathbf{f}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}^{(k)} \right\|_2 + \|\bar{\mathbf{f}}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}\|_2 \quad (3.47)$$

olur. Burada $\left\| \mathbf{f}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}^{(k)} \right\|_2$, sisteme dahil edilen gürültüden kaynaklanan gürültü hatası, $\|\bar{\mathbf{f}}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}\|_2$ ise iterasyon hatası olup, gürültü olmasa bile sistem içerisinde iterasyon ile yapılan yaklaşımdan ortaya çıkmaktadır. İterasyon hatası, ilk bir kaç iterasyon ile $\bar{\mathbf{f}}^{(k)}$ vektörlerinin $\bar{\mathbf{f}}$ çözümüne yakınsaması nedeniyle giderek azalır. Ancak, iterasyon adımları ilerledikçe, $\left\| \mathbf{f}^{(k)} - \bar{\mathbf{f}}^{(k)} \right\|_2$ gürültü hatasındaki artış ile birlikte toplam hata artmaya başlar. Bu durum yarı-yakınsama olarak ifade edilmektedir (Natterer 1986).

Kaczmarz yönteminin yarı-yakınsaklık analizi ile ilgili çalışmalar blok versiyon için yapılmış olup, (Elfving et al. 2014) çalışmasında gürültü hatası için bir üst sınır elde edilmiştir.

Algoritma 3.4.1 (*Blok Kaczmarz algoritması*)

Adım 1. Keyfi başlangıç vektörü $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0,0)}$.

Adım 2. $k = 1, 2, \dots$ için

$$\mathbf{f}^{(k-1,i)} = \mathbf{f}^{(k-1,i-1)} + \lambda \mathbf{a}_i^T \mathbf{M}_i (b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{f}^{(k-1,i-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Adım 3. k . iterasyon sonucu $\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1,p)}$.

Blok Kaczmarz algoritmasında $p = m$ olduğunda (klasik) Kaczmarz algoritması elde edilir. Bu durumda $\mathbf{M}_i = \frac{1}{\|\mathbf{a}_i\|^2}$ olur.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{L}^T, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{D} + \lambda\mathbf{L})^{-1} \text{ ve } \delta = \|\mathbf{A}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{b}\|$$

olsun. Burada \mathbf{L} , kesin alt üçgensel matris ve $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^T)$ dir. Bu durumda, blok Kaczmarz yönteminde iterasyon formülü

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{A}^T \mathbf{M} (b - \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k-1)})$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.4.2 (Elfving et al. 2014)

$$\psi_k(\sigma, \lambda) \equiv \frac{1 - (1 - \lambda\sigma^2)^k}{\sigma}$$

olsun. Blok Kaczmarz algoritmasındaki gürültü hatası, $\lambda \in (0, 2)$ olmak üzere,

$$\|\mathbf{e}_k^N\| \leq \frac{\delta}{\sigma_r} \psi_k(\sigma_r, \lambda) + O(\sigma_r^2)$$

olacak şekilde sınırlıdır. Burada σ_r , $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M} \mathbf{A}$ nın sıfırdan farklı en küçük singüler değeridir.

Blok Kaczmarz algoritmasının yarı-yakınsaklık analizi, her bir bloğun, \mathbf{A} matrisinin bir satırı olarak alınması ile Kaczmarz yöntemleri için de geçerli olmaktadır.

Yarı-yakınsak analizinde $\lambda \in (0, 2)$ iken hatanın üst sınırı

$$\|\mathbf{e}_k^N\| \leq \frac{\sqrt{\lambda}\delta}{\sigma_r} \sqrt{k} + O(\sigma_r^2)$$

olarak elde edilir (Elfving et al. 2014). $\lambda = 1$ için Kaczmarz algoritmasındaki hatanın üst sınırı $\frac{\delta}{\sigma_r} \sqrt{k}$ olur. Böylece, artan iterasyon sayısına bağlı olarak gürültü hatasının artacağı görülmektedir.



BÖLÜM 4

TAU-P DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN ART UYGULAMALARI

Bu bölümde $tau-p$ dönüşümünün tersi için Bölüm 3'te tanıtilan Kaczmarz, simetrik Kaczmarz ve rastgele seçimli Kaczmarz yöntemlerinin yakınsaklık ve yarı-yakınsaklık davranışlarının analizine yönelik bazı uygulamalara yer verilmiştir. Sayısal hesaplamalarda MATLAB programı kullanılmış ve AIR Tools (Hansen and Saxild-Hansen 2012) MATLAB paketinden yararlanılmıştır. AIR Tools MATLAB paketi Radon dönüşümünü temel almakta olup, bu çalışma kapsamında, ilgili program paketinde $tau-p$ dönüşümünün uygulanması için gerekli değişiklikler yapılmıştır.

Uygulamalarda öncelikle bir $f(x, y)$ fonksiyonu tanımlanmış ve bu fonksiyonun $tau-p$ dönüşümü verileri hesaplanmıştır. Pratikte, gürültü (noise) etkisinden dolayı hesaplanan bu dönüşüm verilerini görüntüleme ile ilgili problemlerde direkt olarak kullanabilmek genellikle mümkün değildir. Bu nedenle, cebirsel rekonstrüksiyon teknikleri kullanılarak $f(x, y)$ fonksiyonuna yaklaşımlar yapılırken gürültüsüz dönüşüm verilerinin yanı sıra, %1, %3 ve %5 oranında gürültü (Gauss beyaz gürültüsü) eklenen dönüşüm verileri kullanılmıştır.

$f(x, y)$ fonksiyonunun kesin değerleri ile yapılan yaklaşımlar sonucu elde edilen değerlerin karşılaştırılması relatif hata hesabı ile yapılmıştır. Relatif hata, kesin değerlerin \mathbf{f} vektörü ile k adet iterasyon ile hesaplanan $\mathbf{f}^{(k)}$ yaklaşımı için

$$\frac{\|\mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}$$

oranı ile hesaplanmıştır, burada $\|\cdot\|_2$, Euclid normudur.

Ele alınan örneklerde $f(x, y)$ fonksiyonları desteği $[-1, 1] \times [-1, 1]$ kare bölgesinde olacak şekilde

$$C_i(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-r_i^2}{r_i^2 - (x - a_i)^2 - (y - b_i)^2}\right) & , (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 < r_i^2 \text{ ise,} \\ 0 & , \text{ diğ}er \text{ durumda,} \end{cases} \quad (4.1)$$

fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlanmıştır.

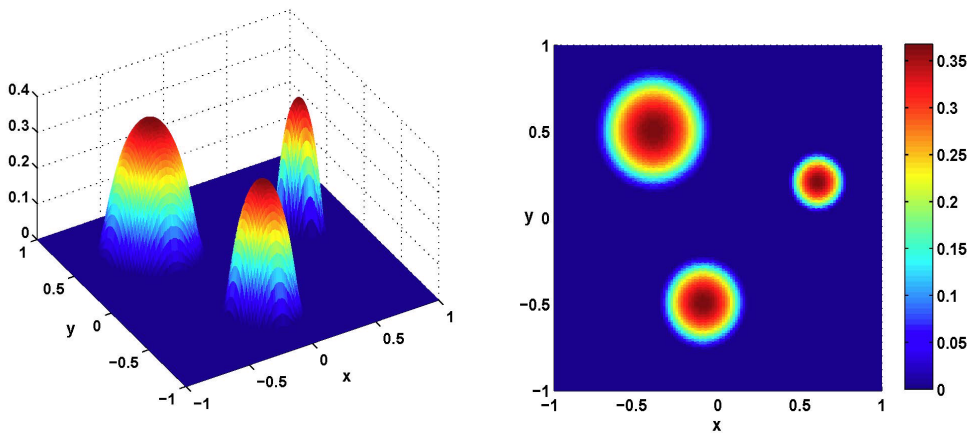
Hesaplamalar, $[-1, 1] \times [-1, 1]$ kare bölgesi için 50×50 düzgün ızgara oluşturularak, bu ızgaranın her bir düğüm noktasında $f(x, y)$ fonksiyonunun 2500 ayrıık değeri için yapılmıştır. $(0, \pi)$ aralığında $\theta = 5^\circ, 10^\circ, \dots, 175^\circ$ olmak üzere θ için 35 farklı değer ve $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ aralığının düzgün parçalanması ile t için 75 farklı değer kullanılarak toplam 2625 projeksiyon verisinden yararlanılmıştır.

Örnek 4.0.1 $f(x, y)$ fonksiyonu Tablo 4.1'de verilen parametreler ile $C_i(x, y)$ fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlansın.

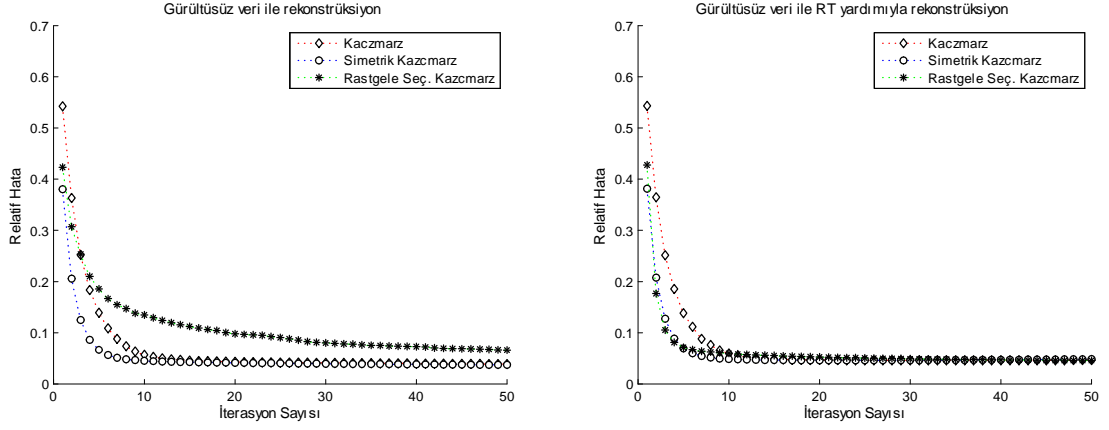
Tablo 4.1 $C_i(x, y)$ için parametreler (Örnek 4.0.1).

i	Merkez (a_i, b_i)	Yarıçap r_i
1	$(0.6, 0.2)$	0.2
2	$(-0.4, 0.5)$	0.4
3	$(-0.1, -0.5)$	0.3

$f(x, y)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 4.1'de verilmiştir.

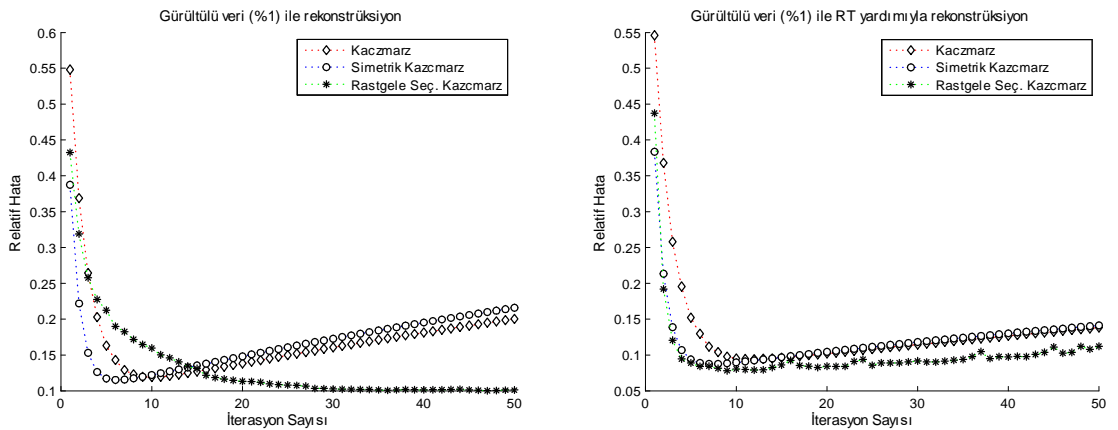


Şekil 4.1 f fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.1).

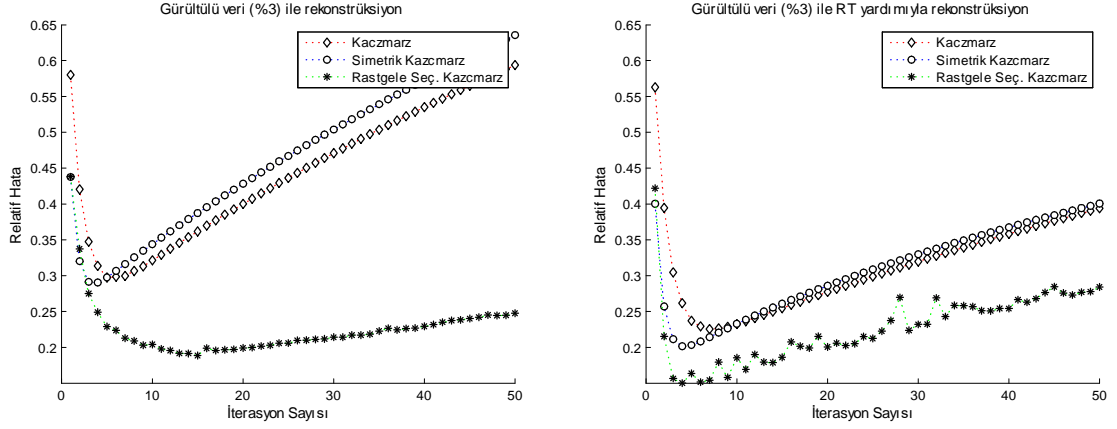


Şekil 4.2 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).

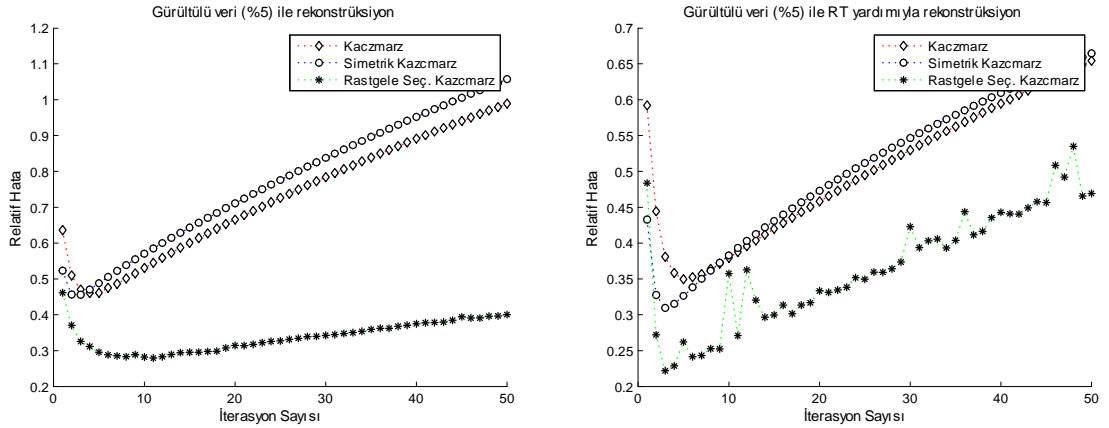
Kaczmarz, simetrik Kaczmarz ve rastgele seçimli Kaczmarz yöntemleri kullanılarak, ilk 50 iterasyon için relatif hata değerleri, gürültüsüz veri için Şekil 4.2’de ve %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için sırasıyla Şekil 4.3, 4.4 ve 4.5’te verilmiştir. Şekil 4.2’de, gürültüsüz veri kullanıldığında, rekonstrüksiyon probleminin direkt ayrık formu ve Radon dönüşümü yardımıyla ayrık formu için her üç yöntemin de benzer yakınsama davranışı gösterdiği ve iterasyon sayısı arttıkça relatif hatanın giderek azaldığı görülmektedir. Bununla birlikte Şekil 4.3, 4.4 ve 4.5’te, dönüşüm verilerine dahil edilen gürültü oranındaki artışın neden olduğu gürültü hatası ile belirli bir iterasyon adımına kadar azalmakta olan relatif hata değerlerinin daha sonra artmakta olduğu görülmektedir. Bu durum yaklaşım için kullanılan iterasyon yöntemlerinin yarı-yakınsaklık davranışı olarak ifade edilmektedir.



Şekil 4.3 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.4 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.5 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.1).

Şekil 4.3, 4.4 ve 4.5'te görülen, %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri ve bu değerlerin hangi iterasyon sayısı için elde edildiği sırasıyla Tablo 4.2, 4.3 ve 4.4'te ifade edilmiştir. Dönüşüm verilerine dahil edilen gürültü oranları artarken minimum relatif hata değerleri de artmakla beraber, bu değerlerin elde edildiği iterasyon sayıları giderek azalmaktadır. Bunun sebebi, artan gürültü hatasının kullanılan yöntemlerdeki azalmakta olan iterasyon hatasına daha düşük iterasyon adımlarında üstün gelmesidir.

Tablo 4.2 %1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).

	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Kaczmarz	10	0.1193	12	0.0942
Sim. Kaczmarz	6	0.1153	7	0.0876
Rast. Kaczmarz	47	0.1001	9	0.0783

Tablo 4.3 %3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).

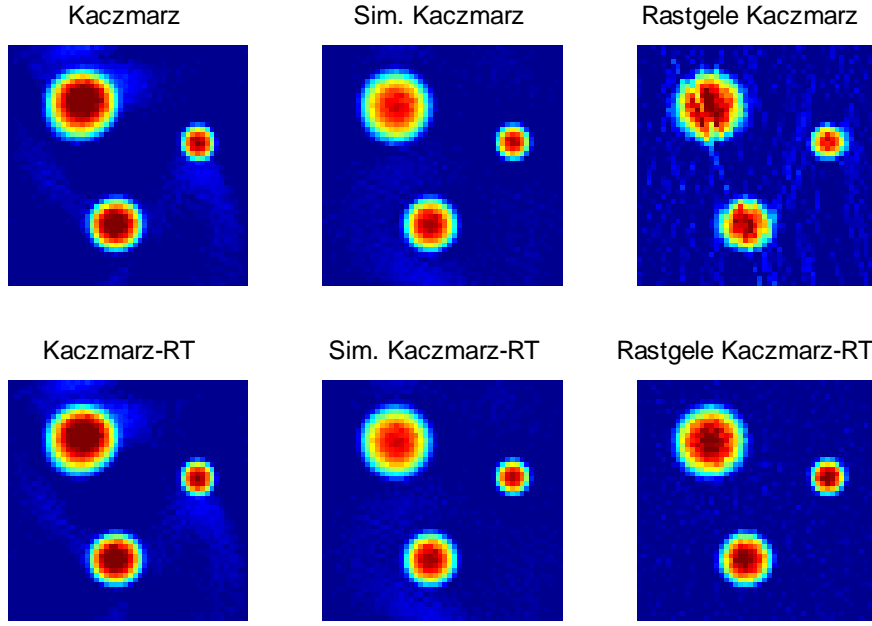
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Kaczmarz	5	0.2976	7	0.2254
Sim. Kaczmarz	4	0.2908	4	0.2017
Rast. Kaczmarz	15	0.1888	4	0.1503

Tablo 4.4 %5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.1).

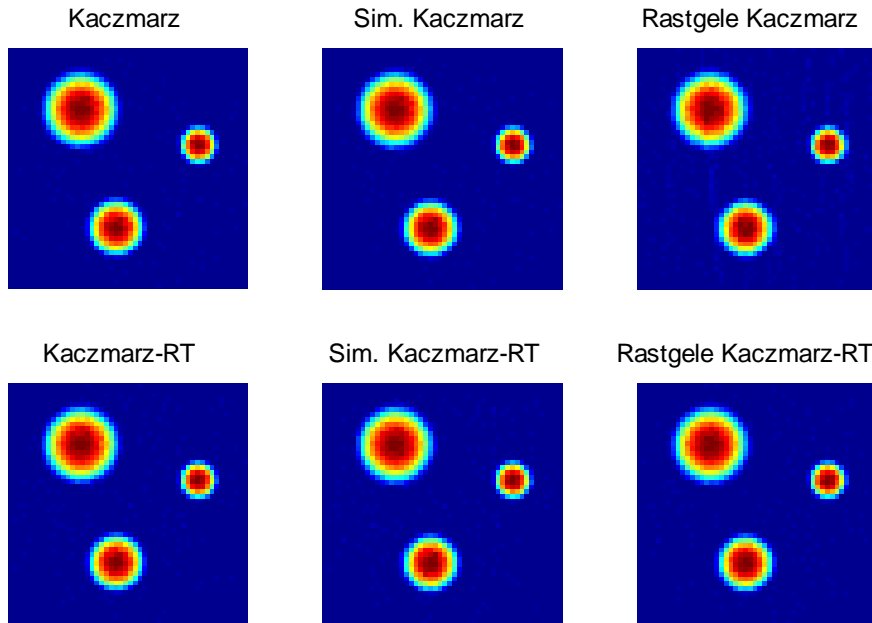
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Kaczmarz	4	0.4615	5	0.3498
Sim. Kaczmarz	3	0.4561	3	0.3096
Rast. Kaczmarz	11	0.2795	3	0.2221

Şekil 4.3-4.5 ve Tablo 4.2-4.4'ten, gürültülü veri kullanıldığı durumlarda, rekonstrüksiyon probleminin Radon dönüşümü yardımıyla ayırık formu için elde edilen relatif hata değerlerinin, direkt ayırık formu için elde edilenlere göre daha küçük olduğu ve genel olarak rastgele seçimli Kaczmarz yönteminin, Kaczmarz ve simetrik Kaczmarz yöntemlerine göre gürültü oranından daha az etkilendiği görülmektedir.

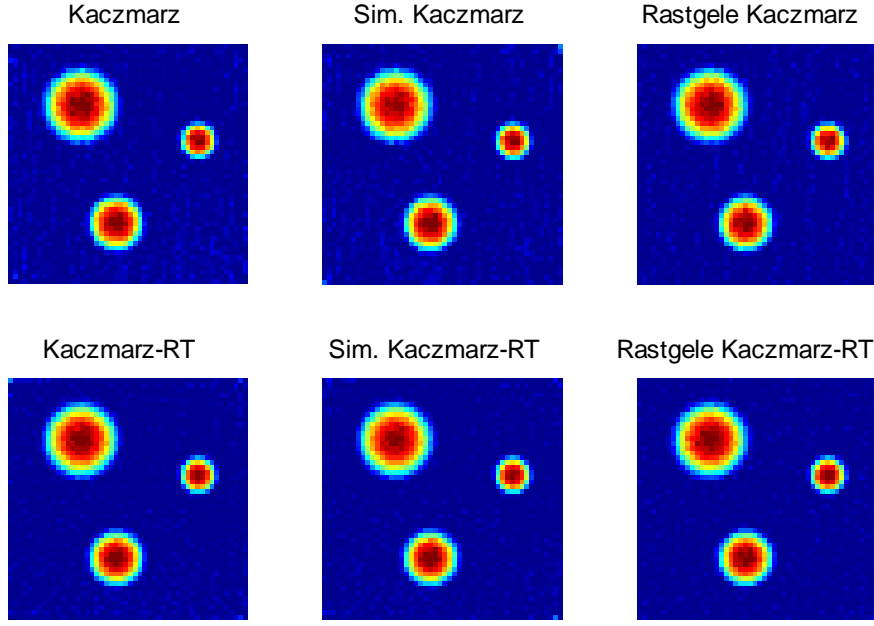
Aşağıda, yapılan yaklaşımlar sonucu f fonksiyonu için elde edilen yaklaşık görüntülere yer verilmiştir. Gürültüsüz veri için 3 iterasyon ve 50 iterasyon ile elde edilen sonuçlar Şekil 4.6-4.7'de, %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için ise Tablo 4.2-4.4'te verilen minimum relatif hatanın elde edildiği iterasyon sayısı ve 50 iterasyon ile elde edilen sonuçlar Şekil 4.8-4.13'te gösterilmiştir.



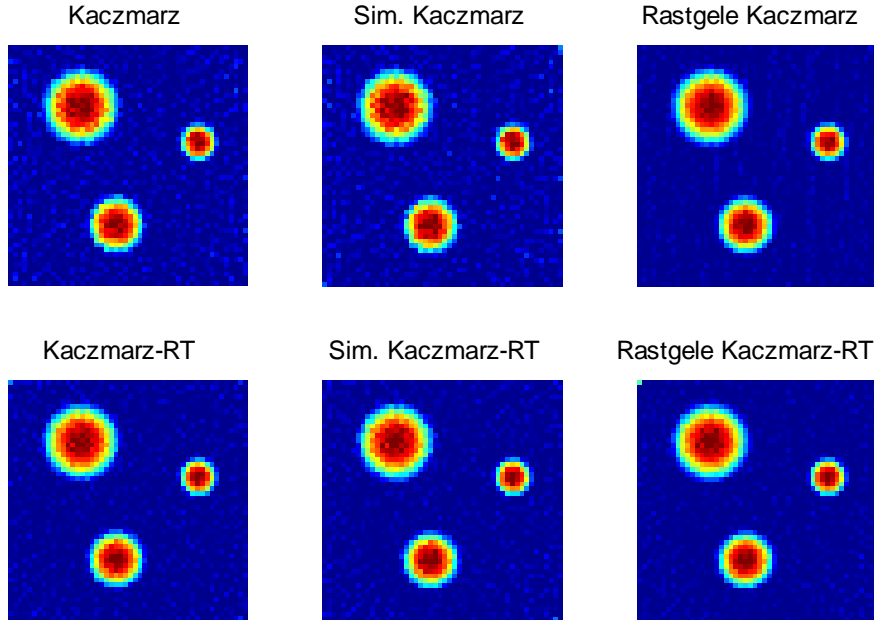
Şekil 4.6 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=3 (Örnek 4.0.1).



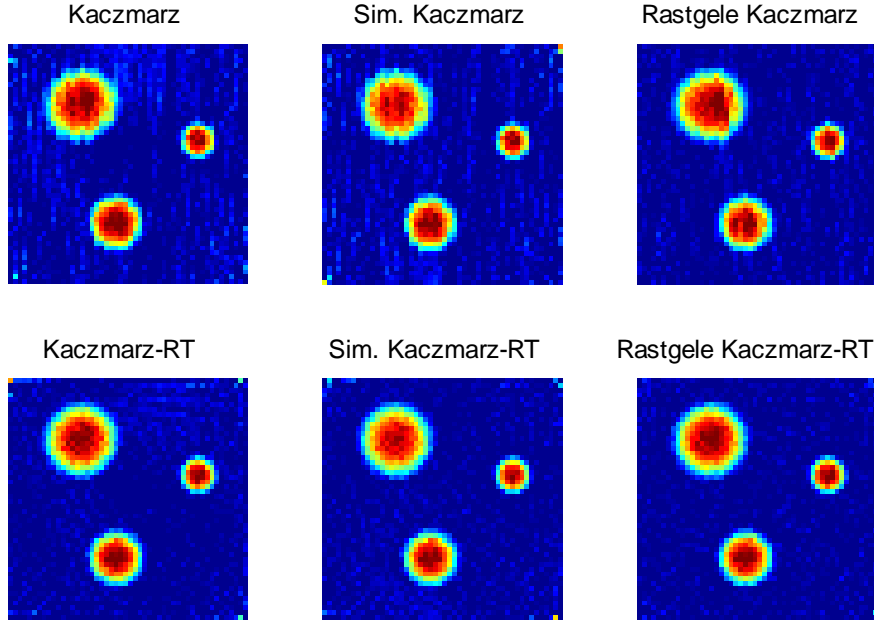
Şekil 4.7 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).



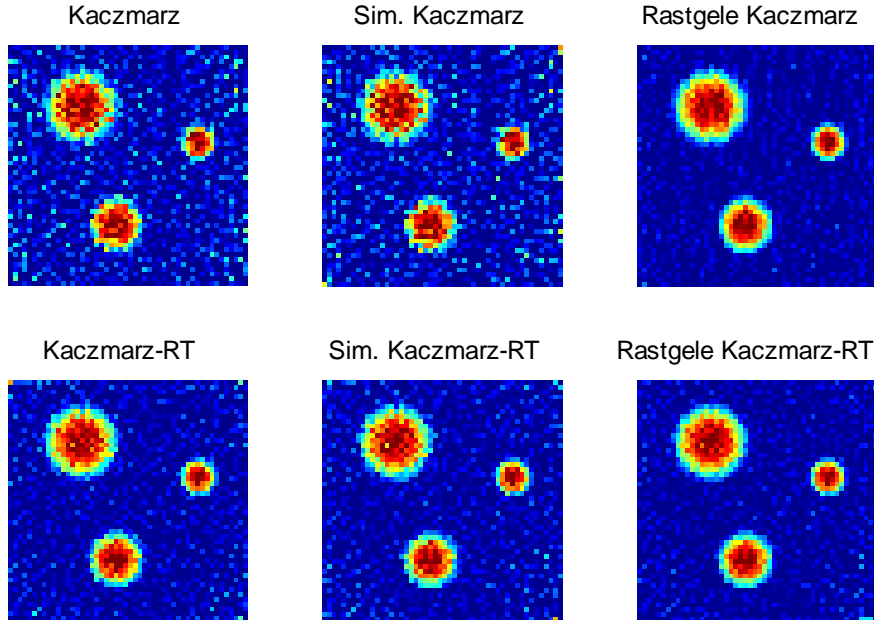
Şekil 4.8 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).



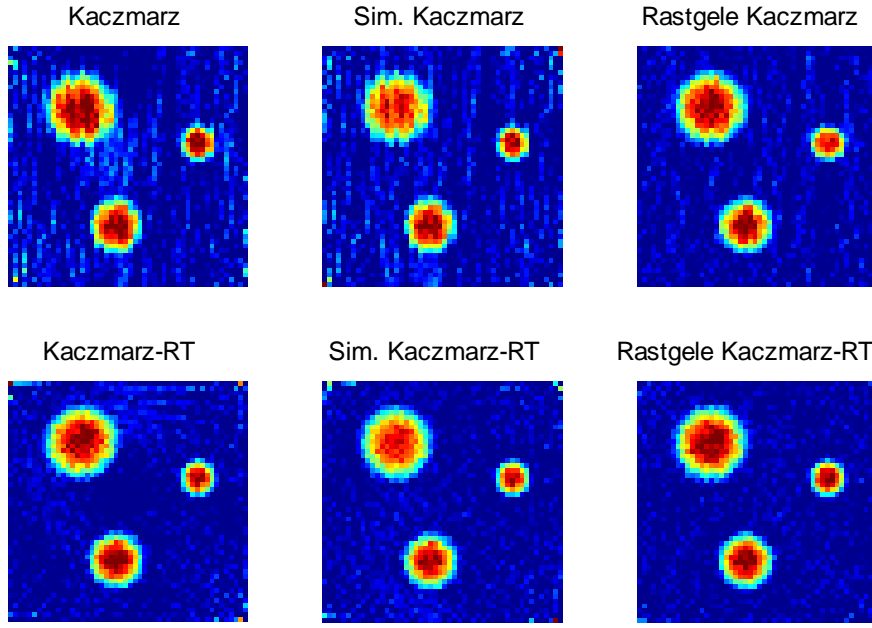
Şekil 4.9 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).



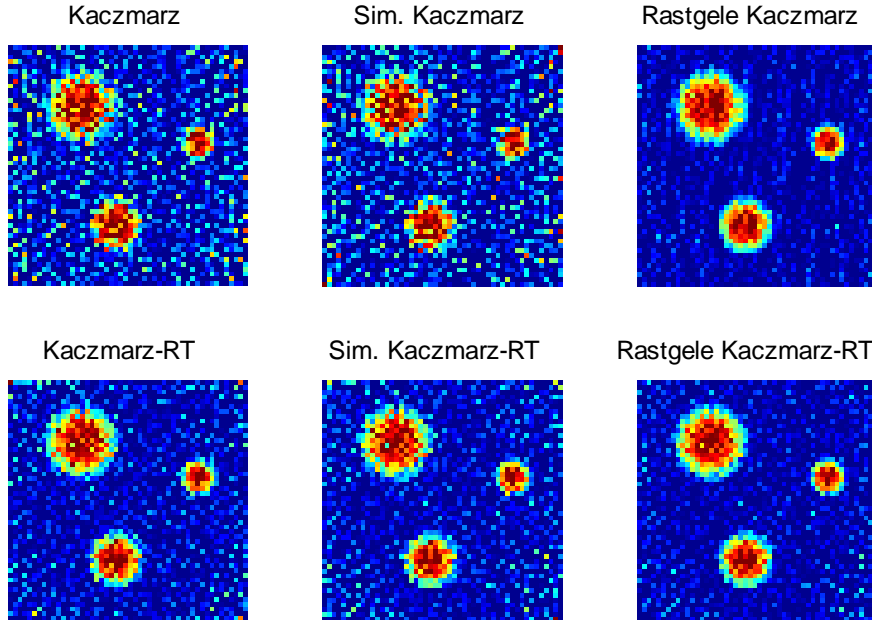
Şekil 4.10 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.11 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).



Şekil 4.12 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.1).



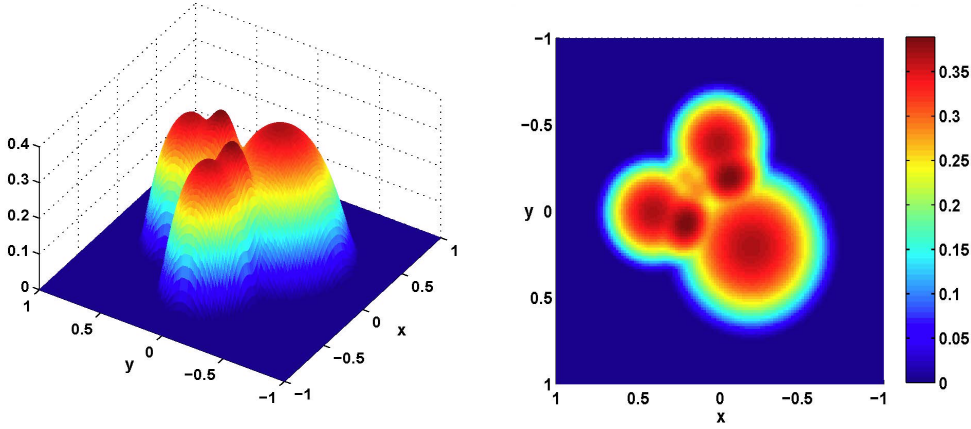
Şekil 4.13 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.1).

Örnek 4.0.2 $f(x, y)$ fonksiyonu Tablo 4.5'te verilen parametreler ile $C_i(x, y)$ fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlansın.

Tablo 4.5 $C_i(x, y)$ için parametreler (Örnek 4.0.2).

i	Merkez (a_i, b_i)	Yarıçap r_i
1	$(0.2, -0.2)$	0.6
2	$(0, 0.4)$	0.4
3	$(-0.4, 0)$	0.4

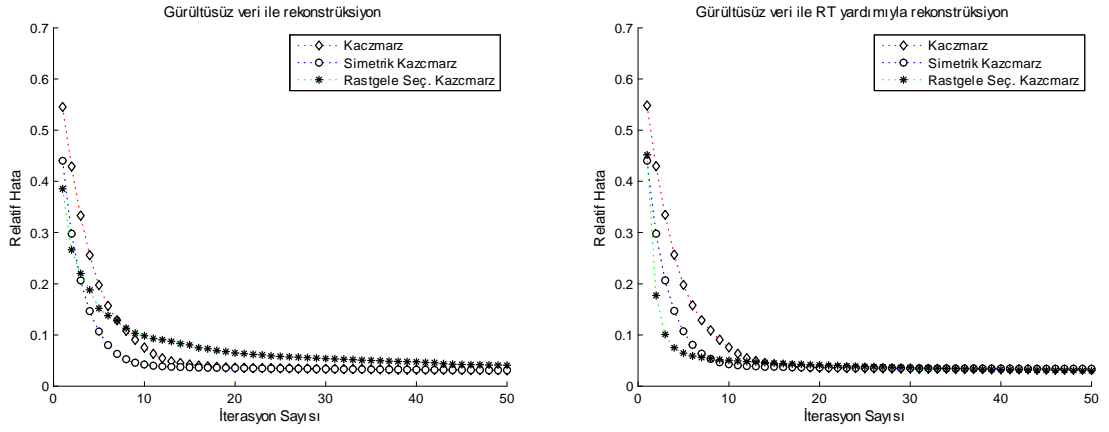
$f(x, y)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 4.14'te verilmiştir.



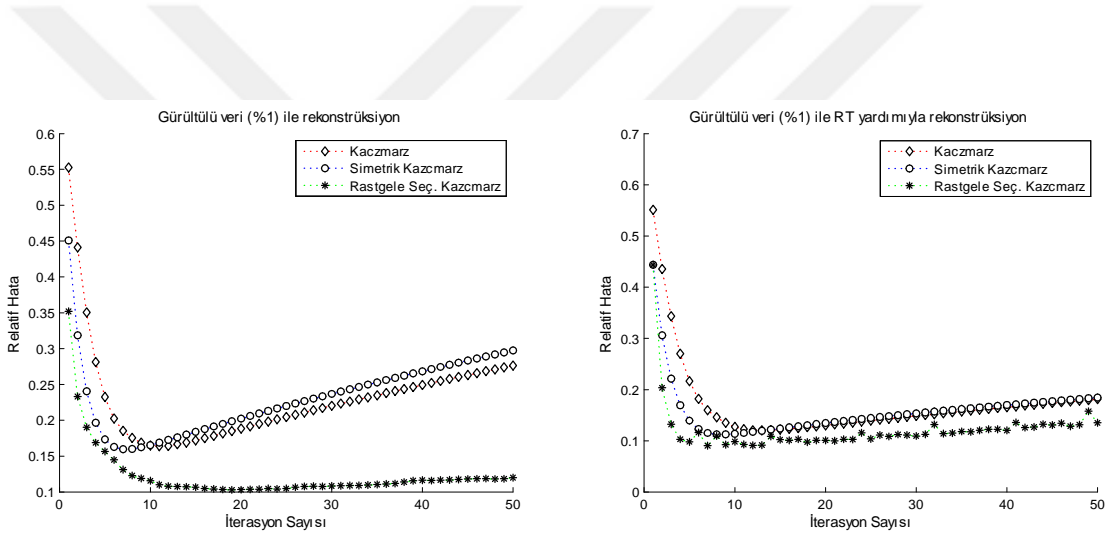
Şekil 4.14 f fonksiyonunun grafiği (Örnek 4.0.2).

Yukarıda tanımlanan f fonksiyonunun τ - p projeksiyonlarından yaklaşık olarak elde edilmesinde hesaplanan relatif hata değerleri, gürültüsüz veri için ve %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için sırasıyla Şekil 4.15, 4.16, 4.17 ve 4.18'de verilmiştir. %1, %3 ve %5 oranında gürültülü veri için elde edilen minimum relatif hata değerleri ve bu değerlerin hangi iterasyon sayısı için elde edildiği sırasıyla Tablo 4.6, 4.7 ve 4.8'de ifade edilmiştir. Ayrıca, f fonksiyonu için yapılan yaklaşımlar ile elde edilen yaklaşık görüntüler Şekil 4.19-4.26'da gösterilmiştir.

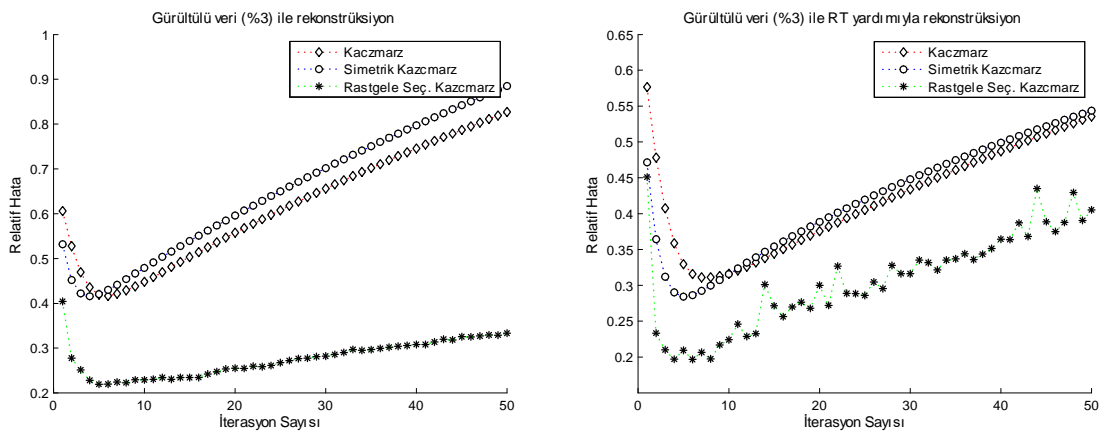
Tablo 4.5'te verilen parametreler ile $C_i(x, y)$ fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlanan f fonksiyonu için, rekonstrüksiyon probleminin direkt ayrık formu ve Radon dönüşümü yardımıyla ayrık formu kullanılarak uygulanan her üç yöntemin de Örnek 4.0.1'deki ile benzer yakınsama davranışı gösterdiği görülmektedir.



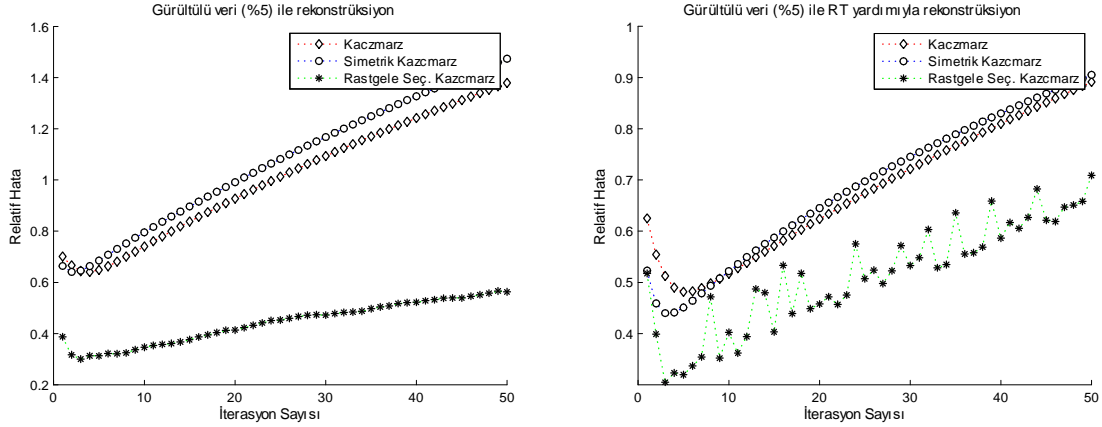
Şekil 4.15 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.16 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.17 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.18 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon için relatif hata (Örnek 4.0.2).

Tablo 4.6 %1 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).

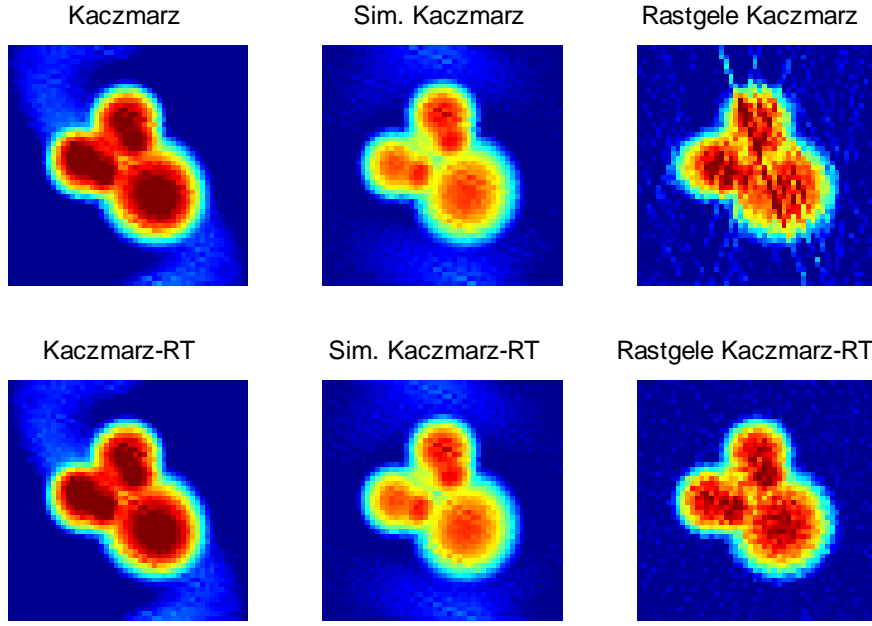
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Kaczmarz	11	0.1640	13	0.1202
Sim. Kaczmarz	7	0.1598	9	0.1124
Rast. Kaczmarz	19	0.1031	7	0.0904

Tablo 4.7 %3 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).

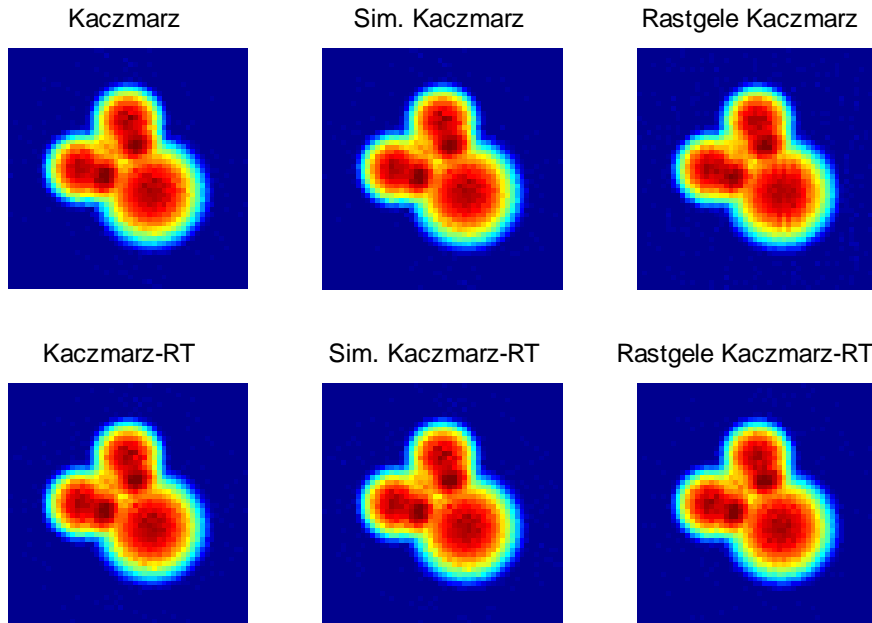
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Kaczmarz	6	0.4169	7	0.3112
Sim. Kaczmarz	4	0.4157	5	0.2844
Rast. Kaczmarz	5	0.2195	6	0.1969

Tablo 4.8 %5 gürültülü veri için minimum relatif hata değerleri (Örnek 4.0.2).

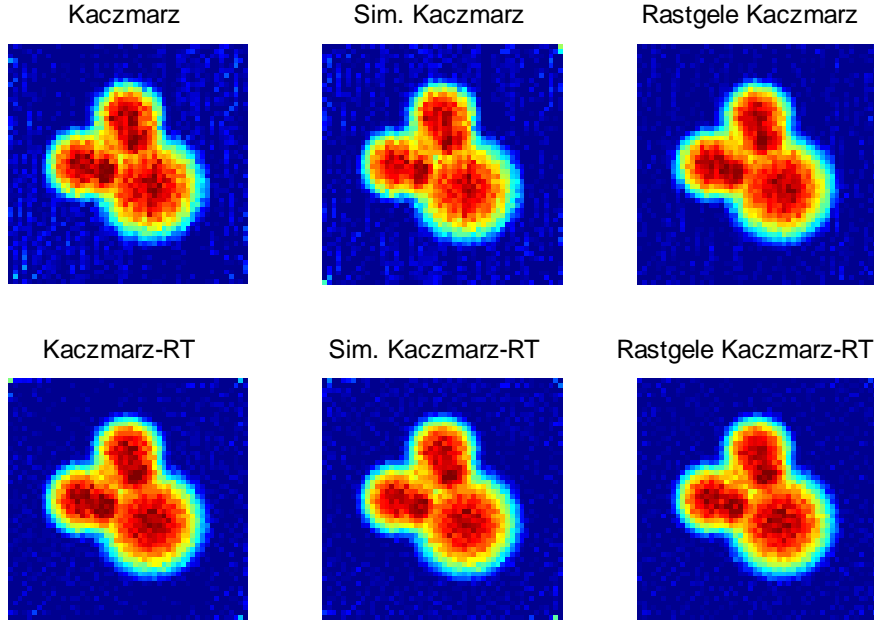
	Direkt		RT yardımıyla	
	İterasyon	Min. relatif hata	İterasyon	Min. relatif hata
Kaczmarz	4	0.6411	5	0.4816
Sim. Kaczmarz	2	0.6406	3	0.4398
Rast. Kaczmarz	3	0.3004	3	0.3049



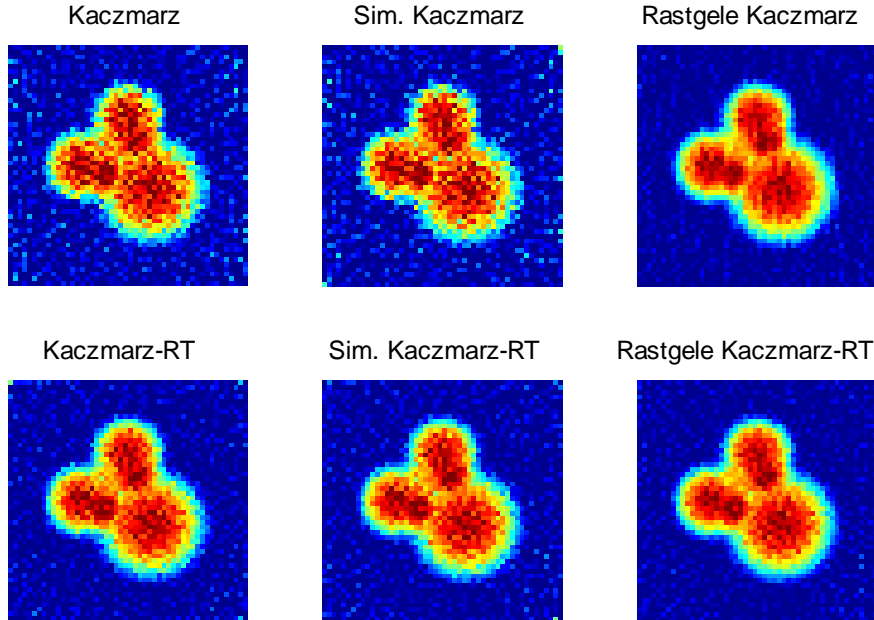
Şekil 4.19 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=3 (Örnek 4.0.2).



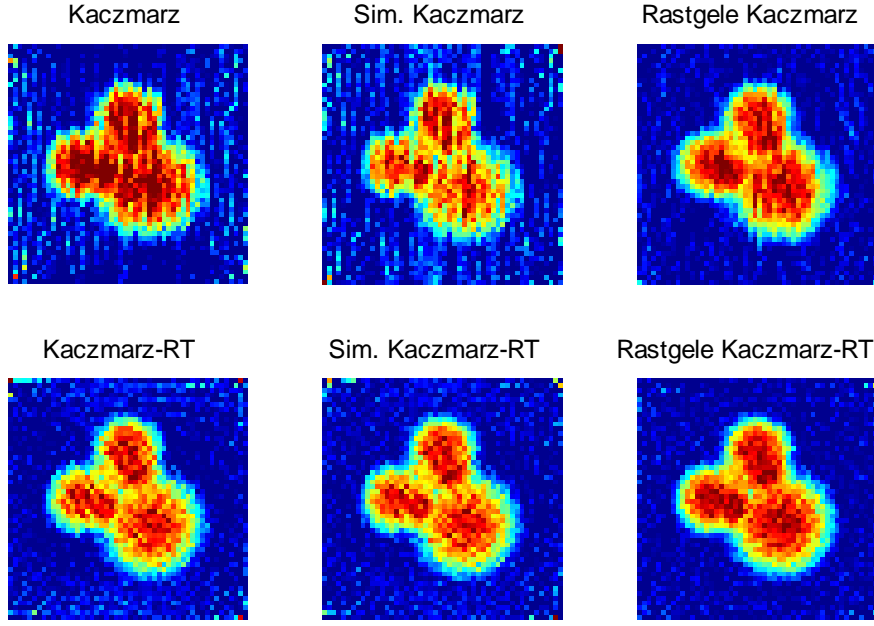
Şekil 4.20 Gürültüsüz veri ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).



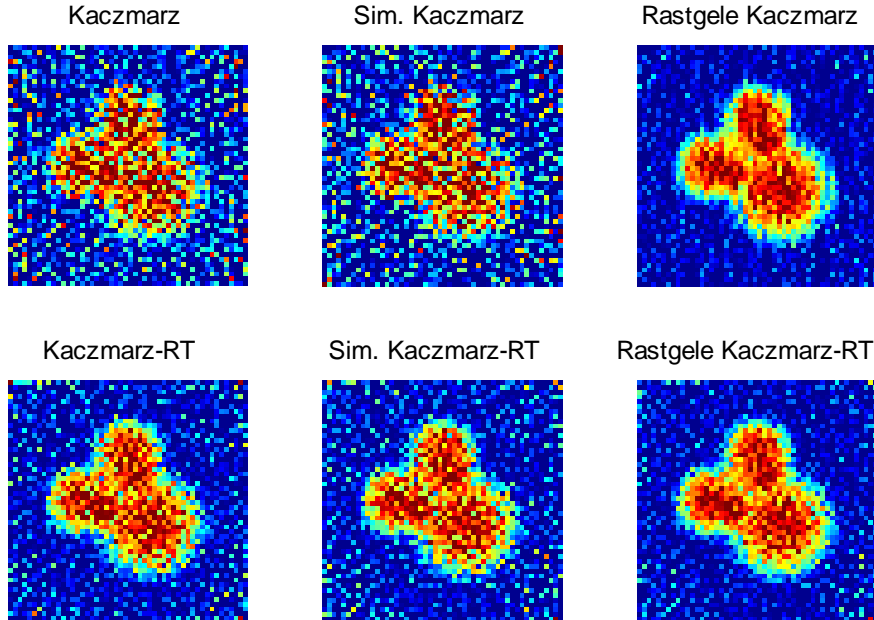
Şekil 4.21 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).



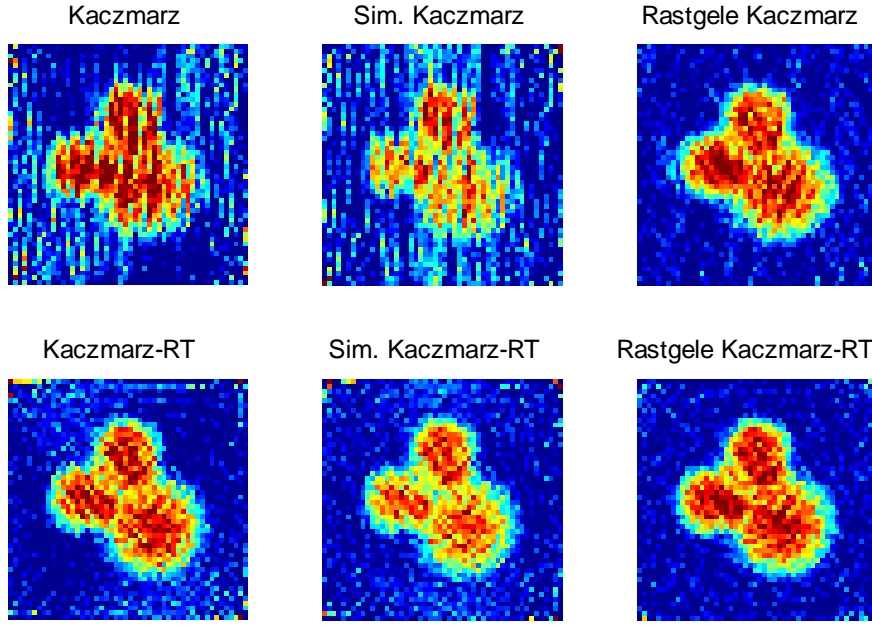
Şekil 4.22 Gürültülü veri (%1) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).



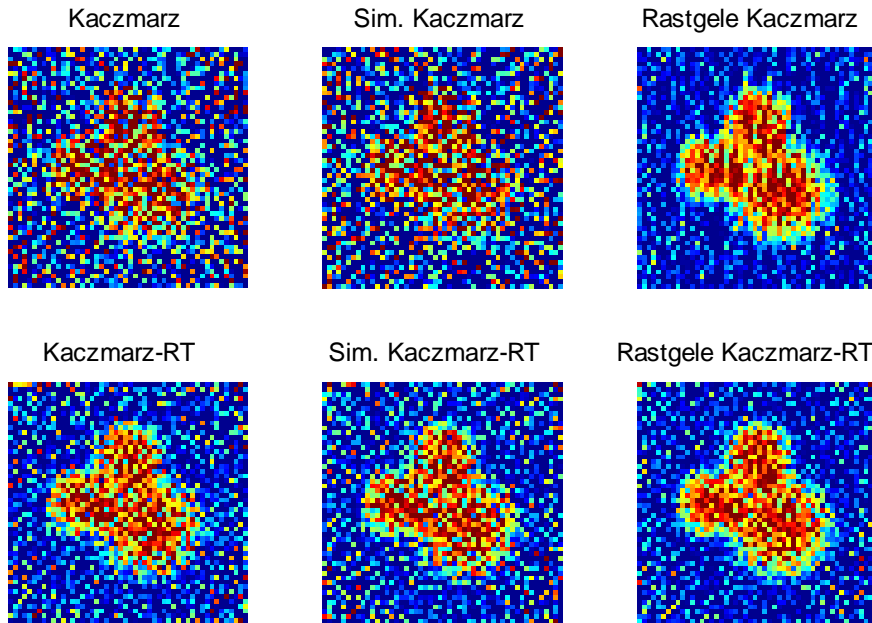
Şekil 4.23 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.24 Gürültülü veri (%3) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.25 Minimum relatif hata durumunda gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon (Örnek 4.0.2).



Şekil 4.26 Gürültülü veri (%5) ile rekonstrüksiyon; İterasyon sayısı=50 (Örnek 4.0.2).

KAYNAKLAR

- Björck A and Elfving T** (1979) Accelerated projection methods for computing pseudoinverse solutions of systems of linear equations, *BIT Numerical Mathematics*, 19: 145-163.
- Censor Y, Eggermont P and Gordon D** (1983) Strong underrelaxation in Kaczmarz's method for inconsistent systems, *Numerische Mathematik*, 41: 83-92.
- Censor Y, Elfving T, Herman G T and Nikazad T** (2008) On diagonally-relaxed orthogonal projection methods, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30 (1): 473-504.
- Deans S R** (2000) Radon and Abel Transform, *The Transforms and Applications Handbook*, Second Edition, CRC Press LLC, South Florida, 8.1-8.96.
- Debnath L and Bhatta D** (2015) *Integral Transforms and Their Applications*, Third Edition, CRC Press, Edinburg.
- Demmel J W** (1988) The probability that a numerical analysis problem is difficult, *Mathematics of Computation*, 50: 449-480.
- Durrani T S and Bisset D** (1984) The Radon transform and its properties, *Geophysics*, 49 (8): 1180-1187.
- Eggermont P P B, Herman G T and Lent A** (1981) Iterative algorithms for large partitioned linear systems, with applications to image reconstruction, *Linear Algebra and its Applications*, 40: 37-67.
- Elfving T, Hansen P C and Nikazad T** (2014) Semi-convergence properties of Kaczmarz's method, *Inverse Problems*, 30: 055007.
- Engl H W, Hanke M and Neubauer A** (2000) *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer, Dordrecht.
- Epstein C L** (2007) *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*, Second Edition, SIAM, Pennsylvania.
- Feeman T** (2010) *The Mathematics of Medical Imaging*, Second Edition, Springer, London.
- Gordon R** (1974) A tutorial on ART, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21 (3): 78-93.
- Gordon R, Beder R and Herman G T** (1970) Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography, *Journal of Theoretical Biology*, 29: 471-481.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Hansen M S** (2010) AIR Tools - A Matlab Package for Algebraic Iterative Reconstruction Techniques, *Master of Science Thesis*, Technical University of Denmark, DTU Informatics, Lyngby.
- Hansen P C and Saxild-Hansen M** (2012) AIR Tools - A Matlab package of algebraic iterative reconstruction methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236 (8): 2167-2178.
- Helgason S** (1999) *The Radon Transform*, Second Edition, Birkhauser, Boston.
- Herman G T** (2009) *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*, Second Edition, Springer, New York.
- Herman G T, Lent A and Rowland S** (1973) ART: Mathematics and applications, *Journal of Theoretical Biology*, 42 (1): 1-32.
- Jiang M and Wang G** (2003) Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22 (5), 569-579.
- Kaczmarz S** (1937) Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen, *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres A*, 35: 355-357.
- Natterer F** (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*, Wiley, New York.
- Radon J** (1917) Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten, *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 69: 262-277.
- Rezvani N** (2012) Iterative Reconstruction Algorithms for Polyenergetic X-Ray Computerized Tomography, *PhD Thesis*, University of Toronto, Graduate Department of Computer Science, Toronto.
- Schultz P S and Claerbout J F** (1978) Velocity estimation and downward continuation by wavefront synthesis, *Geophysics*, 43 (4), 691-714.
- Strohmer T and Vershynin R** (2009) A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 15 (2): 262-278.
- Toft P** (1996) The Radon Transform, Theory and Implementation, *PhD Thesis*, DTU Informatics, Technical University of Denmark, Lyngby.
- Ustaoglu Z** (2017) On the inversion of a generalized Radon transform of seismic type, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 453: 287-303.

ÖZGEÇMİŞ

Umut ÖZCENGİZ, 1990'da Kocaeli'de doğdu; ilk ve orta öğrenimini Kocaeli'de tamamladıktan sonra 2009 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun oldu. Halen 2015 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : İpekyolu Mah. 632. Sok. No:2/B
Gölcük/KOCAELİ

Tel : 0536 343 14 27

E-Posta : umutozcegiz@gmail.com