ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ GADJIEV IBRAGIMOV TİPLİ OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NUMAN ÖZGÜR

OCAK 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ GADJIEV IBRAGIMOV TİPLİ OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Numan ÖZGÜR

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

ZONGULDAK
Ocak 2019

KABUL:

Numan ÖZGÜR tarafından hazırlanan 'İki Değişkenli Gadjiev Ibragimov Tipli Operatörler ile Yaklaşım'' başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 30/01/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN ....

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Yüksel SOYKAN ....

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN ....

Düzce Üniversitesi, Gölyaka Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2019

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Numan ÖZGÜR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİ DEĞİŞKENLİ GADJIEV IBRAGIMOV TİPLİ OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Numan ÖZGÜR

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
Ocak 2019, 87 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; doğrusal pozitif operatörlerin temel özellikleri ile tezde kullanılacak fonksiyon uzayları ve bu uzaylar için bazı yaklaşım teoremlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde; öncelikle klasik Gadjiev Ibragimov opreatörleri ile yaklaşımın temel özellikleri verilmiş daha sonra bu operatörün Gönül,Coşkun (2013) tarafından verilen bir genelleştirmesinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

ÖZET (devam ediyor)

Son bölümde; ikinci bölümde verilen genelleştirmenin iki değişkenli hali tanımlanarak bu operatörlerin yaklaşım durumları grafik ve nümerik hesaplarla ayrıntılı olarak çalışılmıştır. Bu bölüm tezin orijinal bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Pozitif Operatör, Gadjiev Ibragimov Operatörü, Süreklilik Modülü, Volkov Teoremi, Yaklaşım Hızı

Bilim Kodu: 403.03.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

APPROXIMATION BY TWO DIMENSIONAL GADJIEV IBRAGIMOV TYPE OPERATORS

Numan ÖZGÜR

Zonguldak Bülent Ecevit University
Granduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asst. Prof. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
January 2019, 87 pages

This thesis consist of three parts. In the first part, basic properties of linear positive operators with function spaces to be used in the thesis and some approach theorems for these spaces were included.

In the second part, the basic properties of the approach with the classical Gadjiev-Ibragimov operators are given and then the approach properties of the generalization of this operator by the Gonul,Coskun (2013) were investigated.

In the last part, two dimensional state of the generalization given in the second part is defined and the approximate cases of these operators are studied in detail with graphical and nımerical calculations. This section is the original part of the thesis.

ABSTRACT (continued)

Keywords: Linear Positive Operator, Gadjiev-Ibragimov Operators, Modulus of Continuity, Volkov Theorems, Rate of Convergence

Science Code: 403.03.01

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması ve yazılması konusunda değerli görüş ve önerilerini her zaman benimle paylaşan, değerli vaktini bana ayıran danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN'e;

Değerli vaktini ayırıp tezi inceleyen değerli hocam Prof. Dr. Yüksel SOYKAN'a ve Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Her husuta olduğu gibi çalışmalarım esnasında desteklerini esirgemeyen "HABİBOĞULLARI AİLESİ"nin her ferdine ve bu aile birlikteliği tesis eden devamına ehemmiyetle gayret eden değerli amcam Sezgin ÖZGÜR'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatın her alanında olduğu gibi bu çalışmalarım esnasında da madden ve manen bana en büyük desteği veren babam Kamil Rıdvan ÖZGÜR'e, annem Suzan ÖZGÜR'e, ağabeylerim Furkan ve Hakan ÖZGÜR'e, küçük biraderim Bahtiyar Nail ÖZGÜR'e, ana yarısı teyzem Saime KARAKUŞ'a, halalarım Havva ŞİMŞEK ve Hacer ANLAYAN'a, kıymetli ablam Gülşah ÖZGÜR ARICI'a ve bir ömür boyu beraber olmaya, hayatı paylaşmaya derdi ile dertlenip sevinci ile mutlu olmaya söz verdiğim kıymetli nişanlım Sümeyye KAHRAMAN'a ve değerli ailesine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

EKLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C[a,b]$	: Her $x \in [a,b]$ için a' da soldan b'de sağdan sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_\rho(\mathbb{R}^m)$	: $m = 1,2,3$için $\mathbb{R}^m$ de ki sınırlı fonksiyonları uzayı
$C_\rho(\mathbb{R}^m)$	: 1,2,3için $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
$\Vert\cdot\Vert_{C[a,b]}$	: $C[a,b]$ uzayında norm
$\Vert\cdot\Vert_\rho$	: C_ρ ve B_ρ uzaylarında norm
$L(f;x)$	: Doğrusal pozitif operatörler dizisi
$C([0,A]\times[0,A])$	: Her $(x,y) \in [0,A]\times[0,A]$ için sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_{n,m}(f,x,y)$	: İki değişkenli Gadjiev-Ibragimov operatörler dizisi
$\omega_i f(f,\delta)$	: i. kısmi süreklilik modülü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yaklaşım Teorisi; verilen bir fonksiyona daha basit ama daha kullanışlı fonksiyonlarla yaklaşımı inceler. Bu anlamda basit fonksiyonlar için ilk akla gelen örnek polinomlardır. Bu mantıktan yola çıkarak Chebyshev 1854'de verilen bir polinomun polinomlar sınıfı içinde bir fonksiyona yakın olup olmadığını düzgün norma göre veren bir kriter ortaya koymuştur. Weierstrass 1885'de sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım yapılabileceğini ortaya koyan bir teorem vermiştir. Weierstrass Teoreminin en çok bilinen ispatı Bernstein tarafından 1912 yılında verilmiştir.

Bernstein'ın kanıt yöntemi yaklaşım teorisinde önemli bir adımdır. Bunu izleyen yıllarda kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşım yapılırken değişik doğrusal pozitif operatörler tanımlanıp kullanılmaya başlanmıştır.

Yaklaşım teorisinde üç önemli durum belirlenmelidir. Bunların ilki yaklaşım yapılacak f fonksiyonu, ikincisi yaklaşım fonksiyonunun dahil olduğu uzay, sonuncusu ise yaklaşımın f fonksiyonuna ne kadar hızlı yaklaştığıdır.

1970'de Gadjiev-Ibragimov tarafından kendi adlarıyla anılan $[0, A]$ üzerinde bir operatör tanımlanarak Korovkin Teoreminin koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra birçok araştırmacı bu operatör üzerinde çalışmıştır. Örneğin 1997'de Doğru, 1999'da Gadjiev ve İspir, 2003'de Aral, 2008'de İspir ve diğerleri, 2012'de Coşkun, 2013'de Gönül ve Coşkun, 2018'de Herdem ve Büyükyazıcı tarafından farklı genelleştirmeler yapılarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu tezde Gönül, Coşkun tarafından tanımlanan genelleştirmenin iki değişkenli hali tanımlanarak bu operatörün süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı ve temel yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

1.1 BAZI FONKSİYON UZAYLARI VE DOĞRUSAL POZİTİF OPERATÖRLER

Tanım 1.1.1

$D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in D$ olsun.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

eşitliğini sağlayan f *fonksiyonuna* a noktasında *süreklidir* denir. *D* nin her noktasında sürekli olan fonksiyona D *üzerinde sürekli fonksiyon* denir (Coşkun 2002).

Tanım 1.1.2

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı var ve $|x - y| < \delta$ olan her $x, y \in D$için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna *D* kümesi üzerinde *düzgün süreklidir* denir (Coşkun 2002).

Uyarı 1.1.1

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu durumda (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

olmasıdır.

Tanım 1.1.3

$\mathbb{R}$ de tanımlanmış ve $[a, b]$ aralığının tüm noktalarında sürekli ayrıca a'da soldan ve b'de sağdan sürekli olan fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ aralığında *sürekli fonksiyonlar uzayı* denir ve kısaca $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. Açıkça $C[a, b]$ bir doğrusal uzaydır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve f, $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$'de sürekli olsun.

$C[a, b]$ uzayında norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev1995).

Tanım 1.1.5

$\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ sürekli ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$$

olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \tag{1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ *uzayı* denir. ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Gadjiev 1976).

Tanım 1.1.6

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f \; s\ddot{u}rekli\}$ şeklinde tanımlı ağırlık uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde bir doğrusal uzaydır.

Tanım 1.1.7

$B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ ağırlıklı uzaylar için norm;

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.8

$\rho: \mathbb{R} \to [1, \infty[$ sürekli ve

$$\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$$

şeklinde bir fonksiyon olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \tag{1.3}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve açıkça bu uzay $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayıdır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.9

X ve Y iki fonksiyon uzayı, $L: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f, x) = g(x) \tag{1.4}$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ bulunuyorsa *L' ye operatördür* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Örnek 1.1.1

f, $[0,1]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mathcal{D}_n(f, x) = \int_0^1 K_n(x, t)\, f(t)dt = (n+1) \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \int_0^1 P_{n,k}(t) f(t)dt$$

ifadesine *Durmeyer operatörü* denir.

Tanım 1.1.10

X, Y doğrusal uzaylar $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$L: X \to Y$ operatörü için,

$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne *doğrusaldır* denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.11

$X^+ \coloneqq \{f: f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$ ve $Y^+ \coloneqq \{g: g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

iki fonksiyon uzayı olsun. $L: X \to Y$ operatörü için,

$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L'ye pozitif operatördür denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Uyarı 1.1.2

i) L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Şöyle ki; $f(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $-f(x) \geq 0$ olur.

L pozitif olduğundan

$$L(-f, x) \geq 0$$

dır. L doğrusal olduğundan

$$-L(f, x) \geq 0$$

olur. O halde $L(f, x) \leq 0$'dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

ii) Doğrusal pozitif operatörler monotondurlar.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) - g(x) \leq 0$$

olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(f - g)(x) \leq 0$$

eşitsizliği bulunur. Uyarı 1.1.2 i) den $L(f - g, x) \leq 0$ olduğundan $L(f\ , x) - L(g, x) \leq 0$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise

$$L(f, x) \leq L(g, x)$$

olması demektir.

Örnek 1.1.2

Aşağıdaki operatörler açıkça doğrusal ve pozitiftir.
i) $f \in C[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

ifadesine *Szazs operatörü* denir.

ii) $f \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_n(f; x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} P_{m\alpha_n,k}(x)\ f\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right), \qquad x \in [0,1]$$

ile tanımlı operatöre *Szazs-Mirakyan-Bernstein (SMB)* operatörü denir; burada

$$q_{n,m}(x) = \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m!}, \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Tanım 1.1.12

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal bir operatör olsun. Her $f \in X$ için

$$\|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en büyük alt sınırına L operatörünün normu denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = \inf\{C: \|L(f,x)\|_Y \leq C\|f\|_X\} \tag{1.5}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.13

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ doğrusal sınırlı operatör olsun. $f \in X$ olmak üzere $\|f\|_X \neq 0$ olsun. Bu durumda L'nin normu;

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_Y}{\|f\|_X} \tag{1.6}$$

biçiminde de tanımlanabilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.14

L: $C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü için

$\|L\|_{C_\rho \to B_\rho} = \|L(\rho,x)\|_\rho$

dır.

Uyarı 1.1.3

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \to Y$ tanımlı, doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda;

$$|L(f,x)| \leq L(|f|,x) \tag{1.7}$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev1995).

Kanıt.

L doğrusal pozitif bir operatör olsun. Uyarı 1.1.2 ii) gereği doğrusal pozitif operatörler monoton olduğundan;

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

eşitsizliğine L operatörü uygulanırsa;

$$L(-|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$$

olur. L operatörünün doğrusallığından,

$$-L(|f|,x) \leq L(f,x) \leq L(|f|,x)$$

olacaktır. Böylece $|L(f,x)| \leq L(|f|,x)$ bulunur.

Uyarı 1.1.4

i) $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü sınırlıdır. Yani

$$\|L(f,x)\|_\rho \leq \|L\|_{C_\rho \to B_\rho} \|f\|_\rho \tag{1.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten;

$$\|L\|_{C_\rho \to B_\rho} = \sup_{\|f\|_\rho \neq 0} \frac{\|L(f,x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} = \|L(\rho,x)\|_\rho$$

olur. $\|f\|_\rho \neq 0$ olan her $f \in C_\rho$ için,

$$\frac{\|L(f,x)\|_\rho}{\|f\|_\rho} \leq \|L(\rho,x)\|_\rho$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu ise $\|L(f,x)\|_\rho \leq \|L(\rho,x)\|_\rho \|f\|_\rho$ eşitsizliğinin sağlanması demektir. $C := \|L(\rho,x)\|_\rho$ olarak alınırsa L operatörünün sınırlı olduğu görülür.

ii) $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda $f \in C_\rho$ olmak üzere

$$\|L(f,x)\|_\rho \leq M\|f\|_\rho$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$$

olmasıdır (Coşkun 1997).

Kanıt.

ii) (⇒):

$L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif bir operatör ve $f \in C_\rho$ olsun. Bu durumda $L(f,x) \in B_\rho$ olup her $x \in \mathbb{R}$ için $|L(f,x)| \leq M\rho(x)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\rho \in C_\rho$ olduğundan $|L(\rho,x)| \leq M\rho(x)$ olur. L pozitif ve $\rho \geq 1$ olduğundan, $L(\rho,x) \geq 0$ olup her $x \in \mathbb{R}$ için

$$L(f,x) \leq M\rho(x)$$

olur. Buradan $\frac{L(\rho,x)}{\rho(x)} \leq M$ ve $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{L(\rho,x)}{\rho(x)} \leq M$ olacağından açıkça

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M < \infty$$

elde edilir. Yani $L: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatörü $\|L(f,x)\| \leq M\|f\|_\rho$ eşitliğini sağladığından bu durumda

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$$

olur.

(⇐):

Diğer taraftan herhangi bir L operatörü için

$$\|L(\rho,x)\|_\rho \leq M$$

eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda operatörün doğrusal pozitifliği ve monotonluğu kullanılarak her $f \in C_\rho$ için

$$\begin{aligned}|L(f,x)| &\leq L(|f|,x)\\ &= L\left(\frac{|f|\rho(t)}{\rho(t)},x\right)\\ &\leq L\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|f|}{\rho(t)}\rho(t),x\right)\\ &= \|f\|_\rho L(\rho,x)\end{aligned}$$

olacağından her iki taraf $\rho(x)$ fonksiyonuna bölünüp supremumu alınırsa

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|L(f,x)|}{\rho(x)} \leq \|f\|_\rho \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{L(\rho,x)}{\rho(x)}$$

eşitsizliği geçerli olup

$$\|L(f,x)\|_\rho \leq \|f\|_\rho\|L(\rho,x)\|_\rho$$

olur. Buradan

$$\|L(f,x)\|_\rho \leq M\|f\|_\rho$$

sonucuna ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

1.2 SÜREKLİ FONKSİYON UZAYINDA KOROVKİN TİPLİ TOREMLER

Tanım 1.2.1 (Korovkin Teoremi)

$m = 0,1,2$ olmak üzere L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlanıyorsa bu durumda $[a, b]$ de sürekli ve a'da soldan b'de sağdan sürekli tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Korovkin 1960).

Kanıt.

f, $\mathbb{R}$'de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $x, t \in [a, b]$ için ve $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda da $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur.

Gerçekten
$x \in [a, b]$ ve $t \notin [a, b]$ olsun. $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği f fonksiyonu a'da soldan b'de sağdan sürekli olduğu için yine doğrudur.

Diğer taraftan $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olup açıkça

$$2M \leq \frac{2M}{\delta^2}|t-x|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikler ve üçgen eşitsizliği kullanılarak her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M < \tfrac{2M}{\delta^2}|t-x|^2 + \varepsilon \tag{1.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &= \|L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)\|_{C[a,b]}\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan hipotezden (ε_n) sıfır dizisi olmak üzere

$$\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

olacaktır. Böylece

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]} + \ \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\|L_n(t^2,x) - x^2\|_{C[a,b]}$$
$$-2a\|L_n(t,x) - x\|_{C[a,b]} + b^2\|L_n(1,x) - 1\|_{C[a,b]}$$

bulunur. Ayrıca (1.9) eşitsizliğinden son eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınacak olursa;

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Dolayısıyla her $f \in C[a,b]$ için $L_n(f,x)$, f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Korovkin Teoreminin gerçel sayılar kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar için geçerli olmadığını veren aşağıdaki teorem Hacıyev tarafından kanıtlanmış olup Hacıyev Teoremi olarak bilinir.

Teorem 1.2.2 (Hacıyev Teoremi)

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan bir L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi; $m = 0{,}1{,}2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_\rho$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerlidir (Gadjiev 1976).

Sonuç 1.2.1

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için $m = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla C_ρ ağırlıklı uzayında Korovkin Tipli bir teorem geçerli olmayıp C_ρ^k alt uzayında geçerlidir.

1.3 SÜREKLİLİK MODÜLÜ

Bu bölümde operatörlerin yaklaşım hızını hesaplamak için kullanılan yöntemlerden biri olan süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülünün özellikleri verilecektir.

$L_n(f,x)$ keyfi bir doğrusal pozitif operatörler dizisi olmak üzere $\|L_n(f)-f\| \to 0 (n \to \infty)$ olması $L_n(f,x)$ in $f(x)$ e düzgün olarak yakınsadığını gösterir. Yaklaşma hızı $\alpha_n \to 0\,, (n \to \infty)$ olmak üzere, $\|L_n(f,x)-f(x)\| < c.\alpha_n$ olacak şekilde α_n lerin belirlenmesiyle hesaplanır. α_n ler L_n operatörü ve f fonksiyonuna bağlı olarak değişirler. Yaklaşma hızı problemi olarak adlandırılan bu hesaplama sonlu aralıkta genel olarak $\omega(f,\delta)$ şeklinde gösterilen *süreklilik modülü* yardımıyla yapılır.

Tanım 1.3.1

$f \in C[a,b]$ olsun. $\forall\, \delta > 0$ için

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\le\delta}} |f(t)-f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f,\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Önerme 1.3.1

$f \in C[a,b]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $\omega(f,\delta) \ge 0$

ii) $\delta_1 \le \delta_2$ için $\omega(f,\delta_1) \le \omega(f,\delta_2)$

iii) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f,m\delta) \le m\,\omega(f,\delta)$

iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f,\lambda\delta) \le (\lambda+1)\,\omega(f,\delta)$

v) $\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0$

vi) $|f(t)-f(x)| \le \omega(f,|t-x|)$

vii) $|f(t)-f(x)| \le (1+\frac{|t-x|}{\delta})\,\omega(f,\delta)$

$C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayında tanımlı fonksiyonlar için yaklaşım hızı hesabında kullanılan süreklilik modülü ve temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.3.2

Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\Omega(f,\delta) = \sup_{x\in[0,\infty[,|h|\le\delta} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)} \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlı ifadeye f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir.

$\Omega(f,\delta)$ nin bazı temel özellikleri literatürde birçok kaynakta bulunabileceğinden Önerme 1.3.2 de kanıtına değinilmeden verilmiştir.

Önerme 1.3.2

$f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $\delta \ge 0$ olmak üzere $\Omega(f,\delta)$; δ nın monoton artan bir fonksiyonudur.
ii) Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için $\lim_{\delta\to 0} \Omega(f,\delta) = 0$ olur.
iii) λ nın her pozitif değeri için

$$\Omega(f,\lambda\delta) \le 4(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f,\delta)$$

eşitsizliği geçerlidir.

iv) Her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ ve $x,t \in [0,\infty[$ için
$$|f(t)-f(x)| \le 4(1+\delta^2)\Omega(f,\delta)(1+x^2)(1+(t-x)^2)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) \text{dır.}$$

BÖLÜM 2

GADJIEV-IBRAGIMOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

2.1 KLASİK GADJIEV-IBRAGIMOV OPERATÖRLERİ

Bu kesimde Gadjiev, Ibragimov (1970) tarafından literatüre kazandırılan (klasik) Gadjiev-Ibragimov operatörünün $C[0,A]$ uzayında yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.1.1

$A>0$ olmak üzere $\left(\varphi_n(t)\right)$ ve $\left(\psi_n(t)\right)$; $C[0,A]$ uzayında iki fonksiyon dizisi, (α_n) ise pozitif sayılar dizisi olsun. Bu diziler için $\varphi_n(0)=0,\ \psi_n(0)\neq 0,\ t\in[0,A], n\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0$$

koşulları sağlansın. Ayrıca

$x,t\in[0,A]$ ve $u\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\left(K_n(x,t,u)\right)$ üç değişkenli fonksiyonlar dizisi için aşağıdaki dört koşul sağlansın.

1°) Bu dizinin her bir terimi x ve t nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık u ya göre tam analitik fonksiyondur.

2°) Her $x\in[0,A]$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $K_n(x,0,0)=1$ dir.

3°) Her $x\in[0,A]$ ve $\nu,n\in\mathbb{N}$ ve bir $u_1\in\mathbb{R}$ için

$\left\{(-1)^\nu\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\t=0}}\right\}\geq 0$ eşitsizliği sağlanır.

4°) $\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}}=-nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\t=0}}$

eşitliğini sağlayan $(n+m) \in \mathbb{N}_0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu tanım yardımıyla aşağıdaki operatörler dizisi tanımlanabilir.

Tanım 2.1.2

Yukarıdaki koşulları sağlayan $\left(K_n(x,t,u)\right)$ üç değişkenli fonksiyonlar dizisi yardımıyla $L_n(f,x)$ operatörler dizisi

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right\}\frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatöre Gadjiev-Ibragimov operatörü adı verilir (Gadjiev and Ibragimov 1970).

Bu operatörler dizisine 4°) özelliğinin $\nu -$ defa uygulanmasıyla

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)\dots(n+(\nu-1)m)}{\nu!}K_{n+\nu m}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu x^\nu$$

eşitliği elde edilir.

Uyarı 2.1.1

$$K_n(x,t,u) = \left[1-\frac{ux}{1+t}\right]^n, m=-1$$

için $u_1 = \alpha_n\psi_n(0)$ alınarak

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\binom{n}{\nu}\left[1-x\alpha_n\psi_n(0)\right]^{n-\nu}\left(x\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu \tag{2.1}$$

operatörü elde edilir.

α_n ve $\psi_n(0)$ için bazı özel seçimlerle bilinen bazı operatörler elde edilir.

i) Eğer (2.2) eşitliğinde $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ seçilirse operatör

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2 \frac{1}{n}}\right)(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}\left[1 - xn\frac{1}{n}\right]^{n-\nu}\left(-xn\frac{1}{n}\right)^{\nu}$$

şeklinde olacaktır. Böylece Bernstein polinomları olarak bilinen aşağıdaki operatörü bulunur.

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}[1-x]^{n-\nu}x^{\nu}$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere (2.2) eşitliğinde
$\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{nb_n}$ olarak seçilirse

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2 \frac{1}{nb_n}}\right)(-1)^{\nu} n(n-1)(n-2)\dots\big(n - (\nu-1)\big)\left[1 - n\frac{1}{nb_n}x\right]^{n-\nu}\left[-n\frac{1}{nb_n}x\right]^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu b_n}{n}\right)\binom{n}{\nu}\left[1 - \frac{x}{b_n}\right]^{n-\nu}\left[\frac{x}{b_n}\right]^{\nu}$$

bulunur. Böylece Bernstein-Cholodowsky polinomları olarak bilinen operatöre ulaşılır.

Uyarı 2.1.2

$K_n(x,t,u) = e^{-n(ux+t)}, m = 0$
olmak üzere
α_n ve $\psi_n(0)$ için $u_1 = n^2\psi_n(0)$ alınarak

$$L_n(f,x) = e^{-n(\alpha_n\psi_n(0)x)}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{(nx)^{\nu}}{\nu!}\big(\alpha_n\psi_n(0)\big)^{\nu}$$

operatörü elde edilir. $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha_n = n + p$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ olarak seçilirse Szasz operatörleri olarak bilinen

$$L_n(f,x) = e^{-x(n+p)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(n+p)^\nu}{\nu!} x^\nu$$

operatörü elde edilir.

Teorem 2.1.1

$[0,\infty[$ yarı ekseninde tanımlı

$$|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$$

eşitsizliğini sağlayan ve $f \in C[0,A]$ olan her f fonksiyonu için $L_n(f,x)$;

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right) \left\{ \left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \frac{\left(-\alpha_n\psi_n(0)\right)^\nu}{\nu!}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $f \in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Gadjiev and Ibragimov 1970).

Kanıt.

Açıkça Korovkin Teoreminin koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

$K_n(x,t,u)$ tam analitik fonksiyon olduğundan Taylor serisi şeklinde yazılabilir. $(u - u_1)$ farkının kuvvetlerine göre Taylor serisine açılır ve $u = \varphi_n(t)$, $u_1 = \alpha_n\psi_n(t)$ olarak alınırsa;

$$K_n\big(x,t,\varphi_n(t)\big)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right]_{u_1=\alpha_n\psi_n(t)}\right\}\frac{\big(\varphi_n(t)-\alpha_n\psi_n(t)\big)^\nu}{\nu!}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $t=0$ alınırsa 2°) özelliği ile $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0$ eşitlikleri dikkate alınarak $L_n(1,x)=1$ elde edilir.

Diğer taraftan 4°) özelliğinden

$$L_n(t,x)=\frac{x\alpha_n}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_{n+m}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\right]\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^\nu}{\nu!}=\frac{x\alpha_n}{n}$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$ eşitliği kullanılarak 3°) özelliği yardımıyla; $\lim\limits_{n\to\infty}L_n(t,x)=x$ bulunur. Bu operatöre iki defa 4°) özelliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned}L_n(t^2,x)&=\left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left[\frac{\partial^{\nu-2}}{\partial u^{\nu-2}}K_{n+2m}\big(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\big)\right]\frac{\big(-\alpha_n\psi_n(0)\big)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\\&\quad+\frac{x\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\\&=\left(\frac{x\alpha_n}{n}\right)^2\frac{n+m}{n}+\frac{x\alpha_n}{n}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilecektir. Bu ise $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$ olması nedeniyle

$$\lim_{n\to\infty}L_n(t^2,x)=x^2$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla Korovkin teoreminin koşulları geçerli olduğundan her $f\in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[0,A]}=0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

2.2 $C[0, A]$ UZAYINDA GADJIEV-IBRAGIMOV OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Bu kesimde Gönül Coşkun (2013) de tanımlanan genelleştirmenin yaklaşım özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1

(α_n) ve (β_n);
$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} n = 1$

koşullarını sağlayan gerçel sayı dizileri olsun. $K_{n,\nu}(x)$ ise ν ve n parametrelerine bağlı aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyon olsun.

1°) Her $n = 1,2,3, \ldots$, her $\nu = 0,1,2, \ldots$ve her sonlu A sayısı için $x \in [0, A]$ olmak üzere
$(-1)^\nu K_{n,\nu}(x) \geq 0$
olur.
2°) Her $x \in [0, A]$ için

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} = 1$$

eşitliği geçerlidir.
3°) Her $x \in [0, A]$ için

$$K_{n,\nu}(x) = -nxK_{n+m,\nu-1}(x)$$

eşitliği sağlanacak ve $n + m$ bir doğal sayı olacak biçimde bir m sayısı vardır.

Bu bilgiler yardımıyla Gadjiev- Ibragimov operatörünün bir genelleştirmesi olan operatör her $f \in C[0, A]$ için

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanacaktır. Açıkça bu operatör doğrusal ve pozitiftir (Gönül and Coşkun 2013).

Uyarı 2.2.1

$K_{n,\nu}(x)$ fonksiyonuna $\nu -$defa Tanım 2.2.1 de verilen 3°) özelliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
K_{n,\nu}(x) &= -nxK_{n+m,\nu-1}(x) \\
&= (-1)^2 n(n+m)x^2 K_{n+2m,\nu-2}(x) \\
&= (-1)^3 n(n+m)(n+2m)x^3 K_{n+3m,\nu-3}(x) \\
&\;\;\vdots \\
&= (-1)^\nu n(n+m)(n+2m)\dots(n+(\nu-1)m)x^\nu K_{n+\nu m,0}(x)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$K_{n,\nu}(x) = (-1)^\nu n(n+m)(n+2m)\dots(n+(\nu-1)m)x^\nu K_{n+\nu m,0}(x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (2.3) eşitliği ile verilen operatör dizisi

$$
\begin{aligned}
L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)(-1)^\nu n(n+m)(n+2m)\dots(n \\
+ (\nu-1)m)x^\nu K_{n+\nu m,0}(x)\frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

şeklinde ifade edilebilir (Gönül 2012).

Önerme 2.2.1

$f \in C[0,A]$ olmak üzere (2.2) eşitliğinde verilen operatör için

$$
\begin{aligned}
&L_n(1,x) = 1 \\
&L_n(t,x) = \frac{\alpha_n}{\beta_n}nx \\
&L_n(t^2,x) = \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri geçerlidir (Gönül and Coşkun 2013).

Kanıt.

2°) özelliği gereği

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} = 1$$

olduğundan açıkça

$$L_n(1,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} = 1$$

bulunur. 3°) özelliği kullanılarak; $(n+m) \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
L_n(t,x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{\beta_n} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{(\nu-1)!} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-nx}{\beta_n} K_{n+m,\nu-1}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{(\nu-1)!} \\
&= \frac{n\alpha_n x}{\beta_n}\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \\
&= \frac{\alpha_n}{\beta_n} nx
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
L_n(t^2,x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)^2 K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^2-\nu+\nu}{{\beta_n}^2} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \\
&= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)}{{\beta_n}^2} K_{n,\nu}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} + \frac{1}{\beta_n} L_n(t,x)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + \frac{1}{\beta_n} L_n(t,x)$$

$$= \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} n(n+m)x^2 K_{n+2m,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{(\nu)!} + \frac{1}{\beta_n} L_n(t,x)$$

olur.

$(m+n) \in \mathbb{N}$ ve $(n+2m) \in \mathbb{N}$ olduğundan

$$L_n(t^2,x) = \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n n x}{{\beta_n}^2}$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Teorem 2.2.1

$f \in C[0,A]$ ve

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!}$$

olsun. Bu durumda her $f \in C[0,A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f,x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$$

olur (Gönül 2012).

Kanıt.

Açıkça; kanıt için Korovkin Teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

Önerme 2.2.1 den

$$|L_n(1,x) - 1| = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} - 1 \right| = 0$$

eşitliği geçerli olduğundan $C[0,A]$ uzayında norm tanımı gereği

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(1,x)-1\|_{C[0,A]}=0 \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}|L_n(t,x)-x| &= \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}nx-x\right| \\ &= \left|x\left(\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right)\right|\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan $x\in[0,A]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n=1$ olmak üzere

$$\max_{x\in[0,A]}|L_n(t,x)-x| = \max_{x\in[0,A]}\left|x\left(\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right)\right| \leq |A|\left|\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t,x)-x\|_{C[0,A]} \leq A\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right| = 0$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t,x)-x\|_{C[0,A]}=0 \tag{2.6}$$

bulunur.

Son olarak;

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_{C[0,A]}=0$$

eşitliği gösterilecektir.

$$|L_n(t^2,x)-x^2| = \left|\frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2} - x^2\right|$$
$$= \left|x^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right) + n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}x\right|$$

olacağından

$$\max_{x\in[0,A]}|L_n(t^2,x)-x^2| = \max_{x\in[0,A]}\left|x^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right) + n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}x\right|$$
$$\le A^2\left|\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right)\right| + \left|n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}\right|A$$

bulunur. (α_n) ve (β_n) dizilerinin tanımı nedeniyle

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m) = \lim_{n\to\infty}\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n^2 + \lim_{n\to\infty}\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}nm = 1$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_{C[0,A]} \le \lim_{n\to\infty}A^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right) + \lim_{n\to\infty}n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}A$$

eşitsizliği geçerli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}A^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_{C[0,A]} = 0 \qquad (2.7)$$

eşitliği de gösterilmiş olur.

O halde Korovkin teoreminin tüm koşulları sağlandığından her $f \in C[0, A]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[0,A]} = 0$$

bulunur.

Örnek 2.2.1

$K_{n,\nu}(x) = (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n}$

$1^\circ) - 3^\circ)$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

Gerçekten
$1^\circ)$ Her $n = 1, 2, 3, \ldots, \nu = 0, 1, 2, \ldots$ ve her sonlu A sayısı için $x \in [0, A]$ olmak üzere $e^{-nx} \geq 0$ olduğundan
$(-1)^\nu K_{n,\nu}(x) = (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n} \geq 0$
olur.
$2^\circ)$ Her $x \in [0, A]$ için operatörün tanımından

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n} \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} = 1$$

$3^\circ)$ $K_{n,\nu}(x) = -nxK_{n+m,\nu-1}(x)$
ve $n + m$ bir doğal sayı olacak biçimde bir m sayısı bulunmalıdır.
$(-1)^\nu (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n} = -nx(-1)^{\nu-1}\big((n + m)x\big)^{\nu-1} e^{-(n+m)x\alpha_{n+m}}$
eşitliğinden $m = 0$ eşitliği sağlayan bir köktür (Gönül 2012).

Uyarı 2.2.1

$K_{n,\nu}(x) = (-1)^\nu (nx)^\nu e^{-nx\alpha_n}$ fonksiyonu ve

$$L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

operatörü yardımıyla bazı operatörler elde edilebilir.

$$K_{n,\nu}(x) = (-1)^{\nu}(nx)^{\nu}e^{-nx\alpha_n}$$

ve $m = 0$ olmak üzere

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)(-1)^{\nu}(nx)^{\nu}e^{-nx\alpha_n}\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilebileceği gibi (2.3) eşitliği yardımıyla

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right)(nx)^{2\nu}e^{-nx\alpha_n}\frac{(-\alpha_n)^{\nu}}{\nu!} \tag{2.9}$$

şeklinde de yazılabilir (Gönül 2012).

Uyarı 2.2.2

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} n = 1$ koşullarını sağlayan
$\alpha_n = n$ ve $\beta_n = n^2$ dizileri ve (2.8) operatör dizisi kullanılarak

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2}\right)(nx)^{\nu}e^{-n^2x}\frac{n^{\nu}}{\nu!}$$

ve (2.9) operatör dizisi kullanılarak

$$L_n(f,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2}\right)(nx)^{2\nu}(-1)^{\nu}e^{-n^2x}\frac{n^{\nu}}{\nu!}$$

eşitliği elde edilir (Gönül 2012).

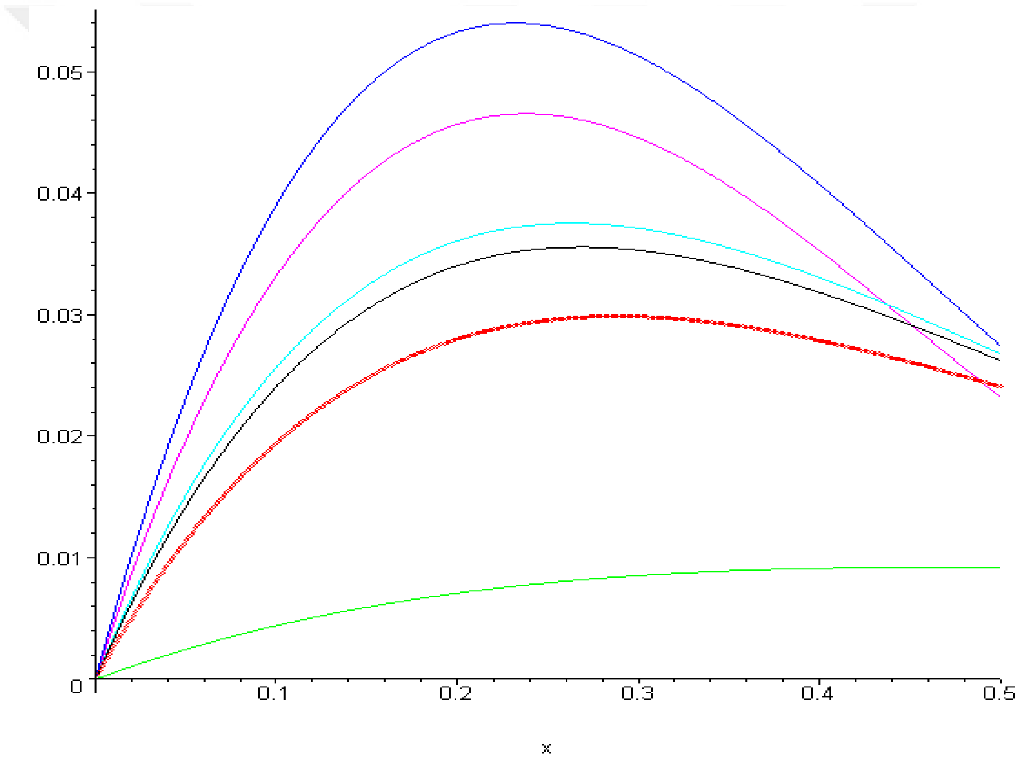
Örnek 2.2.1

$$L_n(f,x) = \sum_{\vartheta=0}^{m} f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}\right) K_{n,\vartheta}(x) \frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}$$

ve $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ olmak üzere

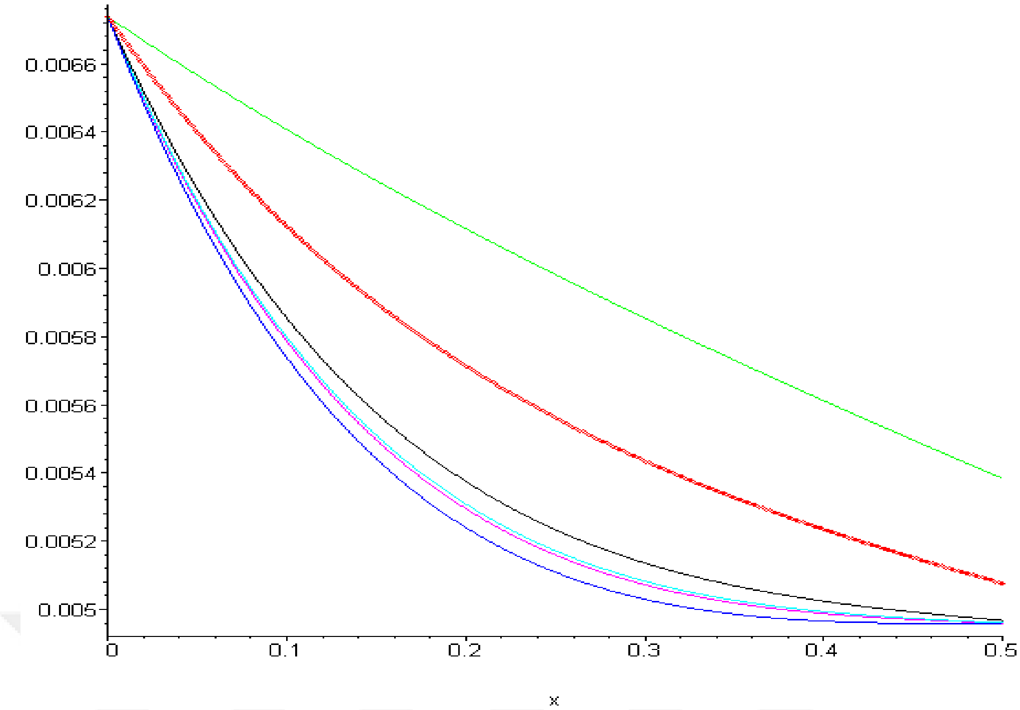
$$K_{n,\vartheta}(x) = (-1)^{\vartheta} (nx)^{\vartheta} e^{-nx\alpha_n}$$

çekirdek fonksiyonu ile $\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$ dizileri alınarak elde edilen operatör yardımıyla $f(x) = \frac{sin4x}{e^{3x+2}}$ (mavi) fonksiyonuna $n = 2,5,7,8,20$ için yaklaşım Şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 $\boldsymbol{f(x)} = \frac{sin4x}{e^{3x+2}}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım.

Şekil 2.2 de ise $\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$ dizileri alınarak elde edilen operatör yardımıyla $f(x) = \frac{4x^2+1}{e^{2x+5}}$ (mavi) fonksiyonuna $n = 2,5,20,40,50$ için yaklaşım yapılmıştır.



Şekil 2.2 $\boldsymbol{f(x)=\frac{4x^2+1}{e^{2x+5}}}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım

Teorem 2.2.2

$f\in C[0,A]$ ve (α_n), (β_n) dizileri Tanım 2.2.1 de tanımlanan diziler olsun. Bu durumda yeterince büyük n ve (α_n), (β_n) den bağımsız bir K sabiti için

$$\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[0,A]}\leq K\omega\left(f,\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gönül 2012).

Kanıt.

Her hangi bir operatör dizisi için

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq L_n(|f(t)-f(x)|,x)$$

olacağından

$$|L_n(f,x)-f(x)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) - f(x) \right| K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \tag{2.10}$$

eşitsizliği geçerlidir. Süreklilik modülünün iv) özelliğinde $t = \frac{\nu}{\beta_n}$ olarak seçilirse; her $\delta_n > 0$ için

$$\left| f\left(\frac{\nu}{\beta_n}\right) - f(x) \right| \leq \omega(f,\delta_n) \left(1 + \frac{\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|}{\delta_n} \right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (2.10) da yerine yazılırsa doğrusallık ve pozitifliği kullanarak

$$\begin{aligned} |L_n(f,x)-f(x)| &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega(f,\delta_n) \left(1 + \frac{\left|\frac{\nu}{\beta_n} - x\right|}{\delta_n} \right) K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \\ &= \omega(f,\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\beta_n} - x \right| K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} + 1 \right\} \qquad (2.11) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$M = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\beta_n} - x \right| K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!}$$

olarak tanımlanırsa;

$$M = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\left| \frac{\nu}{\beta_n} - x \right|^2 \right)^{1/2} \left[K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right]^{1/2} \left[K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right]^{1/2}$$

şeklinde yazılabileceğinden Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$M \leq \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\beta_n} - x \right|^2 K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right]^{1/2} \underbrace{\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right]^{1/2}}_{1}$$

$$= \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\beta_n} - x \right|^2 K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right]^{1/2}$$

bulunur.

Bu eşitsizlik (2.11) da yerine yazılırsa

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq \omega(f,\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{\beta_n} - x \right|^2 K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right]^{1/2} + 1 \right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan

$$\left(\frac{\nu}{\beta_n} - x \right)^2 = \left(\frac{\nu}{\beta_n} \right)^2 - 2x \frac{\nu}{\beta_n} + x^2$$

olduğundan

$$|L_n(f,x) - f(x)| \leq \omega(f,\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\beta_n} \right)^2 K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} - 2x \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{\beta_n} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right. \right.$$

$$\left. \left. + x^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n,\nu}(x) \frac{(-\alpha_n)^\nu}{\nu!} \right)^{1/2} + 1 \right\}$$

$$= \omega(f,\delta_n) \left\{ \frac{1}{\delta_n} \left(L_n(t^2,x) - 2x L_n(t,x) + x^2 L_n(1,x) \right)^{1/2} + 1 \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. $x \in [0,A]$ olmak üzere $L_n(t^2,x)$, $L_n(t,x)$, $L_n(1,x)$ yerlerine yazılırsa; $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} n = 1$ eşitlikleri dikkate alınarak yeterince büyük n ler için $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \leq 1$, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} n \leq 2$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$|L_n(f,x)-f(x)| \le \ \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{n(n+m)}{{\beta_n}^2}{\alpha_n}^2A^2+\frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_n}{\beta_n}nA-2A\frac{\alpha_n}{\beta_n}n+A^2\right)^{1/2}+1\right\}$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left[A^2\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2n^2-2\frac{\alpha_n}{\beta_n}n+1\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+A^2\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2nm+\frac{1}{A}\frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n\right]\right]^{1/2}+1\right\}$$

$$\le \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{A}{\delta_n}\left[\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+4\frac{\alpha_n}{\beta_n}m+4\frac{1}{A}\frac{1}{\beta_n}m\right]^{1/2}+1\right\}$$

$$\le \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{2mA}{\delta_n}\left[\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{\beta_n}\right]^{1/2}+1\right\}$$

bulunur.

Dolayısıyla

$$\delta_n=\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}$$

seçimiyle n den bağımsız bir K sabiti için

$$\|L_n(f,x)-f(x)\|_{C[0,A]}\le K\omega\left(f,\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}\right)$$

olur. Bu teoremle gösterildi ki yaklaşım $\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}$ hızında olup bu hız α_n ve β_n in seçimine göre artırılabilir.

2.3 $C_\rho^k[0,\infty[$ UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJIEV-IBRAGIMOV OPERATÖRÜ

Tanım 2.2.1 de $x \in [0,\infty[$ ve $f \in C_\rho^k[0,\infty[$ alınırsa bu durumda $C_\rho^k[0,\infty[$ uzayında Gadjiev Ibragimov operatörünün genelleştirilmesi

$$L_n(f,x) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty} f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}\right) K_{n,\vartheta}(x) \frac{(-\alpha_n)^\vartheta}{\vartheta!}$$

biçiminde olur.

Uyarı 2.3.1

$$K_{n,\vartheta}(x) = \begin{cases} (-1)^\vartheta \frac{n!}{(n-\vartheta)!} x^\vartheta [1-x]^\vartheta, & x \in [0,1], \vartheta \leq n \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ve $\alpha_n = 1,\ \beta_n = n$ alınırsa; bu operatör klasik Bernstein polinomlarına dönüşür.

b_n artan pozitif sayılar dizisi, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere $\beta_n = \frac{n}{b_n}$ alınırsa $K_{n,\vartheta}(x)$ yukarıda tanımlandığı şekilde ve $0 \leq x \leq b_n$ için x yerine $\frac{x}{b_n}$ alınırsa bu durumda operatör Bernstein-Cholodowsky polinomuna dönüşür. Her iki durumda da $m = -1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$\alpha_n = 1,\ \beta_n = n$ seçilir ve $K_{n,\vartheta}(x) = (-1)^\vartheta (nx)^\vartheta e^{-nx}$ alınırsa $m = 0$ olmak üzere operatör Szasz operatorüne dönüşür.

Lemma 2.3.1

$C_\rho^k[0,\infty[$ uzayında Gadjiev-Ibragimov operatörünün bu genelleştirilmesi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$L_n(1,x) = 1$$

$$L_n(t,x) = \frac{\alpha_n}{\beta_n} nx$$

$$L_n(t^2,x) = \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2}$$

Lemma 2.3.2

L_n operatörler dizisi Tanım 2.2.1 de tanımlandığı şekilde olmak üzere $x \in [0,\infty[$ olsun. Bu durumda L_n: $C_\rho\,[0,\infty[$ dan $B_\rho\,[0,\infty[$ ya bir dönüşüm tanımlar.

Kanıt.

Önerme 1.3.1 gereği $\|L_n(\rho,x)\|_\rho \leq M_\rho$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\rho(x) = 1 + x^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} L_n(\rho,x) &= L_n(1+t^2,x) \\ &= 1 + \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2} + \frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. $C_\rho\,[0,\infty[$ uzayının norm tanımı ve (α_n), (β_n) dizilerinin özellikleri dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} \|L_n(\rho,x)\|_\rho &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|L_n(\rho,x)|}{\rho(x)} \\ &\leq 1 + \frac{{\alpha_n}^2 n(n+m)}{{\beta_n}^2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x^2|}{\rho(x)} + \frac{\alpha_n n}{{\beta_n}^2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{\rho(x)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\|L_n(\rho,x)\|_\rho \leq M_\rho$ eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla L_n operatörleri $C_\rho\,[0,\infty[$ dan $B_\rho\,[0,\infty[$ ya bir dönüşüm tanımlar.

Teorem 2.3.1

$\rho(x) = 1 + x^2$ ve $L_n: C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatör dizisi yukarıda tanımlandığı şekilde olmak üzere $m = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

koşulları sağlanmakta olup bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt.

$m = 0,1,2$ için

$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$

eşitliğinin sağlandığı gösterilirse kanıt tamamlanmış olur.

$m = 0$ için 2°) özelliği gereği $\sum_{\vartheta=0}^{\infty} K_{n,\vartheta}(x) \frac{(-\alpha_n)^\vartheta}{\vartheta!} = 1$ olduğundan

$$L_n(1, x) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty} K_{n,\vartheta}(x) \frac{(-\alpha_n)^\vartheta}{\vartheta!} = 1$$

bulunur.

$$|L_n(1, x) - 1| = \left| \sum_{\vartheta=0}^{\infty} K_{n,\vartheta}(x) \frac{(-\alpha_n)^\vartheta}{\vartheta!} - 1 \right| = 0$$

eşitliği nedeniyle C_ρ uzayında norm tanımı gereği açıkça

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(1,x)-1\|_\rho=0$$

olacaktır.

$$L_n(t,x)=\frac{\alpha_n}{\beta_n}nx$$

olduğundan (α_n), (β_n) dizilerinin özellikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}|L_n(t,x)-x| &= \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}nx-x\right| \\ &= \left|x\left(\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right)\right|\end{aligned}$$

bulunur. $x\in[0,\infty[$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n=1$ olduğundan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|L_n(t,x)-x|}{1+x^2}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{1+x^2}\left(\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right)\right|\le\left|\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right|$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t,x)-x\|_\rho\le\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\alpha_n}{\beta_n}-1\right|=0$$

eşitsizliği doğru olup

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t,x)-x\|_\rho=0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Son olarak

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_\rho=0$$

eşitliği gösterilmelidir.

$$L_n(t^2,x)=\frac{{\alpha_n}^2n(n+m)x^2}{{\beta_n}^2}+\frac{\alpha_n nx}{{\beta_n}^2}$$

olduğundan kolayca

$$|L_n(t^2,x)-x^2| = \left|x^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right)+n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}x\right|$$

eşitliği geçerlidir. $x \in \mathbb{R}$ üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|L_n(t^2,x)-x^2|}{1+x^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\left|x^2\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right)+n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}x\right|}{1+x^2}$$

$$\leq \left|\left(\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)-1\right)\right|+\left|n\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}\right|$$

eşitsizliği bulunur. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+m)=1$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(t^2,x)-x^2\|_\rho = 0$$

eşitliği de gösterilmiş olur. O halde her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f,x)-f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği geçerlidir.

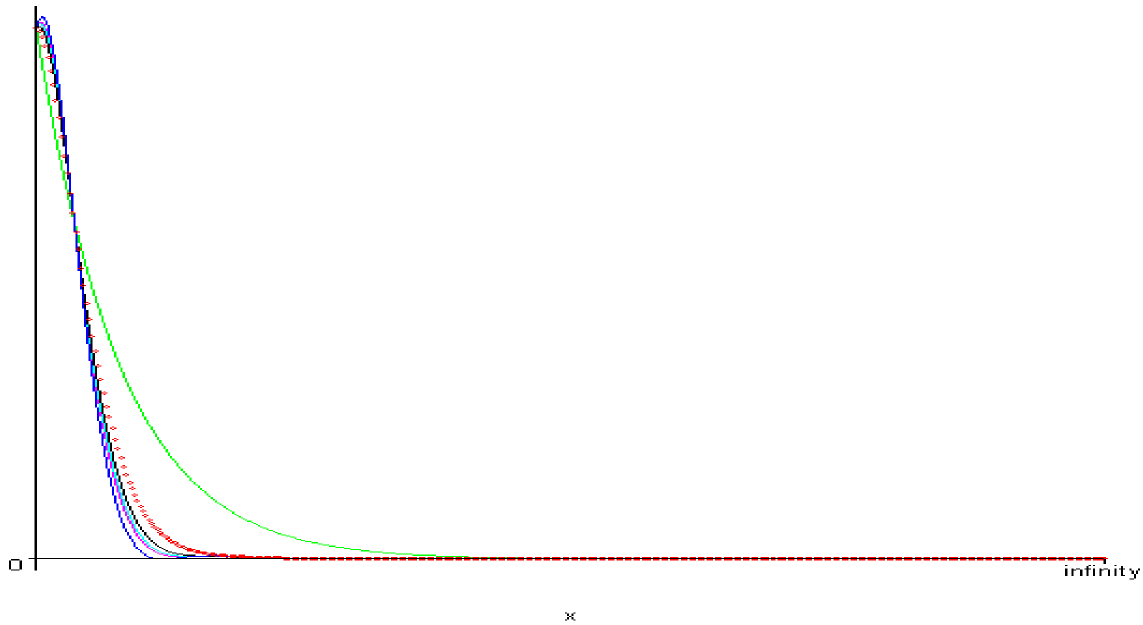
Örnek 2.3.1

$$L_n(f,x)=\sum_{\vartheta=0}^{m} f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}\right)K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^\vartheta}{\vartheta!}$$

ve $x \in [0,\infty[$olmak üzere

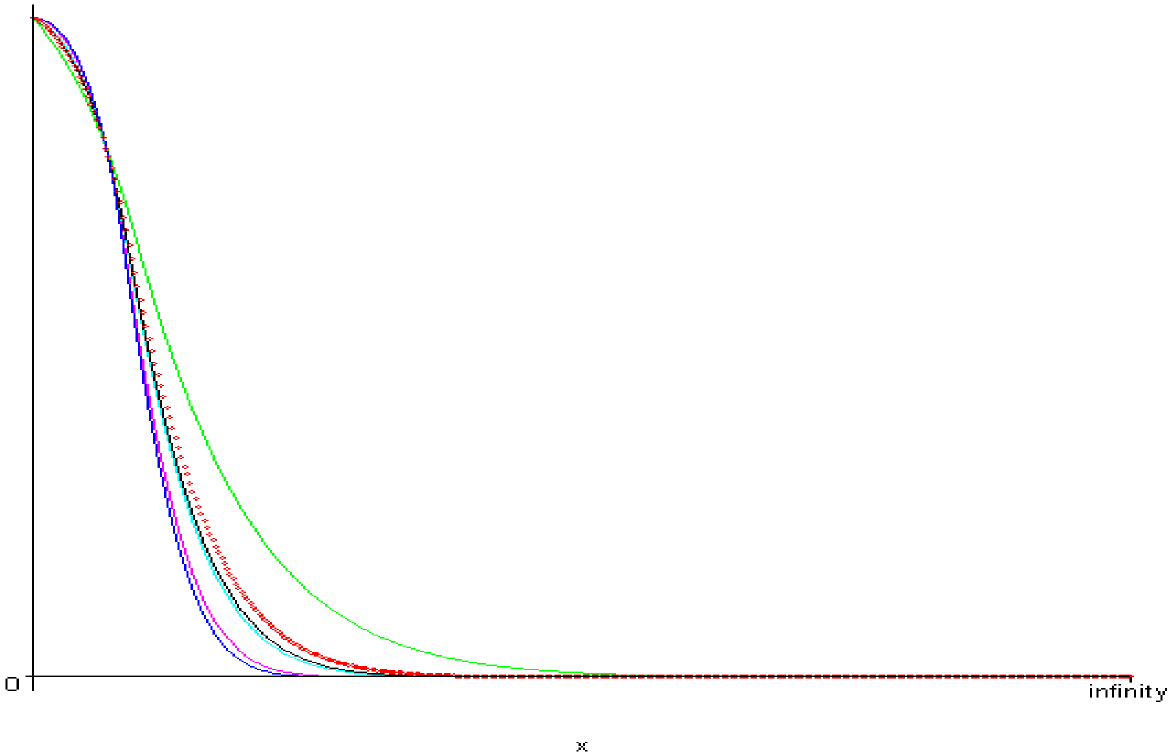
$$K_{n,\vartheta}(x) = (-1)^{\vartheta}(nx)^{\vartheta}e^{-nx\alpha_n}$$

çekirdek fonksiyonu ile $\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$ dizileri alınarak elde edilen operatör yardımıyla $f(x) = \frac{2(1+sin5x)}{e^{4x+3}}$ (mavi) fonksiyonuna $n = 2,10,20,30,40$ için yaklaşım Şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 $f(x) = \frac{2(1+sin5x)}{e^{4x+3}}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım.

Şekil 2.4 de ise $\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$ dizileri alınarak elde edilen operatör yardımıyla $f(x) = \frac{3+x^2}{e^{2x^2-1}}$ (mavi) fonksiyonuna $n = 2,5,7,8,40$ için yaklaşım yapılmıştır.



Şekil 2.4 $\boldsymbol{f(x) = \frac{3+x^2}{e^{2x^2-1}}}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım.

BÖLÜM 3

İKİ DEĞİŞKENLİ GADJIEV- IBRAGIMOV OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİYLE YAKLAŞIM

3.1 İKİ DEĞİŞKENLİ GADJIEV- IBRAGIMOV OPERATÖRLERİ

Teorem 3.1.1 (Volkov Teoremi):

$\{T_{n,m}f\}$ doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}=0 \tag{3.1}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)}=0 \tag{3.2}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}=0 \tag{3.3}$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^{2}+\beta_{j,m}^{2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^{2}+y^{2})\right\|_{C(X)}=0 \tag{3.4}$$

koşullarını gerçekliyorsa X bölgesinde sürekli, reel değerli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı her bir f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|T_{n,m}f-f\right\|_{C(X)}=0 \tag{3.5}$$

ifadesi gerçeklenir (Volkov 1957).

Kanıt.

$$T_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

şeklinde tanımlanan $T_{n,m}(f;x,y)$ polinomları (3.1)-(3.4) koşullarını gerçeklesin ve $f\in C(X)$ olsun.

$$\begin{aligned}T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-f(x,y)\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-f(x,y)\\&\qquad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(x,y)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\left(f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right)P_{k,j}^{(n,m)}\right)\\&\qquad+f(x,y)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\left(f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right)P_{k,j}^{(n,m)}\right)+f(x,y)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right)\right|\\&\leq\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}+f(x,y)\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\max_{(x,y)\in X}\left|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|&\leq\max_{(x,y)\in X}\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}\right|\\&\quad+\max_{(x,y)\in X}|f(x,y)|\max_{(x,y)\in X}\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\left(f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right)P_{k,j}^{(n,m)}\right)\right|\end{aligned}$$

olup, $C(X)$ normu tanımından

$$\left\|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(X)} \leq \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right| P_{k,j}^{(n,m)}\right\|_{C(X)}$$

$$+\|f\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}$$

olarak yazılabilir. $M>0$ için

$$\|f\|_{C(X)}=M$$

olmak üzere

$$\left\|T_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(X)} \leq \left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)(x,y)-f(x,y)\right| P_{k,j}^{(n,m)}\right\|_{C(X)}$$

$$+\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)} M\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}$$

olur.

Diğer yandan $f \in C(X)$ olduğundan f fonksiyonu sınırlıdır. O halde $\forall(x,y) \in X$ için

$$|f(x,y)| \leq M$$

sağlanacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Bu durumda her $k=0,1,\dots,n$ ve $j=0,1,\dots,m$ için $\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)$ noktaları X bölgesinde olduğundan

$$\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f(x,y)\right| \leq 2M$$

yazılabilir.

$$\mu_{k,j}=\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right), \mu=(x,y)$$

$$\rho(\mu_{k,j},\mu)=\sqrt{(\alpha_{k,n}-x)^2+(\beta_{j,m}-y)^2}$$

gösterimleri kullanılacaktır.

f fonksiyonu kapalı X bölgesinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Düzgün süreklilik tanımı gereğince; $\forall\varepsilon>0$ için $\rho(\mu_{k,j},\mu)<\delta$ iken

$$|f(\mu_{k,j})-f(\mu)|<\varepsilon$$

sağlayan en az bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı vardır.

$\rho(\mu_{k,j},\mu)\geq\delta$ için f fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)|\leq 2M$$

gerçeklenir.

$$\frac{\rho(\mu_{k,j},\mu)}{\delta}\geq 1$$

olmak üzere

$$|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)|\leq 2M\frac{\rho^2(\mu_{k,j},\mu)}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\rho(\mu_{k,j},\mu)<\delta$ ve $\rho(\mu_{k,j},\mu)\geq\delta$ olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için

$$|f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})-f(x,y)|<\varepsilon+2M\frac{\rho^2(\mu_{k,j},\mu)}{\delta^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Şimdi $I_{n,m}$ toplamı göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &< \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\varepsilon + 2M\frac{\rho^2(\mu_{k,j},\mu)}{\delta^2}\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \\
&= \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\rho^2(\mu_{k,j},\mu)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \\
&= \varepsilon I'_{n,m} + \frac{2M}{\delta^2}I''_{n,m}
\end{aligned}$$

olup, norm özelliklerinden

$$\|I_{n,m}\|_{C(X)} < \varepsilon\|I'_{n,m}\|_{C(X)} + \frac{2M}{\delta^2}\|I''_{n,m}\|_{C(X)}$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon I'_{n,m}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\varepsilon I'_{n,m} &= \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) + \varepsilon - \varepsilon \\
&= \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

olarak göz önüne alınırsa

$$\varepsilon\|I'_{n,m}\|_{C(X)} \leq \varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1\right\|_{C(X)} + \varepsilon$$

olur.

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mu_{k,j},\mu) &= (\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2 \\
&= (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) - 2\alpha_{k,n}x - 2\beta_{j,m}y + (x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

olduğundan $I''_{n,m}$ ifadesi

$$I''_{n,m}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-2x\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$-2y\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)+(x^2+y^2)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right]+2x\left[x-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right]$$

$$+2y\left[y-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right]$$

$$\left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)}\le\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(X)}$$

$$+2\|x\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)}$$

$$+2\|y\|_{C(X)}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}$$

olarak yazılabilir.

$\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)}, \left\|I'_{n,m}\right\|_{C(X)}, \left\|I''_{n,m}\right\|_{C(X)}$ yerine yazılırsa;

$$\left\|I_{n,m}\right\|_{C(X)}<\varepsilon+\varepsilon\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(X)}$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2\right)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(X)}$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(X)}$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}\,P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(X)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (3.1)-(3.4) ifadelerinden

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|f\left(\alpha_{k,n},\beta_{j,m}\right)-f(x,y)\right|P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right\|_{C(X)}=0$$

sonucunu verir.

Tanım 3.1.1

(α_n), (α_m), (β_n), (β_m), (γ_n) ve (γ_m) dizileri

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0\quad \text{ve}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n=1$$

ve

$$\lim_{m\to\infty}\gamma_m=\infty,\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_m}{\gamma_m}=0\quad \text{ve}\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_m}{\gamma_m}m=1.$$

koşullarını sağlayan gerçel sayı dizleri olsun.

$K_{n,\vartheta}(x)$ ve $K_{m,\mu}(y)$ ise n,ϑ,m,μ parametrelerine bağlı aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

i) Her $n,m\in\mathbb{N}$, her $\vartheta,\mu\in\mathbb{N}_0$ ve her sonlu A sayısı için $(x,y)\in[0,A]\times[0,A]$ olmak üzere

$$(-1)^{\vartheta}K_{n,\vartheta}(x)\geq 0\ \text{ ve }\ (-1)^{\mu}K_{m,\mu}(y)\geq 0.$$

ii) Her $(x,y)\in[0,A]\times[0,A]$ için,

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty} K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!} = 1 \text{ ve } \sum_{\mu=0}^{\infty} K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!} = 1$$

eşitlikleri geçerlidir.

iii) Her $(x, y) \in [0, A] \times [0, A]$ için,

$$K_{n,\vartheta}(x) = -nxK_{n+k,\vartheta-1}(x) \text{ ve } K_{m,\mu}(x) = -myK_{m+l,\mu-1}(y)$$

eşitliğini sağlayacak $n + k, m + l \in \mathbb{N}_0$ olacak şekilde k ve l sayıları vardır.

Bu eşitlikler dikkate alınarak her $f \in C([0, A] \times [0, A])$ için Gadjiev-Ibragimov operatörünün iki değişkenli bir genellemesi

$$L_{n,m}(f, x, y) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} f(\frac{\vartheta}{\beta_n}, \frac{\mu}{\gamma_m}) K_{n,\vartheta}(x) K_{m,\mu}(y) \frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!} \frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!} \qquad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada kısalık olması bakımından

$$P_{n,m}(x, y) = K_{n,\vartheta}(x) K_{m,\mu}(y) \frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!} \frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!}$$

şeklinde gösterilecektir.

Önerme 3.1.1

(3.6) eşitlikte tanımlanan operatör doğrusal ve pozitiftir.

Gerçekten, doğrusallık için,

$$\begin{aligned} L_{n,m}(af + bg) &= \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (af + bg)\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}, \frac{\mu}{\gamma_m}\right) P_{n,m}(x, y) \\ &= \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[(af)\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}, \frac{\mu}{\gamma_m}\right) P_{n,m}(x, y) + (bg)\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}, \frac{\mu}{\gamma_m}\right) P_{n,m}(x, y)\right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}(af)\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},\frac{\mu}{\gamma_m}\right)P_{n,m}(x,y) + \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}(bg)\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},\frac{\mu}{\gamma_m}\right)P_{n,m}(x,y)$$

$$= a\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},\frac{\mu}{\gamma_m}\right)P_{n,m}(x,y) + b\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}g\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},\frac{\mu}{\gamma_m}\right)P_{n,m}(x,y)$$

$$= aL_{n,m}(f,x,y) + bL_{n,m}(g,x,y)$$

olup operatörün doğrusal olduğunu gösterir.

Pozitiflik,

$f(x,y) \geq 0$ olsun.

$(-1)^{\vartheta}K_{n,\vartheta}(x) \geq 0 \ ve \ (-1)^{\mu}K_{m,\mu}(y) \geq 0$ olduğundan α_n ve α_m dizileri de pozitif sayı dizileri olduğundan açıkça $L_{n,m}(f,x,y) \geq 0$ dır. Bu ise operatörün pozitif olduğunu gösterir.

Önerme 3.1.2

$f \in C([0,A] \times [0,A])$ olmak üzere (3.6) eşitliği ile verilen operatör için,

i) $L_{n,m}(1,x,y) = 1$

ii) $L_{n,m}(t_1,x,y) = \frac{\alpha_n}{\beta_n}nx$

iii) $L_{n,m}(t_2,x,y) = \frac{\alpha_m}{\gamma_m}my$

iv) $L_{n,m}({t_1}^2 + {t_2}^2,x,y) = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 n(n+k)x^2 + \frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}nx + \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2 m(m+l)y^2 + \frac{\alpha_m}{{\gamma_m}^2}my$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt.

i) Tanım 3.1.1. ii) den

$$L_{n,m}(1,x,y) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty}K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\sum_{\mu=0}^{\infty}K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!} = 1$$

bulunur.

ii) Tanım 3.1.1 ii) ve iii) den

$$
\begin{aligned}
L_{n,m}(t_1,x,y) &= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\vartheta}{\beta_n}P_{n,m}(x,y)\\
&= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\frac{\vartheta}{\beta_n}K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\\
&= \frac{\alpha_n}{\beta_n}nx\sum_{\vartheta=1}^{\infty}K_{n+k,\vartheta-1}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta-1}}{(\vartheta-1)!}\\
&= \tfrac{\alpha_n}{\beta_n}nx\, n \quad (n+k)\in\mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

iii) $L_{n,m}$ nin tanımından

$$
\begin{aligned}
L_{n,m}(t_2,x,y) &= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mu}{\gamma_m}K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!}K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\\
&= \frac{-\alpha_m}{\gamma_m}\sum_{\vartheta=0}^{\infty}K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\sum_{\mu=1}^{\infty}-myK_{m+l,\mu-1}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\\
&= \frac{\alpha_m}{\gamma_m}my\sum_{\vartheta=0}^{\infty}K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\sum_{\mu=1}^{\infty}K_{m+l,\mu-1}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\\
&= \tfrac{\alpha_m}{\gamma_m}my \qquad (m+l)\in\mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

iv) $(n+k)\in\mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
L_{n,m}({t_1}^2,x,y) &= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}\right)^2P_{n,m}(x,y)\\
&= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!}\frac{\vartheta(\vartheta-1)}{{\beta_n}^2}K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\\
&\qquad +\frac{1}{{\beta_n}^2}\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!}\vartheta K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}\\
&= \frac{{\alpha_n}^2}{{\beta_n}^2}n(n+k)x^2\sum_{\vartheta=2}^{\infty}K_{n+k,\vartheta-2}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta-2}}{(\vartheta-2)!}+\frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_n}{\beta_n}nx\\
&= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2n(n+k)x^2+\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}nx. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde $(m+l)\in\mathbb{N}_0$ olduğundan

$$L_{n,m}({t_2}^2,x,y)=\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2 m(m+l)y^2+\frac{\alpha_m}{{\gamma_m}^2}my \tag{3.8}$$

olarak bulunur ve (3.7) ve (3.8) den

$$L_{n,m}({t_1}^2+{t_2}^2,x,y)=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 n(n+k)x^2+\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}nx+\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2 m(m+l)y^2+\frac{\alpha_m}{{\gamma_m}^2}my.$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2

Her $f\in C([0,A]\times[0,A])$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_{n,m}(f,x,y)-f(x,y)\right\|_{C([0,A]\times[0,A])}=0$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt. Kanıt için Volkov Teoreminin koşullarının sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

Gerçekten,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_{n,m}(1,x,y)-1\right\|=0$$

dır.

$\frac{\alpha_n}{\beta_n}n\to 1$ olduğundan

$$\left\|\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\vartheta}{\beta_n}P_{n,m}(x,y)-x\right\|=\left\|\frac{\alpha_n}{\beta_n}nx-x\right\|$$

bulunur ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_{n,m}(t_1,x,y)-x\right\|=0$$

olur.

Benzer şekilde $\frac{\alpha_m}{\gamma_m} m \to 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_{n,m}(t_2, x, y) - y \right\| = 0$$

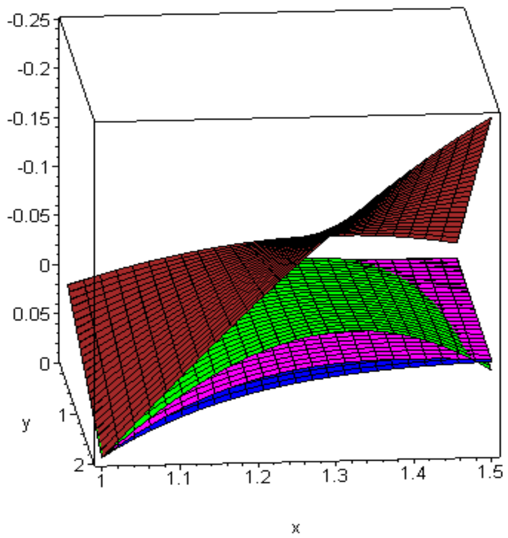
dır. Ayrıca Önerme 3.1.2 iv) den

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_{n,m}({t_1}^2 + {t_2}^2, x, y) - x^2 - y^2 \right\| = 0$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 3.1.1

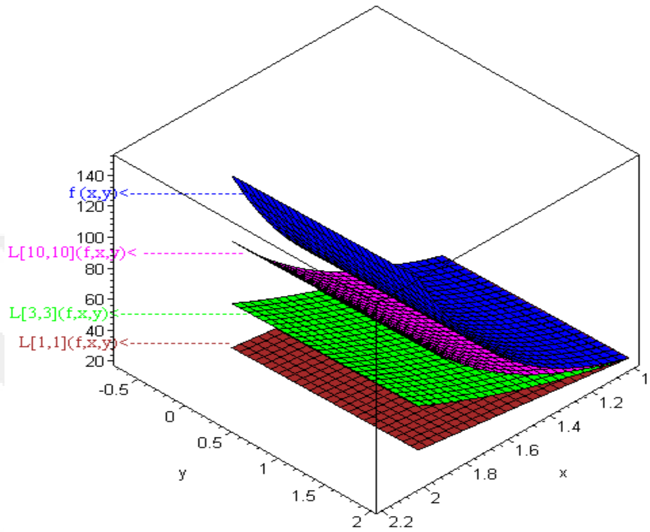
$\alpha_n = \alpha_m = 1, \beta_n = n,\ \gamma_m = m$ dizileri için $L_{n,m}(f, x, y)$ operatör dizisi ile $f(x, y) = \frac{1+2xy}{e^{1+3x^2}}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımın $n, m = 3{,}2$(kahverengi), $n, m = 5{,}5$(yeşil), $n, m = 11{,}10$(pembe) için grafiği Şekil 3.1 de verilmiştir.



Şekil 3.1 $f(x, y) = \frac{1+2xy}{e^{1+3x^2}}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım.

Örnek 3.1.2

$\alpha_n = \alpha_m = 1, \beta_n = n,\ \gamma_m = m$ dizileri için $L_{n,m}(f,x,y)$ operatör dizisi ile $f(x,y) = e^{1+2x} + y$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımın $n = m = 1$(kahverengi), $n = m = 3$(yeşil), $n = m = 10$(pembe) için grafiği Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2 $f(x,y) = e^{1+2x} + y$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım

Operatörün ilk üç momenti aşağıdaki Lemma da verilecektir.

Lemma 3.1.1

$(x,y) \in [0,A] \times [0,A]$ ve her $n,m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $L_{n,m}(1,x,y) = 1.$

ii) $L_{n,m}(t_1 - x,x,y) = x\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right).$

iii) $L_{n,m}((t_1 - x)^2,x,y) = \left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 n(n+k) - \frac{2\alpha_n}{\beta_n}n + 1\right] x^2 + \frac{\alpha_n}{\beta_n{}^2}nx$

Kanıt.

i) Açıkça $L_{n,m}(1,x,y) = 1$

ii) $L_{n,m}(t_1 - x, x, y) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\vartheta}{\beta_n} - x\right)P_{n,m}(x,y) = x\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}n - 1\right)$

iii) $L_{n,m}((t_1 - x)^2, x, y) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}(t - x)^2\,P_{n,m}(x,y)$

$$= \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}\right)^2 P_{n,m}(x,y) - 2x\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\vartheta}{\beta_n}P_{n,m}(x,y) + x^2\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}P_{n,m}(x,y)$$

$$= \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 n(n+k)x^2 + \frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}nx - 2x^2\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}n\right) + x^2$$

$$= x^2\left[\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 n(n+k) - \frac{2\alpha_n}{\beta_n}n + 1\right] + \frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}nx.$$

Böylece Lemma kanıtlanmış olur.

Uyarı 3.1.1 $L_{n,m}((t_2 - y), x, y)$ ve $L_{n,m}((t_2 - y)^2, x, y)$ de benzer şekilde kanıtlanır.

Bu kesimde Tanım 3.1.1 ile verilen operatörün $C([0,A]\times[0,A])$ uzayında yaklaşım hızı hesabı verilecektir.

Tanım 3.1.2

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $f: D \to \mathbb{R}$ tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$\omega_1 f(f,\delta) = sup\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : (x_1,y),(x_2,y) \in K, |x_1 - x_2| \le \delta\}$$
$$\omega_2 f(f,\delta) = sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : (x,y_1),(x,y_2) \in K, |y_1 - y_2| \le \delta\}$$

fonksiyonlarına sırasıyla *f* fonksiyonunun *x e göre kısmi süreklilik modülü* ve *y ye göre kısmi süreklilik modülü* denir (Altomare ve Campiti 1994).

Teorem 3.1.3

Her $f \in C([0,A]\times[0,A])$ ve $(\gamma_n),(\beta_n),(\gamma_m)$ dizileri Tanım 3.1.1 de tanımlanan diziler olsun. Bu durumda yeterince büyük bir *n,m* ve *n,m* den bağımsız bir *K* sabiti için

$$\left\|L_{n,m}(f,x,y) - f(x,y)\right\|_{C[0,A]} \le K_1 w_2(f,\delta_m) + K_2 w_1(f,\delta_n)$$

dir. Ayrıca

$$\delta_n = \sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1\right)^2 + \frac{\alpha_n}{\beta_n} + \frac{1}{A\beta_n}} \text{ ve } \delta_m = \sqrt{\left(m\frac{\alpha_m}{\gamma_m} - 1\right)^2 + \frac{\alpha_m}{\gamma_m} + \frac{1}{A\gamma_m}}$$

dir.

Kanıt.

Gerçekten Tanım 3.1.2 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$N_1 = \sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},\frac{\mu}{\gamma_m}\right) - f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},y\right)\right| P_{n,m}(x,y)$$

$$\leq \sum_{\mu=0}^{\infty}\omega_2(f,\delta_m)\left[1 + \frac{\left|\frac{\mu}{\gamma_m} - y\right|}{\delta_m}\right] K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!}$$

$$\leq \omega_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|\frac{\mu}{\gamma_m} - y\right|\sqrt{K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!}}\sqrt{K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!}}\right\}$$

$$\leq \omega_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\sqrt{\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|\frac{\mu}{\gamma_m} - y\right|^2 K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!}}\right\}.$$

Önerme 3.1.2 den

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|\frac{\mu}{\gamma_m} - y\right|^2 K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\mu}{\gamma_m}\right)^2 - 2y\frac{\mu}{\gamma_m} + y^2\right] K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!}$$

$$= \left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2 m(m+l)y^2 + \frac{\alpha_m}{{\gamma_m}^2}my - 2y\frac{\mu}{\gamma_m} + y^2$$

$\left(\frac{\mu}{\gamma_m} - y\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\gamma_m}\right)^2 - 2y\frac{\mu}{\gamma_m} + y^2$ olduğundan

$$\left|L_{n,m}(f,x,y) - f(x,y)\right| \leq \omega_2(f,\delta_m)\left\{1 + \frac{1}{\delta_m}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\gamma_m}\right)^2 K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^\mu}{\mu!}\right.\right.$$

$$-2y\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mu}{\gamma_m}K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!}+y^2\sum_{\mu=0}^{\infty}K_{m,\mu}(y)\frac{(-\alpha_m)^{\mu}}{\mu!}\Bigg)^{1/2}\Bigg\}$$

$$=\omega_2(f,\delta_m)\Big\{1$$

$$+\frac{1}{\delta_m}\left(L_{n,m}({t_2}^2,x,y)-2yL_{n,m}(t_2,x,y)+y^2L_{n,m}(1,x,y)\right)^{1/2}\Big\}$$

eşitsizliği geçerlidir. $y\in[0,A]$ için $L_{n,m}({t_2}^2,x,y), L_{n,m}(t_2,x,y)$ ve $L_{n,m}(1,x,y)$ yerlerine yazılırsa $\lim_{m\to\infty}\gamma_m=\infty$, $\lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_m}{\gamma_m}=0$ ve $\lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_m}{\gamma_m}m=1$ eşitlikleri dikkate alınarak yeterince büyük m ler için $\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\leq 1$ and $\frac{\alpha_m}{\gamma_m}m\leq 2$ eşitliklerini kullanarak

$$\left|L_{n,m}(f,x,y)-f(x,y)\right|\leq\omega_2(f,\delta_m)\Bigg\{1+\frac{1}{\delta_m}\Bigg(\frac{m(m+l)}{{\gamma_m}^2}{\alpha_m}^2A^2+\frac{1}{\gamma_m}\frac{\alpha_m}{\gamma_m}mA$$

$$-2A\frac{\alpha_m}{\gamma_m}m+A^2\Bigg)\Bigg\}^{1/2}$$

$$\leq\omega_2(f,\delta_m)\left\{1+\frac{A}{\delta_m}\left(A^2\left[\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2m^2-2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}m+1\right]+A^2\left[\left(\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\right)^2ml+\frac{1}{A}\frac{1}{\gamma_m}\frac{\alpha_m}{\gamma_m}m+1\right]\right)^{1/2}\right\}$$

bulunur. $\delta_m=\sqrt{\left(m\frac{\alpha_m}{\gamma_m}-1\right)^2+\frac{\alpha_m}{\gamma_m}+\frac{1}{A\gamma_m}}$ seçimiyle m den bağımsız bir K_2 sabiti için

$$\left\|L_{n,m}(f,x,y)-f(x,y)\right\|_{C[0,A]}\leq K_1w_2\left(f,\sqrt{\left(m\frac{\alpha_m}{\gamma_m}-1\right)^2+\frac{\alpha_m}{\gamma_m}+\frac{1}{A\gamma_m}}\right)$$

olur.

Benzer şekilde

$$N_2=\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{\vartheta}{\beta_n},y\right)-f(x,y)\right|P_{n,m}(x,y)$$

$$\leq \omega_1(f,\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\left|\frac{\vartheta}{\beta_n}-x\right|^2 K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}}\right\}$$

elde edilir. Burada Önerme 3.1.2 den

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\left|\frac{\vartheta}{\beta_n}-x\right|^2 K_{n,\vartheta}(x)\frac{(-\alpha_n)^{\vartheta}}{\vartheta!}=\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 n(n+k)x^2+\frac{\alpha_n}{{\beta_n}^2}nx-2x\frac{\vartheta}{\beta_n}+x^2.$$

$\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}-x\right)^2=\left(\frac{\vartheta}{\beta_n}\right)^2-2x\frac{\vartheta}{\beta_n}+x^2$ olduğundan

$$\left|L_{n,m}(f,x,y)-f(x,y)\right|\leq \omega_1(f,\delta_n)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\Big(L_{n,m}(t^2,x,y)-2xL_{n,m}(t,x,y)\right.$$

$$\left.+x^2L_{n,m}(1,x,y)\Big)^{1/2}\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Her $x\in[0,A]$ için $L_{n,m}({t_1}^2,x,y), L_{n,m}(t_1,x,y)$ ve $L_{n,m}(1,x,y)$ yerlerine yazılırsa $\lim_{m\to\infty}\beta_n=\infty$, $\lim_{m\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}n=1$ eşitlikleri dikkate alınarak yeterince büyük *n* ler için $\frac{\alpha_n}{\beta_n}\leq 1\ ve\ \frac{\alpha_n}{\beta_n}n\leq 2$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left|L_{n,m}(f,x,y)-f(x,y)\right|\leq \omega_1(f,\delta_n)\left\{1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{n(n+k)}{{\delta_n}^2}{\alpha_n}^2A^2+\frac{1}{\beta_n}\frac{\alpha_n}{\beta_n}nA-2A\frac{\alpha_n}{\beta_n}n+A^2\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq \omega_1(f,\delta_n)\left\{1+\frac{2kA}{\delta_n}\left[\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}\right]^{1/2}\right\}$$

bulunur. Dolayısıyla $\delta_n=\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}$ seçimiyle *n* den bağımsız bir K_2 için

$$\left\|L_{n,m}(f,x,y)-f(x,y)\right\|_{C[0,A]}\leq K_2 w_1\left(f,\sqrt{\left(n\frac{\alpha_n}{\beta_n}-1\right)^2+\frac{\alpha_n}{\beta_n}+\frac{1}{A\beta_n}}\right)$$

olur.

Böylece kanıt tamamlanmış olur.

3.2 NÜMERİK HESAPLAMALAR

Şimdi de $L_{n,m}(f,x,y)$ operatörler dizisinin yakınsaklık hızına bir örnek verilecektir.

Örnek 3.2.1

$\alpha_n = \alpha_m = 1, \beta_n = n, \ \gamma_m = m$ dizileri için $L_{n,m}(f,x,y)$ operatör dizisi ile $f(x,y) = \frac{e^{yx}}{ln\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x^2+1}{|x+1|}+1\right)}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımın $n = m = 1$(kahverengi), $n,m = 4,5$(yeşil), $n,m = 7,11$(pembe) için grafiği Şekil 3.3 de verilmiştir. Bu fonksiyona ait Maple 13'de hazırlanan program parçası aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

$$f := (x,y) \to \frac{\mathbf{e}^{(y\,x)}}{\ln\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x^2+1}{|x+1|}+1\right)}$$

$$\alpha(1) := 1$$

$$\psi(1) := 2$$

$$K_1(v,x) := \frac{(-1)^v x^v (1-x)^{(1-v)}}{(1-v)!}$$

$$K_1(\mu,y) := \frac{(-1)^\mu y^\mu (1-y)^{(1-\mu)}}{(1-\mu)!}$$

$$P_{1,1}(v,\mu,x,y) := \frac{((-1)^v)^2 x^v (1-x)^{(1-v)} ((-1)^\mu)^2 y^\mu (1-y)^{(1-\mu)}}{(1-v)!\, v!\, (1-\mu)!\, \mu!}$$

$$L_{1,1}(f,x,y) := \frac{(1-x)(1-y)}{\ln(3)}+\frac{(1-x)\,y}{\ln(3)}+\frac{x\,(1-y)}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{\mathbf{e}^{(1/6)}\,x\,y}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$m := 5$$

$$\alpha(5) := 1$$

$$\psi(5) := 6$$

$$K_4(\nu, x) := \frac{24\,(-1)^{\nu}\,x^{\nu}\,(1-x)^{(4-\nu)}}{(4-\nu)!}$$

$$K_5(\mu, y) := \frac{120\,(-1)^{\mu}\,y^{\mu}\,(1-y)^{(5-\mu)}}{(5-\mu)!}$$

$$P_{4,5}(\nu, \mu, x, y) := \frac{2880\,\left((-1)^{\nu}\right)^2 x^{\nu}\,(1-x)^{(4-\nu)}\,\left((-1)^{\mu}\right)^2 y^{\mu}\,(1-y)^{(5-\mu)}}{(4-\nu)!\,\nu!\,(5-\mu)!\,\mu!}$$

$$\begin{aligned}
L_{4,5}(f, x, y) := {} & \frac{4\,\mathbf{e}^{(5/36)}\,x\,(1-x)^3\,y^5}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} + \frac{6\,\mathbf{e}^{(5/18)}\,x^2\,(1-x)^2\,y^5}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{4\,\mathbf{e}^{(5/12)}\,x^3\,(1-x)\,y^5}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \\
& + \frac{5\,\mathbf{e}^{(1/9)}\,x^4\,y\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} + \frac{10\,\mathbf{e}^{(2/9)}\,x^4\,y^2\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} + \frac{10\,\mathbf{e}^{(1/3)}\,x^4\,y^3\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} \\
& + \frac{5\,\mathbf{e}^{(4/9)}\,x^4\,y^4\,(1-y)}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} + \frac{20\,\mathbf{e}^{(1/36)}\,x\,(1-x)^3\,y\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} \\
& + \frac{40\,\mathbf{e}^{(1/18)}\,x\,(1-x)^3\,y^2\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} + \frac{40\,\mathbf{e}^{(1/12)}\,x\,(1-x)^3\,y^3\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} \\
& + \frac{20\,\mathbf{e}^{(1/9)}\,x\,(1-x)^3\,y^4\,(1-y)}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} + \frac{30\,\mathbf{e}^{(1/18)}\,x^2\,(1-x)^2\,y\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} \\
& + \frac{60\,\mathbf{e}^{(1/9)}\,x^2\,(1-x)^2\,y^2\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{60\,\mathbf{e}^{(1/6)}\,x^2\,(1-x)^2\,y^3\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} \\
& + \frac{30\,\mathbf{e}^{(2/9)}\,x^2\,(1-x)^2\,y^4\,(1-y)}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{20\,\mathbf{e}^{(1/12)}\,x^3\,(1-x)\,y\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \\
& + \frac{40\,\mathbf{e}^{(1/6)}\,x^3\,(1-x)\,y^2\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{40\,\mathbf{e}^{(1/4)}\,x^3\,(1-x)\,y^3\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \\
& + \frac{20\,\mathbf{e}^{(1/3)}\,x^3\,(1-x)\,y^4\,(1-y)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{(1-x)^4\,(1-y)^5}{\ln(3)} + \frac{(1-x)^4\,y^5}{\ln(3)} + \frac{x^4\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} \\
& + \frac{5\,(1-x)^4\,y\,(1-y)^4}{\ln(3)} + \frac{10\,(1-x)^4\,y^2\,(1-y)^3}{\ln(3)} + \frac{10\,(1-x)^4\,y^3\,(1-y)^2}{\ln(3)}
\end{aligned}$$

$$+\frac{5(1-x)^4y^4(1-y)}{\ln(3)}+\frac{4x(1-x)^3(1-y)^5}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)}+\frac{6x^2(1-x)^2(1-y)^5}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{4x^3(1-x)(1-y)^5}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{\mathbf{e}^{(5/9)}x^4y^5}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$m := 11$$

$$\alpha(11) := 1$$

$$\psi(11) := 12$$

$$K_7(v,x) := \frac{5040\,(-1)^v x^v (1-x)^{(7-v)}}{(7-v)!}$$

$$K_{11}(\mu,y) := \frac{39916800\,(-1)^\mu y^\mu (1-y)^{(11-\mu)}}{(11-\mu)!}$$

$$P_{7,11}(v,\mu,x,y) := \frac{201180672000\ \left((-1)^v\right)^2 x^v (1-x)^{(7-v)} \left((-1)^\mu\right)^2 y^\mu (1-y)^{(11-\mu)}}{(7-v)!\,v!\,(11-\mu)!\,\mu!}$$

$$L_{7,11}(f,x,y) := \frac{7\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{108}\right)}x(1-x)^6y^{11}}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{21\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{54}\right)}x^2(1-x)^5y^{11}}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{35\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{36}\right)}x^3(1-x)^4y^{11}}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{35\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{27}\right)}x^4(1-x)^3y^{11}}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{21\,\mathbf{e}^{\left(\frac{55}{108}\right)}x^5(1-x)^2y^{11}}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{7\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{18}\right)}x^6(1-x)y^{11}}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{11\,\mathbf{e}^{(7/108)}x^7y(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{55\,\mathbf{e}^{(7/54)}x^7y^2(1-y)^9}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{165\,\mathbf{e}^{(7/36)}x^7y^3(1-y)^8}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}$$

$$+\frac{330\,\mathbf{e}^{(7/27)}x^7y^4(1-y)^7}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{462\,\mathbf{e}^{\left(\frac{35}{108}\right)}x^7y^5(1-y)^6}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{462\,\mathbf{e}^{(7/18)}x^7y^6(1-y)^5}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}$$

$$+\frac{330\,\mathbf{e}^{\left(\frac{49}{108}\right)}x^7y^7(1-y)^4}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{165\,\mathbf{e}^{\left(\frac{14}{27}\right)}x^7y^8(1-y)^3}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{55\,\mathbf{e}^{(7/12)}x^7y^9(1-y)^2}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}$$

$$+\frac{11\,\mathbf{e}^{\left(\frac{35}{54}\right)}x^7y^{10}(1-y)}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{77\,\mathbf{e}^{(1/108)}x(1-x)^6y(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}$$

$$+\frac{385\,\mathbf{e}^{(1/54)}x(1-x)^6y^2(1-y)^9}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{1155\,\mathbf{e}^{(1/36)}x(1-x)^6y^3(1-y)^8}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}$$

$$+\frac{2310\ \mathbf{e}^{(1/27)}\,x\,(1-x)^6\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{3234\ \mathbf{e}^{(5/108)}\,x\,(1-x)^6\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}$$

$$+\frac{3234\ \mathbf{e}^{(1/18)}\,x\,(1-x)^6\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{2310\ \mathbf{e}^{(7/108)}\,x\,(1-x)^6\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}$$

$$+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(2/27)}\,x\,(1-x)^6\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{385\ \mathbf{e}^{(1/12)}\,x\,(1-x)^6\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}$$

$$+\frac{77\ \mathbf{e}^{(5/54)}\,x\,(1-x)^6\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{231\ \mathbf{e}^{(1/54)}\,x^2\,(1-x)^5\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(1/27)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{3465\ \mathbf{e}^{(1/18)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{6930\ \mathbf{e}^{(2/27)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{9702\ \mathbf{e}^{(5/54)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{9702\ \mathbf{e}^{(1/9)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{6930\ \mathbf{e}^{(7/54)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{3465\ \mathbf{e}^{(4/27)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(1/6)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{231\ \mathbf{e}^{(5/27)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{385\ \mathbf{e}^{(1/36)}\,x^3\,(1-x)^4\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(1/18)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(1/12)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(1/9)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(5/36)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(1/6)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(7/36)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(2/9)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(1/4)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{385\ \mathbf{e}^{(5/18)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{385\ \mathbf{e}^{(1/27)}\,x^4\,(1-x)^3\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(2/27)}\, x^4 (1-x)^3 y^2 (1-y)^9}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(1/9)}\, x^4 (1-x)^3 y^3 (1-y)^8}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(4/27)}\, x^4 (1-x)^3 y^4 (1-y)^7}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(5/27)}\, x^4 (1-x)^3 y^5 (1-y)^6}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(2/9)}\, x^4 (1-x)^3 y^6 (1-y)^5}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(7/27)}\, x^4 (1-x)^3 y^7 (1-y)^4}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(8/27)}\, x^4 (1-x)^3 y^8 (1-y)^3}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(1/3)}\, x^4 (1-x)^3 y^9 (1-y)^2}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{385\ \mathbf{e}^{\left(\frac{10}{27}\right)}\, x^4 (1-x)^3 y^{10} (1-y)}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{231\ \mathbf{e}^{(5/108)}\, x^5 (1-x)^2 y (1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(5/54)}\, x^5 (1-x)^2 y^2 (1-y)^9}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{3465\ \mathbf{e}^{(5/36)}\, x^5 (1-x)^2 y^3 (1-y)^8}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{6930\ \mathbf{e}^{(5/27)}\, x^5 (1-x)^2 y^4 (1-y)^7}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{9702\ \mathbf{e}^{\left(\frac{25}{108}\right)}\, x^5 (1-x)^2 y^5 (1-y)^6}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{9702\ \mathbf{e}^{(5/18)}\, x^5 (1-x)^2 y^6 (1-y)^5}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{6930\ \mathbf{e}^{\left(\frac{35}{108}\right)}\, x^5 (1-x)^2 y^7 (1-y)^4}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{3465\ \mathbf{e}^{\left(\frac{10}{27}\right)}\, x^5 (1-x)^2 y^8 (1-y)^3}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(5/12)}\, x^5 (1-x)^2 y^9 (1-y)^2}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{231\ \mathbf{e}^{\left(\frac{25}{54}\right)}\, x^5 (1-x)^2 y^{10} (1-y)}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{77\ \mathbf{e}^{(1/18)}\, x^6 (1-x)\, y (1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{385\ \mathbf{e}^{(1/9)}\, x^6 (1-x)\, y^2 (1-y)^9}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(1/6)}\, x^6 (1-x)\, y^3 (1-y)^8}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{2310\ \mathbf{e}^{(2/9)}\, x^6 (1-x)\, y^4 (1-y)^7}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{3234\ \mathbf{e}^{(5/18)}\, x^6 (1-x)\, y^5 (1-y)^6}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{3234\ \mathbf{e}^{(1/3)}\, x^6 (1-x)\, y^6 (1-y)^5}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{2310\ \mathbf{e}^{(7/18)}\, x^6 (1-x)\, y^7 (1-y)^4}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$
+\frac{1155\,\mathbf{e}^{(4/9)}\,x^6(1-x)y^8(1-y)^3}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{385\,\mathbf{e}^{(1/2)}\,x^6(1-x)y^9(1-y)^2}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}
$$

$$
+\frac{77\,\mathbf{e}^{(5/9)}\,x^6(1-x)y^{10}(1-y)}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{x^7(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{(1-x)^7(1-y)^{11}}{\ln(3)}+\frac{(1-x)^7y^{11}}{\ln(3)}
$$

$$
+\frac{11(1-x)^7y(1-y)^{10}}{\ln(3)}+\frac{55(1-x)^7y^2(1-y)^9}{\ln(3)}+\frac{165(1-x)^7y^3(1-y)^8}{\ln(3)}
$$

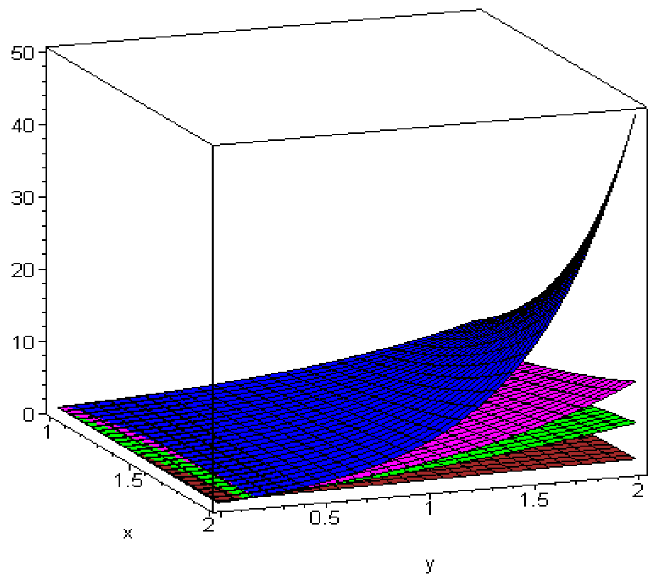
$$
+\frac{330(1-x)^7y^4(1-y)^7}{\ln(3)}+\frac{462(1-x)^7y^5(1-y)^6}{\ln(3)}+\frac{462(1-x)^7y^6(1-y)^5}{\ln(3)}
$$

$$
+\frac{330(1-x)^7y^7(1-y)^4}{\ln(3)}+\frac{165(1-x)^7y^8(1-y)^3}{\ln(3)}+\frac{55(1-x)^7y^9(1-y)^2}{\ln(3)}
$$

$$
+\frac{11(1-x)^7y^{10}(1-y)}{\ln(3)}+\frac{7x(1-x)^6(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{21x^2(1-x)^5(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}
$$

$$
+\frac{35x^3(1-x)^4(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{35x^4(1-x)^3(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{21x^5(1-x)^2(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}
$$

$$
+\frac{7x^6(1-x)(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{\mathbf{e}^{\left(\frac{77}{108}\right)}x^7y^{11}}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}
$$



Şekil 3.3 $f(x,y)=\dfrac{e^{yx}}{ln\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x^2+1}{|x+1|}+1\right)}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşım

Örnek 3.2.2

$\alpha_n = 1\,, \beta_n = n$ dizileri için $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{10}$ fonksiyonun hata hesabı şu şekildedir.

n,m	$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{10}$ **nin süreklilik modülü ile hata hesabı**
10	0.8755417528
10^2	0.2422741700
10^3	0.0731541753
10^4	0.0227874170
10^5	0.0071714175
10^6	0.0022643417
10^7	0.0007157018
10^8	0.0002262902
10^9	0.0000715558

$n := 10$

$m := 10$

$\alpha(10) := 1$

$\alpha(10) := 1$

$\beta(10) := 10$

$\beta(10) := 10$

$\delta(10) := 0.4472135954$

$\delta(10) := 0.4472135954$

$\omega 1\,(f, 0.4472135954\quad) := 0.2188854382$

$\omega 2\,(f, 0.4472135954\quad) := 0.2188854382$

$errorB := 0.8755417528$

$n := 100$

$m := 100$

$\alpha(100) := 1$

$\alpha(100) := 1$

$\beta(100) := 100$

$$\beta(100) := 100$$

$$\delta(100) := 0.1414213562$$

$$\delta(100) := 0.1414213562$$

$$\omega 1(f, 0.1414213562) := 0.06056854248$$

$$\omega 2(f, 0.1414213562) := 0.06056854248$$

$$errorB := 0.2422741700$$

$$n := 1000$$

$$m := 1000$$

$$\alpha(1000) := 1$$

$$\alpha(1000) := 1$$

$$\beta(1000) := 1000$$

$$\beta(1000) := 1000$$

$$\delta(1000) := 0.04472135954$$

$$\delta(1000) := 0.04472135954$$

$$\omega 1(f, 0.04472135954) := 0.01828854382$$

$$\omega 2(f, 0.04472135954) := 0.01828854382$$

$$errorB := 0.07315417528$$

$$n := 10000$$

$$m := 10000$$

$$\alpha(10000) := 1$$

$$\alpha(10000) := 1$$

$$\beta(10000) := 10000$$

$$\beta(10000) := 10000$$

$$\delta(10000) := 0.01414213562$$

$$\delta(10000) := 0.01414213562$$

$$\omega 1(f, 0.01414213562) := 0.005696854248$$

$$\omega 2(f, 0.01414213562) := 0.005696854248$$

$$errorB := 0.02278741700$$

$$n := 100000$$

$$m := 100000$$

$$\alpha(100000) := 1$$

$$\alpha(100000) := 1$$

$$\beta(100000) := 100000$$

$\beta(100000) := 100000$

$\delta(100000) := 0.004472135954$

$\delta(100000) := 0.004472135954$

$\omega1(f, 0.004472135954) := 0.001792854382$

$\omega2(f, 0.004472135954) := 0.001792854382$

$errorB := 0.007171417528$

$n := 1000000$

$m := 1000000$

$\alpha(1000000) := 1$

$\alpha(1000000) := 1$

$\beta(1000000) := 1000000$

$\beta(1000000) := 1000000$

$\delta(1000000) := 0.001414213562$

$\delta(1000000) := 0.001414213562$

$\omega1(f, 0.001414213562) := 0.0005660854248$

$\omega2(f, 0.001414213562) := 0.0005660854248$

$errorB := 0.002264341700$

$n := 10000000$

$m := 10000000$

$\alpha(10000000) := 1$

$\alpha(10000000) := 1$

$\beta(10000000) := 10000000$

$\beta(10000000) := 10000000$

$\delta(10000000) := 0.0004472135954$

$\delta(10000000) := 0.0004472135954$

$\omega1(f, 0.0004472135954) := 0.0001789254382$

$\omega2(f, 0.0004472135954) := 0.0001789254382$

$errorB := 0.0007157017528$

$n := 100000000$

$m := 100000000$

$\alpha(100000000) := 1$

$\alpha(100000000) := 1$

$\beta(100000000) := 100000000$

$\beta(100000000) := 100000000$

$\delta(100000000) := 0.0001414213562$

$\delta(100000000) := 0.0001414213562$

$\omega 1(f, 0.0001414213562) := 0.00005657254248$

$\omega 2(f, 0.0001414213562) := 0.00005657254248$

$errorB := 0.0002262901700$

$n := 1000000000$

$m := 1000000000$

$\alpha(1000000000) := 1$

$\alpha(1000000000) := 1$

$\beta(1000000000) := 1000000000$

$\beta(1000000000) := 1000000000$

$\delta(1000000000) := 0.00004472135954$

$\delta(1000000000) := 0.00004472135954$

$\omega 1(f, 0.00004472135954) := 0.00001788894382$

$\omega 2(f, 0.00004472135954) := 0.00001788894382$

$errorB := 0.00007155577528$

Örnek 3.2.3

$\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$ dizileri için $f(x,y) = \frac{1+2x-e^y}{3}$ fonksiyonun hata hesabı şu şekildedir.

$n := 10$

$m := 10$

$\alpha(10) := 1$

$\alpha(10) := 1$

$\beta(10) := 10$

$\beta(10) := 10$

$\delta(10) := 0.4472135954$

$\delta(10) := 0.4472135954$

$\omega 1(f, 0.4472135954) := 0.2128477562$

$\omega 2(f, 0.4472135954) := 0.2128477562$

$errorB := 0.8513910248$

$$n := 100$$
$$m := 100$$
$$\alpha(100) := 1$$
$$\alpha(100) := 1$$
$$\beta(100) := 100$$
$$\beta(100) := 100$$
$$\delta(100) := 0.1414213562$$
$$\delta(100) := 0.1414213562$$
$$\omega 1(f, 0.1414213562) := 0.04364426743$$
$$\omega 2(f, 0.1414213562) := 0.04364426743$$
$$errorB := 0.1745770697$$
$$n := 1000$$
$$m := 1000$$
$$\alpha(1000) := 1$$
$$\alpha(1000) := 1$$
$$\beta(1000) := 1000$$
$$\beta(1000) := 1000$$
$$\delta(1000) := 0.04472135954$$
$$\delta(1000) := 0.04472135954$$
$$\omega 1(f, 0.04472135954) := 0.01456876130$$
$$\omega 2(f, 0.04472135954) := 0.01456876130$$
$$errorB := 0.05827504520$$
$$n := 10000$$
$$m := 10000$$
$$\alpha(10000) := 1$$
$$\alpha(10000) := 1$$
$$\beta(10000) := 10000$$
$$\beta(10000) := 10000$$
$$\delta(10000) := 0.01414213562$$
$$\delta(10000) := 0.01414213562$$
$$\omega 1(f, 0.01414213562) := 0.004680554013$$
$$\omega 2(f, 0.01414213562) := 0.004680554013$$
$$errorB := 0.01872221605$$

$$n := 100000$$

$$m := 100000$$

$$\alpha(100000) := 1$$

$$\alpha(100000) := 1$$

$$\beta(100000) := 100000$$

$$\beta(100000) := 100000$$

$$\delta(100000) := 0.004472135954$$

$$\delta(100000) := 0.004472135954$$

$$\omega 1\,(f, 0.004472135954) := 0.001487373600$$

$$\omega 2\,(f, 0.004472135954) := 0.001487373600$$

$$errorB := 0.005949494400$$

$$n := 1000000$$

$$m := 1000000$$

$$\alpha(1000000) := 1$$

$$\alpha(1000000) := 1$$

$$\beta(1000000) := 1000000$$

$$\beta(1000000) := 1000000$$

$$\delta(1000000) := 0.001414213562$$

$$\delta(1000000) := 0.001414213562$$

$$\omega 1\,(f, 0.001414213562) := 0.0004710710413$$

$$\omega 2\,(f, 0.001414213562) := 0.0004710710413$$

$$errorB := 0.001884284165$$

$$n := 10000000$$

$$m := 10000000$$

$$\alpha(10000000) := 1$$

$$\alpha(10000000) := 1$$

$$\beta(10000000) := 10000000$$

$$\beta(10000000) := 10000000$$

$$\delta(10000000) := 0.0004472135954$$

$$\delta(10000000) := 0.0004472135954$$

$$\omega 1\,(f, 0.0004472135954) := 0.0001490377000$$

$$\omega 2\,(f, 0.0004472135954) := 0.0001490377000$$

$$errorB := 0.0005961508000$$

$$n := 100000000$$
$$m := 100000000$$
$$\alpha(100000000) := 1$$
$$\alpha(100000000) := 1$$
$$\beta(100000000) := 100000000$$
$$\beta(100000000) := 100000000$$
$$\delta(100000000) := 0.0001414213562$$
$$\delta(100000000) := 0.0001414213562$$
$$\omega 1(f, 0.0001414213562) := 0.00004713720413$$
$$\omega 2(f, 0.0001414213562) := 0.00004713720413$$
$$errorB := 0.0001885488165$$
$$n := 1000000000$$
$$m := 1000000000$$
$$\alpha(1000000000) := 1$$
$$\alpha(1000000000) := 1$$
$$\beta(1000000000) := 1000000000$$
$$\beta(1000000000) := 1000000000$$
$$\delta(1000000000) := 0.00004472135954$$
$$\delta(1000000000) := 0.00004472135954$$
$$\omega 1(f, 0.00004472135954) := 0.00001490683969$$
$$\omega 2(f, 0.00004472135954) := 0.00001490683969$$
$$errorB := 0.00005962735876$$

BÖLÜM 4

SONUÇ

Bu tezde Gadjiev-Ibragimov operatörlerinin 2013'de tanımlanan bir genelleştirmesinin iki değişkenli hali tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra yaklaşım hızları süreklilik modülü yardımı ile araştırılmıştır. Bu çalışma literatürde yer alan operatörleri iki boyutlu uzaya taşıyacak araştırmacılara yol gösterici niteliktedir.

KAYNAKLAR

Altomare F and Campite M (1994) *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications*, Walter de Gruyter, Berlin Newyork, 141-180.

Aral A (2003) Approximation by Ibragimov-Gadjiev Operators in Polynomial Weighted Space, *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan*, XIX:35-44.

Coşkun E (2002) *Analiz I.* 1.Basım, ISBN: 975-6674-06-7, Alp Yayınevi, Ankara, 349 s.

Coşkun T (1997) Some Properties of Linear Positive Operators in the Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.* Series, 47: 175-191.

Coşkun T (2003) Weighted Approximation of Unbounded Continuous Functions by Sequences of Linear Positive Operators. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34 (3): 477-485.

Coşkun T (2012) On the Order of Weighted Approximation of by Sequences of Positive Linear Operators. *Turk J. Math.*, 36: 113-120.

Doğru O (1997) On the Order of Approximation of Unbounded Functions of the Family of Generalized Linear Operators. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*, 46: 173-181.

Gadjiev A D and Ibragimov I (1970) On a Sequence of Linear Positive Operators. *Sov. Math. Dokl.*, 11(4): 1092-1095.

Gadjiev A D (1976) On P.P. Korovkin Type Theorems. *Mathem. Zametki*, 20(5): 995-998.

Gadjiev A D and Ispir N (1999) On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces. *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan AS*, XI(XIX):45-56.

Gönül N (2012) Sürekli ve Yerel İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayında Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. *Doktora Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 116 s.

Gonul N and Coskun E (2013) Approximation with Modified Gadjiev-Ibragimov Operators in $C[0, A]$. *Journal of Computational Analysis and Applications*,15 (5): 868-880.

Gonul Bilgin N and Ozgur N (baskıda) Approximation By Two Dimensional Gadjiev-Ibragimov Type Operators, *Ikonion Journal of Mathematics*.

Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 100 s.

Herdem S and Büyükyazıcı I (2018) Ibragımov-Gadjiev Operators Based on q-Integers. *Advances In Difference Equations*, 2018:304

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Ispir N, Aral A and Doğru O (2008) On Kantorovich Process of a Sequence of the Generalized Linear Positive Operators. *Numerical Functional Analysis and Optimization,* 29 (5-6): 574-589.

Korovkin P P (1960) Linear Operators and Approximation Theory. *Hindustan Publishing Corp.*, 219: 1-20.

Volkov V I (1957) On The Convergence of Sequences of Linear Positive Operators in The Space of Two Variables. *Dokl. Akad. Nauk, SSSr* (NS). , 155, 17-19.

EK AÇIKLAMALAR

EK A:

> **restart;**

> **with(plots):**

> **f:=(x,y)->exp(y*x)/ln((1/(x+1))+((x^2+1)/(abs(x+1)))+1);**

>

$$f := (x, y) \to \frac{\mathbf{e}^{(y\,x)}}{\ln\left(\frac{1}{x+1} + \frac{x^2+1}{|x+1|} + 1\right)}$$

> **n:=1:m:=1:**

> **alpha(n):=1:alpha(m):=1;**

$$\alpha(1) := 1$$

> **beta(n):=n+2:psi(m):=m+1;**

$$\psi(1) := 2$$

> **K[n](v,x):=((-1)^v)*(n!/(n-v)!)*(x^v)*(1-x)^(n-v);**

$$K_1(v, x) := \frac{(-1)^v\, x^v\, (1-x)^{(1-v)}}{(1-v)!}$$

> **K[m](mu,y):=((-1)^mu)*(m!/(m-mu)!)*(y^mu)*(1-y)^(m-mu);**

$$K_1(\mu, y) := \frac{(-1)^\mu\, y^\mu\, (1-y)^{(1-\mu)}}{(1-\mu)!}$$

> **P[n,m](v,mu,(x,y)):=(K[n](v,x))*(((-alpha(n))^v)/v!)*(K[m](mu,y))*(((-alpha(m))^mu)/mu!);**

$$P_{1,\,1}(v, \mu, x, y) := \frac{\left((-1)^v\right)^2 x^v\, (1-x)^{(1-v)} \left((-1)^\mu\right)^2 y^\mu\, (1-y)^{(1-\mu)}}{(1-v)!\; v!\; (1-\mu)!\; \mu!}$$

>
L[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((v/beta(n)),(mu/psi(m)))*P[n,m](v,mu,x,y),mu=0..m),v=0..n);

$$L_{1,\,1}(f, x, y) := \frac{(1-x)\,(1-y)}{\ln(3)} + \frac{(1-x)\,y}{\ln(3)} + \frac{x\,(1-y)}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{\mathbf{e}^{(1/6)}\,x\,y}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

> **n:=4:m:=5;**

$$m := 5$$

\> **alpha(n):=1:alpha(m):=1;**

$$\alpha(5) := 1$$

\> **beta(n):=n+2:psi(m):=m+1;**

$$\psi(5) := 6$$

\> **K[n](v,x):=((-1)^v)*(n!/(n-v)!)*(x^v)*(1-x)^(n-v);**

$$K_4(v, x) := \frac{24\ (-1)^v\ x^v\ (1-x)^{(4-v)}}{(4-v)!}$$

\> **K[m](mu,y):=((-1)^mu)*(m!/(m-mu)!)*(y^mu)*(1-y)^(m-mu);**

$$K_5(\mu, y) := \frac{120\ (-1)^\mu\ y^\mu\ (1-y)^{(5-\mu)}}{(5-\mu)!}$$

\> **P[n,m](v,mu,(x,y)):=(K[n](v,x))*(((-alpha(n))^v)/v!)*(K[m](mu,y))*(((-alpha(m))^mu)/mu!);**

$$P_{4,5}(v, \mu, x, y) := \frac{2880\ \left((-1)^v\right)^2\ x^v\ (1-x)^{(4-v)}\ \left((-1)^\mu\right)^2\ y^\mu\ (1-y)^{(5-\mu)}}{(4-v)!\ v!\ (5-\mu)!\ \mu!}$$

\>

L[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((v/beta(n)),(mu/psi(m)))*P[n,m](v,mu,x,y),mu=0..m),v=0..n);

$$L_{4,5}(f, x, y) := \frac{4\ \mathbf{e}^{(5/36)}\ x\ (1-x)^3\ y^5}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} + \frac{6\ \mathbf{e}^{(5/18)}\ x^2\ (1-x)^2\ y^5}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{4\ \mathbf{e}^{(5/12)}\ x^3\ (1-x)\ y^5}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$
$$+ \frac{5\ \mathbf{e}^{(1/9)}\ x^4\ y\ (1-y)^4}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} + \frac{10\ \mathbf{e}^{(2/9)}\ x^4\ y^2\ (1-y)^3}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} + \frac{10\ \mathbf{e}^{(1/3)}\ x^4\ y^3\ (1-y)^2}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$
$$+ \frac{5\ \mathbf{e}^{(4/9)}\ x^4\ y^4\ (1-y)}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} + \frac{20\ \mathbf{e}^{(1/36)}\ x\ (1-x)^3\ y\ (1-y)^4}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)}$$
$$+ \frac{40\ \mathbf{e}^{(1/18)}\ x\ (1-x)^3\ y^2\ (1-y)^3}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} + \frac{40\ \mathbf{e}^{(1/12)}\ x\ (1-x)^3\ y^3\ (1-y)^2}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)}$$
$$+ \frac{20\ \mathbf{e}^{(1/9)}\ x\ (1-x)^3\ y^4\ (1-y)}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)} + \frac{30\ \mathbf{e}^{(1/18)}\ x^2\ (1-x)^2\ y\ (1-y)^4}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$
$$+ \frac{60\ \mathbf{e}^{(1/9)}\ x^2\ (1-x)^2\ y^2\ (1-y)^3}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{60\ \mathbf{e}^{(1/6)}\ x^2\ (1-x)^2\ y^3\ (1-y)^2}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$
$$+ \frac{30\ \mathbf{e}^{(2/9)}\ x^2\ (1-x)^2\ y^4\ (1-y)}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} + \frac{20\ \mathbf{e}^{(1/12)}\ x^3\ (1-x)\ y\ (1-y)^4}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$+\frac{40\,\mathbf{e}^{(1/6)}\,x^3\,(1-x)\,y^2\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{40\,\mathbf{e}^{(1/4)}\,x^3\,(1-x)\,y^3\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$+\frac{20\,\mathbf{e}^{(1/3)}\,x^3\,(1-x)\,y^4\,(1-y)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{(1-x)^4\,(1-y)^5}{\ln(3)}+\frac{(1-x)^4\,y^5}{\ln(3)}+\frac{x^4\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{5\,(1-x)^4\,y\,(1-y)^4}{\ln(3)}+\frac{10\,(1-x)^4\,y^2\,(1-y)^3}{\ln(3)}+\frac{10\,(1-x)^4\,y^3\,(1-y)^2}{\ln(3)}$$

$$+\frac{5\,(1-x)^4\,y^4\,(1-y)}{\ln(3)}+\frac{4\,x\,(1-x)^3\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{115}{42}\right)}+\frac{6\,x^2\,(1-x)^2\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{4\,x^3\,(1-x)\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}+\frac{\mathbf{e}^{(5/9)}\,x^4\,y^5}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

> **n:=7:m:=11;**

$$m := 11$$

> **alpha(n):=1:alpha(m):=1;**

$$\alpha(11) := 1$$

> **beta(n):=n+2:psi(m):=m+1;**

$$\psi(11) := 12$$

> **K[n](v,x):=((-1)^v)*(n!/(n-v)!)*(x^v)*(1-x)^(n-v);**

$$K_7(v,x) := \frac{5040\,(-1)^v\,x^v\,(1-x)^{(7-v)}}{(7-v)!}$$

> **K[m](mu,y):=((-1)^mu)*(m!/(m-mu)!)*(y^mu)*(1-y)^(m-mu);**

$$K_{11}(\mu,y) := \frac{39916800\,(-1)^{\mu}\,y^{\mu}\,(1-y)^{(11-\mu)}}{(11-\mu)!}$$

> **P[n,m](v,mu,(x,y)):=(K[n](v,x))*(((-alpha(n))^v)/v!)*(K[m](mu,y))*(((-alpha(m))^mu)/mu!);**

$$P_{7,\,11}(v,\mu,x,y) := \frac{201180672000\quad\left((-1)^v\right)^2\,x^v\,(1-x)^{(7-v)}\,\left((-1)^{\mu}\right)^2\,y^{\mu}\,(1-y)^{(11-\mu)}}{(7-v)!\,v!\,(11-\mu)!\,\mu!}$$

>

L[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((v/beta(n)),(mu/psi(m)))*P[n,m](v,mu,(x,y)),mu=0..m),v=0..n);

$$
\begin{aligned}
L_{7,11}(f,x,y) :=\ & \frac{7\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{108}\right)}\,x\,(1-x)^6\,y^{11}}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} + \frac{21\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{54}\right)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^{11}}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)} + \frac{35\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{36}\right)}\,x^3\,(1-x)^4\,y^{11}}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)} \\
& + \frac{35\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{27}\right)}\,x^4\,(1-x)^3\,y^{11}}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)} + \frac{21\,\mathbf{e}^{\left(\frac{55}{108}\right)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^{11}}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)} + \frac{7\,\mathbf{e}^{\left(\frac{11}{18}\right)}\,x^6\,(1-x)\,y^{11}}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)} \\
& + \frac{11\,\mathbf{e}^{(7/108)}\,x^7\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{55\,\mathbf{e}^{(7/54)}\,x^7\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{165\,\mathbf{e}^{(7/36)}\,x^7\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} \\
& + \frac{330\,\mathbf{e}^{(7/27)}\,x^7\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{462\,\mathbf{e}^{\left(\frac{35}{108}\right)}\,x^7\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{462\,\mathbf{e}^{(7/18)}\,x^7\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} \\
& + \frac{330\,\mathbf{e}^{\left(\frac{49}{108}\right)}\,x^7\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{165\,\mathbf{e}^{\left(\frac{14}{27}\right)}\,x^7\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{55\,\mathbf{e}^{(7/12)}\,x^7\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} \\
& + \frac{11\,\mathbf{e}^{\left(\frac{35}{54}\right)}\,x^7\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)} + \frac{77\,\mathbf{e}^{(1/108)}\,x\,(1-x)^6\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} \\
& + \frac{385\,\mathbf{e}^{(1/54)}\,x\,(1-x)^6\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} + \frac{1155\,\mathbf{e}^{(1/36)}\,x\,(1-x)^6\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} \\
& + \frac{2310\,\mathbf{e}^{(1/27)}\,x\,(1-x)^6\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} + \frac{3234\,\mathbf{e}^{(5/108)}\,x\,(1-x)^6\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} \\
& + \frac{3234\,\mathbf{e}^{(1/18)}\,x\,(1-x)^6\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} + \frac{2310\,\mathbf{e}^{(7/108)}\,x\,(1-x)^6\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} \\
& + \frac{1155\,\mathbf{e}^{(2/27)}\,x\,(1-x)^6\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} + \frac{385\,\mathbf{e}^{(1/12)}\,x\,(1-x)^6\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} \\
& + \frac{77\,\mathbf{e}^{(5/54)}\,x\,(1-x)^6\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)} + \frac{231\,\mathbf{e}^{(1/54)}\,x^2\,(1-x)^5\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)} \\
& + \frac{1155\,\mathbf{e}^{(1/27)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)} + \frac{3465\,\mathbf{e}^{(1/18)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)} \\
& + \frac{6930\,\mathbf{e}^{(2/27)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)} + \frac{9702\,\mathbf{e}^{(5/54)}\,x^2\,(1-x)^5\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{9702\ \mathbf{e}^{(1/9)}\ x^2\,(1-x)^5\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{6930\ \mathbf{e}^{(7/54)}\ x^2\,(1-x)^5\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{3465\ \mathbf{e}^{(4/27)}\ x^2\,(1-x)^5\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(1/6)}\ x^2\,(1-x)^5\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{231\ \mathbf{e}^{(5/27)}\ x^2\,(1-x)^5\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}+\frac{385\ \mathbf{e}^{(1/36)}\ x^3\,(1-x)^4\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(1/18)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(1/12)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(1/9)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(5/36)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(1/6)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(7/36)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(2/9)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(1/4)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}$$

$$+\frac{385\ \mathbf{e}^{(5/18)}\ x^3\,(1-x)^4\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{385\ \mathbf{e}^{(1/27)}\ x^4\,(1-x)^3\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(2/27)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(1/9)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(4/27)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(5/27)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{16170\ \mathbf{e}^{(2/9)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{11550\ \mathbf{e}^{(7/27)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{5775\ \mathbf{e}^{(8/27)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{1925\ \mathbf{e}^{(1/3)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}$$

$$+\frac{385\ \mathbf{e}^{\left(\frac{10}{27}\right)}\ x^4\,(1-x)^3\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{231\ \mathbf{e}^{(5/108)}\ x^5\,(1-x)^2\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{1155\ \mathbf{e}^{(5/54)}\ x^5\,(1-x)^2\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{3465\ \mathbf{e}^{(5/36)}\ x^5\,(1-x)^2\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{6930\,\mathbf{e}^{(5/27)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{9702\,\mathbf{e}^{\left(\frac{25}{108}\right)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{9702\,\mathbf{e}^{(5/18)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{6930\,\mathbf{e}^{\left(\frac{35}{108}\right)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{3465\,\mathbf{e}^{\left(\frac{10}{27}\right)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{1155\,\mathbf{e}^{(5/12)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{231\,\mathbf{e}^{\left(\frac{25}{54}\right)}\,x^5\,(1-x)^2\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}+\frac{77\,\mathbf{e}^{(1/18)}\,x^6\,(1-x)\,y\,(1-y)^{10}}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{385\,\mathbf{e}^{(1/9)}\,x^6\,(1-x)\,y^2\,(1-y)^9}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{1155\,\mathbf{e}^{(1/6)}\,x^6\,(1-x)\,y^3\,(1-y)^8}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{2310\,\mathbf{e}^{(2/9)}\,x^6\,(1-x)\,y^4\,(1-y)^7}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{3234\,\mathbf{e}^{(5/18)}\,x^6\,(1-x)\,y^5\,(1-y)^6}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{3234\,\mathbf{e}^{(1/3)}\,x^6\,(1-x)\,y^6\,(1-y)^5}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{2310\,\mathbf{e}^{(7/18)}\,x^6\,(1-x)\,y^7\,(1-y)^4}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{1155\,\mathbf{e}^{(4/9)}\,x^6\,(1-x)\,y^8\,(1-y)^3}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{385\,\mathbf{e}^{(1/2)}\,x^6\,(1-x)\,y^9\,(1-y)^2}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}$$

$$+\frac{77\,\mathbf{e}^{(5/9)}\,x^6\,(1-x)\,y^{10}\,(1-y)}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{x^7\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}+\frac{(1-x)^7\,(1-y)^{11}}{\ln(3)}+\frac{(1-x)^7\,y^{11}}{\ln(3)}$$

$$+\frac{11\,(1-x)^7\,y\,(1-y)^{10}}{\ln(3)}+\frac{55\,(1-x)^7\,y^2\,(1-y)^9}{\ln(3)}+\frac{165\,(1-x)^7\,y^3\,(1-y)^8}{\ln(3)}$$

$$+\frac{330\,(1-x)^7\,y^4\,(1-y)^7}{\ln(3)}+\frac{462\,(1-x)^7\,y^5\,(1-y)^6}{\ln(3)}+\frac{462\,(1-x)^7\,y^6\,(1-y)^5}{\ln(3)}$$

$$+\frac{330\,(1-x)^7\,y^7\,(1-y)^4}{\ln(3)}+\frac{165\,(1-x)^7\,y^8\,(1-y)^3}{\ln(3)}+\frac{55\,(1-x)^7\,y^9\,(1-y)^2}{\ln(3)}$$

$$+\frac{11\,(1-x)^7\,y^{10}\,(1-y)}{\ln(3)}+\frac{7\,x\,(1-x)^6\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{253}{90}\right)}+\frac{21\,x^2\,(1-x)^5\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{265}{99}\right)}$$

$$+\frac{35\,x^{3}\,(1-x)^{4}\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{31}{12}\right)}+\frac{35\,x^{4}\,(1-x)^{3}\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{295}{117}\right)}+\frac{21\,x^{5}\,(1-x)^{2}\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{313}{126}\right)}$$

$$+\frac{7\,x^{6}\,(1-x)\,(1-y)^{11}}{\ln\left(\frac{37}{15}\right)}+\frac{\mathbf{e}^{\left(\frac{77}{108}\right)}\,x^{7}\,y^{11}}{\ln\left(\frac{355}{144}\right)}$$

```
> p1:=plot3d(f(x,y),x=1..2,y=0..2,color=blue):
> p2:=plot3d(L[1,1](f,x,y),x=1..2,y=0..2,color=brown):
> p3:=plot3d(L[4,5](f,x,y),x=1..2,y=0..2,color=green):
> p4:=plot3d(L[7,11](f,x,y),x=1..2,y=0..2,color=magenta):
> display(p1,p2,p3,p4);
```

EK B

```
> restart;
f:=(x,y,z)->((x^2)+(y^2))/10:
n:=1 : m:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m;
alpha(n):=1:alpha(m):=1:
> beta(n):=n:beta(m):=m:
> delta(n):=evalf(simplify(sqrt(((n*(alpha(n)/beta(n)))-
1)^2+(alpha(n)/beta(n))+(1/(1*beta(n)))))));
> delta(m):=evalf(simplify(sqrt((((m*(alpha(m))/beta(m)))-
1)^2+(alpha(m)/beta(m))+(1/(1*beta(m)))))));
> omega1(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-
f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n)))):

> omega2(f,delta(m)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-
f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(m)))):

> errorB:=2*(omega1(f,delta(n))+omega2(f,delta(m)));
end do;
```

ÖZGEÇMİŞ

Numan ÖZGÜR 1993'de Kocaeli'de doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Kocaeli' de tamamladı; 2011 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde üniversite öğrenimine başladı. 2015 yılında "iyi" derece ile mezun olduktan sonra Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına kabul edildi.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Şehit Ekrem Mahallesi Küçük Sokak
No:28/2
41030/Kocaeli
Tel : 0(539)9179435
E-posta : numanozgur41@gmail.com