

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY-
TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIMIN KARŞILAŞTIRILMASI**



MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YELİZ GÜLAY

MAYIS 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY-
TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIMIN KARŞILAŞTIRILMASI**


MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YELİZ GÜLAY

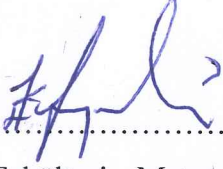
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

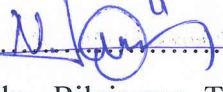
ZONGULDAK
MAYIS 2019

KABUL:

Yeliz GÜLAY tarafından hazırlanan “Bir ve İki Değişkenli Bernstein-Chlodowsky ve Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla Yaklaşımın Karşılaştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir. 02/05/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN 
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Afşin Kürşat GAZANFER 
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN 
Düzce Üniversitesi, Gölyaka Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2019


Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”


Yeliz GÜLAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIMIN KARŞILAŞTIRILMASI

Yeliz GÜLAY

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimler Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Mayıs 2019, 149 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezde kullanılacak yaklaşım teorisindeki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde; tek değişkenli Bernstein-Chlodowsky ve Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşımın özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde; iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky ve Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşımın temel özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ise tezin uygulama bölümüdür. Her iki operatörle yaklaşım hızı hesabı bir ve iki değişkenli fonksiyonlar için ayrı ayrı incelenmiş ve yaklaşım hızı hesabı süreklilik modülü yardımıyla araştırılmıştır. Nümerik hesaplarla yaklaşım ve hata hesabı sayısal olarak ortaya koyulmuştur.

ÖZET (devam ediyor)

Son bölümde ise bu alanda çalışma yapacak araştırmacılar için tezle ilgili sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernstein-Chlodowsky Polinomları, Chlodowsky-Taylor Polinomları, süreklilik modülü, yaklaşım hızı.

Bilim Kodu: 403.03.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

COMPARISON OF THE APPROXIMATION WITH ONE AND TWO VARIABLE BERNSTEIN-CHLODOWSKY AND CHLODOWSKY-TAYLOR POLYNOMIALS

Yeliz GULAY

**Zonguldak Bulent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
Mayıs 2019, 149 pages**

This thesis consists of five parts. In the first part, the main description and theorems in the approximation theory that are going to be used in this thesis take place.

In the second part, Bernstein-Chlodowsky and Chlodowsky-Taylor polynomials of one variable and the main characteristics of the approach are told.

In the third part, Bernstein-Chlodowsky and Chlodowsky-Taylor polynomials of two variables and the main characteristics of the approach are mentioned.

In the fourth part are the application parts of the thesis. With both operators the approximation rate calculation is researched individually for the single variable function and for the function of two variables. And the approximation rate calculation is investigated by the help of the modulus of continuity. With numerical calculations the approach and error account are presented numerically.

ABSTRACT (continued)

In the last section, the results, about the thesis are told for the researchers that will do research in this field.

Keywords: Bernstein-Chlodowsky polynomials, Chlodowsky-Taylor polynomials, modulus of continuity, rate of convergence.

Science Code: 403.03.00



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübelerinin yanı sıra yol gösterici ve sonsuz desteğiyle her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN'e ve tezimi okuyarak değerli öneri ve görüşleriyle beni yönlendiren Sayın Dr. Öğr. Üyesi Afşın Kürşat GAZANFER, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN hocalarıma sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım süresince hiçbir zaman desteğini eksik etmeyen sevgili eşim Hasan Ali GÜLAY, kızım Umre Nehir GÜLAY ile kayınvalidem Emine GÜLAY'a ve her zaman destekçim olan çok değerli aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	ii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
1.2 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN POLİNOMLARI	20
BÖLÜM 2 TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY- TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM	29
2.1 TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI	29
2.2 TEK DEĞİŞKENLİ CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARI.....	37
BÖLÜM 3 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM	43
3.1 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI	43
3.2 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN CHLODOWSKY TAYLOR POLİNOMLARI	48
BÖLÜM 4 BERNSTEIN- CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE CHLODOWSKY- TAYLOR POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI HESABI.....	51
4.1 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ.....	51

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

4.2 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI	55
4.3 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ CHLODOWSKY TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM	62
4.4 GRAFİK VE NÜMERİK HESAPLAR	77
BÖLÜM 5 SONUÇ	145
KAYNAKLAR.....	147
ÖZGEÇMİŞ	149

ŞEKİLLER DİZİNİ

No	Sayfa
Şekil 4.1 $fx = 125x^2 + 1225x - 1125$ ve $gx = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği.....	80
Şekil 4.2 $fx = 113x^3 + 413x^2 + 513$ ve $gx = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği.....	83
Şekil 4.3 $fx = x^3 + 12x - 1525$ ve $gx = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği.....	87
Şekil 4.4 $fx = x^5 + 3x^2 - 232$ ve $gx = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği.....	91
Şekil 4.5 $fx = x^5 + 3x^2 - 232$ ve $gx = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği.....	95
Şekil 4.6 $fx, y = x^2 + y^2e^4$ ve $gx, y = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği.....	99
Şekil 4.7 $fx, y = ex + y^{100}$ ve $gx, y = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği.....	104
Şekil 4.8 $fx, y = 1100x^2 + y^2$ ve $gx, y = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği.....	108
Şekil 4.9 $fx, y = xy + x + 174$ ve $gx, y = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği.....	112
Şekil 4.10 $Bn * f; x$ polinomlar dizisi ile $fx = 6x^2 \ln x^2 + 2x + 3 - 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=90$ olmak üzere $k=4$ (yeşil), $k=5$ (kırmızı), $k=9$ (siyah), $k=10$ (turkuaz) $k=12$ (eflatun)).....	113
Şekil 4.11 $Bn * f; x$ polinomlar dizisi ile $fx = 6 \tan^1 - 6x^3 + 2x \sec x + 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=90$ olmak üzere $k=35$ (yeşil), $k=36$ (kırmızı), $k=40$ (siyah), $k=45$ (turkuaz), $k=48$ (eflatun)).....	115
Şekil 4.12 $Bn * f; x$ polinomlar dizisi ile $fx = 53 \tan x^2 + 1 \ln x^2 + 13$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=40$ olmak üzere $k=15$ (yeşil), $k=16$ (kırmızı), $k=20$ (siyah), $k=22$ (turkuaz), $k=23$ (eflatun)).....	117
Şekil 4.13 $Bn * f; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n + 1$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 1e^{5x} + y^2 + 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n, m=29, 40$ (altın) $n, m=50, 60$ (yeşil), $n, m=51, 61$ (eflatun)).....	119
Şekil 4.14 $Bn * f; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n + 1$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 1 + x^2 + y^{21} + x^2 + y^2e^1 + 3x^2$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=9, 10$ (kahverengi), $n, m=20, 30$ (yeşil), $n, m=41, 61$ (eflatun)).....	121
Şekil 4.15 $Bn * f; x, y$ polinomlar dizisi $bn = n + 1$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 1 + x^2 + y^{22} + x^2 + y^2ex$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n, m=9, 10$ (gri) $n, m=20, 30$ (yeşil), $n, m=41, 61$ (eflatun)).....	123
Şekil 4.16 $Bn * f; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n + 1$ ve $cm = 3m + 3$ alınarak $fx, y = 20x^4 + \sin x + 1y^5 + x + 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n, m=9, 10$ (fuşya), $n, m=20, 30$ (yeşil), $n, m=61, 81$ (eflatun)).....	125
Şekil 4.17 Cn, rf, x polinomlar dizisinde $bn = n + 1$ alınarak $fx = 120x^3 + 1ex - 6$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı.....	127
Şekil 4.18 Cn, rf, x polinomlar dizisinde $bn = n + 1$ alınarak $fx = \sin(x + 1)^2ex^2 - 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı.....	129

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

No	Sayfa
Şekil 4.19 Cn, rf, x polinomlar dizisinde $bn = 4n + 3$ alınarak $fx = \cos x^3 + 4x + 3$	131
Şekil 4.20 Cn, rf, x polinomlar dizisinde $bn = 3n$ alınarak $fx = \cos x^2 + 5x + 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı	133
Şekil 4.21 Cn, rf, x polinomlar dizisinde $bn = 3n$ alınarak $fx = \sin 3x^2 + 6x + 12$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı	135
Şekil 4.22 $En, mf, r; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = x + 12y^3$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=4, m=1, r=3$ (yeşil), $n=4, m=5, r=3$ (kırmızı), $n=4, m=10, r=3$ (pembe), $n=4, m=15, r=3$ (turkuaz), $n=4, m=25, r=3$ (fuşya).....	137
Şekil 4.23 $En, mf, r; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 12x + 13y^3$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2, r=2$ (kahverengi), $n=15, m=17, r=4$ (yeşil), $n=20, m=27, r=5$ (pembe), $n=28, m=35, r=5$ (fuşya)	138
Şekil 4.24 $En, mf, r; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 52x^5 + 1ey^2 + 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2, r=2$ (kahve), $n=15, m=17, r=4$ (yeşil), $n=20, m=27, r=5$ (pembe), $n=28, m=35, r=5$ (fuşya).....	139
Şekil 4.25 $En, mf, r; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 12x^{12} + 13y^{13}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2, r=2$ (turkuaz), $n=5, m=5, r=3$ (yeşil), $n=15, m=25, r=4$ (pembe)	140
Şekil 4.26 $Bn, m * f; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 12x^{12} + 13y^{13}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2$ (gri), $n=5, m=5$ (yeşil), $n=15, m=25$ (fuşya).....	141
Şekil 4.27 $En, mf, r; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 12x^2 - 120 + 12y^3 + 3213$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=4, m=1, r=3$ (yeşil), $n=4, m=5, r=3$ (kırmızı), $n=4, m=10, r=3$ (pembe), $n=4, m=15, r=3$ (turkuaz), $n=4, m=25, r=3$ (fuşya).....	142
Şekil 4.28 $En, mf, r; x, y$ polinomlar dizisinde $bn = n$ ve $cm = 3m$ alınarak $fx, y = 12x^2 - 120 + 12y^3 + 3213$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=4, m=1$ (yeşil), $n=4, m=5$ (kırmızı), $n=4, m=10$ (pembe), $n=4, m=15$ (turkuaz), $n=4, m=25$ (fuşya)	143

ÇİZELGER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 $f(x) = x^2 + 12x - 1525$ fonksiyonunun hata hesabı.....	79
Çizelge 4.2 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 513$ fonksiyonu için hata payı hesaplaması	82
Çizelge 4.3 $f(x) = x^3 + 12x - 1525$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması.....	86
Çizelge 4.4 $f(x) = x^5 + 3x^2 - 232$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması	90
Çizelge 4.5 $f(x) = x^8 + 3x^3 - 1105$ fonksiyonu için hata payı hesaplaması.....	94
Çizelge 4.6 $f(x, y) = x^2 + y^2e^4$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması	98
Çizelge 4.7 $f(x, y) = ex + y100$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması	103
Çizelge 4.8 $f(x, y) = 1100x^2 + y^2$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması.....	107
Çizelge 4.9 $f(x, y) = xy + x + 174$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması	111



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C[a, b]$: Her $x \in [a, b]$ için a' da soldan b'de sağdan sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_n(f; x)$: Bernstein Polinomları
$B_n^*(f; x)$: Bernstein Chlodowsky Polinomları
$C_{n,r}(f; x)$: Chlodowsky Taylor Polinomları
$B_{n,m}^*(f; x, y)$: İki Değişkenli Bernstein Chlodowsky Polinomları
$E_{n,m}(f, r; x, y)$: İki Değişkenli Chlodowsky Taylor Polinomları
$B_\rho(\mathbb{R}^m)$: $m = 1, 2, 3$ için \mathbb{R}^m de ki sınırlı fonksiyonları uzayı
$C_\rho(\mathbb{R}^m)$: $1, 2, 3$ için $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _{C[a,b]}$: $C[a, b]$ uzayında norm
$\ \cdot\ _\rho$: C_ρ ve B_ρ uzaylarında norm
$L(f; x)$: Doğrusal pozitif operatörler dizisi
$C(\mathbb{R}_+^2)$: $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ olmak üzere bu uzayda tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\tilde{D}_2)$: $D_{b_n, c_m} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq b_n, 0 \leq y \leq c_m\}$



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fonksiyonel Analizin önemli dallarından biri olan Yaklaşım Teorisi; özellikleri az bilinen verilen bir fonksiyona daha basit ve kullanışlı hesaplanabilir fonksiyonlarla yaklaşımı inceler.

19.yüzyılın sonlarından bu yana birçok matematikçi bu anlamda yaklaşım yapabilmek için daha basit fonksiyonları bulmayı amaçlayarak değişik operatörler geliştirmişlerdir. 1885 yılında Weierstrass kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yakınsayan polinomların varlığını kanıtlayan bir teorem ortaya koymuştur. 1912 yılında Bernstein bu teoremi kendi tanımladığı Bernstein Polinomları olarak bilinen polinomları kullanarak yeniden kanıtlamıştır.

Bernstein Polinomları yaklaşım teorisi başta olmak üzere eğriler, bilgisayar destekli dizayn, bilgisayar destekli geometrik dizayn, olasılık teorisi ve sayılar teorisi gibi birçok alanda uygulama alanına sahiptir. Bernstein' den sonra bu polinomların birçok genellemesi yapılarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir.1937 yılında Chlodowsky, Bernstein Polinomlarını $[0, \infty)$ aralığına genişleterek;

(b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere $[0, b_n]$ aralığında

her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in [0,1]$ için

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Kirov tarafından 1992 yılında Bernstein-Taylor Polinomları $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $x \in [0,1]$ ve $f \in C^r[0,1]$ için

$$B_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i$$

şeklinde tanımlanmış ve yaklaşım özelliklerini çalışmıştır. Daha sonra İzgi, Büyükyazıcı ve İbikli 2009 yılında Chlodowsky-Taylor Polinomlarını $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $x \in [0, b_n]$ ve $f \in C^r[0, \infty)$ için

$$C_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n} b_n\right)}{i!} C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} b_n\right)^i$$

olarak tanımlanmış ve bu polinomların yaklaşım durumları incelenmiştir.

2011 yılında ise Kırcı Serenbay ve İbikli Chlodowsky-Taylor Polinomlarının iki değişkenli durumunu aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

$0 \leq x \leq b_n$ $0 \leq y \leq b_m$ olmak üzere

$$\varphi_n^k(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \varphi_m^j(t) = \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j} \text{ ve}$$

$$d^i f(s, t) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{\partial^i f(s, t)}{\partial x^{i-k} \partial y^k} (x-s)^{i-k} (y-t)^k$$

eşitlikleri geçerli olsun. İki değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomu

$$E_{n,m}(f, r; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \varphi_m^j\left(\frac{y}{b_m}\right) \sum_{i=0}^r \frac{d^i f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m\right)}{i!}$$

şeklinde dir.

Yaklaşım yapılacak f fonksiyonunun yalnızca sürekli olması durumunda Bernstein Chlodowsky Polinomlarıyla yaklaşım kullanılabilirken f fonksiyonunun r kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli ise türev özelliklerini de kullanarak Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım kullanılır. Üstelik Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım Bernstein Chlodowsky Polinomlarıyla yaklaşımdan daha hızlıdır.

Bu tezde hem Bernstein-Chlodowsky hem de Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşımın bir ve iki değişkenli durumdaki karşılaştırması görsel ve nümerik hesaplar yoluyla ortaya koyulacaktır.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kesimde tez için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1

$[a, b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlanmış ve aralığın her noktasında sürekli olup a da soldan b de sağdan sürekli olan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve $C[a, b]$ ile gösterilir. Açıkça $C[a, b]$ doğrusal bir uzaydır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.2

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (1.1)$$

$C[a, b]$ uzayında bir normdur.

Buna göre $C[a, b]$ uzayı açıkça normlu doğrusal bir uzaydır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Önerme 1.1.1

$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gerçel sayıların bir sıfır dizisi olsun, $(f_n) \subset C[a, b]$ fonksiyon dizisinin bir

$g \in C[a, b]$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in [a, b]$ için,

$$|f_n(x) - g(x)| < M \cdot \varepsilon_n \quad (1.2)$$

eşitsizliğini sağlayacak en az bir $M > 0$ sayısının var olmasıdır (Coşkun 1997).

Tanım 1.1.3

$\rho: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$$

olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \quad (1.3)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ *uzayı* denir. Burada ρ fonksiyonuna *ağırlık fonksiyonu* denir (Gadjiev 1976).

Tanım 1.1.4

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f \text{ sürekli}\}$ olarak tanımlı ağırlık uzayı \mathbb{R} de bir doğrusal uzaydır.

Tanım 1.1.5

ρ ağırlık fonksiyonu ve $f \in B_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\|f\|_\rho := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \quad (1.4)$$

ile $B_\rho(\mathbb{R})$ üzerinde norm tanımlanır. $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ bu norm ile birer normlu uzaydır (Gadjiev 1976).

Tanım 1.1.6

$\rho: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ sürekli ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$$

olan monoton artan fonksiyon olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \quad (1.5)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve açıkça bu uzay $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının alt uzayıdır (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.7

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere her $f \in X$ için,

$$L(f, x) = g(x) \quad (1.6)$$

eşitliğini sağlayan $g \in Y$ fonksiyonu varsa bu L dönüşümüne X uzayından Y 'ye bir *operatördür* denir.

Örnek 1.1.1

S. Bernstein 1912 yılında $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlamıştır.

Bu polinom dizisi $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu polinom Bernstein operatörü olarak bilinir.

Tanım 1.1.8

X, Y doğrusal uzaylar ve $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$L: X \rightarrow Y$ operatörü için,

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$$

eşitliğini sağlayan L operatörüne *doğrusaldır* denir.

Tanım 1.1.9

$$X^+ := \{f \in X: f(x) \geq 0\}, Y^+ := \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon uzayları ve $L: X \rightarrow Y$ doğrusal operatörü için,

$L(X^+) \subset Y^+$ ise L 'ye *doğrusal pozitif operatör* adı verilir.

Örnek 1.1.2

(b_n) dizisi monoton artan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan gerçel terimli pozitif sayı dizisi ve $0 \leq x \leq b_n$ olmak üzere

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

eşitliği ile tanımlı polinomlara Bernstein-Chlodowsky Polinomları denir. Bu polinomlar dizisi doğrusal ve pozitifdir.

Doğrusallık;

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B_n^*(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{k=0}^n (\alpha f + \beta g)\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^n \beta g\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \beta \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \alpha B_n^*(f; x) + \beta B_n^*(g; x) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Pozitiflik;

$f \geq 0$ olsun.

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) C_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

ifadesinde $f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \geq 0$ 'dır. $n, k \geq 0$ olduğundan $C_n^k \geq 0$ 'dır. $x \in [0, b_n]$ olduğundan

$\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \geq 0$ ve $\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \geq 0$ 'dır. O halde $B_n^*(f; x) \geq 0$ elde edilir.

Uyarı 1.1.1

L doğrusal pozitif operatörü negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

Uyarı 1.1.2

Doğrusal pozitif operatörler monotondur.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq g(x)$ olduğundan $f(x) - g(x) \leq 0$ dir.

Dolayısıyla $(f - g)(x) \leq 0$ 'dir. Uyarı 1.1.1'den $L(f - g, x) \leq 0$ olup

$L(f, x) - L(g, x) \leq 0$ olur. Böylelikle $L(f, x) \leq L(g, x)$ olur.

Tanım 1.1.10

X ve Y normlu uzaylar ve $L: X \rightarrow Y$ doğrusal bir operatör olsun. Her $f \in X$ için

$$\|L(f, x)\|_Y \leq C \cdot \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sayısı varsa L operatörü sınırlıdır denir. C sabitinin en küçük alt sınırına L operatörünün normu denir.

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf\{C: \|L(f, x)\|_Y \leq C \cdot \|f\|_X\} \quad (1.7)$$

şeklinde ifade edilir.

Uyarı 1.1.3

$L: X \rightarrow Y$ sınırlı doğrusal operatör ve $\|f\|_X \neq 0$ olmak üzere,

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \quad (1.8)$$

eşitliği geçerlidir (Rudin1991).

Sonuç 1.1.1

$L: X \rightarrow Y$ sınırlı doğrusal operatör ve $\|f\|_X = 1$ olmak üzere,

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f, x)\|_Y \quad (1.9)$$

eşitliği doğrudur.

Önerme 1.1.2

$L: X \rightarrow Y$ doğrusal pozitif operatörü ve her $f \in X$ için

$$|L(f, x)| \leq L(|f|, x) \quad (1.10)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Teorem 1.1.1 (Korovkin Teoremi)

Doğrusal pozitif L_n operatörler dizisi ve her $x \in [a, b]$ için $m = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_{C[a,b]} = 0$$

L_n şeklinde üç koşulu sağlasın. $[a, b]$ de sürekli, a da soldan b de sağdan sürekli ve tüm \mathbb{R} de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Korovkin 1960).

Teorem 1.1.2

Doğrusal pozitif L_n operatörler dizisinin C_ρ uzayından B_ρ 'ya dönüşüm yapması için gerekli ve yeterli koşul

$$\|L_n(\rho, x)\|_\rho \leq M_\rho$$

olacak şekilde bir M_ρ sabitinin bulunmasıdır (Gadjiev 1976).

$C[a, b]$ ve $L_p(a, b)$ uzayları için Korovkin Teoremi sağlanır. Yani öyle koşullar vardır ki basit fonksiyonlar üzerinde operatörler dizisi düzgün yakınsak olduğunda uzayın keyfi fonksiyonu içinde aynı norma göre yakınsaklık sağlanır. Şimdi sınırsız bölgelerde tanımlanmış operatör dizileri için böyle bir teoremin geçerli olmadığı gösterilecektir.

Teorem 1.1.3

$m \geq 1$, $\rho(x) = 1 + \|x\|^2$ ve $\{A_n\}$; $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ den $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayına tanımlı doğrusal pozitif operatör dizisi olmak üzere $j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(1, x) - 1\|_\rho = 0 \quad (1.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t_j, x) - x_j\|_\rho = 0 \quad (1.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\|t^2\|, x) - \|x^2\|\|_\rho = 0 \quad (1.13)$$

şeklindeki $m + 2$ koşul sağlansın. Bu durumda

$$\|A_n(f^*, x) - f^*\|_\rho \rightarrow 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R}^m)$ fonksiyonu vardır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Kanıt

$\{A_n\}$ operatör dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $x^* = \left(\frac{\|x\|+1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{\|x\|+1}{\sqrt{m}}\right)$ için

$$A_n(f, x) = \begin{cases} f(x) + \frac{1 + \|x^2\|}{1 + 2n^2} [(f^*, x) - f(x)] & ; \quad \|x\| \leq n \quad \text{ise} \\ f(x) & \quad \|x\| > n \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

Öncelikle tanımlanan $\{A_n\}$ operatörler dizisinin doğrusallığı ve pozitifliği gösterilecektir.

Doğrusallık:

$\|x\| > n$ için $A_n(f, x) = f(x)$ olup doğrusallık açıktır.

$\|x\| < n$ için ise

$$\begin{aligned} A_n(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)x^* - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)x] \\ &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\alpha_1 f_1(x^*) + \alpha_2 f_2(x^*) - \alpha_1 f_1(x) - \alpha_2 f_2(x)] \\ &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_1 f_1(x^*) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_2 f_2(x^*) - \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_1 f_1(x) \\ &\quad - \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_2 f_2(x) \\ &= \alpha_1 f_1(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_1 f_1(x^*) + \alpha_2 f_2(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\ &\quad + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_2 f_2(x^*) - \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} \alpha_2 f_2(x) \end{aligned}$$

$$= \alpha_1 \left(f_1(x) \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [f_1(x^*) - f_1(x)] \right) + \alpha_2 \left(f_1(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [f_2(x^*) - f_2(x)] \right)$$

$$= \alpha_1 A_n(f_1, x) + \alpha_2 A_n(f_2, x)$$

olduğundan $A_n(f, x)$ doğrusaldır.

Pozitiflik;

Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geq 0$ olsun.

Açıkça $\|x\| > n$ için $A_n(f, x) = f(x)$ pozitiftir.

$\|x\| \leq n$ için yine $A_n(f, x) > 0$ olur.

Gerçekten $\|x\| \leq n$ için

$$\frac{\|x\|^2}{2n^2} < 1$$

olduğundan

$$\frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} < 1$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$f(x) > \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} f(x)$$

eşitsizliği doğru olur. Burada

$$A_n(f, x) = f(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} f(x^*) - \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} f(x) > 0$$

olup operatörün pozitifliği kanıtlanmış olur.

Şimdi de A_n operatörünün C_ρ uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yaptığı gösterilmelidir.

$$x^* = \left(\frac{\|x\| + 1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{\|x\| + 1}{\sqrt{m}} \right)$$

olmak üzere $x^* \in \mathbb{R}^m$ için

$$\begin{aligned} \|x^*\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1 + \|x\|}{\sqrt{m}} \right)^2 \\ &= (1 + \|x\|)^2 \\ &= m \frac{(\|x\| + 1)^2}{m} \\ &= (\|x\| + 1)^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\| + 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$\rho(x) = 1 + \|x\|^2$ ve $\|x\| \leq n$ için

$$\begin{aligned}
A_n(\rho, x) &= \rho(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\rho(x^*) - \rho(x)] \\
&= \rho(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\|x^*\|^2 - \|x\|^2] \\
&= \rho(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [1 + 2\|x\| + \|x\|^2 - \|x\|^2] \\
&= \rho(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [1 + 2\|x\|]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\|x\| \leq n$ olduğundan

$$\frac{2\|x\|}{1 + 2n^2} < 1$$

olur. Buradan

$$A_n(\rho, x) \leq \rho(x) + (1 + \|x\|^2) = 2\rho(x)$$

eşitsizliği geçerlidir.

A_n lerin C_ρ uzayından B_ρ uzayına bir dönüşüm olduğunu göstermek için her $f \in C_\rho$ için

$A_n(f, x) \in B_\rho$ olduğu gösterilmelidir. Açıkça

$$\begin{aligned}
|A_n(f, x)| &\leq A_n(|f|, x) \\
&= A_n\left(\frac{|f|}{\rho(t)} \cdot \rho(t), x\right) \\
&\leq \|f\|_p A_n(\rho, x) \\
&\leq 2\|f\|_p \rho(x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $M_f = 2\|f\|_p$ alındığında $A_n(f, x) \in B_\rho$ bulunur. Bu aşamada verilen A_n operatörlerinin teoremin hipotezini sağladığı gösterilecektir.

$t = 1$ için

$$A_n(1, x) = \begin{cases} 1 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [1(x^*) - 1(x)], & \|x\| \leq n \text{ ise} \\ 1, & \|x\| > n \text{ ise} \end{cases}$$

eşitliğinden kolayca $A_n(1, x) = 1$ olur. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(1, x) - 1\|_\rho = 0$$

olması demektir. Böylece (1.11) koşulu sağlanmış olur.

Şimdi de $t = x_j$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t_j, x) - x_j\|_\rho = 0$$

olduğu gösterilmelidir.

$\|x\| \leq n$ için

$$\begin{aligned}
A_n(t_i, x) &= x_j + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2} [x_j^* - x_j] \\
&= x_j + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2} \left[\frac{1+\|x\|-\sqrt{m}x_j}{\sqrt{m}} \right] \\
&\leq x_j + \frac{1+\|x\|^2}{1+2n^2} 2 \cdot (1 + \|x\|)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A_n(t_i, x) - x_j \leq \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} 2 \cdot (1 + \|x\|)$$

$$\frac{A_n(t_i, x) - x_j}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{2 \cdot (1 + \|x\|)}{1 + 2n^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun yanı sıra $\|x\| \leq n$ eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{A_n(t_i, x) - x_j}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{2(1 + n)}{1 + 2n^2}$$

olur ve $x \in \mathbb{R}^m$ üzerinden eşitsizliğin supremumu alındığında

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{A_n(t_i, x) - x_j}{1 + 2n^2} \leq \frac{2(1 + n)}{1 + 2n^2}$$

eşitsizliği bulunur. Son olarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t_j, x) - x_j\|_\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+n)}{1+2n^2} \text{ olup}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t_j, x) - x_j\|_\rho = 0 \text{ eşitsizliği elde edilir.}$$

Şimdi de $t = x^2$ alınsın.

$$x^* = \left(\frac{\|x\| + 1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{\|x\| + 1}{\sqrt{m}} \right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|x^*\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{1 + \|x\|}{\sqrt{m}} \right)^2 \\
&= (1 + \|x\|)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
A_n(\|t\|^2, x) &= \|x\|^2 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\|x^*\|^2 - \|x\|^2] \\
&= \|x\|^2 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [(\|x\| + 1)^2 - \|x\|^2] \\
&= \|x\|^2 + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [1 + 2\|x\|]
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece

$$\frac{A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \geq \frac{1 + 2\|x\|}{1 + 2n^2}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitsizliğin $\|x\| \leq n$ için supremumu alınıp $n \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$0 \leq \sup_{\|x\| < n} \frac{A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \leq \frac{1 + 2n}{1 + 2n^2}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2\|_\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n}{1 + 2n^2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(\|t\|^2, x) - \|x\|^2\|_\rho = 0$$

olması demektir. Şimdi

$$f^*(x) = \|x\|^2 \cos \pi \|x\|$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. İlk olarak f^* in C_ρ 'nun elemanı olduğu gösterilecektir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f^*(x)| &= |\|x\|^2 \cos \pi \|x\|| \\ &\leq \|x\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 1 \end{aligned}$$

olup $M_f = 1$ için $f^* \in B_\rho$ ve f^* sürekli olduğundan $f^* \in C_\rho$ olur. Burada

$$\|x^*\| = 1 + \|x\|$$

ve

$$\cos(\pi(1 + \|x\|)) = \cos(\pi) \cdot \cos(\pi \|x\|) = -\cos(\pi \|x\|)$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} A_n(f^*, x) &= f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [f^*(x^*) - f^*(x)] \\ &= f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\|x^*\|^2 \cos(\pi \|x^*\|) - \|x\|^2 \cos(\pi \|x\|)] \\ &= f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\|x^*\|^2 \cos(\pi(1 + \|x\|)) - \|x\|^2 \cos(\pi \|x\|)] \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} A_n(f^*, x) &= f^*(x) + \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [-\|x^*\|^2 \cos(\pi \|x\|) - \|x\|^2 \cos(\pi \|x\|)] \\ &= f^*(x) - \frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\|x^*\|^2 + \|x\|^2] \cos(\pi \|x\|) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$A_n(f^*, x) - f^*(x) = -\frac{1 + \|x\|^2}{1 + 2n^2} [\|x^*\|^2 + \|x\|^2] \cos(\pi \|x\|)$$

$$\frac{|A_n(f^*, x) - f^*(x)|}{1 + \|x\|^2} = \frac{1}{1 + 2n^2} [(1 + \|x\|)^2 + \|x\|^2 \cos(\pi\|x\|)]$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliğin $\|x\| \leq n$ için supremumu alındığında

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{|A_n(f^*, x) - f^*(x)|}{1 + \|x\|^2} &= \sup_{\|x\| \leq n} \frac{1 + 2\|x\| + 2\|x\|^2}{1 + 2n^2} \cos(\pi\|x\|) \\ &= \frac{1 + 2n + 2n^2}{2 + 2n^2} \end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n + 2n^2}{1 + 2n^2}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $n \rightarrow \infty$ için

$\|A_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho \rightarrow 1$ olması demektir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Bu teoremin \mathbb{R} 'deki hali aşağıdaki teoremle ayrıca ifade edilecektir.

Teorem 1.1.4 (Hacıyev Teoremi)

C_ρ uzayından B_ρ 'ya dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi; $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlasın. Bu durumda en az bir $f^* \in C_\rho$ için

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerlidir (Gadjiev 1976).

Sonuç 1.1.2

C_ρ 'dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için $m = 0,1,2$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır. Yani C_ρ ağırlıklı uzayında Korovkin Tipli bir teorem geçerli olmayıp C_ρ^k alt uzayında geçerlidir.

Aşağıdaki teorem çok değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipli bir yaklaşım teoremidir.

Teorem 1.1.5 (Volkov Teoremi)

$\{T_{n,m}f\}$ doğrusal pozitif operatörler dizisi için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(X)} = 0 \quad (1.14)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - x \right\|_{C(X)} = 0 \quad (1.15)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - y \right\|_{C(X)} = 0 \quad (1.16)$$

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(X)} = 0 \quad (1.17)$$

koşulları sağlansın. $X; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 'nin kapalı ve sınırlı bir bölgesi olmak üzere X üzerinde sürekli, gerçel değerli ve tüm $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}f - f\|_{C(X)} = 0 \quad (1.18)$$

ifadesi geçerlidir (Volkov 1957).

Kanıt

$$T_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y)$$

şeklinde tanımlanan $T_{n,m}(f; x, y)$ polinomları (1.14) - (1.17) koşullarını sağlasın

$f \in C(X)$ olmak üzere

$$T_{n,m}(f; x, y) - f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - f(x, y) \\
&+ \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f(x, y) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left((f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)) P_{k,j}^{(n,m)} \right) \\
&+ f(x, y) \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Mutlak değere geçilerek;

$$\begin{aligned}
&|T_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left((f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)) P_{k,j}^{(n,m)} \right) + f(x, y) \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} + f(x, y) \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın maksimumunu alınırsa;

$$\begin{aligned}
\max_{(x,y) \in X} |T_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \max_{(x,y) \in X} \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} \right| \\
&+ \max_{(x,y) \in X} |f(x, y)| \max_{(x,y) \in X} \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left((f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)) P_{k,j}^{(n,m)} \right) \right|
\end{aligned}$$

olup, $C(X)$ uzayında norm tanımından

$$\begin{aligned}
\|T_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(X)} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})(x, y) - f(x, y)| P_{k,j}^{(n,m)} \right\|_{C(X)} \\
&+ \|f\|_{C(X)} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(X)}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. İlk toplam $I_{n,m}$ olarak adlandırılır ve $M > 0$ için

$$\|f\|_{C(X)} := M$$

olarak seçilirse

$$\|T_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(X)} \leq \|I_{n,m}\|_{C(X)} + M \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(X)}$$

bulunur.

Burada $I_{n,m}$ toplamını hesaplayabilmek için aşağıdaki durumlar incelenmelidir. $f \in C(X)$ olduğundan f fonksiyonu sınırlı bir fonksiyondur. Yani her

$(x, y) \in X$ için

$$|f(x, y)| \leq M$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Burada her $k = 0, 1, \dots, n$ ve

$j = 0, 1, \dots, m$ için $(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m})$ noktaları X bölgesinde olduğundan

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| \leq 2M$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\mu_{k,j} = (\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}), \mu = (x, y)$$

$$\rho(\mu_{k,j}, \mu) = \sqrt{(\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2}$$

gösterimleri kullanılsın.

f fonksiyonu kapalı X bölgesinde sürekli olup düzgün süreklidir. Düzgün süreklilik tanımından; her $\varepsilon > 0$ için $\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ olduğunda

$$|f(\mu_{k,j}) - f(\mu)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Böylelikle

$\rho(\mu_{k,j}, \mu) \geq \delta$ için f fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| \leq 2M$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$\frac{\rho(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta} \geq 1$$

olup

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| \leq 2M \frac{\rho^2(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta^2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$\rho(\mu_{k,j}, \mu) < \delta$ ve $\rho(\mu_{k,j}, \mu) \geq \delta$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x, y)| < \varepsilon + 2M \frac{\rho^2(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta^2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Böylece $I_{n,m}$ toplamı için

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &< \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\varepsilon + 2M \frac{\rho^2(\mu_{k,j}, \mu)}{\delta^2} \right) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&= \varepsilon \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \rho^2(\mu_{k,j}, \mu) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&= \varepsilon I'_{n,m} + \frac{2M}{\delta^2} I''_{n,m}
\end{aligned}$$

$I'_{n,m}$ ve $I''_{n,m}$ seçimleri yapılarak, norm özellikleri kullanılarak

$$\|I_{n,m}\|_{C(X)} < \varepsilon \|I'_{n,m}\|_{C(X)} + \frac{2M}{\delta^2} \|I''_{n,m}\|_{C(X)}$$

şeklinde yazılır. $\varepsilon I'_{n,m}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\varepsilon I'_{n,m} &= \varepsilon \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + \varepsilon - \varepsilon \\
&= \varepsilon \left(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından

$$\varepsilon \|I'_{n,m}\|_{C(X)} \leq \varepsilon \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 1 \right\|_{C(X)} + \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mu_{k,j}, \mu) &= (\alpha_{k,n} - x)^2 + (\beta_{j,m} - y)^2 \\
&= (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) - 2\alpha_{k,n}x - 2\beta_{j,m}y + (x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

olduğundan $I''_{n,m}$ ifadesi için de

$$\begin{aligned}
I''_{n,m} &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - 2x \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&\quad - 2y \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) + (x^2 + y^2) \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) - (x^2 + y^2) \right] + 2x \left[x - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right] \\
&\quad + 2y \left[y - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x, y) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I''_{n,m}\|_{C(X)} &\leq \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \right\|_{C(X)} \\
&+ 2\|x\|_{C(X)} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - x \right\|_{C(X)} \\
&+ 2\|y\|_{C(X)} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - y \right\|_{C(X)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\|I_{n,m}\|_{C(X)}$, $\|I'_{n,m}\|_{C(X)}$, $\|I''_{n,m}\|_{C(X)}$ ifadeleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\|I_{n,m}\|_{C(X)} &< \varepsilon + \varepsilon \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - 1 \right\|_{C(X)} \\
&+ \frac{2M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha_{k,n}^2 + \beta_{j,m}^2) P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - (x^2 + y^2) \right\|_{C(X)} \\
&+ \frac{4M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \alpha_{k,n} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - x \right\|_{C(X)} \\
&+ \frac{4M}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \beta_{j,m} P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) - y \right\|_{C(X)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise (1.14) - (1.17) ifadelerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m |f(\alpha_{k,n}, \beta_{j,m}) - f(x,y)| P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \right\|_{C(X)} = 0$$

sonucunu verir.

Böylece

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|T_{n,m}f - f\|_{C(X)} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

1.2 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bu kesimde bir ve iki değişkenli Bernstein Polinomları tanıtılarak yaklaşım özellikleri verilecektir.

Tanım 1.2.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere Bernstein Polinomu;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.19)$$

şeklinde tanımlanır (Bernstein1912).

Uyarı 1.2.1

$B_n(f; x)$ polinomları doğrusal ve pozitifdir.

Doğrusallık;

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f, g \in C[0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} B_n(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (\alpha f + \beta g)\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha B_n(f; x) + \beta B_n(g; x) \end{aligned}$$

olup Bernstein Polinomları açıkça doğrusaldır.

Pozitiflik;

Her $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ ve her $k = 0, 1, \dots, n$ için $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her $f \geq 0$ için $B_n(f; x) \geq 0$ olup her $n \in \mathbb{N}$ için polinomlar pozitifdir.

Lemma 1.2.1

Bernstein Polinomları için

$$B_n(1; x) = 1 \quad (1.20)$$

$$B_n(t; x) = x \quad (1.21)$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \quad (1.22)$$

eşitlikleri geçerlidir (Bernstein1912).

Kanıt

$f(t) = 1$ için kolayca

$$\begin{aligned} B_n(1; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (1-x+x)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Yine $f(t) = t$ için

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

olup burada k yerine $k + 1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= x(1-x+x)^{n-1} \\ &= x \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak $f(t) = t^2$ için;

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^n \frac{k-1+1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada toplamın sol tarafında k yerine $k+2$, toplamın sağ tarafına k yerine $k+1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; x) &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} (1-x+x)^{n-2} + \frac{x}{n} (1-x+x)^{n-1} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n} \\
&= x^2 + \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak

$$B_n(1; x) = 1$$

$$B_n(t; x) = x$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 1.2.1.

$f \in C[0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt

(1.20) - (1.22) eşitliklerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(1; x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(t; x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x^2 + \frac{x - x^2}{n} - x^2 \right\|_{C[0,1]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x - x^2}{n} \right|$$

$$= 0$$

eşitlikleri sağlanır. Korovkin teoremi yardımıyla her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Şimdi de iki değişkenli Bernstein Polinomları ile yaklaşım verilecektir.

Tanım 1.2.2

$(x, y) \in D = [0,1] \times [0,1]$ ve f , D üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $n, m \in \mathbb{N}$ için iki değişkenli Bernstein polinomları;

$$B_{n,m}(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{m}\right) \binom{n}{k} (x)^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{j} (y)^j (1-y)^{m-j} \quad (1.23)$$

şeklinde tanımlanır (Büyükyazıcı 2003).

Tek değişkenli Bernstein Polinomlarından; $B_{n,m}(f; x, y)$ polinomları da doğrusal ve pozitiftir.

Teorem 1.2.2

f , D karesinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|B_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(D)} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Büyükyazıcı 2003).

Kanıt:

Öncelikle $B_{n,m}(f; x, y)$ polinomunun Korovkin şartlarını sağladığı gösterilmelidir. k, m pozitif tamsayılar olmak üzere

$$f_{k,m}(t, z) = t^k z^m$$

olsun.

$$\begin{aligned} B_{n,m}(1; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (1-y+y)^m \\ &= (1-x+x)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(1.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
B_{n,m}(f_{1,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (1-y+y)^m \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned}
B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{j}{m} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{j}{m} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^m \binom{j}{m} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} = y$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) &= y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= y(1-x+x)^n \\
&= y
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak (1.22) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
B_{n,m}(f_{2,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (1-y+y)^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{n,m}(f_{2,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 + \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned}
B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{m}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{m}\right)^2 \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{m}\right)^2 \binom{m}{j} y^j (1-y)^{m-j} = y^2 + \frac{y-y^2}{m}$$

olduğundan

$$B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(y^2 + \frac{y-y^2}{m} \right)$$

elde edilir. Böylece

$$B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) = (1-x+x)^n \left(y^2 + \frac{y-y^2}{m} \right) = \left(y^2 + \frac{y-y^2}{m} \right)$$

olur. Sonuç olarak

$$B_{n,m}(1; x, y) = 1 \quad (1.24)$$

$$B_{n,m}(f_{1,0}; x, y) = x \quad (1.25)$$

$$B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) = y \quad (1.26)$$

$$B_{n,m}(f_{2,0}; x, y) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \quad (1.27)$$

$$B_{n,m}(f_{0,2}; x, y) = y^2 + \frac{y - y^2}{m} \quad (1.28)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıda bulunan (1.24) – (1.26) eşitliklerinden

$$\|B_{n,m}(1; x, y) - 1\|_{C(D)} = 0$$

$$\|B_{n,m}(f_{1,0}; x, y) - x\|_{C(D)} = 0$$

$$\|B_{n,m}(f_{0,1}; x, y) - y\|_{C(D)} = 0$$

eşitlikleri bulunur. Son olarak (1.27), (1.28) eşitliklerinden $(x, y) \in D$ üzerinden her iki tarafın maksimumu alınırsa

$$\|B_{n,m}((f_{2,0} + f_{0,2}); x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(D)} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

olduğu görülür. Buradan $n, m \rightarrow \infty$ iken

$$\|B_{n,m}((f_{2,0} + f_{0,2}); x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(D)} = 0$$

eşitliği sağlanır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.



BÖLÜM 2

TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Bu bölümde Bernstein-Chlodowsky ve Chlodowsky-Taylor Polinomlarının tek değişkenli durumları için yaklaşım özellikleri incelenecektir.

2.1 TEK DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

1932 yılında Chlodowsky tarafından aşağıdaki polinomlar dizisi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1

(b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan gerçel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere

$0 \leq x \leq b_n$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlı polinomlara *Bernstein-Chlodowsky Polinomları* adı verilir.

Uyarı 2.1.1

Bernstein-Chlodowsky Polinomları doğrusaldır.

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f, g \in C[0, \infty]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
B_n^*(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} (\alpha f + \beta g) \left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \alpha f \left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \beta g \left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&= \alpha \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f \left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&\quad + \beta \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} g \left(\frac{k}{n} b_n\right) \\
&= \alpha B_n^*(f; x) + \beta B_n^*(g; x)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan açıkça Bernstein- Chlodowsky Polinomları doğrusaldır.

Bernstein-Chlodowsky Polinomları pozitiftir. Gerçekten

her $x \in [0, b_n]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her $f \geq 0$ için $B_n^*(f; x) \geq 0$ olur. Bu ise polinomların pozitif olduğunu gösterir.

Önerme 2.1.1

Bernstein-Chlodowsky Polinomları için

$$B_n^*(1; x) = 1 \tag{2.2}$$

$$B_n^*(t; x) = x \tag{2.3}$$

$$B_n^*(t^2; x) = x^2 + x \left(\frac{b_n - x}{n}\right) \tag{2.4}$$

eşitlikleri geçerlidir (Chlodowsky 1932).

Kanıt

$f(t) = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
B_n^*(1; x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$f(t) = t$ için,

$$\begin{aligned}
B_n^*(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} b_n \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n b_n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$k \rightarrow k + 1$ için

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_n \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_n \frac{x}{b_n} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= x \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^{n-1} \\
&= x
\end{aligned}$$

olacaktır.

Son olarak $f(t) = t^2$ için,

$$\begin{aligned}
B_n^*(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n b_n^2 \frac{k}{n} \frac{k}{n} \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n b_n^2 \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n b_n^2 \frac{x}{b_n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^n b_n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^n (k-1+1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $k \rightarrow k + 1$ dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned}
B_n^*(t^2; x) &= \frac{b_n}{n} x \frac{x}{b_n} \sum_{k=2}^n (k-1) \frac{(n-1)!}{(k-1)(k-2)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= \frac{x^2}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x
\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{n} (n-1) \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x$$

olacaktır. Son olarak $k \rightarrow k+2$ dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned} B_n^*(t^2; x) &= \frac{x^2}{n} (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{b_n}{n} x \\ &= x^2 \frac{(n-1)}{n} + \frac{b_n}{n} x \\ &= x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{b_n}{n} x \\ &= x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{b_n}{n} x \\ &= x^2 + x \left(\frac{b_n - x}{n}\right) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece (2.2) - (2.4) eşitlikleri gösterilmiş olur.

Uyarı 2.1.2

Bernstein- Chlodowsky Polinomları, tanımlı olduğu $[0, b_n]$ aralığının $n \rightarrow \infty$ iken $[0, \infty)$ aralığına dönüşmesinden dolayı Korovkin teoremini sağlamaz.

Ancak aşağıdaki koşullar altında Bernstein- Chlodowsky Polinomları Korovkin tipli bir teoremi sağlar.

Teorem 2.1.1

Her $f \in C(0, \infty)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = k_f < \infty$$

ve (b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n} = 0 \tag{2.5}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n^*(f; x) - f(x)\|_{C(0, b_n)} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Gadjieva ve Ibikli 1999).

Kanıt

$k_f = 0$ olması durumu için ispatı yapmak yeterlidir. Bu durumda açıkça

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

olur. Yani her $\varepsilon > 0$ için $x \geq x_0$ iken $|f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan en az bir x_0 noktası vardır.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; 0 \leq x \leq x_0 \\ \text{doğrusal} & ; x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2} \\ 0 & ; x \geq x_0 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde sürekli bir g fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda g fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |f(x) - g(x)| &\leq \sup_{0 \leq x \leq x_0} |f(x) - g(x)| + \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \sup_{x \geq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \geq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x)| \\ &\leq \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x)| + \sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |g(x)| + \sup_{x \geq x_0 + \frac{1}{2}} |f(x)| \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{1}{2}} |g(x)| =: |f(x_0)|$$

olarak tanımlanırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

olduğundan

$$\sup_{0 \leq x \leq b_n} |f(x) - g(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(f; x) - f(x)| &= \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(f; x) - B_n^*(g; x) + B_n^*(g; x) - g(x) + g(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(f - g; x)| + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |g(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq b_n} B_n^* \left(\sup_{0 \leq t \leq b_n} |f - g|; x \right) + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| \\ &\quad + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |g(x) - f(x)| \end{aligned}$$

olup süreklilik kullanılarak;

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(f; x) - f(x)| &\leq 3\varepsilon B_n^*(1; x) + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| + 3\varepsilon \\ &\leq 6\varepsilon + \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| \end{aligned}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(f; x) - f(x)| \leq 6\varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| \quad (2.6)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte yer alan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)|$$

ifadesi göz önüne alınırsa; g fonksiyonu $\left[x_0 + \frac{1}{2}, b_n \right]$ aralığında sıfır olduğundan sınırlıdır.

Yani $|g(x)| \leq M$ koşulunu sağlayan $M > 0$ sayısı vardır.

Ayrıca kapalı ve sınırlı $\left[0, x_0 + \frac{1}{2} \right]$ aralığı üzerinde g fonksiyonu düzgün süreklidir. O halde düzgün süreklilik tanımı gereğince her $\varepsilon > 0$ için $\left| \frac{k}{n} b_n - x \right| < \delta$ olduğunda $x \in [0, b_n]$ için

$$\left| g\left(\frac{k}{n} b_n\right) - g(x) \right| < \varepsilon$$

olan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$\left| \frac{k}{n} b_n - x \right| \geq \delta$ olduğunda g fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$\left| g\left(\frac{k}{n} b_n\right) - g(x) \right| \leq 2M \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$\frac{\left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^2}{\delta^2} \geq 1$$

eşitsizliğinden

$$\frac{2M \left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^2}{\delta^2} \geq 2M$$

olacağından

$$\left| g\left(\frac{k}{n} b_n\right) - g(x) \right| \leq \frac{2M \left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^2}{\delta^2} \quad (2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.7) ve (2.8) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse

$$\left| g\left(\frac{k}{n} b_n\right) - g(x) \right| \leq \varepsilon + \frac{2M \left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^2}{\delta^2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece

$$\begin{aligned} |B_n^*(g; x) - g(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - \sum_{k=0}^n g(x) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| g\left(\frac{k}{n} b_n\right) - g(x) \right| C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad - 2x \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} x^2 \\
&= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} - 2x^2 + x^2 \right] \\
&= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(b_n - x)}{n}
\end{aligned}$$

olup

$$\sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| \leq \varepsilon + \max_{0 \leq x \leq b_n} \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(b_n - x)}{n} \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \frac{b_n^2}{4n}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (b_n) dizisi için (2.5) koşulu sağlandığından

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(g; x) - g(x)| &\leq \varepsilon + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{\delta^2} \frac{b_n^2}{4n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade ile (2.6) birlikte düşünülürse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq b_n} |B_n^*(f; x) - f(x)| = 0$$

bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

2.2 TEK DEĞİŞKENLİ CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARI

İzgi, Büyükyazıcı ve İbikli (2009) tarafından Chlodowsky-Taylor polinomları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Öncelikle tanımın kuruluşu verilecektir.

(b_n) dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif bir sayı dizisi olmak üzere

$0 \leq x < b_n$ için

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara Bernstein-Chlodowsky Polinomları adı verilir. Burada

$$\varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, \text{dir.}$$

f fonksiyonu $C(0, \infty)$ uzayında r -kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli olmak üzere

$$T_r(x) := \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i$$

şeklinde tanımlanan polinoma $C(0, \infty)$ uzayında f fonksiyonu için r -inci derecede Taylor Polinomu denir.

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

ve

$$T_r(x) := \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i$$

ifadelerinin konvolüsyonu olan

$$\begin{aligned} C_{n,r}(f, x) & : = (B_n * T_r)(f; x) \\ & = \sum_{k=0}^n T_r\left(f; \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ & = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.2.1

f fonksiyonu $C(0, \infty)$ uzayında r -kez türevlenebilir ve r -inci türevi sürekli olsun.

$$\varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

olmak üzere

$$C_{n,r}(f, x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \quad (2.9)$$

polinomuna Chlodowsky-Taylor Polinomu denir.

Uyarı 2.2.1

$C_{n,r}(f; x)$ polinomları doğrusal pozitif operatördür.

Kant

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $f, g \in C(0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C_{n,r}(\alpha f + \beta g, x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{(\alpha f + \beta g)^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{(\alpha f)^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{(\beta g)^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) + \beta \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{g^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \alpha C_{n,r}(f, x) + \beta C_{n,r}(g, x) \end{aligned}$$

olup doğrusaldır.

Pozitiflik:

$f \geq 0$ olsun. Bu durumda $x \in (0, \infty)$ olduğundan

$$\frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \geq 0 \text{ olur.}$$

$0 \leq x < b_n$ eşitsizliğinden $\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \geq 0$ bulunur. $x \in (0, \infty)$ olduğundan

$\varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \geq 0$ olacaktır. Bu ise

$$C_{n,r}(f, x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

eşitliği ile verilen $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisinin sıfırdan büyük olması demektir.

Lemma 2.2.1

Açıkça $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{n,r}(1; x) - 1\|_{\rho} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{n,r}(t; x) - t\|_{\rho} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{n,r}(t^2; x) - t^2\|_{\rho} = 0$$

ifadeleri geçerlidir (İzgi vd. 2009).

Kant

$f(x) = 1$ için;

$$C_{n,r}(1; x) = \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = 1$$

eşitliği doğrudur.

$f(x) = x$ için;

$$\begin{aligned} C_{n,r}(t; x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^1 \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{\frac{k}{n}b_n}{0!} + \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)}{1!} \right\} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= x \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= x \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

Son olarak $f(x) = x^2$ için;

$$\begin{aligned}
C_{n,r}(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^2 \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{\left(\frac{k}{n}b_n\right)^2}{0!} + \frac{2}{1!} \frac{k}{n} b_n \left(x - \frac{k}{n}b_n\right) + \frac{2}{2!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2 \right\} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \left\{ \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 + 2x \frac{k}{n} b_n - 2 \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 + x^2 - 2x \frac{k}{n} b_n + \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 \right\} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n x^2 \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= x^2 \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= x^2
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan da $n \rightarrow \infty$ için ρ normuna göre limit alınırsa;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{n,r}(1; x) - 1\|_{\rho} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{n,r}(t; x) - 1\|_{\rho} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{n,r}(t^2; x) - t^2\|_{\rho} = 0$$

eşitlikleri elde edilir.



BÖLÜM 3

İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN CHLODOWSKY VE CHLODOWSKY TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Bu bölümde Bernstein-Chlodowsky ve Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşımın iki değişkenli durumdaki özellikleri incelenecektir.

3.1 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARI

Tanım 3.1.1

$\{b_n\}, \{c_m\}$ monoton artan pozitif reel değerli diziler olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{n}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{c_m}{m}\right) = 0$$

olsun. $b_n, c_m > 0$ için $\tilde{D}_2 := D_{b_n, c_m} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq b_n, 0 \leq y \leq c_m\}$ olarak tanımlansın.

İki değişkenli Bernstein-Chlodowsky operatör dizisi;

$$B_{n,m}^*(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m f\left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} c_m\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır (Buyukyazici and Ibikli 2006).

Önerme 3.1.1

(3.1) ile verilen operatör dizisi $B_{n,m}^*(f; x, y), C_{\tilde{D}_2} \rightarrow C_{\tilde{D}_2}$ olsun.

$$e_{i_1, i_2} = x^{i_1} y^{i_2} \text{ ve } i_1 + i_2 \leq 2 \text{ için}$$

$$i. B_{n,m}^*(e_{0,0}; x, y) = 1$$

ii. $B_{n,m}^*(e_{1,0}; x, y) = x$

iii. $B_{n,m}^*(e_{0,1}; x, y) = y$

iv. $e(x, y) = e_{2,0}(x, y) + e_{0,2}(x, y)$

olmak üzere;

$$B_{n,m}^*(e; x, y) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} + y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt

i. Tek değişkenli Bernstein Chlodowsky Polinomlarının özellikleri kullanılarak ispat aşağıdaki biçimde kolayca yapılabilir.

$$\begin{aligned} B_{n,m}^*(e_{0,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m} + \frac{y}{c_m}\right)^m \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii. (1.21) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
B_{n,m}^*(e_{1,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k}{n} b_n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m} + \frac{y}{c_m}\right)^m \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

iii. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
B_{n,m}^*(e_{0,1}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{j}{m} c_m \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{j}{m} c_m \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \frac{j}{m} c_m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olup

$$\sum_{j=0}^m \frac{j}{m} c_m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} = y$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
B_{n,m}^*(e_{0,1}; x, y) &= y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= y \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n \\
&= y
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

iv. Son olarak $e_{2,0}$ ve $e_{0,2}$ fonksiyonları için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
B_{n,m}^*(e_{2,0}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m} + \frac{y}{c_m}\right)^m \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_n^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B_{n,m}^*(e_{0,2}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^m \frac{j^2}{m^2} c_m^2 \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} = y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} B_{n,m}^*(e_{0,2}; x, y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m} \\ &= \left(1 - \frac{x}{b_n} + \frac{x}{b_n}\right)^n \left(y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}\right) \\ &= y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m} \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak

$$e(x, y) = e_{2,0}(x, y) + e_{0,2}(x, y)$$

eşitliği kullanılarak aranan

$$B_{n,m}^*(e; x, y) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n} + y^2 + \frac{y(c_m - y)}{m}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.1

$\{b_n\}, \{c_m\}$ artan dizileri pozitif gerçel sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda $B_{n,m}^*(f; x, y)$ polinomlar dizisi $b < b_n, c < c_m$ olan yeterince büyük b, c sayıları için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \max_{(x,y) \in \bar{D}_2} |B_{n,m}^*(f; x, y) - f(x, y)| = 0$$

eşitliğini sağlar (Büyükyazıcı ve İbikli 2006).

Kanıt

Bir önceki önermede kanıtlanan i-iv'den

$$\|B_{n,m}^*(e_{0,0}; x, y) - e_{0,0}(x, y)\|_{C(\overline{D_2})} = 0$$

$$\|B_{n,m}^*(e_{1,0}; x, y) - e_{1,0}(x, y)\|_{C(\overline{D_2})} = 0$$

$$\|B_{n,m}^*(e_{0,1}; x, y) - e_{0,1}(x, y)\|_{C(\overline{D_2})} = 0$$

eşitlikleri geçerlidir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|B_{n,m}^*((e_{2,0}; x, y) + (e_{0,2}; x, y)) - (x^2 + y^2)\|_{C(\overline{D_2})} &\leq \frac{b(b_n - b)}{n} + \frac{c(c_m - c)}{m} \\ &\leq b \frac{b_n}{n} + c \frac{c_m}{m} \end{aligned}$$

eşitsizliği de doğrudur. Kabulden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_m}{m} = 0$$

olduğundan teoremin kanıtı kolayca tamamlanmış olur.

3.2 İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN CHLODOWSKY TAYLOR POLİNOMLARI

Bu kesimde Serenbay ve İbikli tarafından tanımlanan Bernstein-Chlodowsky Polinomu ile Taylor Polinomunun r kez kısmi türevlenebilen iki değişkenli f fonksiyonlarının konvolüsyonu ile yeni bir operatör tanımlanacaktır. Bu kesimde f ; r kez kısmi türevlenebilen bir fonksiyon olarak alınacaktır.

Uyarı 3.2.1

f iki değişkenli bir fonksiyon ve $i = 0, 1, 2, \dots, r$ olsun. Fonksiyonunun bir (a, b) noktasındaki i . kısmi türevi varsa bu durumda f için r . dereceden Taylor Polinomu

$$T_r(f, x) = \sum_{i=0}^r \frac{1}{i!} (f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b))^{(i)} \quad (3.2)$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi Chlodowsky-Taylor Polinomunun tanımı verilecektir.

f ; r kez kısmi türevlenebilir ve r . kısmi türevleri sürekli olsun. Chlodowsky-Taylor Polinomu olarak adlandırılan polinomlar Bernstein-Chlodowsky Polinomlarına göre daha iyi yakınsaklık sonucu vermektedir.

$f: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olan r . kısmi türevleri sürekli olan tüm fonksiyonların kümesi $C^r[0, \infty) \times [0, \infty)$ şeklinde gösterilecektir. (3.1) ve (3.2) birlikte düşünülerek

$f \in C^r[0, \infty) \times [0, \infty)$ için $(n, m; r)$ iki değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomları aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$E_{n,m}(f, r; x, y) = (B_{n,m} * T_r)(f; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m T_r \left(f; \frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right)^i \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right)$$

Bu tanım basitleştirilerek aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Tanım 3.2.1

(b_n) gerçel sayıların artan bir dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

olsun.

$0 \leq x \leq b_n$, $0 \leq y \leq b_m$ olmak üzere

$$\varphi_n^k(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \varphi_m^j(t) = \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j} \text{ ve}$$

$$d^i f(s, t) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{\partial^i f(s, t)}{\partial x^{i-k} \partial y^k} (x-s)^{i-k} (y-t)^k$$

eşitlikleri geçerli olsun. Bu durumda Chlodowsky-Taylor Polinomu

$$E_{n,m}(f, r; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) \sum_{i=0}^r \frac{d^i f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right)}{i!} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.



BÖLÜM 4

BERNSTEIN- CHLODOWSKY POLİNOMLARI VE CHLODOWSKY-TAYLOR POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI HESABI

Bu bölümde Bernstein- Chlodowsky Polinomları ve Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım görsel ve nümerik olarak ortaya koyulacaktır. İlk olarak yaklaşım hızı için gerekli olan süreklilik modülü ve temel özellikleri incelenecektir.

4.1 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN SÜREKLİLİK MODÜLÜ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 4.1.1

Boştan farklı $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı için

$$d(I) = \sup\{|x - y| : x, y \in I\}$$

ifadesine I kümesinin çapı denir (Natanson1964).

Tanım 4.1.2

$I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde sınırlı olsun. $d = d(I)$, I kümesinin çapı ve

$$w(f, \delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

olmak üzere $w:]0, d] \rightarrow [0, \infty[$ fonksiyonuna f fonksiyonunun I üzerindeki süreklilik modülü denir (Natanson 1964).

Süreklilik modülünün bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir (Natanson 1964, Musayev vd. 2003).

Özellik 4.1.1

$x, t \in [0, A]$ ve her $f \in C[0, A]$ olsun.

i. $\delta > 0$ için $w(f, \delta) \geq 0$ dır.

ii. $w(f, \delta)$ fonksiyonu monoton artandır.

iii. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$w(f, n\delta) \leq nw(f, \delta) \text{ eşitsizliği geçerlidir.}$$

iv. λ pozitif reel sayı olmak üzere

$$w(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)w(f, \delta) \text{ eşitsizliği sağlanır.}$$

v. f, I aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(f, \delta) = 0$$

vi. $x, t \in [0, A]$ ve her $f \in C[0, A]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f, \delta) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)$$

özellikleri vardır.

Tanım 4.1.3

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölge ve $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $K \subset D$ kompakt bir bölge ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere,

$$w(f, \delta) = \sup \left\{ |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| : x, y \in K, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \delta \right\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü adı verilir.

Tanım 4.1.4

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölge ve $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $K \subset D$ kompakt bölge ve

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere,

$$w_1(f, \delta) = \sup\{|f(x_1, y) - f(x_2, y)| : (x_1, y), (x_2, y) \in K, |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

$$w_2(f, \delta) = \sup\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| : (x, y_1), (x, y_2) \in K, |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

ifadelerine, f fonksiyonunun x 'e ve y 'ye göre kısmi süreklilik modülü denir.

Şimdi ağırlıklı tek değişkenli fonksiyonların ağırlıklı süreklilik modülü tanımı verilecektir.

Tanım 4.1.5

$\Omega(f; \delta)$ ile gösterilen ağırlıklı süreklilik modülü

$$\Omega(f; \delta) = \sup \left\{ \frac{|f(t+h) - f(t)|}{\rho(t)\rho(h)} : t \in [0, \infty), |h| \leq \delta, f \in C_\rho^k \right\}$$

eşitliği ile kullanılacaktır. $\Omega(f; \delta)$ 'nın özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 4.1.1

$f \in C_\rho^k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i. $\Omega(f; \delta); \delta > 0$ 'ın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii. Her $f \in C_\rho^k$ için $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f; \delta) = 0$

iii. Her $\delta > 0$

$$\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$$

iv. Her $f \in C_\rho^k$ ve $t, x \in [0, \infty)$ için (iii) özelliğinde

$$|f(t) - f(x)| \leq 2 \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) (1 + \delta^2)\rho(x)(1 + (t-x)^2)\Omega(f; \delta) \quad (4.1)$$

eşitsizliği vardır.

Özellik 4.1.1; Tanım 4.1.3 ve Tanım 4.1.4 için de geçerlidir. İki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı süreklilik modülü tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.1.6

Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2)$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x \in [0, \infty[\\ |h_1| \leq \delta, |h_2| \leq \delta}} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)|}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|h\|^2)}$$

ifadesine f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü adı verilir. $\Omega(f; \delta)$ nin bazı önemli özellikleri Önerme 4.1.1’de verilmiştir.

Önerme 4.1.1

$f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i. $\delta > 0$ için $\Omega(f; \delta)$, δ nin monoton artan bir fonksiyonudur.

ii. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ için

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f; \delta) = 0$$

eşitliği geçerlidir.

iii. Her $\mu \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f; \mu\delta) \leq 4\mu(1 + 2\delta^2)\Omega(f; \delta)$ eşitsizliği sağlanır.

iv. Her $\lambda > 0$ için $\Omega(f; \lambda\delta) \leq 4(1 + \lambda)(1 + 2\delta^2)\Omega(f; \delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

v. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $x = (x_1, x_2)$, $t = (t_1, t_2)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + \|t - x\|^2)(1 + \|x\|^2)\Omega(f; \|t - x\|)$$

eşitsizliği doğrudur.

vi. Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve $t = (t_1, t_2)$, $x = (x_1, x_2)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 4 \left(\frac{\|t - x\|}{\delta} + 1 \right) (1 + \|x\|^2)(1 + \|t - x\|^2)(1 + 2\delta^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1.1 (Cauchy- Schwartz Eşitsizliği)

X iç çarpım uzayı, \mathbb{F} bir cisim ve $x, y \in X$ olsun. Bu durumda

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$y - \alpha x = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.1.2 (Hölder Eşitsizliği)

$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \mathbb{F}^2$ için

$$\sum_{n=1}^k |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^k |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^k |y_n|^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Chlodowsky tarafından sınırsız aralık üzerinde tanımlanan operatörün yaklaşım hızı Gadjiev v.d. (1998), İbikli (2003) gibi birçok kaynakta süreklilik modülü yardımıyla araştırılmıştır.

Teorem 4.2.1

f, \mathbb{R} de sürekli ve

$$|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $A > 0$ için $w_{1+A}(f, \delta)$ fonksiyonu $[0, 1 + A]$ aralığında f fonksiyonunun süreklilik modülü olup, bu durumda $[0, A]$ aralığında

$$|B_n^*(f; x) - f(x)| \leq C_f w_{1+A} \left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

eşitsizliğini sağlayan n den bağımsız $C_f > 0$ sabiti vardır (Gadjiev ve İbikli 1999).

Kanıt

$x \in [0, A]$ olmak üzere

$$E_1 = \left\{ k: \frac{k}{n} b_n \geq 1 + A \right\} \text{ ve } E_2 = \left\{ k: \frac{k}{n} b_n \leq 1 + A \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda

$$|B_n^*(f; x) - f(x)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n \left[f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k \in E_1} \left[f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \in E_2} \left[f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k \in E_1} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k \in E_2} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$t_n := \sum_{k \in E_1} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

$$s_n := \sum_{k \in E_2} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

olarak tanımlansın. Burada t_n ve s_n ifadeleri ayrı ayrı düşünülerek; $k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için $|f(x)| \leq M_f(1 + x^2)$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| &\leq M_f \left(2 + \left(\frac{k}{n}b_n\right)^2 + x^2 \right) \\
&\leq M_f \left[\left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 + 2x \left(\frac{k}{n}b_n - x\right) + 2(1 + x^2) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. E_1 ve E_2 kümelerinin tanımından $\left|\frac{k}{n}b_n - x\right| \geq 1$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| &\leq 2M_f \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 [4 + 4x + x^2] \\ &\leq 2M_f(A + 2)^2 \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 \end{aligned}$$

olur. Burada

$$B := 2M_f(A + 2)^2$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\left| f\left(\frac{k}{n}b_n\right) - f(x) \right| \leq B \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2$$

eşitsizliği geçerli olur. Böylece t_n de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} t_n &\leq B \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\ &= B \frac{x(b_n - x)}{n} \\ &\leq BA \frac{b_n}{n} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Dizinin tanımından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

olup yeterince büyük n değerleri için

$$\frac{b_n}{n} \leq \sqrt{\frac{b_n}{n}}$$

eşitsizliği doğrudur. Süreklilik modülünün özelliklerinden

$$C_{1,f} \sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq w_{1+A} \left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \Rightarrow \sqrt{\frac{b_n}{n}} \leq \frac{1}{C_{1,f}} w_{1+A} \left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

olacak şekilde $C_f > 0$ sayısı vardır. O halde $M := \frac{BA}{C_{1,f}}$

olmak üzere (2.1)'den

$$t_n \leq Mw_{1+A} \left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \quad (4.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada $k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için süreklilik modülünün özellikleri kullanılarak

$$\left| f \left(\frac{k}{n} b_n \right) - f(x) \right| \leq w_{1+A} \left(\left| \frac{k}{n} b_n - x \right|, \delta_n \right) \leq w_{1+A}(f, \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left| \frac{k}{n} b_n - x \right| \right]$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Cauchy- Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} s_n &\leq w_{1+A}(f, \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} b_n - x \right| \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \right] \\ &\leq w_{1+A}(f, \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} b_n - x \right|^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k}} \right] \\ &\leq w_{1+A}(f, \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\frac{x(b_n-x)}{n}} \right] \\ &\leq w_{1+A}(\delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{A} \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ ve $C_{2,f} = 1 + \sqrt{A}$ seçilirse

$$s_n \leq C_{2,f} w_{1+A} \left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \quad (4.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.2) ve (4.3) ifadelerinden $C_f = C_{1,f} + C_{2,f}$ olarak alınır

$$|B_n^*(f; x) - f(x)| \leq C_f w_{1+A} \left(f, \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu aranan eşitsizliktir.

Teorem 4.2.2

$A > 1$ olmak üzere $[0, A] \times [0, A]$ aralığında $w(f; \delta_n)$, f fonksiyonunun tam süreklilik modülü ve $f \in C(\tilde{D}_2)$ olsun.

$[0, A] \times [0, A]$ aralığı üzerinde, yeterince büyük n ler için

$$|B_{n,m}^*(f; x, y) - f(x, y)| \leq 3A \left[w_1 \left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) + w_2 \left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}} \right) \right]$$

eşitsizliği sağlanır (Izgi and Buyukyazici 2006).

Kanıt

$x, y \in [0, A]$ olmak üzere operatörün tanımından

$$\begin{aligned} B_{n,m}^*(f; x, y) - f(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left[f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} c_m \right) - f(x, y) \right] \\ &\quad \cdot \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(\frac{y}{c_m} \right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m} \right)^{m-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left[f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} c_m \right) - f \left(\frac{k}{n} b_n, y \right) + f \left(\frac{k}{n} b_n, y \right) - f(x, y) \right] \\ &\quad \cdot \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(\frac{y}{c_m} \right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m} \right)^{m-j} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned}
& |B_{n,m}^*(f; x, y) - f(x, y)| \\
& \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f\left(\frac{k}{n}b_n, \frac{j}{m}c_m\right) \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{k}{n}b_n, y\right) \right| \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
& \quad + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| f\left(\frac{k}{n}b_n, y\right) \right. \\
& \quad \left. - f(x, y) \right| \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
& \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m w_2\left(f; \left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right) \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
& \quad + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m w_1\left(f; \left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right) \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. Toplamın ilk terimi $\psi_2(x, y)$, ikinci terimi $\psi_1(x, y)$ olarak adlandırılırsa,

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m w_1\left(f; \left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right) \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n w_1\left(f; \left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\
&= \sum_{k=0}^n w_1\left(f; \left|\frac{k}{n}b_n - x\right|\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. $x, t \in [0, A]$ ve $A > 1$ olduğundan süreklilik modülü özellikleri ve Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\psi_1(x, y) &\leq w_1(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^2 \left[\binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \right] \right]^{1/2} \right\} \\
&\leq w_1(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\frac{x(b_n - x)}{n}} \right\} \\
&\leq w_1(f; \delta_n) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\frac{Ab_n}{n}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta_n = \sqrt{\frac{b_n}{n}}$ seçimiyle,

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &\leq w_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\{1 + \sqrt{A}\} \\ &< 2Aw_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)\end{aligned}\quad (4.4)$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde süreklilik modülü özelliklerinden $\psi_2(x, y)$ ifadesi hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}\psi_2(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m w_2\left(f; \left|\frac{j}{m}c_m - y\right|\right) \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \\ &\leq w_2(f; \delta_m) \left\{1 + \frac{1}{\delta_m} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left|\frac{j}{m}c_m - y\right| \binom{n}{k} \binom{m}{j} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \right] \right\} \\ &= w_2(f; \delta_m) \left\{1 + \frac{1}{\delta_m} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \left|\frac{j}{m}c_m - y\right| \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \right] \right\} \\ &\leq w_2(f; \delta_m) \left\{1 + \frac{1}{\delta_m} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{m}c_m\right) \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} y \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{y}{c_m}\right)^j \left(1 - \frac{y}{c_m}\right)^{m-j} \right] \right\} \\ &\leq w_2(f; \delta_m) \left\{1 + \frac{1}{\delta_m} 2y\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Açıkça $y \in [0, A]$ olduğundan,

$$\psi_2(x, y) \leq w_2(f; \delta_m) \left\{1 + \frac{1}{\delta_m} 2A\right\}$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Yeterince büyük m ler için $\delta_m = \sqrt{\frac{c_m}{m}}$ olarak tanımlanırsa;

$$\psi_2(x, y) < 3Aw_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\quad (4.5)$$

ifadesi geçerlidir. (4.4) ve (4.5) eşitsizlikleri kullanılarak

$$|B_{n,m}^*(f; x, y) - f(x, y)| \leq 2Aw_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + 3Aw_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
w_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right) &< 2Aw_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + 3Aw_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right) \\
&< 3A\left[w_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup

$$|B_{n,m}^*(f; x, y) - f(x, y)| \leq 3A\left[w_1\left(f; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) + w_2\left(f; \sqrt{\frac{c_m}{m}}\right)\right]$$

sonucuna ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

4.3 BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ CHLODOWSKY TAYLOR POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

Bu kesimde ilk olarak (İzgi ve diğ.) tarafından 2009'da tanımlanan bir değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomları ve daha sonra Serenbay ve İbikli tarafından 2011'de verilen iki değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım özellikleri verilecektir. Öncelikli olarak tek değişkenli operatör için gerekli notasyonlar ve ikinci bölümde verilen operatörün tanımı hatırlatılacaktır.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olan bütün sürekli fonksiyonların r . türevlerinin kümesi $C^r[0, \infty)$ ile gösterilsin ve $C^0[0, \infty) = C[0, \infty)$ olsun.

$$C_n(f; x) = f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq b_n \quad (4.6)$$

$$T_r(f; x) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i \quad (4.7)$$

(4.6) ve (4.7) aynı anda düşünülerek

$$C_{n,r}(f; x) = (C_n * T_r)(f; x) = \sum_{k=0}^n T_r\left(f; \frac{k}{n}b_n\right) \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

operatörler dizisi elde edilir. Bu durumda her $f \in C^r[0, \infty)$ için Chlodowsky-Taylor Polinomunun (n, r) . türevleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(b_n) dizisi pozitif sayıların artan bir dizisi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

olsun.

$$\varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

olmak üzere bir değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomları

$$C_{n,r}(f; x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \quad 0 \leq x \leq b_n \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Aşağıda $f \in C^r[0, \infty)$ için Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşımın özellikleri verilecektir.

Lemma 4.3.1

$A_{r,i}(x)$ n 'den bağımsız polinomlar olmak üzere fonksiyon

$$T_{n,r}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} A_{r,i}(x)n^i$$

biçiminde gösterilebilir.

Sonuç 4.3.1

$T_{n,r}(x)$ x ve n 'ye göre bir polinom olmak üzere $T_{n,r}(x)$ n 'ye göre $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ -inci dereceden bir polinomdur. Buna göre $x \in [0,1]$ noktaları için

$$|T_{n,r}(x)| \leq K(r)n^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K(r)$ sayısı vardır.

Lemma 4.3.2

$$T_{n,s}(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^s \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \quad 0 \leq x \leq b_n, \quad s = 0,1,2, \dots \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlansın. C_s, K_s, M_s sabitleri için;

$$T_{n,2s}(x) \leq C_s A^s \left(\frac{b_n}{n}\right)^s, \quad 0 \leq x \leq A \quad (4.10)$$

$$T_{n,2s}(x) \leq K_s \left(\frac{b_n^2}{n}\right)^s, \quad 0 \leq x \leq b_n$$

$$\frac{T_{n,2s}(x)}{[\rho(x)]^{s/2}} \leq M_s \left(\frac{b_n}{n}\right)^s, \quad 0 \leq x \leq b_n \quad (4.11)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (İzgi vd. 2009).

Kanıt

Rekürans formülü olan,

$$T_{n,s+1}(x) = \frac{x(b_n - x)}{n} [T'_{n,s}(x) + sT_{n,s-1}(x)]$$

eşitliği $X = \frac{x(b_n - x)}{n}$ ve (4.9) tanımı kullanılırsa

$T_{n,0}(x) = 1$ için

$s = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} T_{n,0}(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^0 \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \left(\frac{x}{b_n} + 1 - \frac{x}{b_n}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

$T_{n,1}(x) = 0$ için

$s = 1$ olsun.

$$\begin{aligned} T_{n,1}(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}b_n - x\right)^1 \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) - \sum_{k=0}^n x \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\ &= \frac{b_n}{n} \sum_{k=0}^n k \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) - x \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_n}{n} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - x \\
&= \frac{b_n}{n} \frac{x}{b_n} \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} - x
\end{aligned}$$

k yerine $k + 1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
T_{n,1}(x) &= n \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} - x \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right) - x \\
&= x - x \\
&= 0
\end{aligned}$$

$T_{n,2}(x) = x$ için

$s = 2$ olsun.

$$\begin{aligned}
T_{n,2}(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^2 \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 - 2x \frac{b_n}{n} + x^2\right) \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) - 2x \frac{b_n}{n} \sum_{k=0}^n x \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) + x^2 \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) = \sum_{k=1}^n b_n^2 \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= b_n^2 \sum_{k=1}^n \frac{k-1+1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^n (k-1) \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{x^2}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-2)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} + \frac{b_n}{n} x \\
&= x^2 \frac{(n-1)}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-2} + \frac{b_n}{n} x \\
&= x^2 + \frac{x(b_n - x)}{n}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

(4.12) ve (4.13) ifadelerinden

$$T_{n,2}(x) = \frac{x(b_n - x)}{n}$$

olduğu görülür. Her $x \in [0, b_n]$ için $r = 0, 1, 2 \dots$ olmak üzere

$$T_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} b_n\right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \tag{4.14}$$

polinomu tanımlansın. (4.9) ifadesinde düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
T_{n,r} \left(\frac{x}{b_n}\right) &= \sum_{k=0}^n \left(k - n \frac{x}{b_n}\right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \frac{n^r}{b_n^r} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x\right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \frac{n^r}{b_n^r} T_{n,r}(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 4.3.1 ifadesinden C_s, K_s, M_s sabitleri için

$$T_{n,2s}(x) \leq C_s A^s \left(\frac{b_n}{n}\right)^s, \quad 0 \leq x \leq A$$

$$T_{n,2s}(x) \leq K_s \left(\frac{b_n^2}{n}\right)^s, \quad 0 \leq x \leq b_n$$

$$\frac{T_{n,2s}(x)}{[\rho(x)]^{s/2}} \leq M_s \left(\frac{b_n}{n}\right)^s, \quad 0 \leq x \leq b_n$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 4.3.1

$f \in C^r[0, \infty)$, $f^r \in C_\rho^k$ ve f in (n, r) . dereceden Chlodowsky-Taylor Polinomları $C_{n,r}(f; x)$ olsun. Bu durumda yeterince büyük bir A için $x \in [0, A]$ ve yeterince büyük n, A ve r 'ye bağlı $B_r(A)$ sabiti için

$$\|C_{n,r}(f; x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq B_r(A) \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (İzgi vd. 2009, Atak 2012).

Kanıt

Genelleştirilmiş Taylor formülü kullanılarak

$$f(x) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i + \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^r}{(r-1)!}$$

ile birlikte

$$\int_0^1 (1-u)^{r-1} \left\{ f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right) \right\} du$$

ifadeleri verilsin. Bu ifade için kısalık olması bakımından

$$I_{n,r}^k(x) := \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left| f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right) \right| du$$

tanımlaması yapılırsa (4.8) eşitliği ile verilen Chlodowsky-Taylor Polinomu için

$C_{n,r}(1; x) = 1$ olduğundan her $x \in [0, b_n]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} |C_{n,r}(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) - \sum_{k=0}^n f(x) \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \left\{ \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^i + \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^r}{(r-1)!} I_{n,r}^k \right\} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^r}{(r-1)!} I_{n,r}^k \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\left|x - \frac{k}{n}b_n\right|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k| \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi verilen bir $A \geq 0$ ve $x \in [0, A]$ için iki nokta kümesi

$$E_1 := \left\{ k: \frac{k}{n}b_n \geq 1 + A \right\}, \quad E_2 := \left\{ k: \frac{k}{n}b_n \leq 1 - A \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $|C_{n,r}(f; x) - f(x)|$ ifadesi için

E_1 ve E_2 kümesinin tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
|C_{n,r}(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in E_1} \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k(x)| \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) + \sum_{k \in E_2} \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k(x)| \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= J_{n1}(x) + J_{n2}(x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. İlk olarak $J_{n1}(x)$ göz önüne alınsın. $f^r \in C_\rho^k$ olduğundan bir $B_1(A) \geq 1$ sabiti için

$$|f^{(r)}(t)| \leq B_1(A)\rho(t) \quad (4.15)$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer taraftan $k \in E_1$ ve $x \in [0, A]$ için

$$\left|x - \frac{k}{n}b_n\right| \geq 1 \quad (4.16)$$

(4.15) ve (4.16) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
\left|f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\right| &\leq \left|f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right)\right| + \left|f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\right| \\
&\leq B_1(A)\rho\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) + B_1\rho\left(\frac{k}{n}b_n\right) \\
&= B_1(A)\left\{2 + \left[\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right]^2 + \left[\frac{k}{n}b_n\right]^2\right\} \\
&\leq 2B_1(A)(1 + A^2)(u^2 - u + 1)\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2
\end{aligned}$$

bulunur.

$B_2(A) := 2B_1(A)(1 + A^2)$ denilirse

$$\left|f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\right| \leq B_2(A)(u^2 - u + 1)\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
J_{n1}(x) &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&\times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left|f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right)\right| du \\
&\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} B_2(A)(u^2 - u + 1)\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2 du
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Yani

$$J_{n1}(x) \leq B_2(A) \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-1}(u^2 - u + 1) du}{(r-1)!} \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}b_n\right|^{r+2} \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

$$= B_2(A) \frac{r^2 + 2r + 2}{(r+2)!} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+2} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)$$

elde edilir. Burada $B_{2,r} := \frac{r^2+2r+2}{(r+2)!}$ alınırsa

$$J_{n1}(x) \leq B_{2,r} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+2} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \quad (4.17)$$

eşitsizliği geçerli olacaktır. Her $x \in [0, b_n]$ için $r = 0,1,2 \dots$ olmak üzere

$$T_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)$$

polinomu tanımlansın. Bu ifadede düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} S_{n,r} \left(\frac{x}{b_n} \right) &= \sum_{k=0}^n \left(k - n \frac{x}{b_n} \right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\ &= \frac{n^r}{b_n^r} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n - x \right)^r \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\ &= \frac{n^r}{b_n^r} T_{n,r}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 4.3.1'den şu ifadeler yazılabilir.

$$T_{n,r}(x) \leq \frac{b_n^r}{n^r} K(r) n^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$$

$$T_{n,2r}(x) \leq C_r A^r \left(\frac{b_n}{n} \right)^r, \quad 0 \leq x \leq A < b_n$$

Burada (4.17) ifadesinde Cauchy-Schwartz ve yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_{n1}(x) &\leq B_{2,r} \sqrt{\sum_{k \in E_1} \left(x - \frac{k}{n} b_n \right)^{2r+4}} \sqrt{\sum_{k \in E_1} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)} \\ &= B_{2,r} \sqrt{T_{n,2(r+1)}(x)} \\ &\leq B_{2,r} \sqrt{C_{r+1} A^{r+1}} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{(r+1)/2} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada

$$B'_r(A) := B_{2,r} \sqrt{C_{r+1} A^{r+1}}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$J_{n1}(x) \leq B'_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{(r+1)/2} \quad (4.18)$$

eşitsizliği geçerlidir. Süreklilik modülünün özellikleri kullanılarak bir $C > 0$ sabiti için

$$\omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \geq C \sqrt{\frac{b_n}{n}} \quad (4.19)$$

eşitsizliği geçerli olacağından yeterince büyük n sayısı için (4.18) ve (4.19) ifadeleri kullanılarak

$$J_{n1}(x) \leq \frac{B_r'(A)}{C} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{r/2} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \quad (4.20)$$

elde edilir.

Şimdi de $J_{n2}(x)$ ele alınsın. Benzer şekilde süreklilik modülünün özellikleri ve Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} J_{n2}(x) &= \sum_{k \in E_2} \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} |I_{n,r}^k(x)| \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \\ &\quad \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left| f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n + u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) - f^{(r)} \left(\frac{k}{n} b_n \right) \right| du \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Süreklilik modülü özelliklerinden

$$J_{n2}(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} \left[\int_0^1 (1-u)^{r-1} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; u \left| x - \frac{k}{n} b_n \right| \right) du \right] \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right)$$

süreklilik modülü özelliklerinden

$$\begin{aligned} &\leq \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} \times \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{b_n}} u \left(x - \frac{k}{n} b_n \right) \right) du \\ &= \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \times \sum_{k=0}^n \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{(r-1)!} \left\{ \sqrt{\frac{n}{b_n}} \left(1 - \frac{k}{n} b_n \right) \frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{r} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{r!} \sqrt{\frac{n}{b_n}} \left(1 - \frac{k}{n} b_n\right) \frac{1}{(r+1)} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n} b_n|^r}{r!} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade ve (4.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
J_{n2}(x) &\leq \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \left[\frac{1}{r!} \sqrt{T_{n,2r}(x)} + \sqrt{\frac{b_n}{n}} \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{T_{n,2(r+1)}(x)} \right] \\
&\leq \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \times \left[\frac{1}{r!} \sqrt{C_r A^r \left(\frac{b_n}{n} \right)^r} + \sqrt{\frac{b_n}{n}} \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{C_{r+1} A^{r+1} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{r+1}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece

$$B_r''(A) := \frac{(r+1)\sqrt{C_r} + \sqrt{C_{r+1}}}{(r+1)!} \sqrt{A^{r+1}}$$

olarak tanımlanırsa

$$J_{n2}(x) \leq B_r''(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r}{2}} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.20) ve (4.21) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \\
&\leq \frac{B_r'(A)}{c} \left(\frac{b_n}{n} \right)^{r/2} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) + B_r''(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{r/2} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$B_r(A) := \frac{B_r'(A)}{c} + B_r''(A) \quad (4.22)$$

seçimiyle her $x \in [0, A]$ için

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \leq B_r(A) \left(\frac{b_n}{n} \right)^{r/2} \omega_{1+A} \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu ise kanıtı tamamlar. ■

Şimdi $[0, \infty)$ sınırsız aralığı üzerinde ağırlıklı yaklaşım problemi için gerekli olan teorem kanıtlanacaktır.

Teorem 4.3.2

$f \in C^r[0, \infty)$, $f^r \in C_\rho^k$ ve f 'in (n, r) .dereceden Chlodowsky Taylor Polinomları $C_{n,r}(f; x)$ olsun. Bu durumda yeterince büyük n sayısı r 'ye bağlı B_r sabiti için

$$\sup_{x \in [0, b_n]} \frac{|C_{n,r}(f; x) - f(x)|}{[\rho(x)]^{(r+7)/4}} \leq 4M_r' \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} [\rho(x)]^{(r+7)/4} \Omega\left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (İzgi vd. 2009, Atak 2012).

Kanıt

Teorem 4.3.1'in kanıtından

$$|I_{n,r}^k(x)| := \int_0^1 (1-u)^{r-1} \left| f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right) \right| du \quad (4.23)$$

olup

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|x - \frac{k}{n}b_n|^r}{(r-1)!} I_{n,r}^k(x) \varphi_n^k\left(\frac{x}{b_n}\right) \quad (4.24)$$

eşitsizliği doğrudur. Ağırlıklı süreklilik modülünün (4.1) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n + u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)\right) - f^{(r)}\left(\frac{k}{n}b_n\right) \right| \\ & \leq 2 \left(1 + \frac{u\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)}{\delta} (1 + \delta^2)(1 + x^2) \left(1 + u^2 \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2 \right) \Omega(f^{(r)}; \delta) \right) \end{aligned}$$

bulunur ve bu eşitsizlik (4.23)'te yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} |I_{n,r}^k| & \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2) \Omega(f^{(r)}; \delta) \\ & \quad \times \left\{ \frac{1}{r} + \left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^2 \frac{2}{r(r+2)} + \frac{\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)}{\delta} \frac{1}{r+2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{6\left(x - \frac{k}{n}b_n\right)^3}{(r+1)(r+2)(r+3)\delta r} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra bu ifade (4.24)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& |C_{n,r}(f; x) - f(x)| \\
& \leq 2 \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) \rho(x) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
& \times \sum_{k=0}^n \frac{\left|x - \frac{k}{n} b_n\right|^r}{(r-1)!} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left\{ \frac{1}{r} + \left(x - \frac{k}{n} b_n\right)^2 \frac{2}{r(r+1)(r+2)} \right. \\
& \left. + \frac{\left(x - \frac{k}{n} b_n\right)}{\sqrt{\frac{b_n}{n}}} \frac{1}{r+1} + \frac{6 \left(x - \frac{k}{n} b_n\right)^3}{r(r+1)(r+2)(r+3) \sqrt{\frac{b_n}{n}}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak ve (4.11) yukarıda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& |C_{n,r}(f; x) - f(x)| \\
& \leq 2 \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) \rho(x) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
& \times \left[\frac{1}{r!} \sqrt{T_{n,2r}(x)} + \sqrt{\frac{n}{b_n}} \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{T_{n,2r+1}(x)} + \frac{2}{(r+2)!} \sqrt{T_{n,2(r+2)}(x)} \right. \\
& \left. + \frac{6}{(r+3)!} \sqrt{T_{n,2(r+3)}(x)} \right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& |C_{n,r}(f; x) - f(x)| \\
& \leq 2 \left(1 + \frac{b_n}{n}\right) \rho(x) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) \\
& \times \left[\frac{1}{r!} \sqrt{M_r} (1+x^2)^{r/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \right. \\
& + \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{n}} \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{M_{r+1}} (1+x^2)^{(r+1)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+1)/2} \\
& + \frac{2}{(r+2)!} \sqrt{M_{r+2}} (1+x^2)^{(r+2)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+2)/2} \\
& \left. + \frac{6}{(r+3)!} \sqrt{M_{r+3}} (1+x^2)^{(r+3)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+3)/2} \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve dizinin tanımı gereği $\frac{b_n}{n} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& |C_{n,r}(f; x) - f(x)| \\
& \leq 4\rho(x) \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right) (1+x^2)^{(r+3)/4} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \\
& \times \left[\frac{1}{r!} \sqrt{M_r} + \frac{1}{(r+1)!} \sqrt{M_{r+1}} + \frac{6}{(r+3)!} \sqrt{M_{r+3}} \right]
\end{aligned}$$

olacaktır. Burada

$$M'_r := \sum_{i=0}^3 \frac{i! \sqrt{M_{r+i}}}{(r+i)!}$$

olarak tanımlanırsa

$$|C_{n,r}(f; x) - f(x)| \leq 4M'_r \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} [\rho(x)]^{(r+7)/4} \Omega \left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{b_n}{n}} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise kanıtı tamamlar. ■

(b_n) gerçel sayıların bir dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olsun.

$0 \leq x \leq b_n$, $0 \leq y \leq b_m$ ve $\varphi_n^k(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$, $\varphi_m^j(t) = \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j}$

olmak üzere $f \in C^r[0, \infty) \times [0, \infty)$ için $(n, m; r)$. Chlodowsky-Taylor Polinomu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$E_{n,m}(f, r; x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) \sum_{i=0}^r \frac{d^i f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right)}{i!}$$

burada

$$d^i f(s, t) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{\partial^i f(s, t)}{\partial x^{i-k} \partial y^k} (x-s)^{i-k} (y-t)^k$$

şeklinde tanımlıdır. ■

Son olarak Kırcı Serenbay ve İbikli tarafından verilen bu tanım yardımıyla iki değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomunun yaklaşım özellikleri verilecektir.

Teorem 4.3.3

$A > 0, B > 0$; $[0, A] \times [0, B]$ dikdörtgensel bölgesi D_{AB} olmak üzere $A = b_n$ ve $B = b_m$ olan dikdörtgensel bölge $D_{b_n b_m}$ ile gösterilecektir.

$f \in C^r(D_{b_n b_m})$ ve $E_{n,m}(f, r; x, y)$ f fonksiyonunun $(n, m; r)$. dereceden Chlodowsky-Taylor Polinomu olsun. Bu durumda $(x, y) \in D_{b_n b_m}$ için

$$|E_{n,m}(f, r; x, y) - f(x, y)| = o \left(\frac{b_n}{n} \times \frac{b_m}{m} \right)^{\frac{r}{2}}$$

eşitliği geçerlidir (Kırcı Serenbay ve İbikli 2011).

Kanıt

$f \in C^r, r \in \mathbb{N}$ olsun. Taylor formülü aşağıdaki şekilde modifiye edilirse

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^r \frac{d^i f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right)}{i!} + \frac{1}{(r-1)!} \times \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left\{ d^r f \left(\frac{k}{n} b_n + t \left(x - \frac{k}{n} b_n \right), \frac{j}{m} b_m + t \left(y - \frac{j}{m} b_m \right) \right) - d^r f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right) \right\}$$

eşitliği geçerli olur. Böylece

$$|E_{n,m}(f, r; x, y) - f(x, y)| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) \left| \sum_{i=0}^r \frac{d^i f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right)}{i!} - f(x, y) \right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda f 'in modifiye edilmiş Taylor formülü kullanılırsa

$$|E_{n,m}(f, r; x, y) - f(x, y)| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) \frac{1}{(r-1)!}$$

$$\times \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left| d^r f \left(\frac{k}{n} b_n + t \left(x - \frac{k}{n} b_n \right), \frac{j}{m} b_m + t \left(y - \frac{j}{m} b_m \right) \right) - d^r f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right) \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\left| d^r f \left(\frac{k}{n} b_n + t \left(x - \frac{k}{n} b_n \right), \frac{j}{m} b_m + t \left(y - \frac{j}{m} b_m \right) \right) - d^r f \left(\frac{k}{n} b_n, \frac{j}{m} b_m \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i} \partial y^i}; t \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|, t \left| y - \frac{j}{m} b_m \right| \right) \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r-i} \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^i$$

olduğu dikkate alınarak

$$|E_{n,m}(f, r; x, y) - f(x, y)| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) M(r) \sum_{i=0}^r \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i} \partial y^i}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}, \sqrt{\frac{b_m}{m}} \right)$$

$$\times \left(2 + \left| x - \frac{k}{n} b_n \right| \sqrt{\frac{b_n}{n}} + \left| y - \frac{j}{m} b_m \right| \sqrt{\frac{b_m}{m}} \right) \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r-i} \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^i$$

eşitsizliği geçerli olur. Burada $M(r)$; r 'ye bağlı pozitif bir sabittir. Bu eşitsizlikler düzenlenirse

$$|E_{n,m}(f, r; x, y) - f(x, y)| \leq M(r) \sum_{i=0}^r \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-i} \partial y^i}; \sqrt{\frac{b_n}{n}}, \sqrt{\frac{b_m}{m}} \right)$$

$$\times \left\{ 2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r-i} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^i \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{b_n}{n}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+1-i} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^i \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right)$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b_m}{m}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r-i} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^{i+1} \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) \right\}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r-i} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^i \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) = O \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r-i}{2}} \left(\frac{b_m}{m} \right)^{\frac{i}{2}},$$

$$\sqrt{\frac{b_n}{n}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r+1-i} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^i \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) = O \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r+1-i}{2}} \left(\frac{b_m}{m} \right)^{\frac{i}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{b_m}{m}} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \left| x - \frac{k}{n} b_n \right|^{r-i} \varphi_n^k \left(\frac{x}{b_n} \right) \left| y - \frac{j}{m} b_m \right|^{i+1} \varphi_m^j \left(\frac{y}{b_m} \right) = O \left(\frac{b_n}{n} \right)^{\frac{r-i}{2}} \left(\frac{b_m}{m} \right)^{\frac{i+1}{2}}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa $r \in \mathbb{N}$ için

$$|E_{n,m}(f, r; x, y) - f(x, y)| = o \left(\frac{b_n}{n} \times \frac{b_m}{m} \right)^{\frac{r}{2}}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

4.4 GRAFİK VE NÜMERİK HESAPLAR

Bu kesimde ilk olarak tek değişkenli Bernstein-Chlodowsky Polinomlarının süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızının hesabı için iki örnek verilerek bu örneklerde verilen fonksiyonların C_p uzayının elemanı olma kontrolü yapılacaktır.

Örnek 4.4.1

Aşağıda $f(x) = \frac{x^2 + 12x - \frac{1}{5}}{25}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
>restart;
f:=(x)->((x^2)+12*x-(1/5))/25:
n:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
b(n):=surd(n,3):
>delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
>omega(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h)-
f(x))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))));
>errorB:=5*(omega(f,delta(n)));
end do;
```

Bu programa ait program çıktısı ise şu şekildedir:

```
n := 10
b(10) := 10(1/3)
δ(10) := 0.4641588834
ω(f, 0.4641588834) := 0.2685467135
errorB := 1.342733568
n := 100
```

$b(100) := 10^{(2/3)}$
 $\delta(100) := 0.2154434690$
 $\omega(f, 0.2154434690) := 0.1225049781$
 $errorB := 0.6125248905$
 $n := 1000$
 $b(1000) := 10$
 $\delta(1000) := 0.1000000000$
 $\omega(f, 0.1000000000) := 0.05640000000$
 $errorB := 0.2820000000$
 $n := 10000$
 $b(10000) := 10 \cdot 10^{(1/3)}$
 $\delta(10000) := 0.04641588834$
 $\omega(f, 0.04641588834) := 0.02607907486$
 $errorB := 0.1303953743$
 $n := 100000$
 $b(100000) := 10 \cdot 10^{(2/3)}$
 $\delta(100000) := 0.02154434690$
 $\omega(f, 0.02154434690) := 0.01208340062$
 $errorB := 0.06041700310$
 $n := 1000000$
 $b(1000000) := 100$
 $\delta(1000000) := 0.01000000000$
 $\omega(f, 0.01000000000) := 0.005604000000$
 $errorB := 0.02802000000$
 $n := 10000000$
 $b(10000000) := 100 \cdot 10^{(1/3)}$
 $\delta(10000000) := 0.004641588834$
 $\omega(f, 0.004641588834) := 0.002600151521$
 $errorB := 0.01300075760$
 $n := 100000000$
 $b(100000000) := 100 \cdot 10^{(2/3)}$
 $\delta(100000000) := 0.002154434690$
 $\omega(f, 0.002154434690) := 0.001206669090$
 $errorB := 0.006033345450$
 $n := 1000000000$
 $b(1000000000) := 1000$
 $\delta(1000000000) := 0.001000000000$
 $\omega(f, 0.001000000000) := 0.0005600400000$
 $errorB := 0.002800200000$

Elde edilen sonuçların toplu olarak gösterimi aşağıdaki Çizelge 4.1 üzerinde verilmiştir.

Çizelge 4.1 $f(x) = \frac{x^2+12x-\frac{1}{5}}{25}$ fonksiyonunun hata hesabı.

n	$f(x)$ fonksiyonun süreklilik modülü için hata payı
10	1.342733568
10^2	0.612524891
10^3	0.282000000
10^4	0.130395374
10^5	0.060417003
10^6	0.028020000
10^7	0.013000758
10^8	0.006033346
10^9	0.002800200

Uyarı 4.4.1

Örnek 4.4.1’de verilen fonksiyonun $\rho(x) = 1 + x^2$ için C_ρ ’nun elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
```

```
>with (plots) :
```

```
>f := (x) -> ( (x^2) + 12*x - (1/5) ) / 25 ; g := (x) -> 1 + x^2 ;
```

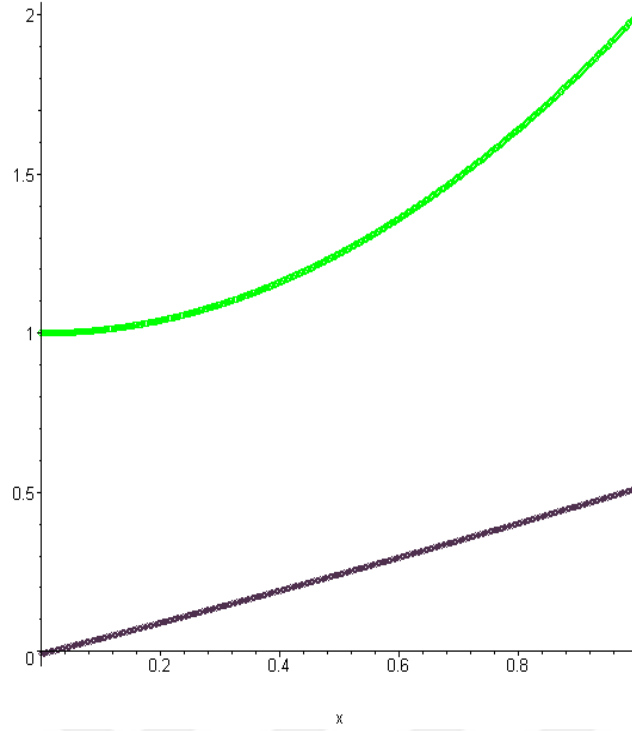
$$f := x \rightarrow \frac{1}{25}x^2 + \frac{12}{25}x - \frac{1}{125}$$

$$g := x \rightarrow 1 + x^2$$

```
>p1 := plot (f (x) , x=0..1, color=violet, style=point, symbol=diamond, numpoints=400, symbolsize=8) :
```

```
>p2 := plot (g (x) , x=0..1, color=green, style=point, symbol=circle, num points=400, symbolsize=8) :
```

```
>display ([p1, p2]) ;
```



Şekil 4.1 $f(x) = \frac{1}{25}x^2 + \frac{12}{25}x - \frac{1}{125}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.4.2

$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{13}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n+2}$ dizisi için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
>restart;
f:=(x)->((x^3)-4*x^2+5)/13:
n:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
b(n):=surd(n+2,3):
>delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
>omega(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h))-
f(x))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))):
>errorB:=5*(omega(f,delta(n)));
end do;
```

Bu programa ait program çıktısı ise şu şekildedir:

```
n := 10
n := 10
```

$b(10) := 12^{(1/3)}$
 $\delta(10) := 0.4784797261$
 $\omega(f, 0.4784797261) := 0.1932151514$
 $errorB := 0.9660757570$
 $n := 100$

$b(100) := 102^{(1/3)}$
 $\delta(100) := 0.2161557015$
 $\omega(f, 0.2161557015) := 0.08595402229$
 $errorB := 0.4297701114$
 $n := 1000$

$b(1000) := 1002^{(1/3)}$
 $\delta(1000) := 0.1000333056$
 $\omega(f, 0.1000333056) := 0.03916709160$
 $errorB := 0.1958354580$
 $n := 10000$

$b(10000) := 10002^{(1/3)}$
 $\delta(10000) := 0.04641743540$
 $\omega(f, 0.04641743540) := 0.01801090349$
 $errorB := 0.09005451745$
 $n := 100000$

$b(100000) := 100002^{(1/3)}$
 $\delta(100000) := 0.02154441871$
 $\omega(f, 0.02154441871) := 0.008321250419$
 $errorB := 0.04160625210$
 $n := 1000000$

$b(1000000) := 1000002^{(1/3)}$
 $\delta(1000000) := 0.01000000333$
 $\omega(f, 0.01000000333) := 0.003853770517$
 $errorB := 0.01926885258$
 $n := 10000000$

$b(10000000) := 10000002^{(1/3)}$
 $\delta(10000000) := 0.004641588989$

$$\omega(f, 0.004641588989) := 0.001786876100$$

$$errorB := 0.008934380500$$

$$n := 100000000$$

$$b(100000000) := 100000002^{(1/3)}$$

$$\delta(100000000) := 0.002154434697$$

$$\omega(f, 0.002154434697) := 0.0008289850057$$

$$errorB := 0.004144925028$$

$$n := 1000000000$$

$$b(1000000000) := 1000000002^{(1/3)}$$

$$\delta(1000000000) := 0.001000000000$$

$$\omega(f, 0.001000000000) := 0.0003846922308$$

$$errorB := 0.001923461154$$

Elde edilen sonuçların toplu olarak gösterimi aşağıdaki Çizelge 4.2 üzerinde verilmiştir.

Çizelge 4.2 $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{13}$ fonksiyonu için hata payı hesaplaması

n	$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{13}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n + 2}$ dizisi için hata payı
10	0.9660757570
10 ²	0.4297701114
10 ³	0.1958354580
10 ⁴	0.0900545175
10 ⁵	0.0416062521
10 ⁶	0.0192688526
10 ⁷	0.0089343805
10 ⁸	0.0041449251
10 ⁹	0.0019234612

Uyarı 4.4.2

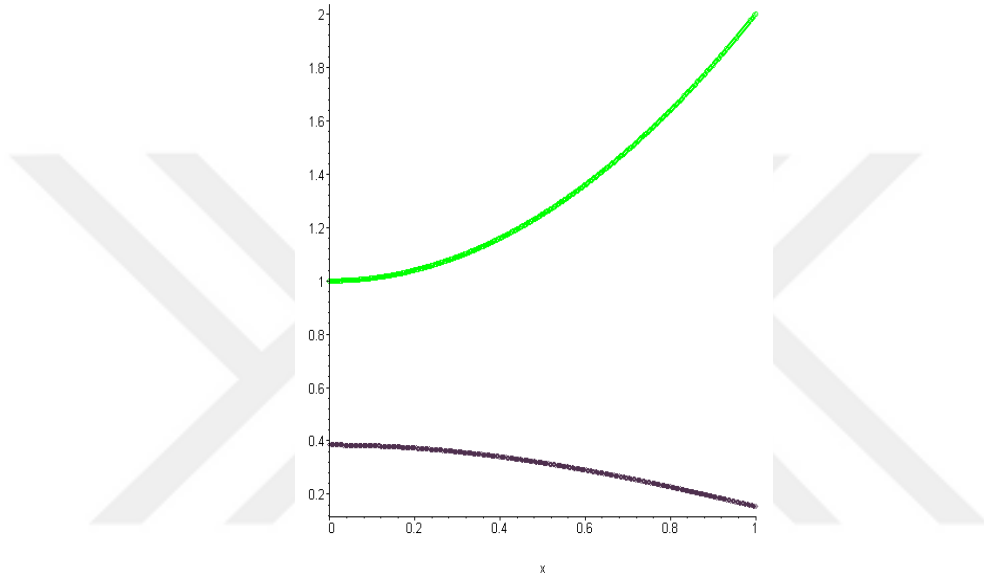
Örnek 4.4.2’de verilen fonksiyonun $\rho(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu için C_ρ ’nun elemanı olduğunu göstermek amacıyla Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
>with(plots):
>f:=(x)->((x^3)-4*x^2+5)/13;g:=(x)->1+x^2;
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{13}x^3 - \frac{4}{13}x^2 + \frac{5}{13}$$

$$g := x \rightarrow 1 + x^2$$

```
p1:=plot(f(x),x=0..1,color=violet,style=point,symbol=diamond,numpoints=400,symbolsize=8);p2:=plot(g(x),x=0..1,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=400,symbolsize=8);
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.2 $f(x) = \frac{1}{13}x^3 + \frac{4}{13}x^2 + \frac{5}{13}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği

Bundan sonraki üç örnek Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşımda süreklilik modülü ile hızının hesabı için hazırlanan program parçası ve C_ρ uzayına ait olma kontrolü yapılacaktır.

Örnek 4.4.3

$f(x) = \frac{x^3+12x-\frac{1}{5}}{25}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
>restart;
f:=(x)->((x^3)+12*x-(1/5))/25;d:=(D@@2)(f);
n:=1:
for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
b(n):=surd(n,3);
>delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
```

```

>omega(d,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(d(x+h)-
d(x))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n)))):t:=(((r+1)*sqrt(r)+sqrt
(r+1))/((r+1)!)*sqrt(2^(r+1))+((r^2+2*r+2)/(r+2)!)*(sqrt((r+
1)*2^(r+1))))/2):T:=evalf(subs(r=2,t)):
>errorB:=evalf(simplify(T*(b(n)/n)*(omega(d,delta(n)))));
end do;

```

Bu programa ait program çıktısı ise şu şekildedir:

$$d := x \rightarrow \frac{6}{25} x$$

$$n := 10$$

$$b(10) := 10^{(1/3)}$$

$$\delta(10) := 0.4641588834$$

$$\omega(d, 0.4641588834) := 0.1113981320$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.09209081537$$

$$n := 100$$

$$b(100) := 10^{(2/3)}$$

$$\delta(100) := 0.2154434690$$

$$\omega(d, 0.2154434690) := 0.05170643256$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.009209081539$$

$$n := 1000$$

$$b(1000) := 10$$

$$\delta(1000) := 0.1000000000$$

$$\omega(d, 0.1000000000) := 0.02400000000$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.0009209081537$$

$$n := 10000$$

$$b(10000) := 10 \cdot 10^{(1/3)}$$

$$\delta(10000) := 0.04641588834$$

$$\omega(d, 0.04641588834) := 0.01113981320$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.00009209081537$$

$$n := 100000$$

$$b(100000) := 10 \cdot 10^{(2/3)}$$

$$\delta(100000) := 0.02154434690$$

$$\omega(d, 0.02154434690) := 0.005170643256$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.9209081539 \cdot 10^{-5}$$

$$n := 1000000$$

$$b(1000000) := 100$$

$$\delta(1000000) := 0.01000000000$$

$$\omega(d, 0.01000000000) := 0.002400000000$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.9209081537 \cdot 10^{-6}$$

$$n := 10000000$$

$$b(10000000) := 100 \cdot 10^{(1/3)}$$

$$\delta(10000000) := 0.004641588834$$

$$\omega(d, 0.004641588834) := 0.001113981320$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.9209081537 \cdot 10^{-7}$$

$$n := 100000000$$

$$b(100000000) := 100 \cdot 10^{(2/3)}$$

$$\delta(100000000) := 0.002154434690$$

$$\omega(d, 0.002154434690) := 0.0005170643256$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.9209081539 \cdot 10^{-8}$$

$$n := 1000000000$$

$$b(1000000000) := 1000$$

$$\delta(1000000000) := 0.001000000000$$

$$\omega(d, 0.001000000000) := 0.0002400000000$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 3.837117307$$

$$errorB := 0.9209081537 \cdot 10^{-9}$$

Elde edilen sonuçların toplu olarak bir Çizelge 4.3 üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.3 $f(x) = \frac{x^3+12x-\frac{1}{5}}{25}$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması

n	$f(x) = \frac{x^3+12x-\frac{1}{5}}{25}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n}$ için hata payı
10	0.09209081537
10 ²	0.009209081539
10 ³	0.0009209081537
10 ⁴	0.00009209081537
10 ⁵	0.9209081539 10 ⁻⁵
10 ⁶	0.9209081537 10 ⁻⁶
10 ⁷	0.920908153710 ⁻⁷
10 ⁸	0.920908153910 ⁻⁸
10 ⁹	0.920908153710 ⁻⁹

Uyarı 4.4.3

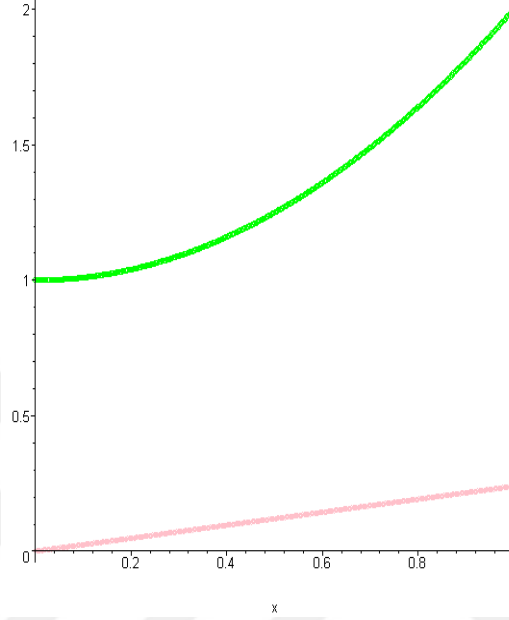
Örnek 4.4.2'de verilen fonksiyonun C_p 'nin elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
>with(plots):
>f:=(x)->((x^3)+12*x-(1/5))/25;d:=(D@@2)(f);g:=(x)->1+x^2;
```


$$d := x \rightarrow \frac{6}{25}x$$

$$g := x \rightarrow 1 + x^2$$

```
>p1:=plot(d(x),x=0..1,color=pink,style=point,symbol=diamond,num
points=400,symbolsize=8):p2:=plot(g(x),x=0..1,color=green,styl
e=point,symbol=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.3 $f(x) = \frac{x^3+12x-\frac{1}{5}}{25}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.4.4

$f(x) = \frac{x^5+3x^2-2}{32}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
>restart;
f:=(x)->((x^5)+3*x^2-2)/32:d:=(D@@3)(f);
n:=1:
for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
b(n):=surd(n,3):
>delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
>omega(d,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(d(x+h)-
d(x))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n)))):t:=(((r+1)*sqrt(r)+sqrt
(r+1))/((r+1)!)*sqrt(2^(r+1))+((r^2+2*r+2)/(r+2)!)*sqrt((r+
1)*2^(r+1)))/2:T:=evalf(subs(r=3,t)):
>errorB:=evalf(simplify(T*(b(n)/n)*(omega(d,delta(n)))));
end do;
```

Bu programa ait program çıktısı aşağıdaki gibidir.

$$d := x \rightarrow \frac{15}{8} x^2$$

$$n := 10$$

$$b(10) := 10^{(1/3)}$$

$$\delta(10) := 0.4641588834$$

$$\omega(d, 0.4641588834) := 2.144552317$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 2.054700539$$

$$errorB := 0.9493328599$$

$$n := 100$$

$$b(100) := 10^{(2/3)}$$

$$\delta(100) := 0.2154434690$$

$$\omega(d, 0.2154434690) := 0.8949427994$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 2.054700539$$

$$errorB := 0.08535136668$$

$$n := 1000$$

$$b(1000) := 10$$

$$\delta(1000) := 0.1000000000$$

$$\omega(d, 0.1000000000) := 0.3937500000$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 2.054700539$$

$$errorB := 0.008090383372$$

$$n := 10000$$

$$b(10000) := 10 \cdot 10^{(1/3)}$$

$$\delta(10000) := 0.04641588834$$

$$\omega(d, 0.04641588834) := 0.1780991463$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 2.054700539$

$errorB := 0.0007883947179$

$n := 100000$

$b(100000) := 10 \cdot 10^{(2/3)}$

$\delta(100000) := 0.02154434690$

$\omega(d, 0.02154434690) := 0.08166159879$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 2.054700539$

$errorB := 0.00007788127985$

$n := 1000000$

$b(1000000) := 100$

$\delta(1000000) := 0.01000000000$

$\omega(d, 0.01000000000) := 0.03768750000$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 2.054700539$

$errorB := 0.7743652656 \cdot 10^{-5}$

$n := 10000000$

$b(10000000) := 100 \cdot 10^{(1/3)}$

$\delta(10000000) := 0.004641588834$

$\omega(d, 0.004641588834) := 0.01744635378$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 2.054700539$

$errorB := 0.7723009039 \cdot 10^{-6}$

$n := 100000000$

$b(100000000) := 100 \cdot 10^{(2/3)}$

$\delta(100000000) := 0.002154434690$

$\omega(d, 0.002154434690) := 0.008087833067$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 2.054700539$

$$\text{errorB} := 0.7713427118 \cdot 10^{-7}$$

$$n := 1000000000$$

$$b(1000000000) := 1000$$

$$\delta(1000000000) := 0.001000000000$$

$$\omega(d, 0.001000000000) := 0.003751875000$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 2.054700539$$

$$\text{errorB} := 0.7708979585 \cdot 10^{-8}$$

Elde edilen sonuçların toplu olarak bir Çizelge 4.4 üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.4 $f(x) = \frac{x^5+3x^2-2}{32}$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması

n	$f(x) = \frac{x^5+3x^2-2}{32}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[3]{n}$ için hata payı
10	0.9493328599
10 ²	0.0853513667
10 ³	0.0080903834
10 ⁴	0.0007883945
10 ⁵	0.0000778813
10 ⁶	0.7743652656 10 ⁻⁵
10 ⁷	0.7723009039 10 ⁻⁶
10 ⁸	0.7713427118 10 ⁻⁷
10 ⁹	0.7708979585 10 ⁻⁸

Uyarı 4.4.4

Örnek 4.4.4’de verilen fonksiyonun $\rho(x) = 1 + x^2$ için C_ρ ’nun elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
```

```
>with(plots):
```

```
>f:=(x)->((x^5)+3*x^2-2)/32:d:=(D@@3)(f);g:=(x)->1+x^2;
```

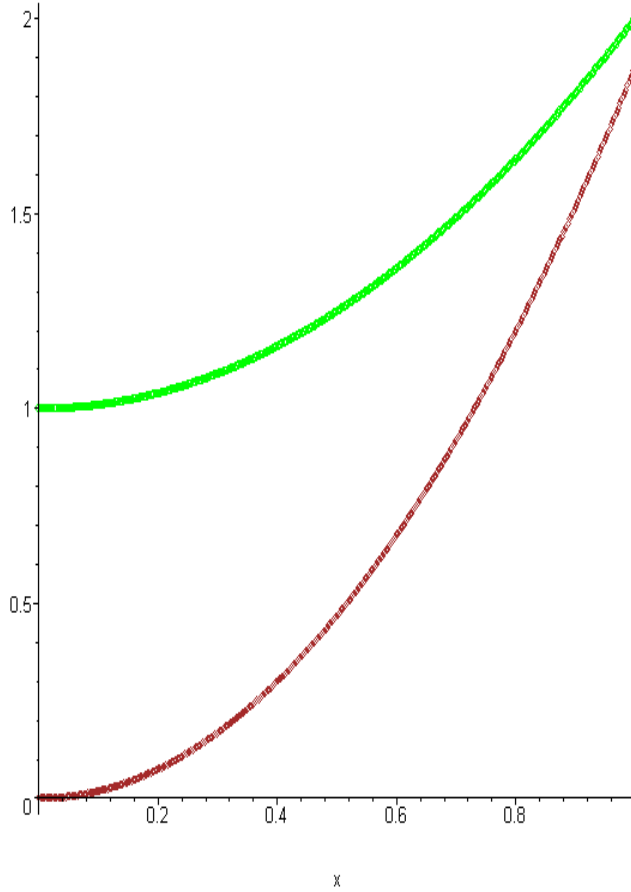
$$d := x \rightarrow \frac{15}{8}x^2$$

$$g := x \rightarrow 1 + x^2$$

```
>p1:=plot(d(x),x=0..1,color=brown,style=point,symbol=diamond,num
mpoints=400,symbolsize=8):
```

```
>p2:=plot(g(x),x=0..1,color=green,style=point,symbol=circle,num
points=400,symbolsize=8):
```

```
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.4 $f(x) = \frac{x^5+3x^2-2}{32}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.4.5

$f(x) = \frac{x^8+3x^3-1}{10^5}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[4]{n+2}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
>restart;
f:=(x)->((x^8)+3*x^3-1)/(10^5):d:=(D@@7)(f);
n:=1:
for i from 1 to 9 do
n:=10*n;
b(n):=surd(n+2,4):
>delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
>omega(d,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(d(x+h)-
d(x))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))));
>t:=(((r+1)*sqrt(r)+sqrt(r+1))/((r+1)!)*sqrt(2^(r+1))+((r^2+
2*r+2)/(r+2)!*(sqrt((r+1)*2^(r+1))))/2):T:=evalf(subs(r=7,t))
:
>errorB:=evalf(simplify(T*(b(n)/n)*(omega(d,delta(n))));
end do;
```

Bu programa ait program çıktısı aşağıdaki şekildedir.

$$d := x \rightarrow \frac{252}{625} x$$

$$n := 10$$

$$b(10) := 12^{(1/4)}$$

$$\delta(10) := 0.4314173984$$

$$\omega(d, 0.4314173984) := 0.1739474950$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 0.01357468343$$

$$errorB := 0.0004394841337$$

$$n := 100$$

$$b(100) := 102^{(1/4)}$$

$$\delta(100) := 0.1782686688$$

$$\omega(d, 0.1782686688) := 0.07187792726$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 0.01357468343$$

$$errorB := 0.00003100811016$$

$$n := 1000$$

$$b(1000) := 1002^{(1/4)}$$

$$\delta(1000) := 0.07500815189$$

$$\omega(d, 0.07500815189) := 0.03024328684$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 0.01357468343$$

$$errorB := 0.2309806660 \cdot 10^{-5}$$

$$n := 10000$$

$$b(10000) := 10002^{(1/4)}$$

$$\delta(10000) := 0.03162356710$$

$$\omega(d, 0.03162356710) := 0.01275062225$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 0.01357468343$

$errorB := 0.1730943142 \cdot 10^{-6}$

$n := 100000$

$b(100000) := 100002^{(1/4)}$

$\delta(100000) := 0.01333524766$

$\omega(d, 0.01333524766) := 0.005376771857$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 0.01357468343$

$errorB := 0.1297936635 \cdot 10^{-7}$

$n := 1000000$

$b(1000000) := 1000002^{(1/4)}$

$\delta(1000000) := 0.005623414658$

$\omega(d, 0.005623414658) := 0.002267360790$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 0.01357468343$

$errorB := 0.9733085973 \cdot 10^{-9}$

$n := 10000000$

$b(10000000) := 10000002^{(1/4)}$

$\delta(10000000) := 0.002371373764$

$\omega(d, 0.002371373764) := 0.0009561379016$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$T := 0.01357468343$

$errorB := 0.7298779880 \cdot 10^{-10}$

$n := 100000000$

$b(100000000) := 100000002^{(1/4)}$

$\delta(100000000) := 0.001000000002$

$\omega(d, 0.001000000002) := 0.0004032000008$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 0.01357468343$$

$$errorB := 0.5473312397 \cdot 10^{-11}$$

$$n := 1000000000$$

$$b(1000000000) := 1000000002^{(1/4)}$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004216965033$$

$$\omega(d, 0.0004216965033) := 0.0001700280301$$

$$t := \frac{((r+1)\sqrt{r+\sqrt{r+1}})\sqrt{2^{(r+1)}}}{(r+1)!} + \frac{1}{2} \frac{(r^2+2r+2)\sqrt{(r+1)2^{(r+1)}}}{(r+2)!}$$

$$T := 0.01357468343$$

$$errorB := 0.4104405244 \cdot 10^{-12}$$

Elde edilen sonuçların toplu olarak bir Çizelge 4.5 üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.5 $f(x) = \frac{x^8+3x^3-1}{10^5}$ fonksiyonu için hata payı hesaplaması

n	$f(x) = \frac{x^8+3x^3-1}{10^5}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[4]{n+2}$ için hata payı
10	0.0004394841337
10 ²	0.0000310081102
10 ³	0.2309806660 10 ⁻⁵
10 ⁴	0.1730943142 10 ⁻⁶
10 ⁵	0.1297936635 10 ⁻⁷
10 ⁶	0.973308597310 ⁻⁹
10 ⁷	0.729877988010 ⁻¹⁰
10 ⁸	0.547331239710 ⁻¹¹
10 ⁹	0.410440524410 ⁻¹²

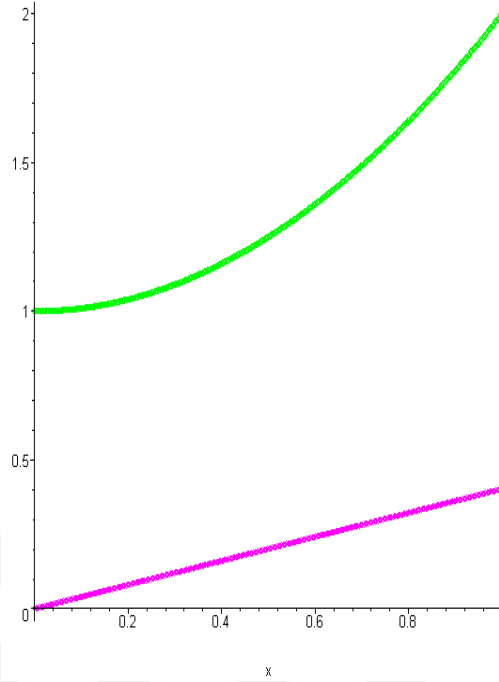
Uyarı 4.4.5

Örnek 4.4.5’de verilen fonksiyonun $\rho(x) = 1 + x^2$ için C_ρ ’nun elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
>with(plots) :
>f:=(x)->((x^8)+3*x^3-1)/(10^5);d:=(D@@7)(f);g:=(x)->1+x^2;
      d := x -> 252/625 x
      g := x -> 1 + x^2
p1:=plot(d(x),x=0..1,color=magenta,style=point,symbol=diamond,
numpoints=400,symbolsize=8):
```



```
>p2:=plot(g(x),x=0..1,color=green,style=point,symbol=circle,num
points=400,symbolsize=8):
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.5 $f(x) = \frac{x^5+3x^2-2}{32}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun grafiği

Şimdi ise iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky Polinomlarının süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızının hesabı için dört örnek verilerek bu örneklerde verilen fonksiyonların C_ρ uzayının elemanı olma kontrolü yapılacaktır.

Örnek 4.4.6

$f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{e^4}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[4]{n}$ ve $c_m = \sqrt{m+1}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
> restart;
f:=(x,y)->((x^2)+(y^2))/exp(4):
n:=1 : m:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m;
b(n):=surd(n,4):c(m):=sqrt(m+1):
> delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n))):
> delta(m):=evalf(simplify(sqrt(c(m)/m))):
>
omega1(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y
+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))))):
```

```

>
omega2 (f, delta (m) ) :=evalf (simplify (maximize (abs (expand (f (x+h, y
+h) -f (x, y) ) ) , x=0..1, y=0..1, h=0..delta (m) ) ) ) :
> errorB:=3*2* (omega1 (f, delta (n) )+omega2 (f, delta (m) ) ) :end do;

```

Bu programa ait program çıktısı aşağıdaki şekildedir.

```

n := 10
m := 10
b(10) := 10(1/4)
c(10) := √11
δ(10) := 0.4216965034
δ(10) := 0.5759014491
ω1 (f, 0.5759014491 ) := 0.05434123230
ω2 (f, 0.5759014491 ) := 0.05434123230
errorB := 0.6520947876
n := 100
m := 100
b(100) := √10
c(100) := √101
δ(100) := 0.1778279410
δ(100) := 0.3170153880
ω1 (f, 0.3170153880 ) := 0.02690675532
ω2 (f, 0.3170153880 ) := 0.02690675532
errorB := 0.3228810638
n := 1000
m := 1000
b(1000) := 10(3/4)
c(1000) := √1001
δ(1000) := 0.07498942093
δ(1000) := 0.1778723813
ω1 (f, 0.1778723813 ) := 0.01419034698
ω2 (f, 0.1778723813 ) := 0.01419034698
errorB := 0.1702841638
n := 10000

```

$m := 10000$
 $b(10000) := 10$
 $c(10000) := \sqrt{10001}$
 $\delta(10000) := 0.03162277660$
 $\delta(10000) := 0.1000024999$
 $\omega_1(f, 0.1000024999) := 0.007692769798$
 $\omega_2(f, 0.1000024999) := 0.007692769798$
 $errorB := 0.09231323758$
 $n := 100000$
 $m := 100000$
 $b(100000) := 10 \cdot 10^{(1/4)}$
 $c(100000) := \sqrt{100001}$
 $\delta(100000) := 0.01333521432$
 $\delta(100000) := 0.05623427311$
 $\omega_1(f, 0.05623427311) := 0.004235705407$
 $\omega_2(f, 0.05623427311) := 0.004235705407$
 $errorB := 0.05082846488$
 $n := 1000000$
 $m := 1000000$
 $b(1000000) := 10 \sqrt{10}$
 $c(1000000) := \sqrt{1000001}$
 $\delta(1000000) := 0.005623413252$
 $\delta(1000000) := 0.03162278451$
 $\omega_1(f, 0.03162278451) := 0.002353397302$
 $\omega_2(f, 0.03162278451) := 0.002353397302$
 $errorB := 0.02824076762$
 $n := 10000000$
 $m := 10000000$
 $b(10000000) := 10 \cdot 10^{(3/4)}$
 $c(10000000) := \sqrt{10000001}$
 $\delta(10000000) := 0.002371373706$
 $\delta(10000000) := 0.01778279454$
 $\omega_1(f, 0.01778279454) := 0.001314396801$

$$\omega_2(f, 0.01778279454) := 0.001314396801$$

$$errorB := 0.01577276161$$

$$n := 100000000$$

$$m := 100000000$$

$$b(100000000) := 100$$

$$c(100000000) := \sqrt{100000001}$$

$$\delta(100000000) := 0.001000000000$$

$$\delta(100000000) := 0.01000000002$$

$$\omega_1(f, 0.01000000002) := 0.0007362886848$$

$$\omega_2(f, 0.01000000002) := 0.0007362886848$$

$$errorB := 0.008835464218$$

$$n := 1000000000$$

$$m := 1000000000$$

$$b(1000000000) := 100 \cdot 10^{(1/4)}$$

$$c(1000000000) := \sqrt{1000000001}$$

$$\delta(1000000000) := 0.0004216965034$$

$$\delta(1000000000) := 0.005623413251$$

$$\omega_1(f, 0.005623413251) := 0.0004131440083$$

$$\omega_2(f, 0.005623413251) := 0.0004131440083$$

$$errorB := 0.004957728100$$

Elde edilen sonuçların toplu olarak bir Çizelge 4.6 üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

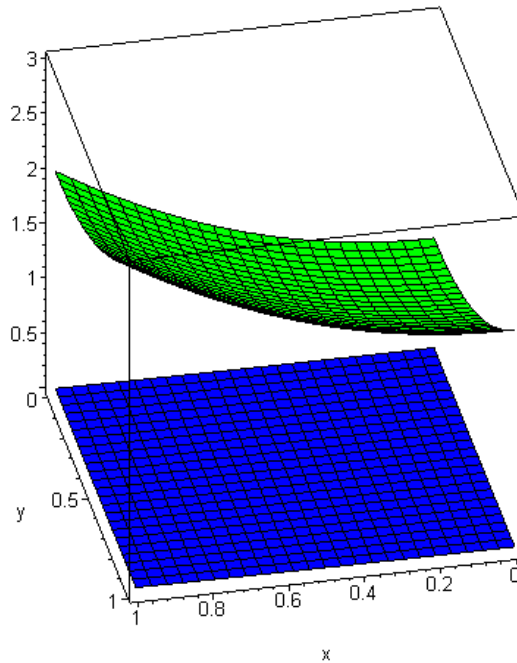
Çizelge 4.6 $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{e^4}$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması

n,m	$f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{e^4}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt[4]{n}$ ve $c_m = \sqrt{m+1}$ için hata hesabı
10	0.6520947876
10²	0.3228810638
10³	0.1702841638
10⁴	0.0923132376
10⁵	0.0508284649
10⁶	0.0282407677
10⁷	0.0157727616
10⁸	0.0088354642
10⁹	0.0049577281

Uyarı 4.4.6

Örnek 4.4.6'de verilen fonksiyonun $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ ağırlık fonksiyonu kullanılarak C_ρ 'nin elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
>with(plots):
>f:=(x,y)->((x^2)+(y^2))/exp(4);g:=(x,y)->1+x^2+y^2;
      f:=(x,y) →  $\frac{x^2+y^2}{e^4}$ 
      g:=(x,y) →  $1+x^2+y^2$ 
>p1:=plot3d(f(x,y),x=0..1,y=0..1,color=blue):
>p2:=plot3d(g(x,y),x=0..1,y=0..1,color=green):
>
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.6 $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{e^4}$ ve $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.4.7

$f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{100}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m+1}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```

> restart;
f:=(x,y)->exp(x+y)/100:
n:=1 : m:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m;
b(n):=sqrt(n):c(m):=surd(m+1,3):
>
> delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
> delta(m):=evalf(simplify(sqrt(c(m)/m)));
>
omega1(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))));
>
omega2(f,delta(m)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(m))));
> errorB:=3*2*(omega1(f,delta(n))+omega2(f,delta(m)));
end do;

```

Bu programa ait program çıktısı aşağıdaki gibidir.

```

n := 10
m := 10
b(10) :=  $\sqrt{10}$ 
c(10) :=  $11^{(1/3)}$ 
 $\delta(10) := 0.5623413252$ 
 $\delta(10) := 0.4715909339$ 
 $\omega_1(f, 0.4715909339) := 0.1158707379$ 
 $\omega_2(f, 0.4715909339) := 0.1158707379$ 
errorB := 1.390448855
n := 100
m := 100
b(100) := 10
c(100) :=  $101^{(1/3)}$ 
 $\delta(100) := 0.3162277660$ 
 $\delta(100) := 0.2158010544$ 
 $\omega_1(f, 0.2158010544) := 0.03988038737$ 
 $\omega_2(f, 0.2158010544) := 0.03988038737$ 
errorB := 0.4785646484
n := 1000

```

$m := 1000$
 $b(1000) := 10 \sqrt{10}$
 $c(1000) := 1001^{(1/3)}$
 $\delta(1000) := 0.1778279410$
 $\delta(1000) := 0.1000166597$
 $\omega_1(f, 0.1000166597) := 0.01636258112$
 $\omega_2(f, 0.1000166597) := 0.01636258112$
 $errorB := 0.1963509734$
 $n := 10000$
 $m := 10000$
 $b(10000) := 100$
 $c(10000) := 10001^{(1/3)}$
 $\delta(10000) := 0.1000000000$
 $\delta(10000) := 0.04641666190$
 $\omega_1(f, 0.04641666190) := 0.007187987321$
 $\omega_2(f, 0.04641666190) := 0.007187987321$
 $errorB := 0.08625584786$
 $n := 100000$
 $m := 100000$
 $b(100000) := 100 \sqrt{10}$
 $c(100000) := 100001^{(1/3)}$
 $\delta(100000) := 0.05623413252$
 $\delta(100000) := 0.02154438281$
 $\omega_1(f, 0.02154438281) := 0.003253443149$
 $\omega_2(f, 0.02154438281) := 0.003253443149$
 $errorB := 0.03904131778$
 $n := 1000000$
 $m := 1000000$
 $b(1000000) := 1000$
 $c(1000000) := 1000001^{(1/3)}$
 $\delta(1000000) := 0.03162277660$
 $\delta(1000000) := 0.01000000167$

$\omega_1(f, 0.01000000167) := 0.001492688641$
 $\omega_2(f, 0.01000000167) := 0.001492688641$
 $errorB := 0.01791226369$
 $n := 10000000$
 $m := 10000000$
 $b(10000000) := 1000 \sqrt{10}$
 $c(10000000) := 10000001^{(1/3)}$
 $\delta(10000000) := 0.01778279410$
 $\delta(10000000) := 0.004641588910$
 $\omega_1(f, 0.004641588910) := 0.0006891330019$
 $\omega_2(f, 0.004641588910) := 0.0006891330019$
 $errorB := 0.008269596022$
 $n := 100000000$
 $m := 100000000$
 $b(100000000) := 10000$
 $c(100000000) := 100000001^{(1/3)}$
 $\delta(100000000) := 0.01000000000$
 $\delta(100000000) := 0.002154434694$
 $\omega_1(f, 0.002154434694) := 0.0003190717082$
 $\omega_2(f, 0.002154434694) := 0.0003190717082$
 $errorB := 0.003828860498$
 $n := 1000000000$
 $m := 1000000000$
 $b(1000000000) := 10000 \sqrt{10}$
 $c(1000000000) := 1000000001^{(1/3)}$
 $\delta(1000000000) := 0.005623413252$
 $\delta(1000000000) := 0.001000000000$
 $\omega_1(f, 0.001000000000) := 0.0001479289770$
 $\omega_2(f, 0.001000000000) := 0.0001479289770$
 $errorB := 0.001775147724$

Sonuçların toplu gösterimi aşağıdaki Çizelge 4.7’de verilmiştir.

Çizelge 4.7 $f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{100}$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması

n,m	$f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{100}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m+1}$ için hata hesaplaması
10	1.390448855
10 ²	0.478564648
10 ³	0.196350973
10 ⁴	0.086255848
10 ⁵	0.039041318
10 ⁶	0.017912264
10 ⁷	0.008269596
10 ⁸	0.003828860
10 ⁹	0.001775148

Uyarı 4.4.7

Örnek 4.4.7’de verilen fonksiyonun $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ olmak üzere C_ρ ’nun elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
```

```
>with(plots):
```

```
>f:=(x,y)->exp(x+y)/100;g:=(x,y)->1+x^2+y^2;
```

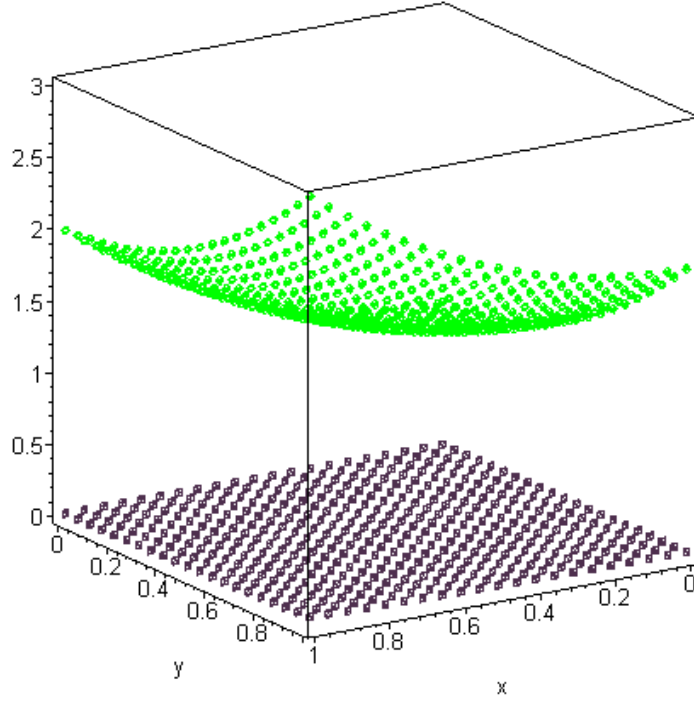
$$f := (x, y) \rightarrow \frac{1}{100} e^{(x+y)}$$

$$g := (x, y) \rightarrow 1 + x^2 + y^2$$

```
p1:=plot3d(f(x,y),x=0..1,y=0..1,color=violet,style=point,symbol=diamond,numpoints=400,symbolsize=8):
```

```
>p2:=plot3d(g(x,y),x=0..1,y=0..1,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
```

```
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.7 $f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{100}$ ve $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.4.8

$f(x, y) = \frac{1}{100}|x^2 + y^2|$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt{m+1}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
> restart;
f:=(x,y)->abs((x^2)+(y^2))/100:
n:=1 : m:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m;
b(n):=sqrt(n+1):c(m):=sqrt(m+1):
>
> delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
> delta(m):=evalf(simplify(sqrt(c(m)/m)));
>
omega1(f,delta(n)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))));
>
omega2(f,delta(m)):=evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(m))));
> errorB:=3*2*(omega1(f,delta(n))+omega2(f,delta(m)));
end do;
```

$n := 10$
 $m := 10$
 $b(10) := \sqrt{11}$
 $c(10) := \sqrt{11}$
 $\delta(10) := 0.5759014491$
 $\delta(10) := 0.5759014491$
 $\omega_1(f, 0.5759014491) := 0.02966930754$
 $\omega_2(f, 0.5759014491) := 0.02966930754$
 $errorB := 0.3560316904$

$n := 100$
 $m := 100$
 $b(100) := \sqrt{101}$
 $c(100) := \sqrt{101}$
 $\delta(100) := 0.3170153880$
 $\delta(100) := 0.3170153880$
 $\omega_1(f, 0.3170153880) := 0.01469059064$
 $\omega_2(f, 0.3170153880) := 0.01469059064$
 $errorB := 0.1762870877$

$n := 1000$
 $m := 1000$
 $b(1000) := \sqrt{1001}$
 $c(1000) := \sqrt{1001}$
 $\delta(1000) := 0.1778723813$
 $\delta(1000) := 0.1778723813$
 $\omega_1(f, 0.1778723813) := 0.007747666920$
 $\omega_2(f, 0.1778723813) := 0.007747666920$
 $errorB := 0.09297200304$

$n := 10000$
 $m := 10000$
 $b(10000) := \sqrt{10001}$
 $c(10000) := \sqrt{10001}$
 $\delta(10000) := 0.1000024999$
 $\delta(10000) := 0.1000024999$

$\omega_1(f, 0.1000024999) := 0.004200110000$
 $\omega_2(f, 0.1000024999) := 0.004200110000$
 $errorB := 0.05040132000$
 $n := 100000$
 $m := 100000$
 $b(100000) := \sqrt{100001}$
 $c(100000) := \sqrt{100001}$
 $\delta(100000) := 0.05623427311$
 $\delta(100000) := 0.05623427311$
 $\omega_1(f, 0.05623427311) := 0.002312616780$
 $\omega_2(f, 0.05623427311) := 0.002312616780$
 $errorB := 0.02775140136$
 $n := 1000000$
 $m := 1000000$
 $b(1000000) := \sqrt{1000001}$
 $c(1000000) := \sqrt{1000001}$
 $\delta(1000000) := 0.03162278451$
 $\delta(1000000) := 0.03162278451$
 $\omega_1(f, 0.03162278451) := 0.001284911420$
 $\omega_2(f, 0.03162278451) := 0.001284911420$
 $errorB := 0.01541893704$
 $n := 10000000$
 $m := 10000000$
 $b(10000000) := \sqrt{10000001}$
 $c(10000000) := \sqrt{10000001}$
 $\delta(10000000) := 0.01778279454$
 $\delta(10000000) := 0.01778279454$
 $\omega_1(f, 0.01778279454) := 0.0007176363600$
 $\omega_2(f, 0.01778279454) := 0.0007176363600$
 $errorB := 0.008611636320$
 $n := 100000000$
 $m := 100000000$
 $b(100000000) := \sqrt{100000001}$

```

c(100000000) := sqrt(100000001)
delta(100000000) := 0.01000000002
delta(100000000) := 0.01000000002
omega1(f, 0.01000000002) := 0.0004020000000
omega2(f, 0.01000000002) := 0.0004020000000
errorB := 0.004824000000
n := 1000000000
m := 1000000000
b(1000000000) := sqrt(1000000001)
c(1000000000) := sqrt(1000000001)
delta(1000000000) := 0.005623413251
delta(1000000000) := 0.005623413251
omega1(f, 0.005623413251) := 0.0002255689800
omega2(f, 0.005623413251) := 0.0002255689800
errorB := 0.002706827760

```

Sonuçların toplu gösterimi aşağıdaki Çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.8 $f(x, y) = \frac{1}{100}|x^2 + y^2|$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması

n,m	$f(x, y) = \frac{1}{100} x^2 + y^2 $ fonksiyonunun $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt{m+1}$ için hata hesaplaması
10	0.3560316904
10 ²	0.1762870877
10 ³	0.0929720030
10 ⁴	0.0504013200
10 ⁵	0.0277514014
10 ⁶	0.0154189370
10 ⁷	0.0086116363
10 ⁸	0.0048240000
10 ⁹	0.0027068278

Uyarı 4.4.8

Örnek 4.4.8'de verilen fonksiyonun $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ için C_ρ 'nin elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```

>restart;
>with(plots):

```

```
>f:=(x,y)->abs((x^2)+(y^2))/100;g:=(x,y)->1+x^2+y^2;
```

$$f = (x, y) \rightarrow \frac{1}{100}|x^2 + y^2|$$

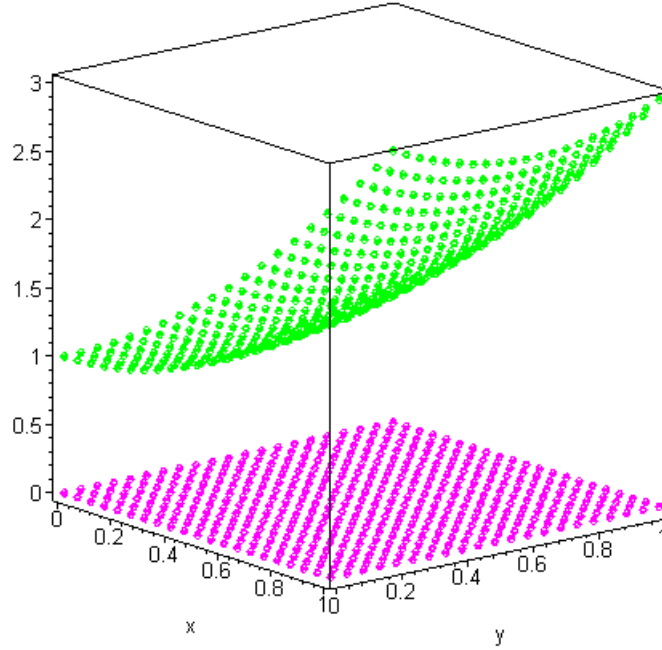
$$g = (x, y) \rightarrow 1 + x^2 + y^2$$

```
>p1:=plot3d(f(x,y),x=0..1,y=0..1,color=magenta,style=point,symbol=
ol=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
```

```
>p2:=plot3d(g(x,y),x=0..1,y=0..1,color=green,style=point,symbol=
=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
```

```
>
```

```
>display([p1,p2]);
```



Şekil 4.8 $f(x, y) = \frac{1}{100}|x^2 + y^2|$ ve $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği

Örnek 4.4.9

$f(x, y) = \frac{xy+x+1}{\sqrt{7}^4}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt{n+2}$ ve $c_m = \sqrt{m+1}$ için hata payının hesaplaması verilecektir.

Maple13 programına ait program parçası şu şekildedir.

```
> restart;
f:=(x,y)->(x*y+x+1)/(sqrt(7)^4):
n:=1 : m:=1 :
for i from 1 to 9 do
n:=10*n; m:=10*m;
b(n):=sqrt(n+2):c(m):=sqrt(m+1):
>
> delta(n):=evalf(simplify(sqrt(b(n)/n)));
```

```

> delta(m) := evalf(simplify(sqrt(c(m)/m)));
>
omega1(f,delta(n)) := evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(n))):
omega2(f,delta(m)) := evalf(simplify(maximize(abs(expand(f(x+h,y+h)-f(x,y))),x=0..1,y=0..1,h=0..delta(m))):

> errorB:=3*2*(omega1(f,delta(n))+omega2(f,delta(m)));
end do;

n := 10
m := 10
b(10) := 2*sqrt(3)
c(10) := sqrt(11)
delta(10) := 0.5885661912
delta(10) := 0.5759014491
omega1(f,0.5759014491) := 0.04202789442
omega2(f,0.5759014491) := 0.04202789442
errorB := 0.5043347330

n := 100
m := 100
b(100) := sqrt(102)
c(100) := sqrt(101)
delta(100) := 0.3177971828
delta(100) := 0.3170153880
omega1(f,0.3170153880) := 0.02146010041
omega2(f,0.3170153880) := 0.02146010041
errorB := 0.2575212050

n := 1000
m := 1000
b(1000) := sqrt(1002)
c(1000) := sqrt(1001)
delta(1000) := 0.1779167884
delta(1000) := 0.1778723813
omega1(f,0.1778723813) := 0.01153583118
omega2(f,0.1778723813) := 0.01153583118

```

$errorB := 0.1384299742$
 $n := 10000$
 $m := 10000$
 $b(10000) := \sqrt{10002}$
 $c(10000) := \sqrt{10001}$
 $\delta(10000) := 0.1000049996$
 $\delta(10000) := 0.1000024999$
 $\omega_1(f, 0.1000024999) := 0.006326693872$
 $\omega_2(f, 0.1000024999) := 0.006326693872$
 $errorB := 0.07592032646$
 $n := 100000$
 $m := 100000$
 $b(100000) := \sqrt{100002}$
 $c(100000) := \sqrt{100001}$
 $\delta(100000) := 0.05623441369$
 $\delta(100000) := 0.05623427311$
 $\omega_1(f, 0.05623427311) := 0.003507451282$
 $\omega_2(f, 0.05623427311) := 0.003507451282$
 $errorB := 0.04208941538$
 $n := 1000000$
 $m := 1000000$
 $b(1000000) := \sqrt{1000002}$
 $c(1000000) := \sqrt{1000001}$
 $\delta(1000000) := 0.03162279241$
 $\delta(1000000) := 0.03162278451$
 $\omega_1(f, 0.03162278451) := 0.001956497021$
 $\omega_2(f, 0.03162278451) := 0.001956497021$
 $errorB := 0.02347796426$
 $n := 10000000$
 $m := 10000000$
 $b(10000000) := \sqrt{10000002}$
 $c(10000000) := \sqrt{10000001}$
 $\delta(10000000) := 0.01778279499$

$\delta(10000000) := 0.01778279454$
 $\omega_1(f, 0.01778279454) := 0.001095196151$
 $\omega_2(f, 0.01778279454) := 0.001095196151$
 $errorB := 0.01314235381$
 $n := 100000000$
 $m := 100000000$
 $b(100000000) := \sqrt{100000002}$
 $c(100000000) := \sqrt{100000001}$
 $\delta(100000000) := 0.01000000005$
 $\delta(100000000) := 0.01000000002$
 $\omega_1(f, 0.01000000002) := 0.0006142857156$
 $\omega_2(f, 0.01000000002) := 0.0006142857156$
 $errorB := 0.007371428588$
 $n := 1000000000$
 $m := 1000000000$
 $b(1000000000) := \sqrt{1000000002}$
 $c(1000000000) := \sqrt{1000000001}$
 $\delta(1000000000) := 0.005623413255$
 $\delta(1000000000) := 0.005623413251$
 $\omega_1(f, 0.005623413251) := 0.0003449359700$
 $\omega_2(f, 0.005623413251) := 0.0003449359700$
 $errorB := 0.004139231640$

Sonuçların toplu gösterimi aşağıdaki Çizelge 4.9’da verilmiştir.

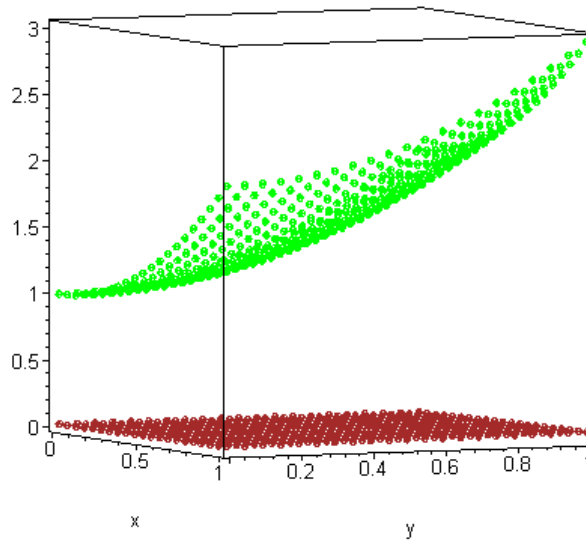
Çizelge 4.9 $f(x, y) = \frac{xy+x+1}{\sqrt{7^4}}$ fonksiyonunun hata payı hesaplaması

n,m	$f(x, y) = \frac{xy+x+1}{\sqrt{7^4}}$ fonksiyonunun $b_n = \sqrt{n+2}$ ve $c_m = \sqrt{m+1}$ için hata hesabı
10	0.5043347330
10 ²	0.2575212050
10 ³	0.1384299742
10 ⁴	0.0759203265
10 ⁵	0.0420894154
10 ⁶	0.0234779643
10 ⁷	0.0131423538
10 ⁸	0.0073714286
10 ⁹	0.0041392316

Uyarı 4.4.9

Örnek 4.4.9’de verilen fonksiyonun $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ için C_ρ ’nun elemanı olduğunu göstermek için Maple ile fonksiyonların çizimi aşağıdaki program yardımıyla yapılmıştır.

```
>restart;
>with(plots):
>f:=(x,y)->(x*y+x+1)/(sqrt(7)^4);g:=(x,y)->1+x^2+y^2;
      f := (x, y) →  $\frac{xy+x+1}{\sqrt{7}^4}$ 
      g := (x, y) →  $1+x^2+y^2$ 
>p1:=plot3d(f(x,y),x=0..1,y=0..1,color=brown,style=point,symbol
=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
>p2:=plot3d(g(x,y),x=0..1,y=0..1,color=green,style=point,symbol
=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
>
>display([p1,p2]);
```



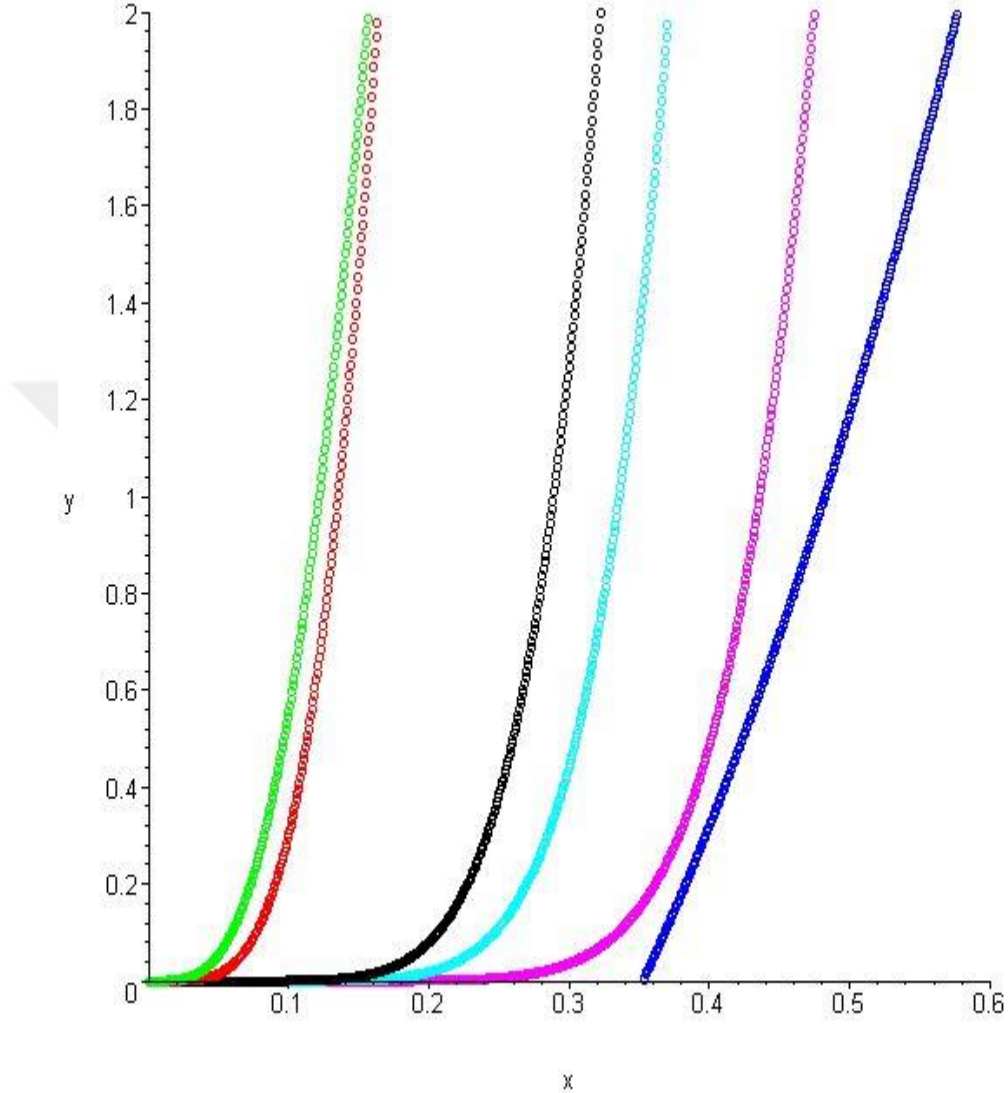
Şekil 4.9 $f(x, y) = \frac{xy+x+1}{\sqrt{7}^4}$ ve $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiği

Bundan sonraki üç örnekte tek değişkenli Bernstein-Chlodowsky Polinomları için yaklaşımı veren grafik ve ilgili program parçası verilecektir.

Örnek 4.4.10

$B_n^*(f; x)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n}$, alınarak

$f(x) = 6x^2 \ln(x^2 + 2x + 3) - 1$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.10'da gösterilmiştir.



Şekil 4.10 $B_n^*(f; x)$ polinomlar dizisi ile $f(x) = 6x^2 \ln(x^2 + 2x + 3) - 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=90$ olmak üzere $k=4$ (yeşil), $k=5$ (kırmızı), $k=9$ (siyah), $k=10$ (turkuaz) $k=12$ (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
with(plots):
>f:=x->6*x^2*ln(x^2+(2*x)+3)-1;
      f := x → 6x2ln(x2 + 2x + 3) - 1

>b:=(n)->(sqrt(n));
      b := n → √n

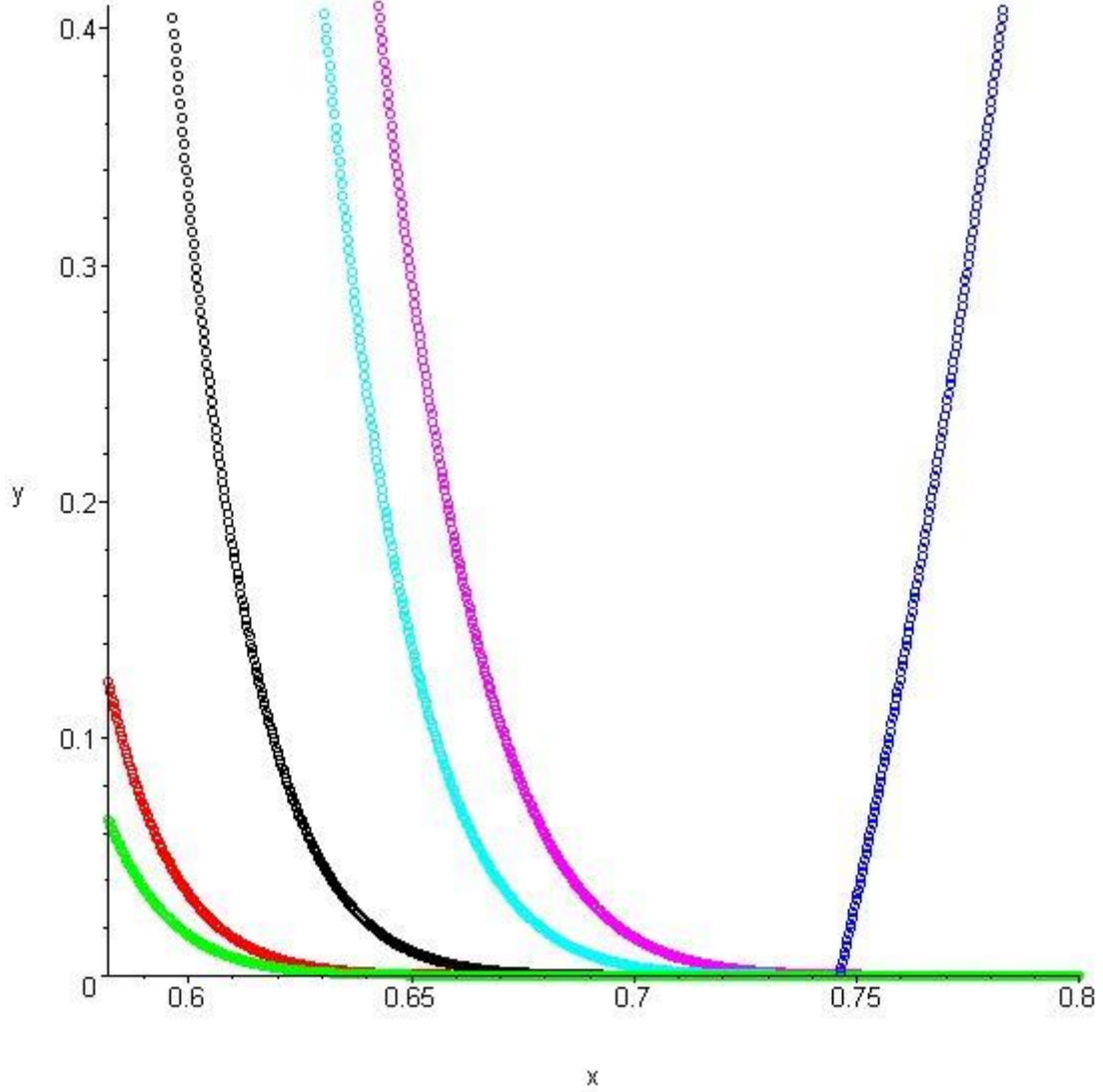
B:=(n,k)-
>evalf(simplify(sum(f((k/n)*(b(n)))*(binomial(n,k))*((x/(b(n)))
)^k)*((1-(x/(b(n))))^(n-k)),t=0..n)); subs(x=1,B(90,4));
      B := (n, k) → evalf( simplify( ∑t=0n f(  $\frac{k b(n)}{n}$  ) binomial(n, k) (  $\frac{x}{b(n)}$  )k (  $1 - \frac{x}{b(n)}$  )(n-k) ) )
      0.9611789110

p1:=plot(f(x),x=0..0.6,y=0..2,color=blue,style=point,symbol=ci
rcle,numpoints=800,symbolsize=8):
p2:=plot(B(90,4),x=0..0.6,y=0..2,color=green,style=point,symbo
l=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p3:=plot(B(90,5),x=0..0.6,y=0..2,color=red,style=point,symbol=
circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p4:=plot(B(90,9),x=0..0.6,y=0..2,color=black,style=point,symbo
l=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p5:=plot(B(90,10),x=0..0.6,y=0..2,color=cyan,style=point,symbo
l=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p6:=plot(B(90,12),x=0..0.6,y=0..2,color=magenta,style=point,s
ymbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
> display([p1,p2,p3,p4,p5,p6]);

```

Örnek 4.4.11

$B_n^*(f; x)$ polinom dizisinde $f(x) = \frac{6 \tan(1-6x^3+2x)}{\sec(x+1)}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.11'de gösterilmiştir.



Şekil 4.11 $B_n^*(f; x)$ polinomlar dizisi ile $f(x) = \frac{6 \tan(1-6x^3+2x)}{\sec(x+1)}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=90$ olmak üzere $k=35$ (yeşil), $k=36$ (kırmızı), $k=40$ (siyah), $k=45$ (turkuaz), $k=48$ (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
with (plots) :

>f:=x->6*(tan(1-6*x^3+2*x))/(sec(x+1));

$$f := x \rightarrow \frac{6 \tan(1 - 6x^3 + 2x)}{\sec(x + 1)}$$


B:=(n,k)->evalf(simplify(sum(f(k/n)*(binomial(n,k))*(x^k)*((1-x)^(n-k)),t=0..n))); evalf(subs(x=1,B(90,30)));

$$B := (n, k) \rightarrow \text{evalf} \left( \text{simplify} \left( \sum_{t=0}^n f \left( \frac{k}{n} \right) \text{binomial} (n, k) x^k (1-x)^{(n-k)} \right) \right)$$

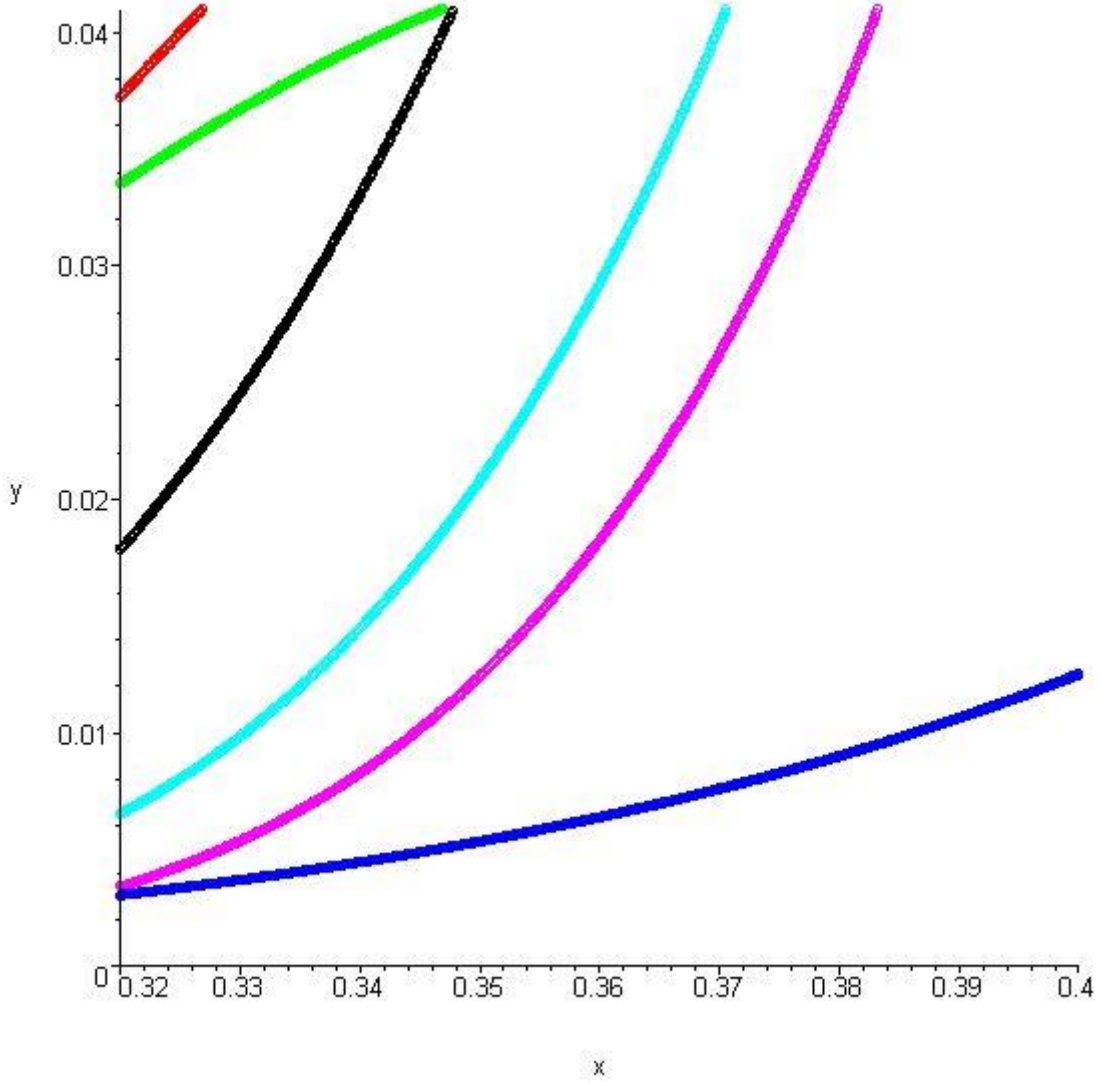
0.

>
p1:=plot(f(x),x=0.582..0.8,y=0..0.41,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
p2:=plot(B(90,35),x=0.582..0.8,y=0..0.41,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p3:=plot(B(90,36),x=0.582..0.8,y=0..0.41,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p4:=plot(B(90,40),x=0.582..0.8,y=0..0.41,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p5:=plot(B(90,45),x=0.582..0.8,y=0..0.41,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p6:=plot(B(90,48),x=0.582..0.8,y=0..0.41,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
> display([p1,p2,p3,p4,p5,p6]);

```

Örnek 4.4.12

$B_n^*(f; x)$ polinom dizisinde $f(x) = \frac{5}{3} \tan(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)^3$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.12'de gösterilmiştir.



Şekil 4.12 $B_n^*(f; x)$ polinomlar dizisi ile $f(x) = \frac{5}{3} \tan(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)^3$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n = 40$ olmak üzere $k=15$ (yeşil), $k=16$ (kırmızı), $k=20$ (siyah), $k=22$ (turkuaz), $k=23$ (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
with(plots):
>f:=x->5*tan(x^2+1)/3*(ln(x^2+1))^3;

$$f = x \rightarrow \frac{5}{3} \tan(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)^3$$

B:=(n,k)->evalf(simplify(sum(f(k/n)*(binomial(n,k))*(x^k)*((1-x)^(n-k)),t=0..n))); evalf(subs(x=1,B(40,30)));

$$B := (n, k) \rightarrow \text{evalf}\left(\text{simplify}\left(\sum_{t=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{binomial}(n, k) x^k (1-x)^{(n-k)}\right)\right)$$

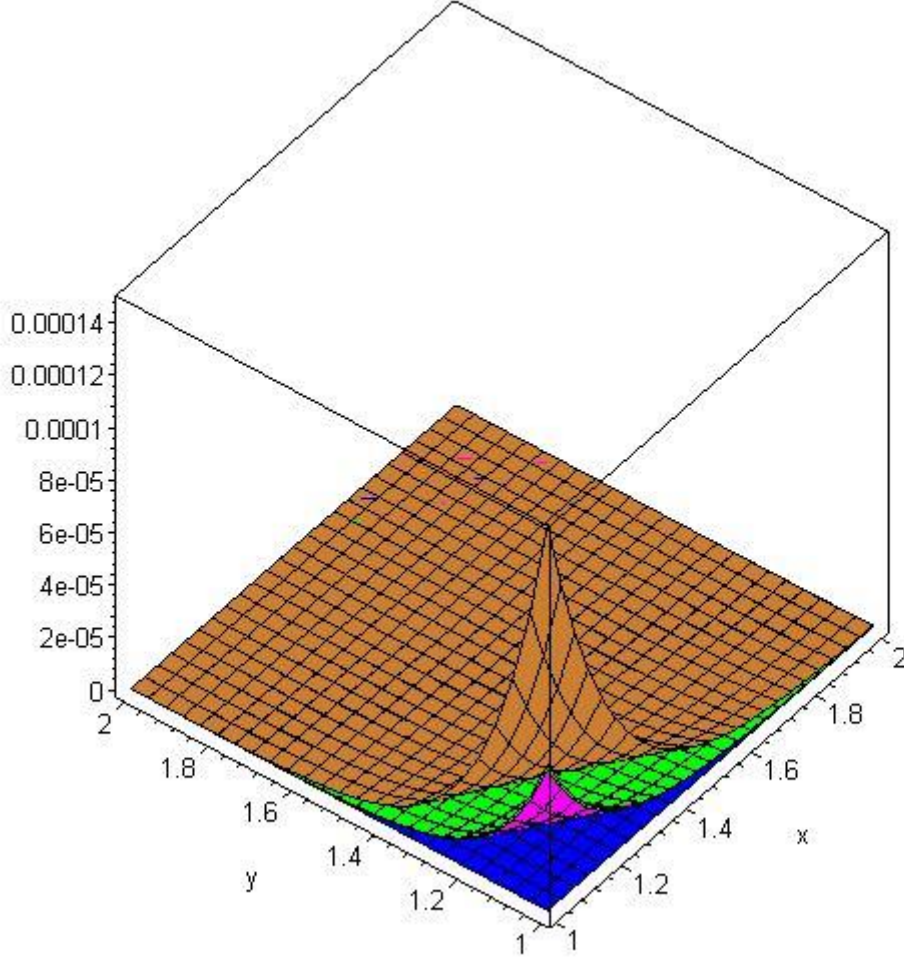
0.
>
p1:=plot(f(x),x=0.32..0.4,y=0..0.041,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
p2:=plot(B(40,15),x=0.32..0.4,y=0..0.041,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p3:=plot(B(40,16),x=0.32..0.4,y=0..0.041,color=red,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p4:=plot(B(40,20),x=0.32..0.4,y=0..0.041,color=black,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p5:=plot(B(40,22),x=0.32..0.4,y=0..0.041,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p6:=plot(B(40,23),x=0.32..0.4,y=0..0.041,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
> display([p1,p2,p3,p4,p5,p6]);

```


Örnek 4.4.13

$B_n^*(f; x, y)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak

$f(x, y) = \frac{1}{e^{5(x+y)^2+1}}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.13'de gösterilmiştir.



Şekil 4.13 $B_n^*(f; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1}{e^{5(x+y)^2+1}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı (n,m =29,40 (altın) n,m=50,60 (yeşil), n,m=51,61 (eflatun))

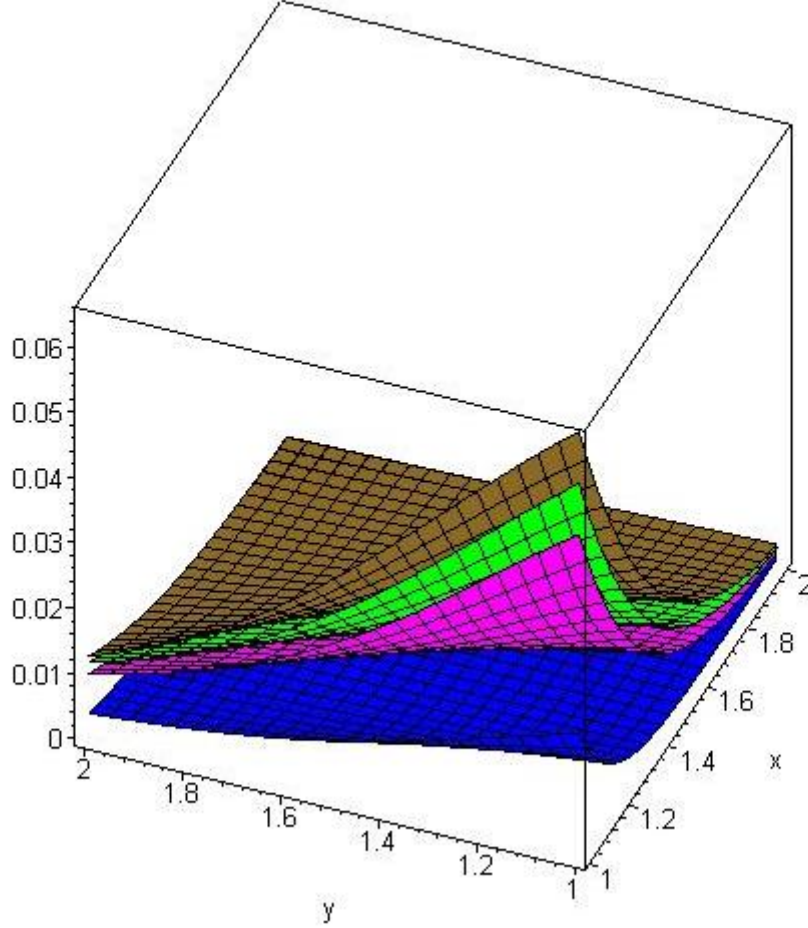
Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```
>restart;with(plots):
>b:=sqrt(n+1):c:=surd(m,3):
>f:=(x,y)->1/exp(5*(x+y)^2+1):
>n:=29 : m:=40:
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>n:=50 : m:=60 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>n:=51 : m:=61 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>p1:=plot3d(f(x,y),x=1..2,y=1..2,color=blue):
>p2:=plot3d(B[29,40](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=gold):p3:=plot3d(B[50,60](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=green):
>p4:=plot3d(B[51,61](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=magenta):
>display(p1,p2,p3,p4);
```

Örnek 4.4.14

$B_n^*(f; x, y)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak

$f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)e^{(1+3x^2)}}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.14'de gösterilmiştir.



Şekil 4.14 $B_n^*(f; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)e^{(1+3x^2)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı ($n=9,10$ (kahverengi), $n,m=20,30$ (yeşil), $n,m=41,61$ (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;with(plots):
>b:=sqrt(n+1):c:=surd(m,3):
>f:=(x,y)->(1+x^2+y^2)/((1+x^2+y^5)*exp(1+3*x^2));

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{1 + x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^5) e^{(1 + 3x^2)}}$$

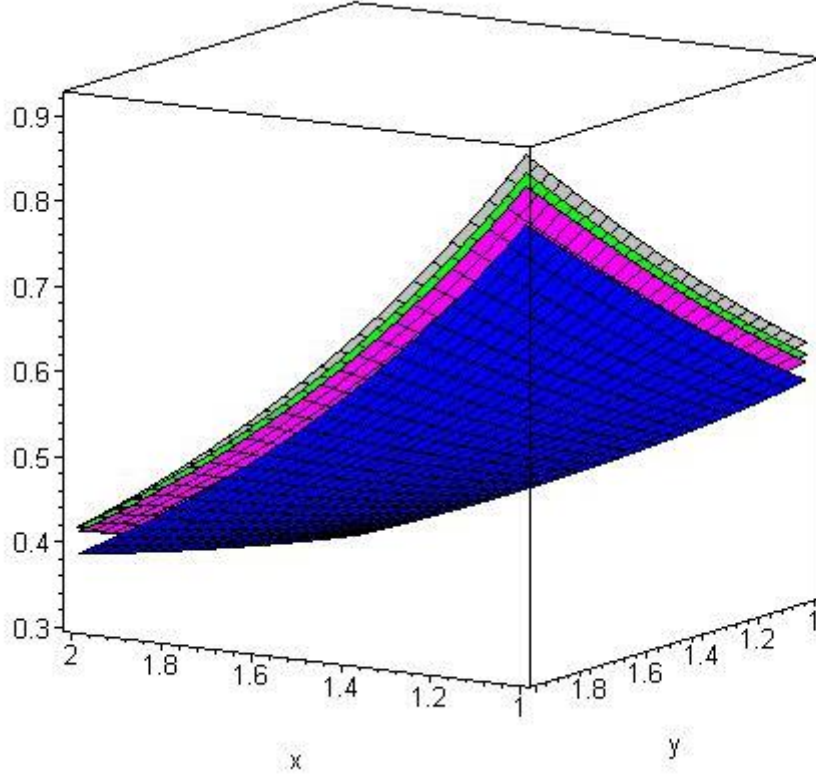
>n:=9 : m:=10:
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m,k=0..n):
>n:=20 : m:=30 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m,k=0..n):
>n:=41 : m:=61 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m,k=0..n):
>p1:=plot3d(f(x,y),x=1..2,y=1..2,color=blue):
>p2:=plot3d(B[9,10](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=sienna):p3:=plot
3d(B[20,30](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=green):
>p4:=plot3d(B[41,61](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=magenta):
>display(p1,p2,p3,p4);

```

Örnek 4.4.15

$B_n^*(f; x, y)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak

$f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{(2+x^2+y^2)e^x}}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.15'de gösterilmiştir.



Şekil 4.15 $B_n^*(f; x, y)$ polinomlar dizisi $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{(2+x^2+y^2)e^x}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı (n,m =9,10 (gri) n,m=20,30 (yeşil), n,m=41,61 (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;with(plots):
>b:=sqrt(n+1):c:=surd(m,3):
>f:=(x,y)->(1+x^2+y^2)/(exp(x)*sqrt(x^2+y^2+2));

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{1 + x^2 + y^2}{e^x \sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$$

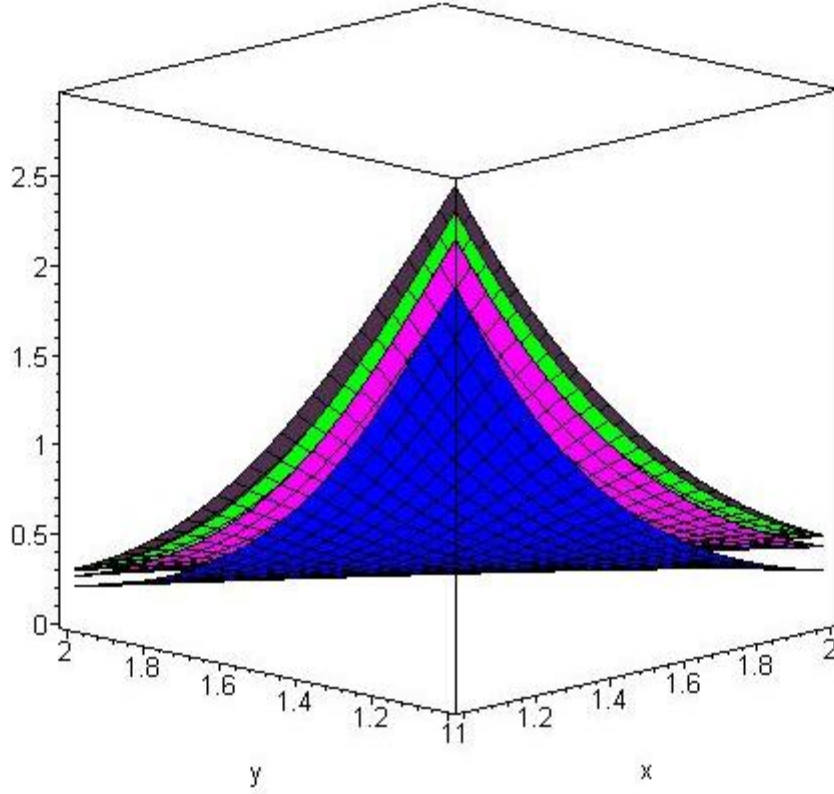
>n:=9 : m:=10:
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>n:=20 : m:=30 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>n:=41 : m:=61 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*((x/b)^k)*((1-(x/b))^(n-k))*((y/c)^j)*((1-(y/c))^(m-j)):
B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>p1:=plot3d(f(x,y),x=1..2,y=1..2,color=blue):
p2:=plot3d(B[9,10](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=grey):p3:=plot3d
(B[20,30](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=green):
>p4:=plot3d(B[41,61](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=magenta):
>display(p1,p2,p3,p4);

```

Örnek 4.4.16

$B_n^*(f; x, y)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m+3}$ alınarak

$f(x, y) = \frac{20}{(x^4 + \sin(x) + 1)(y^5 + x + 1)}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.16'da gösterilmiştir.



Şekil 4.16 $B_n^*(f; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m+3}$ $f(x, y) = \frac{20}{(x^4 + \sin(x) + 1)(y^5 + x + 1)}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı (n,m =9,10 (fuşya), n,m=20,30 (yeşil), n,m=61,81 (eflatun))

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;with(plots):
>b:=sqrt(n+1):c:=surd(m+3,3):
>f:=(x,y)->20*(1/(x^4+sin(x)+1))*(1/(y^5+x+1));
      f := (x, y) →  $\frac{20}{(x^4 + \sin(x) + 1)(y^5 + x + 1)}$ 

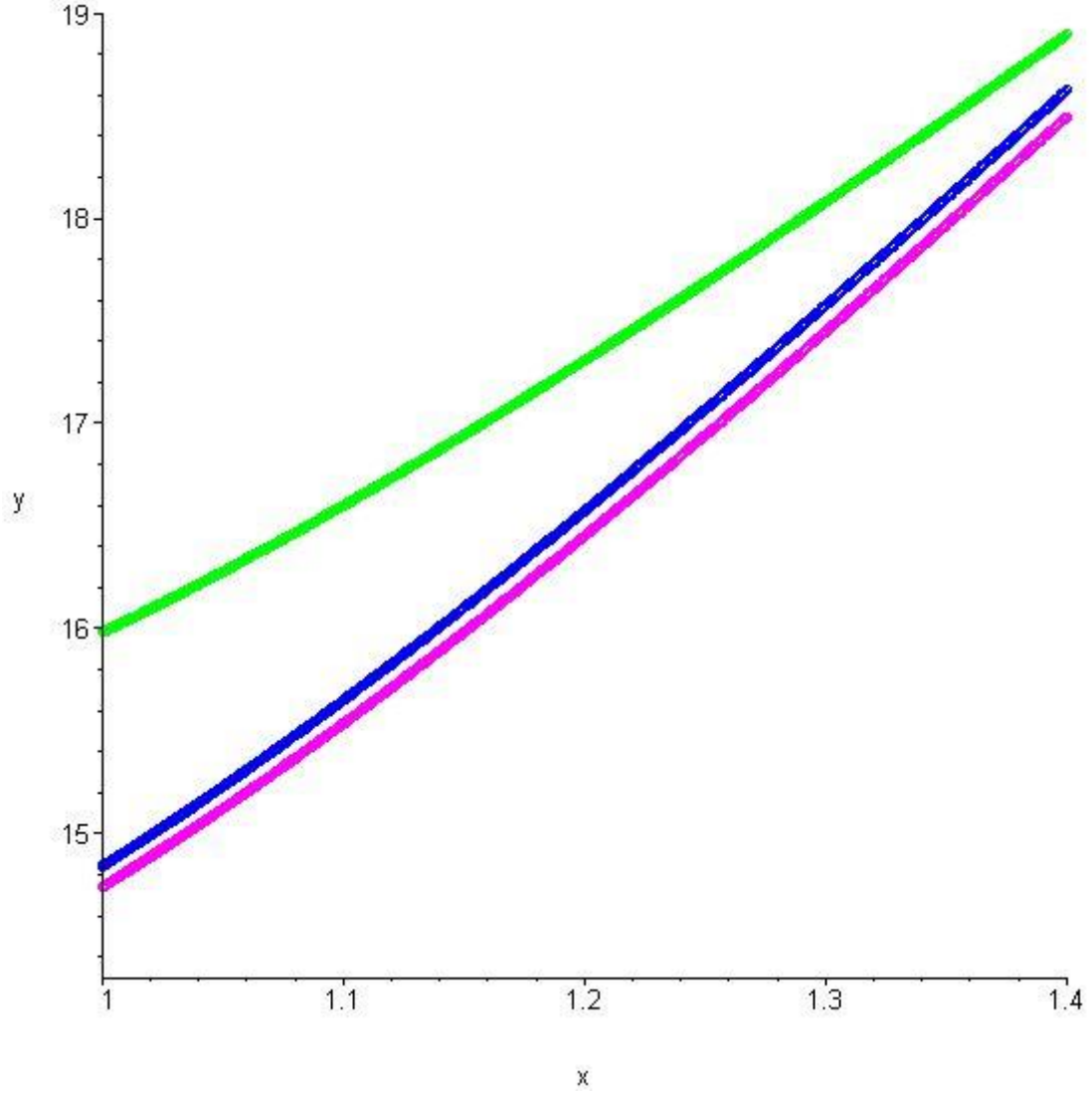
>n:=9 : m:=10:
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*(x/b)^k*((1-
(x/b))^(n-k))*(y/c)^j*((1-(y/c))^(m-j)):
B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>n:=20 : m:=30 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*(x/b)^k*((1-
(x/b))^(n-k))*(y/c)^j*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>n:=61 : m:=81 :
>P[k,j](n,m,x,y):=binomial(n,k)*binomial(m,j)*(x/b)^k*((1-
(x/b))^(n-k))*(y/c)^j*((1-(y/c))^(m-j)):
>B[n,m](f,x,y):=sum(sum(f((k/n)*b),(j/m)*c))*P[k,j](n,m,x,y),
j=0..m),k=0..n):
>p1:=plot3d(f(x,y),x=1..2,y=1..2,color=blue):
>p2:=plot3d(B[9,10](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=violet):p3:=plot
3d(B[20,30](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=green):
>p4:=plot3d(B[61,81](f,x,y),x=1..2,y=1..2,color=magenta):
>display(p1,p2,p3,p4);

```

Aşağıda verilecek 5 örnekte tek değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşıma ait grafikler verilecektir.

Örnek 4.4.17

$C_{n,r}(f, x)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ alınarak $f(x) = \frac{1}{20} \frac{x^3+1}{e^{(x-6)}}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.17’de $n=25$ olmak üzere $r=0$ (yeşil), $r=4$ (eflatun) gösterilmiştir.



Şekil 4.17 $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ alınarak $f(x) = \frac{1}{20} \frac{x^3+1}{e^{(x-6)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
>with(plots):
>f:=x->((x^3)+1)/(20*exp(x-6));

$$f := x \rightarrow \frac{1}{20} \frac{x^3 + 1}{e^{(x-6)}}$$

>b:=n->sqrt(n+1);

$$b := n \rightarrow \sqrt{n+1}$$

>Q:=n->binomial(n,k)*((x/(b(n)))^k)*((1-(x/b(n)))^(n-k));

$$Q := n \rightarrow \text{binomial}(n,k) \left(\frac{x}{b(n)}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b(n)}\right)^{(n-k)}$$

>CT:=(n,r)-
>evalf(simplify(sum(sum((D@@i)(f)((k/n)*b(n))/i!)*((x-
((k/n)*b(n)))^i),i=0..r)*Q(n),k=0..n));

$$CT := (n,r) \rightarrow \text{evalf} \left( \text{simplify} \left( \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^r \frac{(D^{(i)})(f)\left(\frac{k b(n)}{n}\right) \left(x - \frac{k b(n)}{n}\right)^i}{i!} \right) Q(n) \right) \right)$$

>
p1:=plot(f(x),x=1..1.4,y=14.3..19,color=blue,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p2:=plot(CT(25,0),x=1..1.4,y=14.3..19,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p3:=plot(CT(25,4),x=1..1.4,y=14.3..19,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
> display([p1,p2,p3]);

```

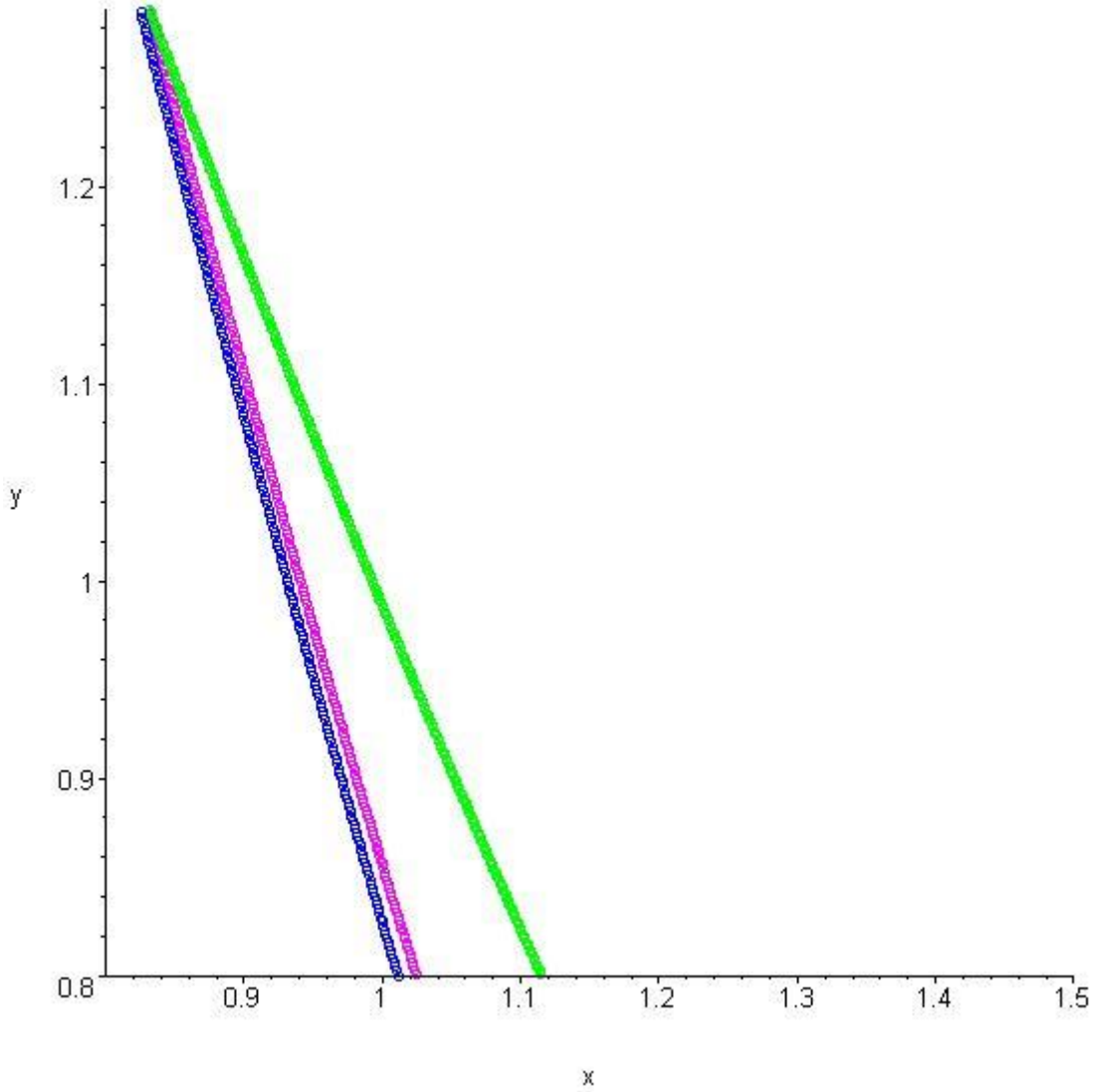
Uyarı 4.4.10

Yukarıdaki şekilde $n = 0$ alınmasıyla Chlodowsky-Taylor Polinomu Bernstein-Chlodowsky Polinomuna dönüşmüş olur. Şekilden de anlaşılacağı üzere alınan fonksiyona Chlodowsky-Taylor Polinomu ile yaklaşım Bernstein-Chlodowsky'den daha iyi sonuç vermektedir.

Örnek 4.4.18

$C_{n,r}(f, x)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ alınarak

$f(x) = \frac{\sin(x+1)^2}{e^{(x^2-1)}}$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.18'de $n=25$ olmak üzere $r=0$ (yeşil), $r=4$ (eflatun)) gösterilmiştir.



Şekil 4.18 $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n+1}$ alınarak $f(x) = \frac{\sin(x+1)^2}{e^{(x^2-1)}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
>with(plots):
>f:=x->(sin(x+1))^2/(exp((x^2)-1));

```

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x+1)^2}{e^{(x^2-1)}}$$

```

>b:=n->sqrt(n+1);

```

$$b := n \rightarrow \sqrt{n+1}$$

```

>Q:=n->binomial(n,k)*((x/(b(n)))^k)*((1-(x/b(n)))^(n-k));
>

```

$$Q := n \rightarrow \text{binomial}(n, k) \left(\frac{x}{b(n)} \right)^k \left(1 - \frac{x}{b(n)} \right)^{(n-k)}$$

```

>CT:=(n,r)-
>evalf(simplify(sum(sum((D@@i)(f)((k/n)*b(n))/i!)*((x-
((k/n)*b(n)))^i),i=0..r)*Q(n),k=0..n));

```

$$CT := (n, r) \rightarrow \text{evalf} \left(\text{simplify} \left(\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^r \frac{(D^{(i)})(f) \left(\frac{k b(n)}{n} \right) \left(x - \frac{k b(n)}{n} \right)^i}{i!} \right) Q(n) \right) \right)$$

```

>
p1:=plot(f(x),x=0.8..1.5,y=0.8..1.29,color=blue,style=point,sy
mbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p2:=plot(CT(25,0),x=0.8..1.5,y=0.8..1.29,color=green,style=poi
nt,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
>
p3:=plot(CT(25,4),x=0.8..1.5,y=0.8..1.29,color=magenta,style=p
oint,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize=8):
> display([p1,p2,p3]);

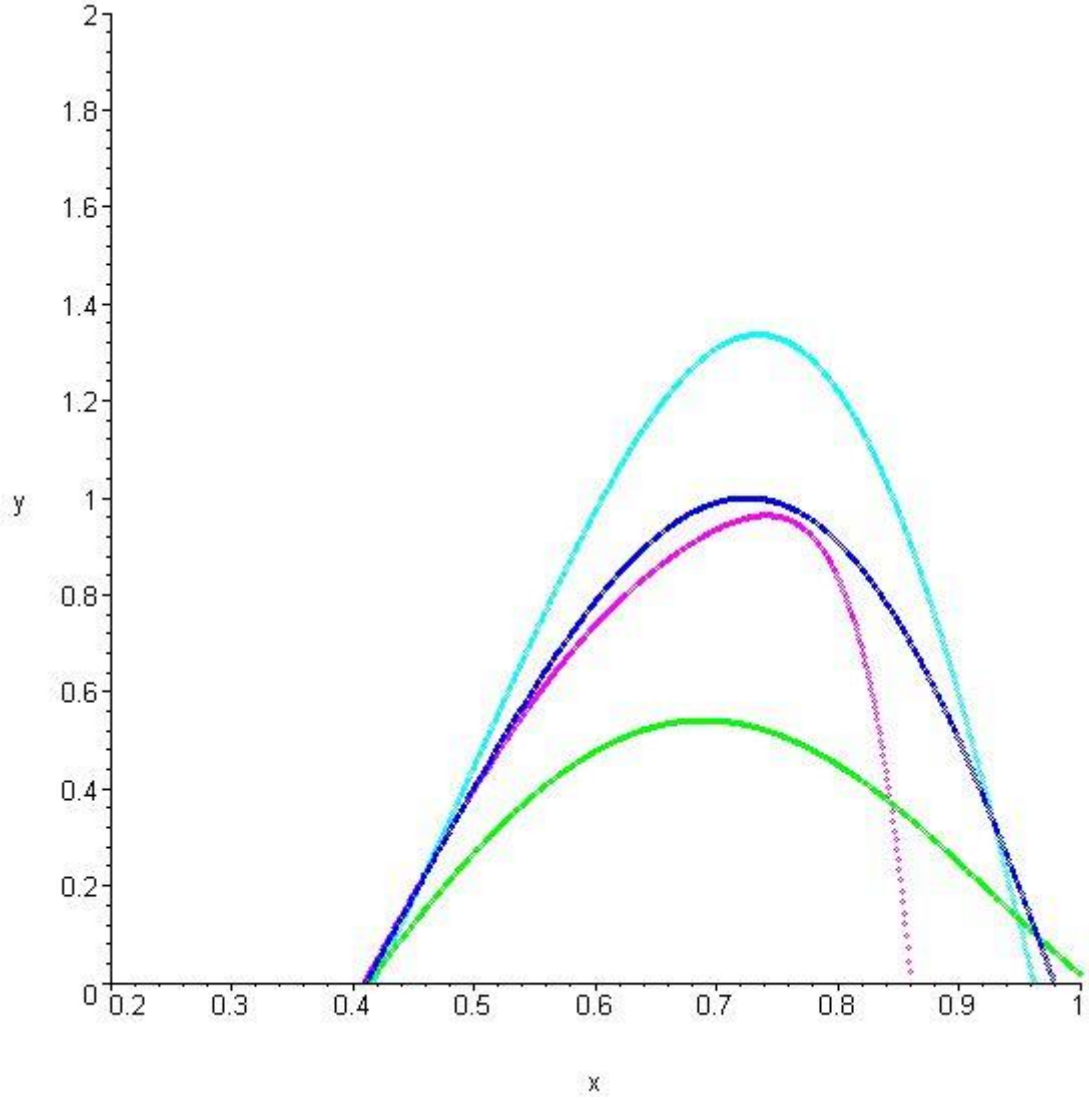
```

Uyarı 4.4.11

Yukarıdaki şekilde $b_n = \sqrt{n+1}$ dizisi için $n = 0$ alınmasıyla Chlodowsky-Taylor Polinomu Bernstein-Chlodowsky Polinomuna dönüşmüş olur. Şekilden de anlaşılacağı üzere alınan fonksiyona Chlodowsky-Taylor Polinomu ile yaklaşım Bernstein-Chlodowsky'den daha iyi sonuç vermektedir.

Örnek 4.4.19

$C_{n,r}(f, x)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt[4]{n+3}$ alınarak $f(x) = \cos(x^3 + 4x + 3)$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.19'da $n = 30$ olmak üzere $r=0$ (yeşil), $r=2$ (turkuaz), $r=8$ (eflatun) gösterilmiştir.



Şekil 4.19 $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt[4]{n+3}$ alınarak $f(x) = \cos(x^3 + 4x + 3)$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
>with(plots) :
>f:=x->cos(x^3+4*x+3);
      f := x → cos(x3 + 4 x + 3)

>b:=n->surd(n+3,4);
      b := n → surd(n + 3, 4)

>Q:=n->binomial(n,k)*((x/(b(n)))^k)*((1-(x/b(n)))^(n-k));
> Q := n → binomial(n, k)  $\left(\frac{x}{b(n)}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b(n)}\right)^{(n-k)}$ 

>CT:=(n,r) -
>evalf(simplify(sum(sum((D@@i)(f)((k/n)*b(n))/i!)*(x-
((k/n)*b(n))i),i=0..r)*Q(n),k=0..n));
      CT := (n, r) → evalf  $\left( \text{simplify} \left( \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^r \frac{(D^{(i)})(f)\left(\frac{k b(n)}{n}\right)\left(x - \frac{k b(n)}{n}\right)^i}{i!} \right) Q(n) \right) \right)$ 

>
p1:=plot(f(x),x=0.2..1,y=0..2,color=blue,style=point,symbol=circle,
numpoints=800,symbolsize=7):

> p2:=plot(CT(30,0),x=0.2..1,y=0..2,
color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=800,symbolsize
=7):

>
p3:=plot(CT(30,2),x=0.2..1,y=0..2,color=cyan,style=point,symbol=
circle,numpoints=800,symbolsize=7):

>
p4:=plot(CT(30,8),x=0.2..1,y=0..2,color=magenta,style=point,sy
mbol=circle,numpoints=800,symbolsize=7):
> display([p1,p2,p3,p4]);

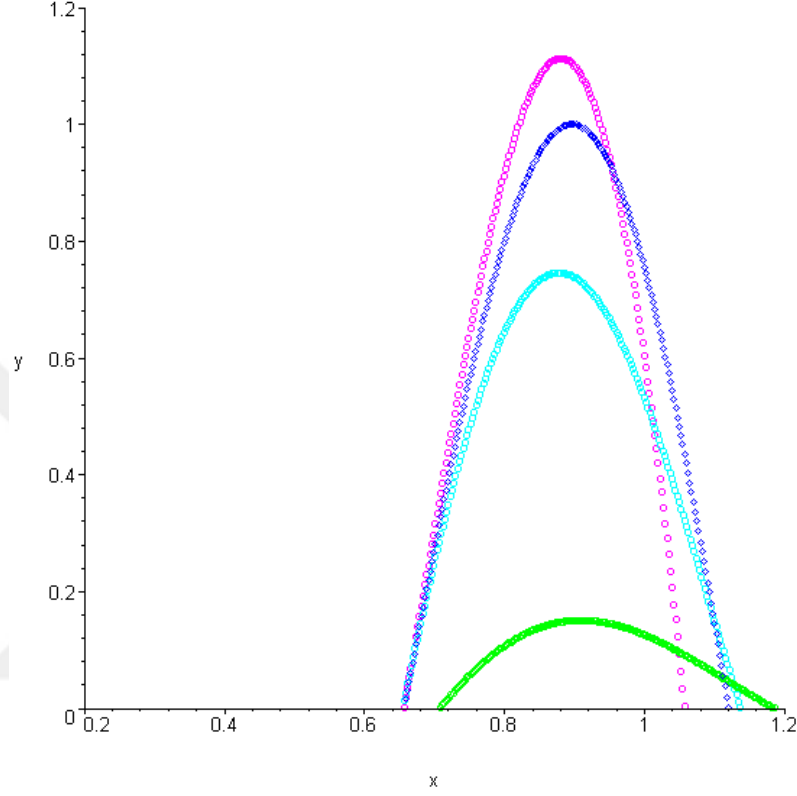
```

Uyarı 4.4.12

Yukarıdaki şekilde $f(x) = \cos(x^3 + 4x + 3)$ fonksiyonuna yaklaşımda $n = 0$ alınmasıyla Chlodowsky-Taylor Polinomu Bernstein-Chlodowsky Polinomuna dönüşmüş olur. Şekilden de anlaşılacağı üzere alınan fonksiyona Chlodowsky-Taylor Polinomu ile yaklaşım Bernstein-Chlodowsky'den daha iyi sonuç vermektedir.

Örnek 4.4.20

$C_{n,r}(f, x)$ polinom dizisinde $f(x) = \cos(x^2 + 5x + 1)$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil4.20'de $n=20$ olmak üzere $r=0$ (yeşil), $r=1$ (turkuaz), $r=13$ (eflatun) gösterilmiştir.



Şekil 4.20 $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt[3]{n}$ alınarak $f(x) = \cos(x^2 + 5x + 1)$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
>with(plots):
>f:=x->cos(x^2+5*x+1);
      f := x → cos(x2 + 5 x + 1)

>b:=n->surd(n,3);
      b := n → surd(n,3)

>Q:=n->binomial(n,k)*((x/(b(n)))^k)*((1-(x/b(n)))^(n-k));
      Q := n → binomial(n,k) ⎛ $\frac{x}{b(n)}$ ⎞k ⎛ $1 - \frac{x}{b(n)}$ ⎞(n-k)

>CT:=(n,r)-
>evalf(simplify(sum(sum((D@@i)(f)((k/n)*b(n))/i!)*((x-
((k/n)*b(n)))^i),i=0..r)*Q(n),k=0..n));
      CT := (n,r) → evalf ⎛ $\left( \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^r \frac{(D^{(i)})(f)\left(\frac{k b(n)}{n}\right)\left(x - \frac{k b(n)}{n}\right)^i}{i!} \right) Q(n) \right)$ ⎞

>p1:=plot(f(x),x=0.2..1.2,y=0..1.2,color=blue,style=point,symbol=diamond,numpoints=400,symbolsize=8):
>p2:=plot(CT(20,0),x=0.2..1.2,y=0..1.2,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
>p3:=plot(CT(20,1),x=0.2..1.2,y=0..1.2,color=cyan,style=point,symbol=circle,numpoints=380,symbolsize=8):
>p4:=plot(CT(20,13),x=0.2..1.2,y=0..1.2,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=400,symbolsize=8):
>display([p1,p2,p3,p4]);

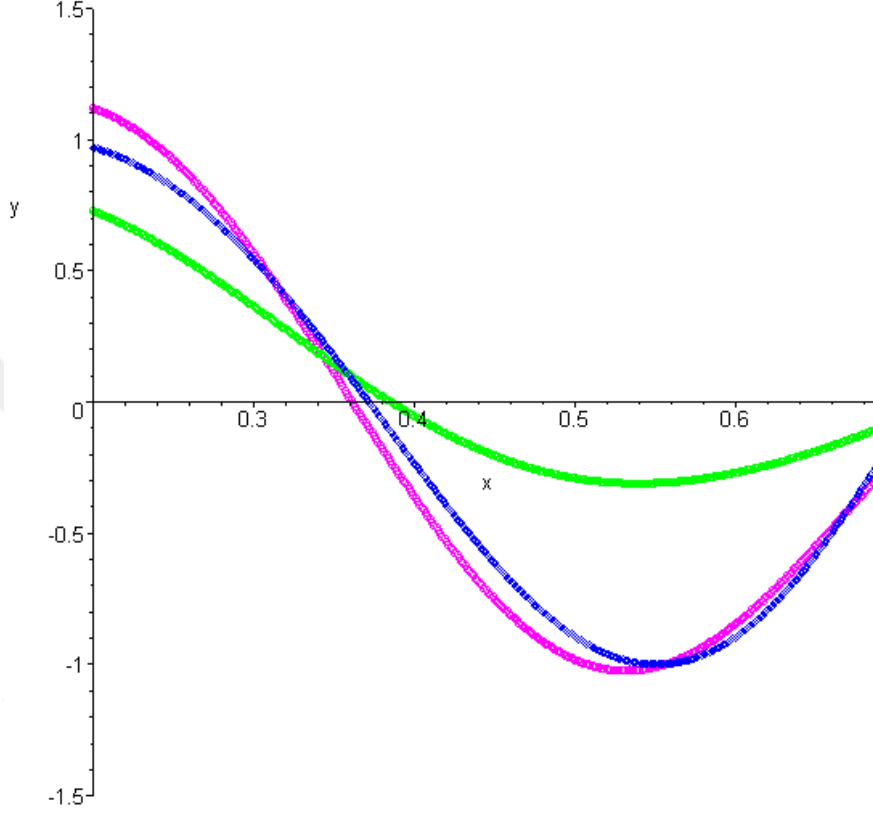
```

Uyarı 4.4.13

Yukarıdaki şekilde $f(x) = \cos(x^2 + 5x + 1)$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt[3]{n}$ alınarak yapılan yaklaşımda $n = 0$ alınmasıyla Chlodowsky-Taylor Polinomu Bernstein-Chlodowsky Polinomuna dönüşmüş olur. Dolayısıyla alınan fonksiyona Chlodowsky-Taylor Polinomu ile yaklaşım Bernstein-Chlodowsky'den daha iyi sonuç vermektedir.

Örnek 4.4.21

$C_{n,r}(f, x)$ polinom dizisinde $b_n = \sqrt[3]{n}$ alınarak $f(x) = \sin\left(3x^2 + 6x + \frac{1}{2}\right)$ fonksiyonuna yaklaşım Şekil 4.21'de $n=70$ olmak üzere $r=0$ (yeşil), $r=1$ (eflatun) gösterilmiştir.



Şekil 4.21 $C_{n,r}(f, x)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt[3]{n}$ alınarak $f(x) = \sin\left(3x^2 + 6x + \frac{1}{2}\right)$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı

Yukarıdaki şekli veren program parçası aşağıdaki şekildedir.

```

>restart;
>with(plots):
>f:=x->sin(3*x^2+6*x+(1/2));
      f := x → sin(3x2 + 6x +  $\frac{1}{2}$ )
>
>b:=n->surd(n,3);
      b := n → surd(n,3)
>Q:=n->binomial(n,k)*(x/(b(n)))^k*((1-(x/b(n)))^(n-k));
      Q := n → binomial(n,k)  $\left(\frac{x}{b(n)}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b(n)}\right)^{(n-k)}$ 
>CT:=(n,r)-
>evalf(simplify(sum(sum((D@@i)(f)((k/n)*b(n))/i!)*(x-
((k/n)*b(n)))^i,i=0..r)*Q(n),k=0..n));
      CT := (n,r) → evalf  $\left( \text{simplify} \left( \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^r \frac{(D^{(i)}(f)\left(\frac{k}{n}b(n)\right)\left(x - \frac{k}{n}b(n)\right)^i}{i!}\right) Q(n) \right) \right)$ 
>p1:=plot(f(x),x=0.2..0.69,y=-
1.5..1.5,color=blue,style=point,symbol=diamond,numpoints=400,s
ymbolsize=8):
>p2:=plot(CT(70,0),x=0.2..0.69,y=-
1.5..1.5,color=green,style=point,symbol=circle,numpoints=400,s
ymbolsize=8):
>p3:=plot(CT(70,1),x=0.2..0.69,y=-
1.5..1.5,color=magenta,style=point,symbol=circle,numpoints=380
,ymbolsize=8):
>display([p1,p2,p3]);

```

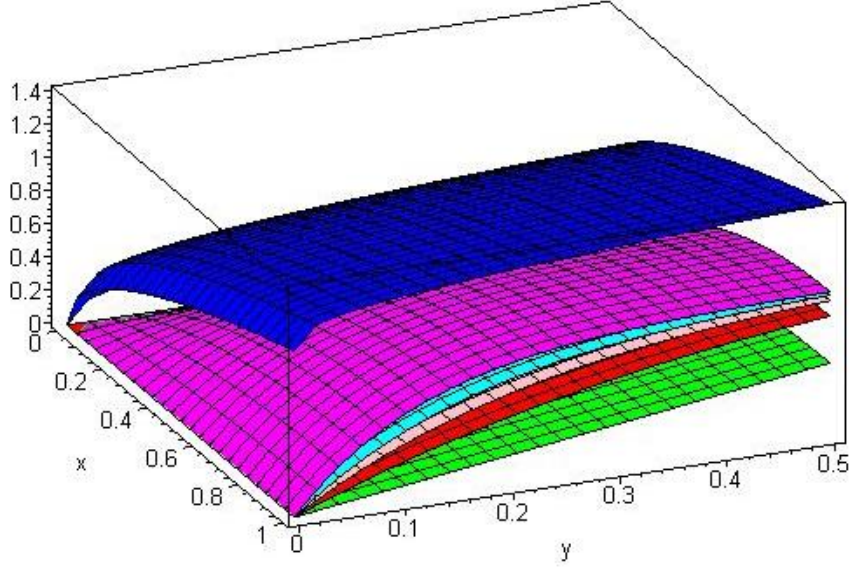
Uyarı 4.4.14

Burada da $f(x) = \sin\left(3x^2 + 6x + \frac{1}{2}\right)$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt[3]{n}$ alınarak yapılan yaklaşımda $n = 0$ alınmasıyla Chlodowsky-Taylor Polinomu Bernstein-Chlodowsky Polinomuna dönüşmüş olur. Dolayısıyla alınan fonksiyona Chlodowsky-Taylor Polinomu ile yaklaşım Bernstein-Chlodowsky'den daha iyi sonuç vermektedir.

Aşağıda verilecek üç örnekte iki değişkenli Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşıma ait grafikler verilecektir.

Örnek 4.4.22

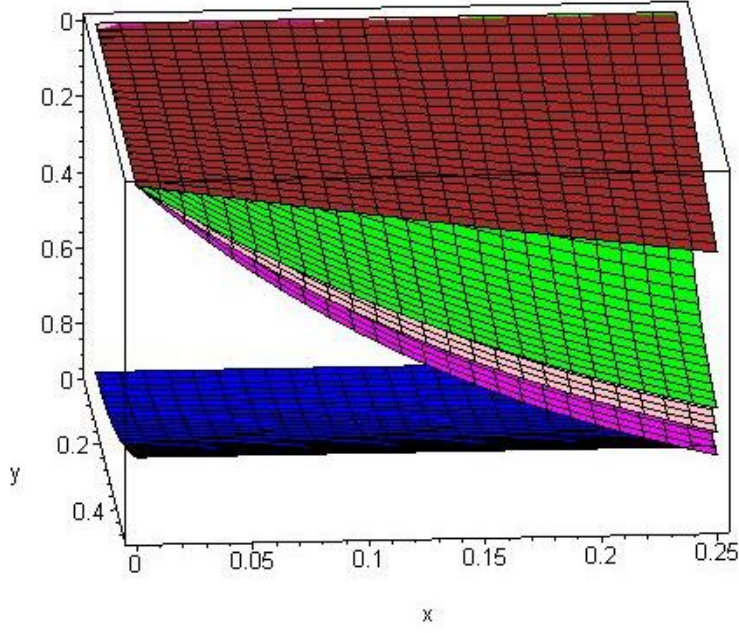
$f(x, y) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $E_{n,m}(f, r; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.22’de verilmiştir.



Şekil 4.22 $E_{n,m}(f, r; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=4, m=1, r=3$ (yeşil), $n=4, m=5, r=3$ (kırmızı), $n=4, m=10, r=3$ (pembe), $n=4, m=15, r=3$ (turkuaz), $n=4, m=25, r=3$ (fuşya)

Örnek 4.4.23

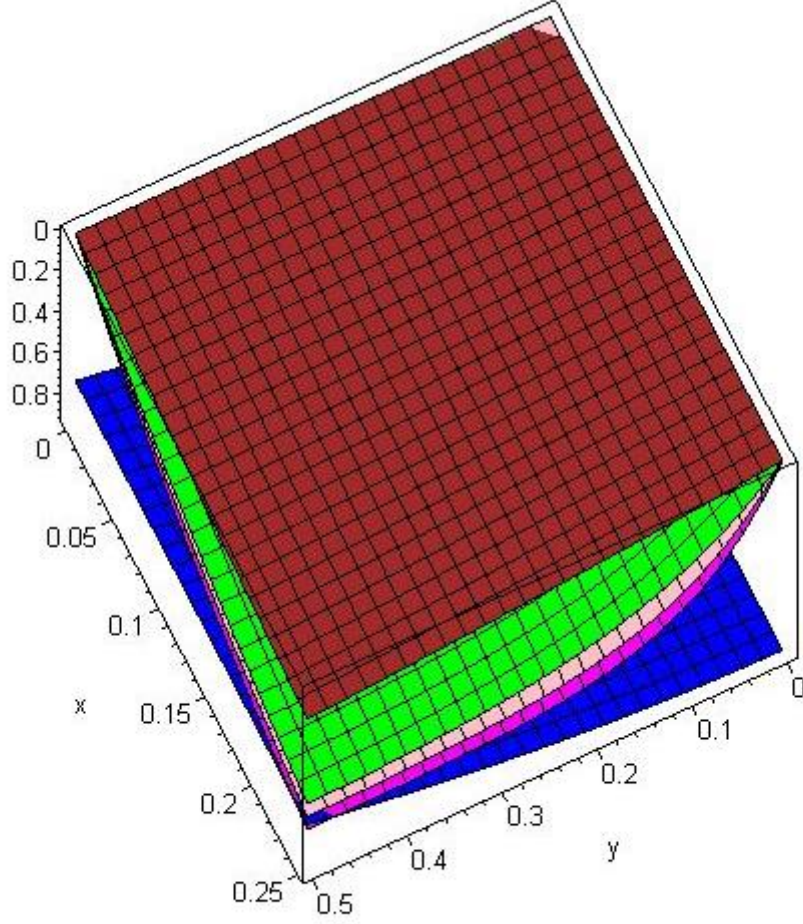
$f(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $E_{n,m}(f, r; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.23’de verilmiştir.



Şekil 4.23 $E_{n,m}(f, r; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2, r=2$ (kahverengi), $n=15, m=17, r=4$ (yeşil), $n=20, m=27, r=5$ (pembe), $n=28, m=35, r=5$ (fuşya)

Örnek 4.4.24

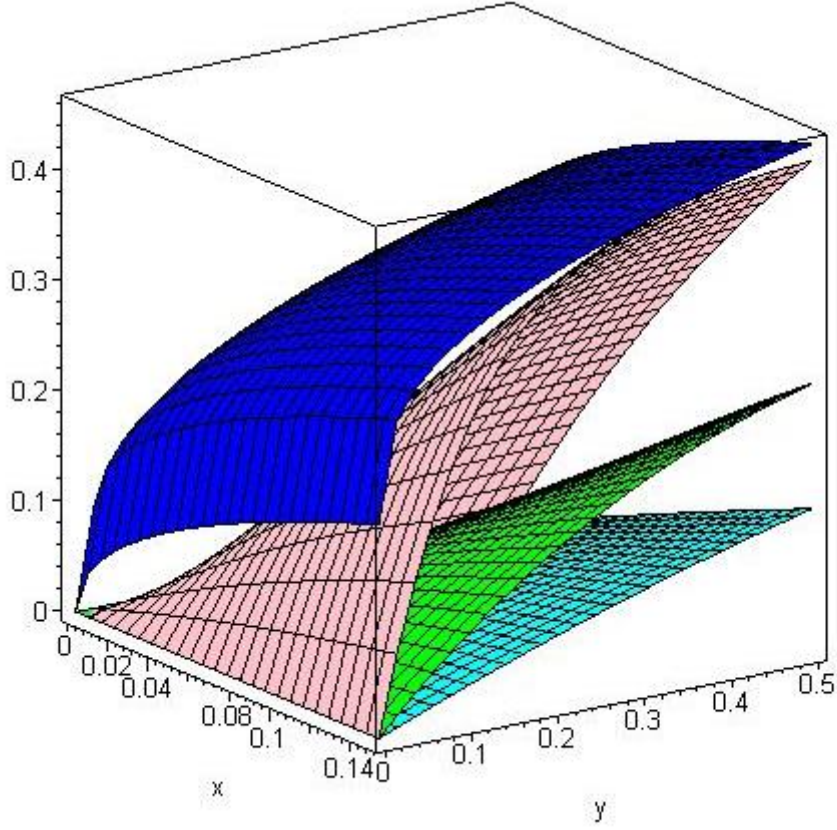
$f(x, y) = \frac{5\sqrt{x^5+1}}{2e^{y^2+1}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $E_{n,m}(f, r; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.24'de verilmiştir.



Şekil 4.24 $E_{n,m}(f, r; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{5\sqrt{x^5+1}}{2e^{y^2+1}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2, r=2$ (kahve), $n=15, m=17, r=4$ (yeşil), $n=20, m=27, r=5$ (pembe), $n=28, m=35, r=5$ (fuşya)

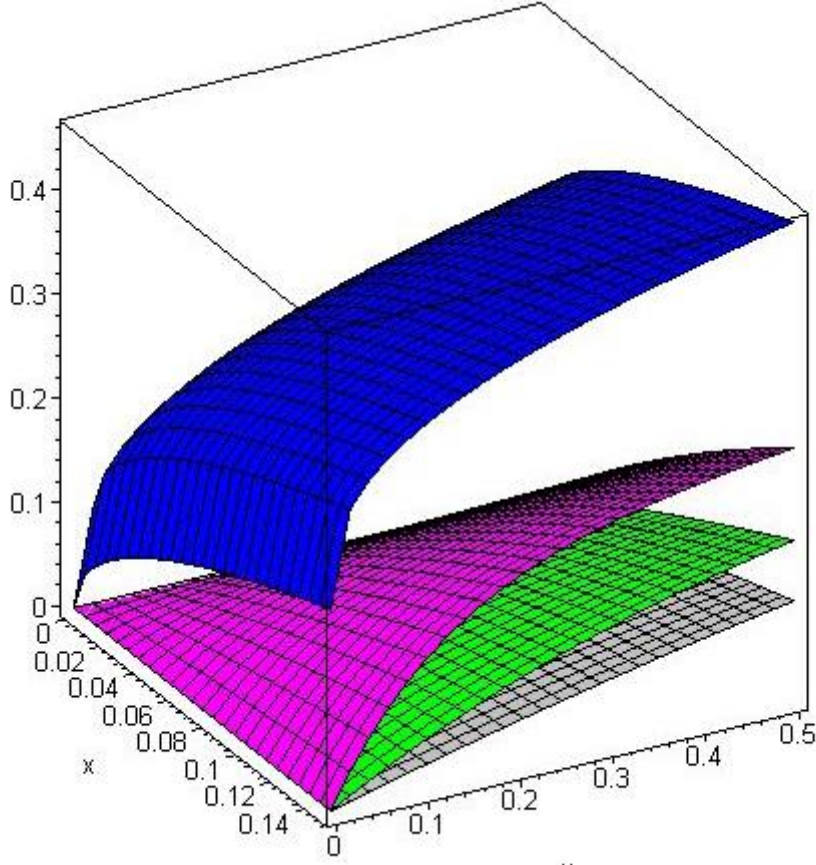
Örnek 4.4.25

(a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $E_{n,m}(f, r; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.25'de verilmiştir.



Şekil 4.25 $E_{n,m}(f, r; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2, r=2$ (turkuaz), $n=5, m=5, r=3$ (yeşil), $n=15, m=25, r=4$ (pembe)

(b) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $B_{n,m}^*(f; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.26'da verilmiştir.



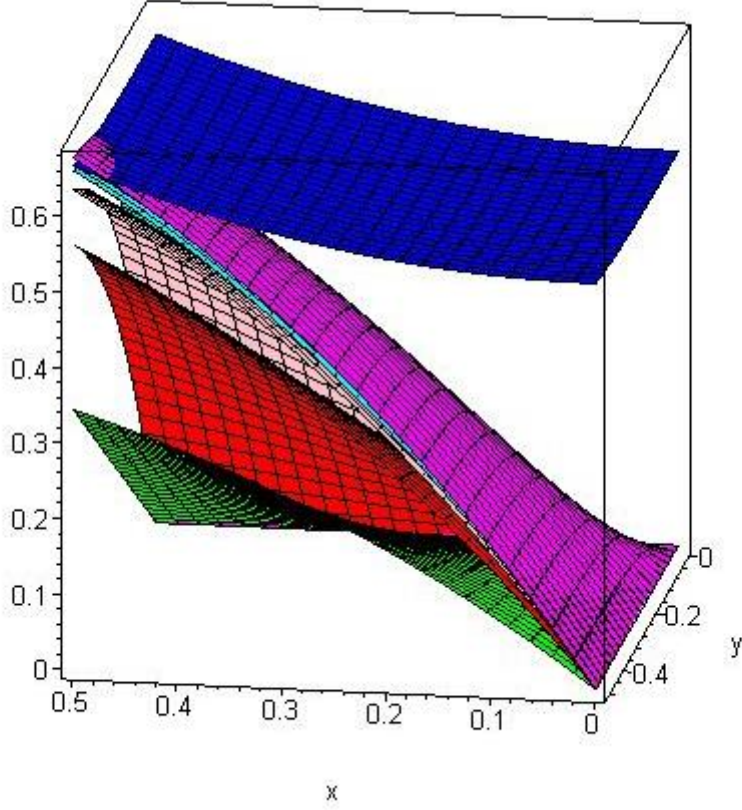
Şekil 4.26 $B_{n,m}^*(f; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=2, m=2$ (gri), $n=5, m=5$ (yeşil), $n=15, m=25$ (fuşya)

Uyarı 4.4.15

Şekil 4.25 ve Şekil 4.26'da $f(x, y) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna sırasıyla iki değişkenli Chlodowsky-Taylor ve Bernstein-Chlodowsky Polinomlarıyla yaklaşımın grafiği verilmiştir. Açıkça Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım daha iyi sonuç vermiştir.

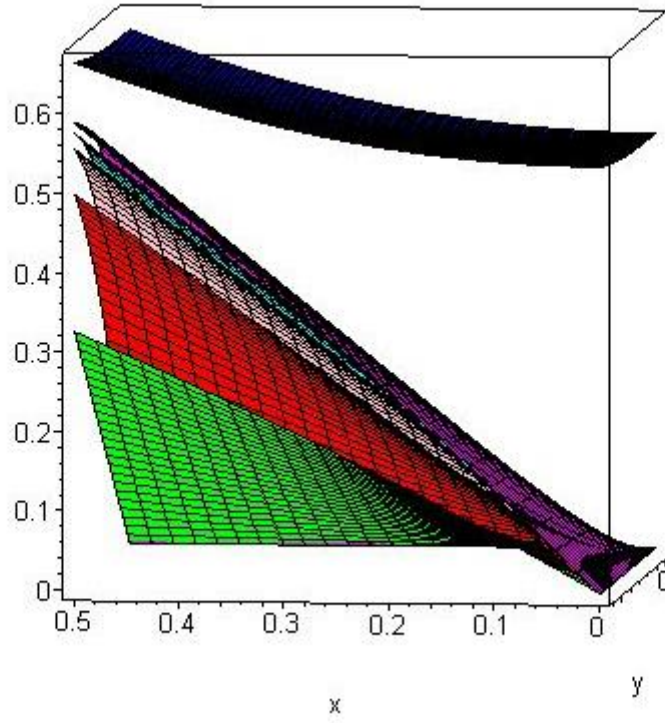
Örnek 4.4.26

(a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20} + \frac{1}{2}\left(y^3 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $E_{n,m}(f, r; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.27'de verilmiştir.



Şekil 4.27 $E_{n,m}(f, r; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20} + \frac{1}{2}\left(y^3 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=4, m=1, r=3$ (yeşil), $n=4, m=5, r=3$ (kırmızı), $n=4, m=10, r=3$ (pembe), $n=4, m=15, r=3$ (turkuaz), $n=4, m=25, r=3$ (fuşya)

(b) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20} + \frac{1}{2}\left(y^3 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $B_{n,m}^*(f; x, y)$ ile yaklaşımı veren grafik Şekil 4.28'de verilmiştir.



Şekil 4.28 $E_{n,m}(f, r; x, y)$ polinomlar dizisinde $b_n = \sqrt{n}$ ve $c_m = \sqrt[3]{m}$ alınarak $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20} + \frac{1}{2}\left(y^3 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşım, $n=4, m=1$ (yeşil), $n=4, m=5$ (kırmızı), $n=4, m=10$ (pembe), $n=4, m=15$ (turkuaz), $n=4, m=25$ (fuşya)

Uyarı 4.4.16

Şekil 4.27 ve Şekil 4.28'de $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20} + \frac{1}{2}\left(y^3 + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ fonksiyonuna sırasıyla iki değişkenli Chlodowsky-Taylor ve Bernstein-Chlodowsky Polinomlarıyla yaklaşımın grafiği verilmiştir. Açıkça Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım daha iyi sonuç vermiştir.



BÖLÜM 5

SONUÇ

Bu tezde sürekli ve r kez türevlenebilir ve r -inci türevleri sürekli olan f fonksiyonlarına bir ve iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky ve Chlodowsky-Taylor Polinomlar dizisi ile yaklaşım durumları incelenmiştir. Nümerik hesaplarla Chlodowsky-Taylor Polinomlarının daha hızlı yaklaşım yaptığı ortaya koyulmuştur.

Bu anlamda hazırlanan tez çok değişkenli fonksiyonlara yaklaşım yapacak araştırmacılara yol gösterici niteliktedir. Farklı operatörlerin karşılaştırmasını yapacak araştırmacıların başvurabileceği görsel ve sayısal olarak bulguların desteklendiği önemli bir kaynaktır.



KAYNAKLAR

- Atak S** (2012) Chlodowsky-Taylor Polinomlarıyla yaklaşım. *Yüksek Lisans Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 88.
- Bernstein S N** (1912) Demonstration Du Theoreme De Weierstrass Fondée Sur La Calcul Des Probabilités. *Comm. Soc. Math. Charkow Ser*, 2(13): 1-2.
- Büyükyazıcı İ** (2003) İki Değişkenli Bernstein Polinomlarının Yaklaşma Hızı Üzerine, *G. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi*, 11: 165-174.
- Buyukyazıcı I and Ibikli E** (2006) Inverse Theorems for Bernstein- Chlodowsky Type Polynomials. *J.Math. Kyoto Univ.* , 46(1): 21-49.
- Cebecik S** (2016) Bazı Gadjiev-Ibragimov Tipi Operatör Sınıflarının Yaklaşım Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Zonguldak, 157.
- Chlodowsky I** (1937) Sur le développement des fonctions définies dans un interval in. ni en séries de polynômes de M. S. Bernstein. *Compositio. Math.*4: 380-393.
- Coskun T** (1997) Some Properties of Linear Positive Operators in The Weighted Spaces of Unbounded Functions. *Common. Fac. Sci. Univ. Ankara*, 47:175-191.
- Gadjiev A D** (1976) On P. P. Korovkin Type Theorems. *Mathem. Zametki*, 20(5):995-998.
- Gadjiev A D, Efendiev R O and İbikli E** (1998) Generalized Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 28(4).
- Gadjieva E A and Ibikli E** (1999) The Weighted Approximation by Bernstein-Chlodowsky Polynomials, *Indian J.Pure Appl.Math.*30 (1): 83-87.
- Gazanfer A K** (2015) Değişken sınırı olan dörtyüzlü (üçgen piramit) bölgede üç değişkenli sürekli fonksiyonların Bernstein-Chlodowsky Polinomlarıyla ağırlıklı yaklaşımı. *Doktora Tezi*, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 162.
- Hacısalihoğlu H ve Hacıyev A** (1995) Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A. Ü. F. F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 1-71.
- Ibikli E** (2003) On Approximation by Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Math. Balkanica (N. S)*, 17 (3): 259-265.
- İşler N** (2009) Bir ve İki Değişkenli Bernstein-Chlodowsky Polinomları. *Yüksek Lisans Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 139.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Izgi A, Buyukyazıcı I and Ibikli E** (2009) Rate of convergence by Chlodowsky-Taylor polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 213: 426-431.
- Izgi A and Buyukyazıcı I** (2006) On a Generalization of Bernstein- Chlodowsky Polynomials for Two Variables, *International Mathematical Forum*,1, no.21, 1001-1015.
- Karsli H and Ibikli E** (2008) Convergence Rate of a New Bezier Variant of Chlodowsky Operators to Bounded Variation Functions. *J. Comput. Appl. Math*, 212(2): 431-443.
- Kırcı Serenbay S and İbikli E** (2011) Approximation by Chlodowsky-Taylor Polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (3): 878-882.
- Kirov G H** (1992) A Generalization of the Bernstein Polynomials, *Mathematica Balkanica (New Ser.)* 6 (2): 147-153.
- Korovkin P P** (1960) *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publishing Corb. Delhi, India.
- Musayev B, Alp M, Mustafayev N ve Ekincioğlu I** (2003) *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I*, Tekağaç Eylül Yayıncılık, Ankara, 366.
- Natanson I P** (1964) *Constructive Function Theory*. Frederick Ungar Publishing Company, New York, 75-78.
- Rudin W** (1991) *Functional Analysis*. Kingsport Press, Inc. 6p, United States of America, 1-100.
- Volkov V I** (1957) On The Convergence of Sequences of Linear Positive Operators in The Space of Two Variables, *Dokl. Akad. Nauk, SSSr(NS)*. 155: 17-19.
- Weierstrass K** (1885) Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reler Argumente. *Sitzungsberichte der Acad*, Berlin, 633-805.
- Zhao Y and Chen L** (2011) Weighted Approximation of Functions by Bernstein Operators on The Semi Axis, *IEEE2011*, 2821-2815.

ÖZGEÇMİŞ

Yeliz GÜLAY 1988’de Zonguldak’da doğdu. İlk ve ortaöğretimini Zonguldak’ta tamamladı; 2007 yılında Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde üniversite öğrenimine başladı. 2008 yılında Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi’ne iyi bir not ortalamasıyla yatay geçiş yaptı. 2011 yılında “iyi” derece ile mezun olduktan sonra 2013 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına kabul edildi ve Kars Dığor Anadolu Lisesine Matematik Öğretmeni olarak atandı. Ardından Zonguldak Özel Eğitim Meslek Lisesinde 3 yıl görevine devam etti ve 2 yıldır da mezun olduğu Mehmet Çelikel Lisesinde görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Terakki Mahallesi Karadeniz Caddesi Şehit Sokak no:14/B Merkez/ZONGULDAK

Tel: 0(531)9045994

E-posta: yelizesilaerim@hotmail.com