T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2019-YL-001

ARTAN VE AZALAN ZİNCİR KOŞULLU MODÜLLER VE HALKALAR

Buşra TOGAY

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Buşra TOGAY tarafından hazırlanan "Artan ve Azalan Zincir Koşullu Modüller ve Halkalar" başlıklı tez, 26.12.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU	ADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi A. Tuğba GÜROĞLU	MCBÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

26.12.2018

Buşra TOGAY

ÖZET

ARTAN VE AZALAN ZİNCİR KOŞULLU MODÜLLER VE HALKALAR

Buşra TOGAY

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2019, 129 sayfa

Bu tezin amacı, modül teorisinde önemli rol oynayan artan ve azalan zincir koşullu modül yapıları ve halka teorisinde önemli rol oynayan artan ve azalan zincir koşullu halka yapıları ele alınarak, bağlantılı modüller ve halkalar ile ilişkilerini incelemektir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, modüller ve halkalar üzerindeki artan ve azalan zincir koşullarının tarihsel gelişimine yönelik bilgiler verilip, tezin bölümlerinin içerikleri kısaca ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, bu çalışma için gerekli olan temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, artan ve azalan zincir koşullu modüllerin temel tanım ve özellikleri verilip, ilgili karakterizasyonlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, artan ve azalan zincir koşullu halkaların temel tanım ve özellikleri verilip, ilgili karakterizasyonlar incelenmiştir. Ayrıca, modül teorisi ve halka teorisindeki artan ve azalan zincir koşullarına yönelik kapsamlı örnekler verilmiştir.

Beşinci ve son bölümde, birimli ve değişmeli halkalar üzerindeki artan ve azalan zincir koşulları çalışılmıştır.

Çalışma içinde yeri geldikçe, bazı konuların tarihsel gelişimine yönelik bilgiler verilmiştir. Genel olarak çalışmadaki ispatlar, konunun daha iyi anlaşılabilmesi için detaylı olarak anlatılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Noether modül, Noether halka, Artin modül, Artin halka, sonlu üretilmiş modül, sonlu eşüretilmiş modül, essential (large) modül, small (superfluous) modül, Socle, Radikal

ABSTRACT

MODULES AND RINGS WITH ASCENDING AND DESCENDING CHAIN CONDITIONS

Buşra TOGAY

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU
2019, 129 pages

The aim of this thesis is to investigate relationships between modules and rings, by taking into consideration the module with ascending and descending chain conditions structures which play an important role in the module theory, and the ring with ascending and descending chain conditions structures which play an important role in the ring theory.

This thesis consists of five sections. In the introductory section, information on the historical development of the ascending and descending chain conditions on the modules and rings is given, and the contents of sections of the thesis are briefly expressed.

In the second section, the basic definitions and properties which is necessary for this study are given.

In the third section, basic definitions and properties of the modules with ascending and descending chain conditions are given and related characterizations are examined.

The fourth section, basic definitions and properties of the rings with ascending and descending chain conditions are given and related characterizations are examined. In addition, extensive examples are given for the ascending and descending chain conditions in module theory and ring theory.

In the fifth and last section, the ascending and descending chain conditions on commutative rings with identity have been studied.

As the occasion aises, informations on the historical development of some subjects were given. In general, the proofs in this study are explained in detail in order to understand better.

Key Words: Noetherian module, Noetherian ring, Artinian module, Artinian ring, finitely generated module, finitely cogenerated module, essential (large) module, small (superfluous) module, Socle, Radical

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimim boyunca gerek bilimsel ve akademik bilgisiyle, gerekse psikolojik desteğiyle bana hem öğretmen hem de anne olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU'na tüm içtenliğimle teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca her türlü durumda beni destekleyen, güç veren ve hayatımın en önemli noktasında bulunan değerli aileme çok teşekkür ederim.

Buşra TOGAY

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$X \subseteq M$	: X, M nin alt kümesi
$X \subsetneqq M$	: X, M nin öz alt kümesi
$A \backslash B$	: A kümesinin B kümesinden farkı
M_R	: M sağ R-modül
${}_RM$	: M sol R-modül
${}_SM_R$	: M S-R-bimodül
$A \leq M$	: A, M modülünün altmodülü
$A \lneqq M$	: A, M modülünün öz altmodülü
$A \ll M$	: A, M modülünün small atmodülü
$A \leq_e M$	: A, M modülünün essential altmodülü
$I(M)$	: M modülünün injektif hull'u
M/A	: M nin A ya bölüm modülü
$\vert X)$	: M sağ R-modülünün bir X alt kümesi ile üretilen altmodülü
$Hom_R(M,N)$	: M modülünden N modülüne R-modül homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	: M modülünün endomorfizma halkası
$Rad(M)$	: M modülünün radikali
$Soc(M)$	: M modülünün socle'si
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$\sqrt{I}$	: I idealinin radikali
$I : J$	: I idealinin J ideali ile bölümü
$Ann_R(X)$	: R halkasının bir X alt kümesinin, R deki sıfırlayanı
$r_R(X)$	: M modünün bir X alt kümesinin, R halkasındaki sağ sıfırlayanı
$l_R(X)$	: M modünün bir X alt kümesinin, R halkasındaki sol sıfırlayanı
$r_M(A)$	: R halkasının bir A alt kümesinin, M modülündeki sağ sıfırlayanı
$l_M(A)$	: R halkasının bir A alt kümesinin, M modülündeki sol sıfırlayanı
$A^{(I)}$	: A nın "I" kopyalarının direk toplamı
A^I	: A nın "I" kopyalarının direk çarpımı
$Ker(\alpha)$	: α homomorfizmasının çekirdeği
$Im(\alpha)$	: α homomorfizmasının görüntüsü

$nil(R)$	: R halkasının nilradikali
$k\text{-}dimR$	: R halkasının boyutu
$R[x]$	: Katsayıları R den olmak üzere bir x bilinmeyeni ile elde edilen polinom halkası
$\sum$	: Toplam sembolü
$\bigoplus$	: (İç) direk toplam sembolü
$\coprod$	: Dış direk toplam sembolü
$\prod$	: Direk çarpım sembolü
$:\Leftrightarrow$	: Tanım sembolü
$:=$	: Tanım sembolü
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\square$	: Kanıtın bittiğini gösteren simge

1. GİRİŞ

Vektör uzaylarının başlangıç teorisi, sonlu boyutlu uzaylar ile ilgilidir. Böyle uzaylarda, alt uzaylarının sonsuz artan ya da sonsuz azalan bir zinciri yoktur. Benzer şekilde grupların başlangıç teorisi, sonlu gruplarla ilgilidir. Alman matematikçi Amalie Emmy Noether ve Avusturyalı matematikçi Emil Artin, sonluluk koşulları ile ilgili ekilmiş olan bu çekirdeği; uygun düşünce ve yorumlarla açığa çıkartmışlardır. Bu gelişim yirminci yüzyıla dayanır. İlk olarak A. Emmy Noether'in 1921'de yayımladığı "Idealtheorie in Ringbereichen" adlı makale, değişmeli halka teorisi için temel olmuştur [14]. Bu makalede Emmy Noether, halka teorisinde idealleri göz önüne alarak artan zincir şartını incelemiştir. Bu makalenin yayımlanması, "Noether halkası" teriminin yaygınlaşmasını ve bazı matematiksel nesnelere Noether denilmesini sağlamıştır. Şimdilerde "Artin koşulu" olarak adlandırılan azalan zincir koşulunun önemi, ilk olarak Emil Artin tarafından 1927 yılında yayımladığı "Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen" adlı makalesinde dile getirildi [2]. Emmy Noether ve Emil Artin'in bu çalışmaları, cebire yeni bir boyut getirmiştir.

Bu tezde bahsedilen yaklaşımlardan yola çıkılarak, modül teorisi ve halka teorisi üzerinde artan ve azalan zincir koşulları çalışılmıştır. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde tezde kullanılacak olan temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir [1], [3], [4], [8], [10], [11], [13].

Üçüncü bölümde artan zincir koşullu modül (Noether modül) ve azalan zincir koşullu modül (Artin modül) tanımlarına yer verilerek, artan ve azalan zincir koşullu modüllerle ilgili karaterizasyonlar incelenmiştir. Noether ve Artin modüllerin, sonlu üretilmiş modül ve sonlu eşüretilmiş modül kavramları ile olan ilişkisine yer verilmiştir. Daha sonra, artan ve azalan zincir koşullu modüllerin endomorfizmaları çalışılmıştır. Ayrıca Noether ve Artin modüllerin "radikal, socle, yarıbasit modül, essential altmodül, small altmodül, injektif hull, direk parçalanamayan altmodül ve serbest modül" kavramları ile ilgili bağlantıları çalışılmış ve bu bağlantılarla ilgili Noether ve Artin modüllerin karakterizasyonları incelenmiştir [1], [4], [10].

Dördüncü bölümde artan zincir koşullu halka (Noether halka) ve azalan zincir koşullu halka (Artin halka) tanımlarına yer verilip, Noether modül-Noether halka ve Artin modül-Artin halka arasındaki paralel ilişki ifade edilmiştir. Daha sonra, sonlu üretilmiş modül kavramı ile artan ve azalan zincir koşullu modüller arasındaki ilişki incelenmiştir. Devamında konunun daha anlaşılır olması için, zincir koşulları ile ilgili örneklere ispatları ile birlikte yer verilmiştir. Ayrıca artan zincir koşullu halkalarla ilgili, cebirsel geometride önemli uygulamalara sahip olmakla birlikte belirli bazı halkalar için kurulumun temeli olan Hilbert Baz Teoremi verilmiştir. Daha sonra, Baer Kriteri kullanılarak Noether halkalar ile injektif hull ve injektif modül kavramları arasındaki bağlantı incelenmiştir. Artin ve Noether halkalar üzerindeki injektif modüllerin parçalanışına yer verilerek, bu modüllerin direk parçalanamayan altmodüllerinin özellikleri ile ilgili merak edilen soruların cevaplarına yönelik çalışılmıştır. Artin halkalar ile bu halkaların Jacobson radikallerinin özellikleri incelenip, konu ile ilgili önemli bir yere sahip olan Hopkins ve Levitzki teoremlerine yer verilmiştir. Daha sonra Artin ve Noether halkalar ile bu halkalar üzerindeki injektif modüllerin direk parçalanamayan (injektif) altmodülleri ve yine bu halkalar üzerindeki basit modüllerin injektif hull'ları arasındaki ilişki çalışılmıştır [1], [3], [4], [6], [7], [10], [15], [16].

Beşinci ve son bölümde birimli ve değişmeli halkalar üzerindeki artan ve azalan zincir koşulları incelenmiştir. Öncelikle primary parçalanış kavramının tanımı ve ilgili özelliklerine yer verilip, daha sonra birimli ve değişmeli Noether halkalar ile ilgili olan bağlantısı çalışılmıştır. Bu bağlamda önemli yere sahip olan Lasker-Noether teoremine yer verilmiştir. Devamında Multinomial teoreminin, birimli ve değişmeli Noether halkalar üzerindeki bir uygulamasına değinilmiştir. Son olarak birimli ve değişmeli Artin halkaların yapısal özellikleri incelenip, Artin halkalar için yapı teoremine yer verilmiştir [1], [3], [5], [8], [9], [11], [12], [17], [18].

2. TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde tez için gerekli olan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir [1], [3], [4], [8], [10], [11], [13].

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1. [10] R bir halka olsun.

(1). M bir toplamsal değişmeli (= abel) grup ve

(2).
$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m, r) &\longmapsto mr \end{aligned}$$

modül çarpımı olarak adlandırılan dönüşüm için $m, m_1, m_2 \in M$ ve $r, r_1, r_2 \in R$ olmak üzere

(a). $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$

(b). $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$

(c). $(mr_1)r_2 = m(r_1 r_2)$

özellikleri sağlanıyorsa M ye *sağ R-modül* denir ve M_R ile gösterilir.
R birimli bir halka ve M bir sağ R-modül olsun. O zaman

(d). $1 \in R$ ve $m \in M$ için $m1 = m$

özelliği sağlanıyorsa, M ye *birimsel sağ R-modül* denir.

Benzer tanım, $\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$ dönüşümü ile sol R-modüller için de yapılır.

Tanım 2.1.2. [10] R ve S iki halka olsun. Eğer M bir sol S-modül ve sağ R-modül ise, o zaman M ye *S-R-bimodül* denir ve ${}_SM_R$ ile gösterilir.

Aksi belirtilmediği sürece [13] e dayalı atıfların dışında kalan halkalar, birimli ve modüller, birimsel (sağ ya da sol) R-modüller olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.3. [10] M bir sağ R-modül ve A, M nin bir alt kümesi olsun. Eğer A, M deki işlemlere göre bir R-modül oluyorsa, A ya M *nin bir altmodülü* denir ve $A \leq M$ veya $A_R \leq M_R$ ile gösterilir.

Özellik 2.1.4. [10] Tanım 2.1.1 ve Tanım 2.1.2 ye dikkat edilirse, bir R halkasını bir sağ R-modül R_R, bir sol R-modül $_RR$ ve bir R-R-bimodül $_RR_R$ olarak düşünebiliriz. O zaman R halkasının

(1). bir sağ ideali R_R nin bir altmodülü,

(2). bir sol ideali $_RR$ nin bir altmodülü ve

(3). bir (iki yanlı) ideali $_RR_R$ nin bir altmodülüdür.

Eğer R halkası değişmeli ise, o zaman idealler sağ, sol ya da iki yanlı olarak ayırt etmeksizin sadece R halkasının ideali olarak dile getirilir.

Lemma 2.1.5. [10, Lemma 2.2.2] $M = M_R$ bir sağ R-modül olsun. M nin boş olmayan bir A alt kümesi için aşağıdakiler denktir:
(1). $A \leq M$
(2). A, M nin bir toplamsal alt grubudur ve her $a \in A$, her $r \in R$ için $ar \in A$ dır.
(3). Her $a_1, a_2 \in A$ için $a_1 + a_2 \in A$ ve her $a \in A$, her $r \in R$ için $ar \in A$ dır.

Tanım 2.1.6. [10] M bir sağ R-modül olsun.

(1). M modülü *basit (simple) modül* olarak adlandırılır :⇔

$$M \neq 0 \text{ ve her } A \leq M \text{ altmodülü için } A = 0 \text{ veya } A = M \text{ dir.}$$

(2). Bir R halkası *basit (simple) halka* olarak adlandırılır :⇔

$$R \neq 0 \text{ ve her } A \leq {}_RR_R \text{ ideali için } A = 0 \text{ veya } A = R \text{ dir.}$$

(3). A, M nin bir altmodülü olsun. A *minimal altmodül* olarak adlandırılır :⇔

$$0 \lneqq A \text{ ve } M \text{ nin } B \lneqq A \text{ olacak şekilde her } B \text{ altmodülü için } B = 0 \text{ dır.}$$

Ayrıca minimal altmodüller, basit altmodüllerdir.

(4). A, M nin bir altmodülü olsun. A *maksimal altmodül* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$

$$A \lneqq M \text{ ve } M \text{ nin } A \lneqq B \text{ olacak şekilde her } B \text{ altmodülü için } B = M \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.7. [8] R bir halka ve M, R nin bir ideali olsun. Eğer M, R den farklı ve M ile R arasında başka bir ideal yoksa, bu M idealine *maksimal ideal* denir.

Tanım 2.1.8. [13] R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer I ideali sıfırdan farklı ve R halkasının $\{0\} \neq J \subsetneqq I$ olacak şekilde başka bir J ideali yoksa, bu I idealine *minimal ideal* denir.

Tanım 2.1.9. [13] Birimli ve değişmeli bir R halkası, *yerel halka (local ring)* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ R halkasının yalnızca bir maksimal ideali vardır.

Tanım 2.1.10. [11] Birimli ve değişmeli bir R halkası, *yarıyerel halka (semilocal ring)* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ R halkasının yalnızca sonlu sayıda maksimal ideali vardır. Açıkça her yerel halka, aynı zamanda bir yarıyerel halkadır.

Tanım 2.1.11. [13] Birimli bir halkada, her sıfırdan farklı eleman tersinir ise bu halkaya *bölümlü halka (skew field)* denir. Değişmeli bölümlü halkaya *cisim* denir.

Tanım 2.1.12. [8] R bir değişmeli halka olsun. R nin bir I ideali aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bu ideale *asal ideal* denir:
(1). $I \neq R$
(2). Her $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $a \in I$ ya da $b \in I$ dır.

Teorem 2.1.13. [13, Theorem 14.1.7] R birimli ve değişmeli bir halka olsun. O zaman R halkasının her maksimal ideali, R nin bir asal idealidir.

Lemma 2.1.14. [10, Lemma 2.2.4] $M_R = M$ modülü basittir $:\Leftrightarrow$

$$M \neq 0 \text{ ve her } m \in M \text{ için } m \neq 0 \text{ ise } mR = M \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1.15. [10] R bir halka ve M bir sağ R-modül olsun.

(1). $m \in M$ için

$$mR = \{mr|\ r \in R\},$$

M nin bir altmodülüdür. Bu altmodüle, M nin m *ile üretilmiş (devirli) altmodülü* denir.

(2). M modülü *devirli modül* olarak adlandırılır :⇔

$$M = m_0R = \{m_0r|\ r \in R\} \text{ olacak şekilde bir } m_0 \in M \text{ vardır.}$$

Tanım 2.1.16. [10] Bir halkanın devirli ideallerine *temel ideal (principal ideal)* denir. Her ideali temel ideal olan bir değişmeli ve birimli halkaya *temel ideal halkası (principal ideal ring)* denir.

Tanım 2.1.17. [13] R bir halka olsun. O zaman R nin sıfırdan farklı bir a elemanı *sıfır bölen (zero divisor)* olarak adlandırılır :⇔

(i). $b \neq 0$ ve

(ii). $ab = 0$ ya da $ba = 0$

olacak şekilde bir $b \in R$ vardır.

Tanım 2.1.18. [13] R birimli ve değişmeli bir halka olsun. O zaman R nin sıfır bölenleri yoksa, bu R halkasına *tamlık bölgesi (integral domain)* denir.

Teorem 2.1.19. [13, Theorem 14.1.11] R birimli ve değişmeli bir halka ve $I \neq R$ olmak üzere I, R nin bir ideali olsun. O zaman I bir asal idealdir ancak ve ancak R/I bir tamlık bölgesidir.

Teorem 2.1.20. [13, Theorem 14.1.12] R birimli ve değişmeli bir halka ve M, R nin bir ideali olsun. O zaman M bir maksimal idealdir ancak ve ancak R/M bir cisimdir.

Tanım 2.1.21. [8] R bir tamlık bölgesi olsun. R nin her ideali temel ideal ise, o zaman R ye *temel ideal bölgesi (principal ideal domain)* denir ve *TİB (PID)* ile gösterilir.

Tanım 2.1.22. [10] *Modülarite Kuralı:* M bir modül $A, B, C \leq M$ ve $B \leq C$ olmak üzere

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + B$$

dir.

Tanım 2.1.23. [1] R ve S bir halka ve $f : R \to S$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in R$ için

(1). $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(2). $f(xy) = f(x)f(y)$

(3). $f(1_R) = 1_S$

özellikleri sağlanıyorsa, f fonksiyonuna *R den S ye halka homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.24. [10] A ve B sağ R-modüller olsun.

$$\forall a_1, a_2 \in A \ \ \forall r_1, r_2 \in R \ \ [\alpha(a_1r_1 + a_2r_2) = \alpha(a_1)r_1 + \alpha(a_2)r_2]$$

koşulunu sağlayan $\alpha : A \to B$ fonksiyonu *R-modül homomorfizması* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.25. [10] M ve N R-modüller olmak üzere $\alpha : M \to N$ bir R-modül homomorfizması olsun.

(1). Eğer α örten bir homomorfizma ise o zaman α, *R-modül epimorfizması* olarak adlandırılır. Bu durumda $\mathrm{Im}(\alpha) = N$ dir.

(2). Eğer α injektif (yani, birebir) ise o zaman α, *R-modül monomorfizması* olarak adlandırılır. α, R-modül monomorfizmasıdır ancak ve ancak $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$ dır.

(3). Eğer α hem injektif hem de örten ise o zaman α, *R-modül izomorfizması* olarak adlandırılır.

(4). K, M nin bir altmodülü olsun. O zaman

$$\eta_K(x) = x + K \in M/K \qquad (x \in M)$$

olacak şekilde M modülünden M/K bölüm modülüne tanımlı bir $\eta_K : M \to M/K$ dönüşümü, $Ker(\eta_K) = K$ olmak üzere bir R-modül epimorfizmasıdır. η_K *doğal epimorfizma* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.26. [10] M bir R-modül olsun.

(1). $\alpha : M \to M$ bir R-modül homomorfizması olsun. Bu durumda α, *R-modül endomorfizması* olarak adlandırılır.

(2). $\alpha : M \to M$ bir R-modül izomorfizması olsun. Bu durumda α, *R-modül otomorfizması* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.27. [10] $M = M_R$ olsun.

(1). M modülünün bir X alt kümesi, *M nin bir üreten sistemi* olarak adlandırılır :⇔

$$\big|X\big) := \begin{cases} \Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i \mid x_i \in X,\ r_i \in R \ \text{ve}\ n \in \mathbb{N}\Big\}, & X \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0, & X = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\big|X\big) = M$ dir.

(2). Bir M modülü (ya da sağ ideal) *sonlu üretilmiş* olarak adlandırılır :⇔ M nin bir sonlu üreten sistemi vardır.

(3). Bir M modülünün bir X alt kümesi *serbest (free)* olarak adlandırılır :⇔ her sonlu $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subseteq X$ alt kümesi için (burada $i, j = 1, 2, \ldots, m$ olmak üzere $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ dir),

$$r_i \in R \ \text{olmak üzere} \ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0$$

ise $i = 1, 2, \ldots, m$ için $r_i = 0$ dır.

(4). Bir M modülünün bir X alt kümesi *M nin bazı (tabanı)* olarak adlandırılır :⇔ X, M nin bir üreten sistemidir ve X serbesttir.

Tanım 2.1.28. [10] M modülüne *sonlu eşüretilmiş modül* denir :⇔ $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$ olmak üzere $A_i \leq M$ altmodüllerinin her $\{A_i | i \in I\}$ kümesi için, $\bigcap_{i \in I_o} A_i = 0$ olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_o\}$ alt kümesi (yani, $I_o \subseteq I$ ve I_o sonlu) vardır.

Lemma 2.1.29. [10, Corollary 3.1.11] $U_R \leq M_R$ olsun. O zaman:
M/U sonlu eşüretilmiştir ancak ve ancak $\bigcap_{i\in I} A_i = U$ olmak üzere $A_i \leq M$ altmodüllerinin her $\{A_i | i \in I\}$ kümesinde, $\bigcap_{i\in I_o} A_i = U$ olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_o\}$ alt kümesi vardır.

Lemma 2.1.30. [10, Corollary 2.3.12] Her sonlu üretilmiş, sıfırdan farklı M modülü bir maksimal altmodüle sahiptir.

Teorem 2.1.31. [10, Theorem 2.3.13] M_R modülü sonlu üretilmiştir ancak ve ancak $\sum_{i\in I} A_i = M$ olmak üzere $A_i \leq M$ altmodüllerinin her $\{A_i | i \in I\}$ kümesinde, $\sum_{i\in I_o} A_i = M$ olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_o\}$ alt kümesi vardır.

Lemma 2.1.32. [10, Lemma 4.4.1] $F = F_R$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:

(1). F modülünün bir bazı (tabanı) vardır.

(2). $F = \bigoplus_{i\in I} A_i$ ve her $i \in I$ için $R_R \cong A_i$ dir.

Tanım 2.1.33. [10] Lemma 2.1.32 deki koşulları sağlayan bir F modülü *serbest (free) modül* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.34. [8, Aritmetiğin Temel Teoremi] $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ olmak üzere $1 \leq i \leq k$ için p_i ler asal sayılar ve her i için $t_i > 0$ olacak şekilde herhangi bir pozitif $n > 1$ tamsayısı

$$n = {p_1}^{t_1} {p_2}^{t_2} \cdots {p_k}^{t_k}$$

formunda yazılabilir. Bu yazılış şekli tektir.

Aksiyom 2.1.35. [8, Seçme Aksiyomu] Bir boştan farklı küme ile indislenmiş boştan farklı kümelerin bir ailesinin çarpımı, boştan farklıdır.

Tanım 2.1.36. [4] X boştan farklı bir küme, $\leq$ bağıntısı X kümesi üzerinde tanımlı bir kısmi sıralama bağıntısı ve C, X kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. C, X kümesinde bir *zincir* olarak adlandırılır :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in C$ için

$$x \leq y \qquad \text{ya da} \qquad y \leq x$$

dir.

Lemma 2.1.37. [10, Zorn Lemma] A, boştan farklı bir küme ve $\leq$ bağıntısı, A kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun. A kümesinin her zincirinin bir üst sınırı varsa, o zaman A kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.

Tanım 2.1.38. [10] Bir A modülünün aşağıdaki $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ sonlu zincirlerini düşünelim:

$$(\mathbf{B}) : 0 = B_0 \leq B_1 \leq \cdots \leq B_{k-1} \leq B_k = A$$
$$(\mathbf{C}) : 0 = C_0 \leq C_1 \leq \cdots \leq C_{l-1} \leq C_l = A$$

(1). $\mathbf{B}$ *zincirinin uzunluğu*, k dır.
(2). $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ nin *inceltmesi*dir $:\Leftrightarrow$ $l \geq k$ olmak üzere $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ zincirinden bazı C_j ler çıkartılarak elde edilen zincirdir. Yani $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ nin alt zinciridir. Bu durumda $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ de olabilir.
(3). A nın $\mathbf{B}$ zinciri, *kompozisyon serisi* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$
her $i = 1, 2, \cdots, k$ için [B_{i-1}, B_i de maksimaldir.] ($\Leftrightarrow$ her $i = 1, 2, \cdots, k$ için [B_i/B_{i-1} basittir.])
(4). A modülü *sonlu uzunluklu* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $A = 0$ ya da A nın bir kompozisyon serisi vardır.

Lemma 2.1.39. [10, Corollary 3.5.3(1)] A, sonlu uzunluklu bir modül olsun. O zaman

$$(\mathbf{B}) : 0 = B_0 \lneqq B_1 \lneqq \cdots \lneqq B_{k-1} \lneqq B_k = A$$

şeklindeki her $\mathbf{B}$ zinciri, bir kompozisyon serisine inceltilebilir.

Teorem 2.1.40. [10, 1. İzomorfizma Teoremi] A ve B modül ve $\alpha : A \to B$ bir modül homomorfizması olsun. O zaman

$$A/Ker(\alpha) \cong Im(\alpha)$$

dır.

Teorem 2.1.41. [10, 2. İzomorfizma Teoremi] A bir modül olmak üzere B ve C, A nın altmodülleri olsun. O zaman

$$(B+C)/C \cong B/(B\cap C)$$

dir.

Tanım 2.1.42. [10] M bir sağ R-modül olsun. O zaman:

(1). Eğer $(A_i \mid i \in I)$, M_R modülünün altmodüllerinin bir ailesi ise, o zaman $\prod\limits_{i\in I} A_i$, $(A_i \mid i \in I)$ ailesinin *direk çarpımı* olarak adlandırılır.
$(A_i \mid i \in I)$ ailesinin $\prod\limits_{i\in I} A_i$ çarpımı, her $i \in I$ için $\alpha(i) \in A_i$ olmak üzere

$$\alpha : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

dönüşümlerinin kümesidir.

$a_i := \alpha(i)$, α nın i ninci bileşenidir.

$(a_i) := (\alpha(i)) := \alpha.$

(2). I indisinin sayılabilir olması zorunlu değildir. Eğer I sayılabilir ve $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ise, o zaman $(a_i) \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ elemanı için

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots) := (a_i)$$

notasyonu kullanılır.

(3). Bir $(a_i) \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ elemanı, *sonlu değerli* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $a_i \neq 0$ olmak üzere $i \in I$ nın kümesi sonludur (aynı zamanda boş küme sonlu olarak düşünülür).

$\prod\limits_{i\in I} A_i$ nin sonlu değerli tüm elemanlarının kümesi, $\prod\limits_{i\in I} A_i$ nin bir altmodülüdür.

(4). $\prod_{i \in I} A_i$ nin sonlu değerli tüm elemanlarının altmodülü, $(A_i \mid i \in I)$ ailesinin *dış direk toplamı* olarak adlandırılır ve $\coprod_{i \in I} A_i$ ile gösterilir.

Eğer I sonlu ise, o zaman

$$\prod_{i \in I} A_i = \coprod_{i \in I} A_i$$

dir.

Tanım 2.1.43. [10] M bir R-modül ve her $i \in I$ için B_i ler, M nin altmodülleri olsun. M, $\{B_i | i \in I\}$ kümesinin *(iç) direk toplamı* olarak adlandırılır ve $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$ ile gösterilir $:\Leftrightarrow$

(1). $M = \sum_{i \in I} B_i$ ve

(2). her $j \in I$ için $B_j \cap \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} B_i = 0$

dır. $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$, aynı zamanda *$M$ nin B_i altmodüllerinin toplamına bir direk parçalanışı (direct decomposition)* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.44. [10, Theorem 4.2.1] $(A_i \mid i \in I)$, R-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman

$$\coprod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i' \qquad \text{ve} \qquad A_i \cong A_i'$$

dır.

Uyarı 2.1.45. [10] Birbirine izomorf olan A_i ve A_i' modülleri için A_i, A_i' nin yerine yazılır. Ayrıca Teorem 2.1.44 te, iç direk toplam ile dış direk toplam arasındaki farklılıklar sıklıkla göz ardı edilerek, her iki durum için de $\bigoplus_{i \in I} A_i$ yazılır ve sadece *direk toplam* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.46. [10] $\mathbf{M}_R$ sağ R-modüllerin bir ailesi, I boştan farklı bir küme ve $A \in \mathbf{M}_R$ olsun. O zaman

(a). her $i \in I$ için $A_i = A$ olmak üzere $A^I := \prod_{i \in I} A_i$ olarak tanımlanan A^I, A *nın I kopyalarının direk çarpımı* olarak adlandırılır.

(b). her $i \in I$ için $A_i = A$ olmak üzere $A^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} A_i$ olarak tanımlanan $A^{(I)}$, *A nın I kopyalarının direk toplamı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.47. [10] A, B ve C sağ R-modüller ve B_0, B nin bir altmodülü olsun.

(1). B_0 altmodülü, B modülünün bir *direk toplananı (direct summand)* olarak adlandırılır :⇔

$$B = B_0 \bigoplus B_1 \text{ olacak şekilde } B \text{ nin bir } B_1 \text{ altmodülü vardır.}$$

(2). Bir $\alpha : A \to B$ monomorfizmasına *split (parçalanabilir)* denir :⇔ $\mathrm{Im}(\alpha)$, B modülünün bir direk toplananıdır.

(3). Bir $\beta : B \to C$ epimorfizmasına *split (parçalanabilir)* denir :⇔ $\mathrm{Ker}(\beta)$, B modülünün bir direk toplananıdır.

Tanım 2.1.48. [10]

(1). Bir M modülünün bir A altmodülü, M de *small (superfluous) altmodül* olarak adlandırılır ve $A \ll M$ ile gösterilir :⇔

$$\forall U \leq M \; [A + U = M \Rightarrow U = M]$$

(2). Bir M modülünün sıfırdan farklı bir A altmodülü, M de *essential (large) altmodül* olarak adlandırılır ve $A \leq_e M$ ile gösterilir :⇔

$$\forall U \leq M \; [A \cap U = 0 \Rightarrow U = 0]$$

(3). Bir R halkasının sağ, sol ya da iki yanlı bir A ideali, R de *small (superfluous) ideal* olarak adlandırılır :⇔ A; sırasıyla R_R, ${}_RR$ ya da ${}_RR_R$ nin bir small altmodülüdür.

(4). Bir R halkasının sağ, sol ya da iki yanlı sıfırdan farklı bir A ideali, R de *essential (large) ideal* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ A; sırasıyla R_R, ${}_RR$ ya da ${}_RR_R$ nin bir essential altmodülüdür.

(5). Bir $\alpha : A \to B$ homomorfizması *small homomorfizma* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\alpha) \ll \mathrm{A}$ dır.

(6). Bir $\alpha : A \to B$ homomorfizması *essential homomorfizma* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\alpha) \leq_{\mathrm{e}} \mathrm{B}$ dir.

Tanım 2.1.49. [10] M bir sağ R-modül ve $A \leq M$ olsun.
$A' \leq M$, M modülünde A altmodülünün *arakesit tümleyeni* olarak adlandırılır ve kısaca *inco* ile gösterilir $:\Leftrightarrow$

(1). $A \cap A' = 0$.

(2). A' altmodülü, $A \cap A' = 0$ da maksimaldir. Yani,

$$\forall C \leq M\big[(A \cap C = 0 \text{ ve } A' \leq C) \Rightarrow A' = C\big]$$

dir.

Teorem 2.1.50. [10, Theorem 5.3.1(a)] Bir Q_R modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

(1). Her

$$\xi : Q \to B$$

monomorfizması splittir (yani $\mathrm{Im}(\xi)$, B de bir direk toplanandır).

(2). Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması ve her $\varphi : A \to Q$ homomorfizması için, $\varphi = \kappa\alpha$ olacak şekilde bir $\kappa : B \to Q$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[dl, dashed, "\kappa"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir (yani, $\varphi = \kappa\alpha$ dır).

(3). Her $\alpha : A \to B$ monomorfizması için

$$\mathrm{Hom}(\alpha, 1_Q) : \mathrm{Hom}_R(B, Q) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q)$$

bir epimorfizmadır.

Tanım 2.1.51. [10] Teorem 2.1.50 nin denk koşullarından birini sağlayan bir Q_R modülüne *injektif R-modül* denir.

Tanım 2.1.52. [10] $M = M_R$ ve $Q = Q_R$ olsun.
Bir $\eta : M \to Q$ monomorfizması, M modülünün bir *injektif hull*'u olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ Q injektif ve η bir essential monomorfizmadır. Aynı zamanda, M modülünün injektif hull'u $I(M)$ ile gösterilir.

Lemma 2.1.53. [10, Corollary 5.1.7] M bir R-modül olmak üzere her $i \in I$ için $M_i \leq M$, $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$, $A_i \leq_e M_i$ ve

$$A := \sum_{i\in I} A_i = \bigoplus_{i\in I} A_i$$

olsun. O zaman

$$A \leq_e M \ \ ve \ \ M = \bigoplus_{i\in I} M_i$$

dir.

Tanım 2.1.54. [10] R bir halka, $\{\ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots\}$ sağ R-modüllerinin bir kümesi ve $\{\ldots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots\}$ R-modül homomorfizmalarının bir kümesi olmak üzere

$$\mathbf{A} := \ldots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \ldots$$

sağ R-modül homomorfizmalarının tek yanlı ya da iki yanlı, sonlu ya da sonsuz bir dizisi olsun. Örneğin:

$$\mathbf{A} := 0 \to A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\alpha_3} \ldots$$

ya da

$$\mathbf{A} := \ldots \xrightarrow{\alpha_{-4}} A_{-3} \xrightarrow{\alpha_{-3}} A_{-2} \xrightarrow{\alpha_{-2}} A_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} 0$$

ya da

$$\mathbf{A} := 0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \to 0$$

olsun. $0 \to A$ ve $K \to 0$, açık bir şekilde R-modül homomorfizmalarıdır.

(a). Bir **A** dizisi *tam dizi* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

formundaki her alt dizi için,

$$\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$$

özelliği sağlanır.

(b). Bir **A** tam dizisi *split (parçalanabilir) tam dizi* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

formundaki her alt dizi için,

$$\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$$

A_i modülünün bir direk toplananıdır.

(c).

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \to 0$$

formundaki bir **A** tam dizisi *kısa tam dizi* olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.55. [10, Theorem 8.1.3] Bir $M = M_R$ modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

(1). M nin her altmodülü, basit altmodüllerinin bir toplamıdır.

(2). M modülü, basit altmodüllerinin bir toplamıdır.

(3). M modülü, basit altmodüllerinin bir direk toplamıdır.

(4). M nin her altmodülü, M nin bir direk toplananıdır.

Tanım 2.1.56. [10] $M = M_R$ olsun. O zaman:

(a). Bir M modülü *yarıbasit* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ M modülü Teorem 2.1.55 deki denk koşulları sağlar.

(b). Bir R halkası *sağ yarıbasit* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ R_R yarıbasittir.

(c). Bir R halkası *sol yarıbasit* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ ${}_RR$ yarıbasittir.

Teorem 2.1.57. [10, Theorem 9.1.1] $M = M_R$ olsun. O zaman

(a).

$$\sum_{A \ll M} A = \bigcap_{\substack{B \leq M, \\ B \ maksimal}} B = \bigcap_{\substack{N_R \ yaribasit, \\ \varphi \in Hom_R(M,N)}} \mathrm{Ker}(\varphi)$$

(b).

$$\bigcap_{A \leq_e M} A = \sum_{\substack{B \leq M, \\ B \ minimal \\ (=B \ basit)}} B = \sum_{\substack{N_R \ yaribasit, \\ \varphi \in Hom_R(N,M)}} \mathrm{Im}(\varphi)$$

dir.

Tanım 2.1.58. [10]

(1). Teorem 2.1.57 (a) daki eşitliklerde gösterilen M nin altmodüllerine *M modülünün radikali* denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir.

(2). Teorem 2.1.57 (b) deki eşitliklerde gösterilen M nin altmodüllerine *M modülünün socle'si* denir ve $Soc(M)$ ile gösterilir.

Lemma 2.1.59. [10, Corollary 9.1.3(b)] $M = M_R$ olsun. $Soc(M)$, M modülünün en büyük yarıbasit altmodülüdür.

Tanım 2.1.60. [1] R bir halka olsun. R_R nin radikali $Rad(R_R)$, R halkasının tüm maksimal sağ ideallerinin arakesitidir. Yani $Rad(R_R)$ radikali, R halkasının bir (iki yanlı) idealidir. R halkasının bu ideali, R nin *Jacobson radikali* olarak adlandırılır ve kısaca $J(R)$ ile gösterilir.

$J(R)$, aynı zamanda R halkasının tüm maksimal sol ideallerinin de arakesitidir. Sonuç olarak,

$$Rad(R_R) = J(R) = Rad(_R R)$$

dir.

Tanım 2.1.61. [1] Bir R halkasının bir x elemanı *nilpotent* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $x^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.
Böyle bir n pozitif tamsayısına *nilpotent indisi* denir.

Tanım 2.1.62. [10]
(1). Bir R halkasının bir (sağ, sol ya da iki yanlı) I ideali *nil ideal* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$

$$\forall a \in I \; \exists n \in \mathbb{Z}^+ \; [a^n = 0].$$

(2). Bir R halkasının bir (sağ, sol ya da iki yanlı) I ideali *nilpotent ideal* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ \; [I^n = 0].$$

Özellik 2.1.63. [10] *Açık bir şekilde bir R halkasının her nilpotent (tek yanlı ya da iki yanlı) I ideali, bir nil idealdir. Fakat tersi her zaman doğru değildir.*

Tanım 2.1.64. [3], [11], [13] R bir değişmeli halka ve I, R nin bir ideali olsun. O zaman

$$\{a \in R \mid \text{bir pozitif } n \text{ tamsayısı için } a^n \in I \text{ dir}\}$$

kümesine *I idealinin radikali* denir ve $\sqrt{I}$ ya da $r(I)$ ya da $Rad(I)$ ile gösterilir. Ayrıca $\sqrt{I}$ radikali, R halkasının bir idealidir ve bu yüzden $\sqrt{I}$, *I nın radikal ideali* olarak da ifade edilir.

Teorem 2.1.65. [3, Exercise 1.13], [8, Theorem 2.7] R değişmeli ve birimli bir halka ve $I, I_1, I_2, \ldots, I_n$ R nin idealleri olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1). $\sqrt{I} \supseteq I$

(2). $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

(3). $\sqrt{I_1 I_2 \cdots I_n} = \sqrt{\bigcap_{j=1}^{n} I_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \sqrt{I_j}$

(4). Bir pozitif m tamsayısı için $\sqrt{I^m} = \sqrt{I}$ dir.

(5). $\sqrt{I} = (1_R)$ dir ancak ve ancak $I = (1_R)$ dir.

(6). $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $\sqrt{I + I_j} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{I_j}}$ dir.

(7). Eğer $\mathfrak{p}$, R halkasının bir asal ideali ise, o zaman bir pozitif n tamsayısı için $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ dir.

Tanım 2.1.66. [11] R bir halka olsun. R halkasının tüm nilpotent elemanlarından oluşan bir alt kümesi, *R nin nilradikali* olarak adlandırılır ve $nil(R)$ ile gösterilir. Bu yüzden $nil(R)$, sıfır idealinin radikaline eşittir. Yani,

$$nil(R) = \sqrt{\{0\}}$$

dır.

Teorem 2.1.67. [10, Theorem 3.7.1] A bir sağ R-modül ve α, A üzerinde bir fonksiyon olmak üzere toplama ve çarpma işlemi; $a \in A$ için

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(a) = \alpha_1(a) + \alpha_2(a)$$
$$(\alpha_1 \alpha_2)(a) = \alpha_1(\alpha_2(a))$$

olarak tanımlanıyorsa, o zaman $Hom_R(A, A)$ birim elemanlı bir halkadır.

Tanım 2.1.68. [10] Tanım 2.1.67 deki koşulları sağlayan bir $Hom_R(A, A)$ halkası, A modülünün endomorfizma halkası olarak adlandırılır ve $End(A_R)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.69. [10, Krull-Remak-Schmidt Theorem] Her $i \in I$ için $End(M_i)$ yerel olmak üzere

$$M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

ve her $j \in J$ için N_j direk parçalanamaz ve $N_j \neq 0$ olmak üzere

$$M_R = \bigoplus_{j \in J} N_j$$

olsun. O zaman her $i \in I$ için $M_i \cong N_{\beta(i)}$ olacak şekilde bir birebir ve örten $\beta : I \to J$ dönüşümü vardır.

Tanım 2.1.70. [13] R bir halka olsun. O zaman $R[x]$, katsayıları R halkasının elemanları olmak üzere bir x bilinmeyeni ile elde edilen tüm polinomların kümesidir. $R[x]$, *polinom halkası* olarak adlandırılır. Benzer şekilde $R[x_1, x_2, \ldots]$, katsayıları R halkasının elemanları olan ve $x_1, x_2, \ldots$ bilinmeyenleri ile elde edilen bir polinom halkasını ifade eder. (x) ise $R[x]$ polinom halkasının bir alt kümesi olup, x bilinmeyeni ile elde edilen ve sabit terimi sıfır olan tüm polinomlar kümesini ifade eder. Aynı tanım $R[x_1, x_2, \ldots]$ polinom halkasının (x_1, x_2), (x_1, x_2), ... ,$(x_1, x_2, \ldots)$ alt kümeleri için benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.1.71. [10] Bir R halkası *(von Neumann) regular* olarak adlandırılır :$\Leftrightarrow$ Her $a \in R$ için $a = ar'a$ olacak şekilde bir $r' \in R$ vardır (yani, $a \in aRa$ dır). Aşağıdaki koşullar denktir :

(1). R halkası regulardır.

(2). R halkasının her devirli sağ ideali, R_R nin bir direk toplananıdır.

(3). R halkasının her devirli sol ideali, ${}_RR$ nin bir direk toplananıdır.

(4). R halkasının her sonlu üretilmiş sağ ideali, R_R nin bir direk toplananıdır.

(5). R halkasının her sonlu üretilmiş sol ideali, ${}_RR$ nin bir direk toplananıdır.

Tanım 2.1.72. [3] R değişmeli ve birimli bir halka ve I, J R nin idealleri olsun. O zaman

(1). I, J idealleri için

$$\{x \in R \mid xJ \subseteq I\}$$

kümesi, *I idealinin J ideali ile bölümü (ideal quotient)* olarak adlandırılır ve $I : J$ ile gösterilir. $I : J$, R halkasının bir idealidir. Aynı zamanda R değişmeli olduğu için, $xJ = Jx$ dir.

(2). J ideali için

$$\{x \in R \mid xJ = 0\}$$

kümesi, *J nin sıfırlayanı (annihilator)* olarak adlandırılır ve $0 : J$ ya da $Ann_R(J)$ ile gösterilir. Açıkça $0 : J$, R halkasının bir idealidir.

Tanım 2.1.73. [1] R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. O zaman:

(1). Her $X \subseteq M$ alt kümesi için

$$\{r \in R \mid rX = 0\}$$

kümesi, *X in R halkasındaki sol sıfırlayanı (annihilator)* olarak adlandırılır ve bu küme $l_R(X)$ ile gösterilir. $l_R(X)$, R halkasının bir sol idealidir.

(2). Her $A \subseteq R$ alt kümesi için

$$\{m \in M \mid Am = 0\}$$

kümesi, *A nın M modülündeki sağ sıfırlayanı (annihilator)* olarak adlandırılır ve bu küme $r_M(A)$ ile gösterilir. Açıkça $r_M(A)$, M nin bir altmodülüdür.

Eğer başlangıç olarak M yi bir sağ R-modül olarak alsaydık, o zaman sağ sıfırlayan olarak $r_R(X)$ ve sol sıfırlayan olarak $l_M(A)$ yazmamız gerekirdi.

3. ARTAN VE AZALAN ZİNCİR KOŞULLU MODÜLLER

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe halkalar, birimli ve modüller, birimsel (sağ ya da sol) R-modüller olarak alınacaktır.
Bu bölümde cebirin gelişiminde önemli rol oynayan artan zincir koşulu (Noether) ve azalan zincir koşulu (Artin), modüller için çalışılmış ve diğer modül yapıları ile olan ilişkileri incelenmiştir [1], [4], [10].

3.1. Tanım ve Karakterizasyonlar

Bu kısımda azalan zincir koşullu modüller (Artin modüller) ve artan zincir koşullu modüller (Noether modüller) tanımlanıp, daha sonra bu modüllerle ilgili karakterizasyonlara değinilecektir.

Tanım 3.1.1. [10] M bir sağ R-modül olsun.

(1). M modülü *Noether* olarak adlandırılır :⇔ M nin altmodüllerinin boştan farklı her kümesinin bir maksimal elemanı vardır.
(2). M modülü *Artin* olarak adlandırılır :⇔ M nin altmodüllerinin boştan farklı her kümesinin bir minimal elemanı vardır.
(3). M nin altmodüllerinin bir

$$... \leq A_{i-1} \leq A_i \leq A_{i+1} \leq ...$$

artan zinciri (sonlu ya da sonsuz) *sonlu adımda duran* olarak adlandırılır :⇔ Bu zincir sadece sonlu çoklukta farklı A_i içerir ($A_i = A_{i+1}$ olacak şekilde bir i indisi vardır).

Benzer tanım M nin altmodüllerinin bir azalan zinciri için de yapılır.

Uyarı 3.1.2. [10] *Bu özellikler, açıkça izomorfizma altında korunur. Aynı zamanda*

(1). *Bir Noether modül, maksimal koşullu bir modül ve*

(2). *Bir Artin modül, minimal koşullu bir modül*

olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.3. $[10]$ *Bir M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1). *M Artin modüldür.*

(2). *$A \leq M$ olmak üzere A ve M/A Artin modüldür.*

(3). *M nin altmodüllerinin her*

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 \dots$$

azalan zinciri sonlu adımda durur.

(4). *M nin her bölüm modülü sonlu eşüretilmiştir.*

(5). *$A_i \leq M$ altmodüllerinin her $\{A_i | i \in I\} \neq \emptyset$ kümesinde,*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I_0} A_i \quad \text{(sonlu } I_0 \subseteq I \text{)}$$

olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_0\}$ alt kümesi vardır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. A nın altmodüllerinin boştan farklı her kümesi, aynı zamanda M modülünün böyle bir kümesi olduğu için bu kümenin bir minimal elemanı vardır. Böylece A bir Artin modül olur.

Şimdi $\nu : M \to M/A$ bir dönüşüm ve $\{\Omega_i | i \in I\}$, M/A nın altmodüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun.

İddia: Eğer $\nu^{-1}(\Omega_{i_0})$, $\{\nu^{-1}(\Omega_i) | i \in I\}$ kümesinde minimal ise Ω_{i_0}, $\{\Omega_i | i \in I\}$ kümesinde minimaldir.

İspat: $\Omega_i \leq \Omega_{i_0}$ olsun. O zaman $\nu^{-1}(\Omega_i) \leq \nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ dır. $\nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ ın minimalliğinden $\nu^{-1}(\Omega_i) = \nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ olur. Böylece

$$\Omega_i = \nu\nu^{-1}(\Omega_i) = \nu\nu^{-1}(\Omega_{i_0}) = \Omega_{i_0}$$

elde edilir. Bu durum kabul ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak, M/A Artin modüldür.

$(2) \Rightarrow (3)$. $A_1, A_2, \dots$ M nin altmodülleri olmak üzere

$$A_1 \geq A_2 \geq \dots$$

M modülünün bir azalan zinciri ve yine $\nu : M \to M/A$ bir dönüşüm olsun. $\Gamma := \{A_i | i = 1, 2, 3, \dots\}$, $\nu(\Gamma) := \{\nu(A_i) | i = 1, 2, 3, \dots\}$ ve $\Gamma_A := \{A_i \cap A | i = 1, 2, 3, \dots\}$ olsun. Γ boş olmadığından, $\nu(\Gamma)$ ve Γ_A da boş değildir. Böylece kabulden $\nu(\Gamma)$'da bir minimal eleman $\nu(A_l)$ ve Γ_A'da bir minimal eleman $(A_m \cap A)$ vardır. Şimdi $n := max(l, m)$ olsun. O zaman $i = 0, 1, 2, \dots$ için $\nu(A_n) = \nu(A_{n+i})$ ve $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$ olur.

İddia: Verilen azalan zincirin sonlu adımda durması için $i = 0, 1, 2 \dots$ olmak üzere $A_n = A_{n+i}$ dir.

İspat: $\nu(A_n) = \nu(A_{n+i})$ olduğundan

$$A_n + A = \nu^{-1}\nu(A_n) = \nu^{-1}\nu(A_{n+i}) = A_{n+i} + A$$

yani, $A_n + A = A_{n+i} + A$ olur. Ayrıca kabulden $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$ olduğu için Modülarite kuralından

$$A_n = (A_n + A) \cap A_n = (A_{n+i} + A) \cap A_n =$$
$$A_{n+i} + (A \cap A_n) = A_{n+i} + (A \cap A_{n+i}) = (A_{n+i} + A) \cap A_{n+i} = A_{n+i}$$

elde edilir. Sonuç olarak, verilen azalan zincir sonlu adımda durur.

$(3) \Rightarrow (1)$. Λ, M nin altmodüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun ve Λ minimal eleman içermesin. O zaman her $U \in \Lambda$ için $U' \subsetneqq U$ olacak şekilde bir $U' \in \Lambda$ vardır. Her U için böyle bir sabit U' seçilsin (Seçme Aksiyomu). O zaman her $U_0 \in \Lambda$ için

$$U_0 \gneqq U_0' \gneqq U_0'' \gneqq \cdots$$

azalan zinciri sonsuzdur. Bu durum da kabul ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak, M nin altmodüllerinin her boştan farklı kümesinde bir minimal eleman vardır ve buradan M bir Artin modül olur.

$(4) \Rightarrow (5)$. M modülünün her bölüm modülü sonlu eşüretilmiş olsun. Şimdi $\{A_i | i \in I\}$, M nin A_i altmodüllerinin bir boştan farklı kümesi ve $U := \bigcap_{i\in I} A_i$ olduğunu kabul edelim. Açıkça U, M nin bir altmodülü ve buradan M/U, M nin bir bölüm modülüdür. Kabulden M/U sonlu eşüretilmiş olur. O halde Lemma 2.1.29 gereğince $A_i \leq M$ altmodüllerinin $\{A_i | i \in I\}$ kümesinde, $\bigcap_{i\in I_0} A_i = U$ olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_0\}$ alt kümesi vardır.

$(5) \Rightarrow (4)$. Lemma 2.1.29 gereğince ispatın diğer kısmına dual olarak ilerler.

$(1) \Rightarrow (5)$. (1) kabulünden $i \in I$ olmak üzere her sonlu çokluktaki $A_i \leq M$ altmodüllerin tüm arakesitlerinin kümesinde bir minimal eleman vardır. Bu eleman $D := \bigcap_{i\in I_0} A_i$ olsun. D nin minimalliğinden, her $j \in I$ için $D \cap A_j = D$ olur. Buradan $D \leq \bigcap_{j\in I} A_j$ dir. O zaman $D = \bigcap_{j\in I} A_j$ elde edilir.

$(5) \Rightarrow (3)$. $A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \ldots$ M nin A_i altmodüllerinin bir azalan zinciri olsun. O zaman (5) kabulünden

$$\bigcap_{i=1,2,\ldots} A_i = \bigcap_{i=1,2,\ldots,n} A_i$$

olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı vardır. Sonuç olarak, $i \geq n$ için $A_n = A_i$ olur. Yani, M nin altmodüllerinin her

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq \ldots$$

azalan zinciri, sonlu adımda durur. □

Teorem 3.1.4. [10] *Bir M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1). *M Noether modüldür.*

(2). *$A \leq M$ olmak üzere A ve M/A Noether modüldür.*

(3). *M nin altmodüllerinin her*

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \ldots$$

artan zinciri sonlu adımda durur.

(4). M *nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.*

(5). $A_i \leq M$ *altmodüllerinin her* $\{A_i | i \in I\} \neq \emptyset$ *kümesinde,*

$$\sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I_0} A_i \quad (\textit{sonlu } I_0 \subseteq I\ )$$

olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_0\}$ *alt kümesi vardır.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. A nın altmodüllerinin boştan farklı her kümesi, aynı zamanda M modülünün böyle bir kümesi olduğu için bu kümenin bir maksimal elemanı vardır. Buradan A Noether olur.

Şimdi $\nu : M \to M/A$ bir dönüşüm ve $\{\Omega_i | i \in I\}$, M/A nın altmodüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun.

İddia: Eğer $\nu^{-1}(\Omega_{i_0})$, $\{\nu^{-1}(\Omega_i) | i \in I\}$ kümesinde maksimal ise Ω_{i_0}, $\{\Omega_i | i \in I\}$ kümesinde maksimaldir.

İspat: $\Omega_{i_0} \leq \Omega_i$ olsun. O zaman $\nu^{-1}(\Omega_{i_0}) \leq \nu^{-1}(\Omega_i)$ dir. $\nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ ın maksimalliğinden $\nu^{-1}(\Omega_i) \leq \nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ olduğu için $\nu^{-1}(\Omega_i) = \nu^{-1}(\Omega_{i_0})$ olur. Böylece

$$\Omega_i = \nu\nu^{-1}(\Omega_i) = \nu\nu^{-1}(\Omega_{i_0}) = \Omega_{i_0}$$

elde edilir. Bu durum, kabulümüz ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak, M/A Noether olur.

$(2) \Rightarrow (3)$. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ M nin altmodülleri olmak üzere

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$$

M nin altmodüllerinin bir artan zinciri ve yine $\nu : M \to M/A$ bir dönüşüm olsun. $\Gamma := \{A_i | i = 1, 2, 3, \ldots\}$, $\nu(\Gamma) := \{\nu(A_i) | i = 1, 2, 3, \ldots\}$ ve $\Gamma_A := \{A_i \cap A | i = 1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. Γ boş olmadığından, $\nu(\Gamma)$ ve Γ_A da boş değildir. Kabulden $\nu(\Gamma)$'da bir maksimal eleman $\nu(A_l)$ ve Γ_A'da bir maksimal eleman $(A_m \cap A)$ vardır. Şimdi $n := max(l, m)$ olsun. O zaman $i = 0, 1, 2, \ldots$

için $\nu(A_n) = \nu(A_{n+i})$ ve $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$ olur.

İddia: Verilen artan zincirin sonlu adımda durması için $i = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $A_n = A_{n+i}$ dir.

İspat: $\nu(A_n) = \nu(A_{n+i})$ olduğundan

$$A_n + A = \nu^{-1}\nu(A_n) = \nu^{-1}\nu(A_{n+i}) = A_{n+i} + A$$

ve buradan $A_n + A = A_{n+i} + A$ olur. Ayrıca kabulden $A_n \cap A = A_{n+i} \cap A$ olduğu için Modülarite kuralından

$$A_{n+i} = (A_{n+i} + A) \cap A_{n+i} = (A_n + A) \cap A_{n+i} =$$
$$A_n + (A \cap A_{n+i}) = A_n + (A \cap A_n) = (A_n + A) \cap A_n = A_n$$

elde edilir. Böylece verilen artan zincir sonlu adımda durur.

$(3) \Rightarrow (1)$. Λ, M nin altmodüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun ve Λ maksimal eleman içermesin. O zaman her $U \in \Lambda$ için $U \lneqq U'$ olacak şekilde bir $U' \in \Lambda$ elemanı vardır. Her U elemanı için böyle bir sabit U' elemanı seçilsin (Seçme Aksiyomu). O zaman her $U_o \in \Lambda$ için

$$U_o \lneqq U_o' \lneqq U_o'' \lneqq \ldots$$

artan zinciri sonsuzdur. Bu durum kabulümüz ile çelişki oluşturur. Dolayısıyla M nin altmodüllerinin her boştan farklı kümesinde bir maksimal eleman vardır ve böylece M bir Noether modül olur.

$(4) \Rightarrow (5)$. M nin her altmodülünün sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. Teorem 2.1.31 gereğince $U_R \leq M_R$ altmodülü sonlu üretilmiştir ancak ve ancak $\sum\limits_{i \in I} A_i = U$ olacak şekilde $A_i \leq M$ altmodüllerinin her $\{A_i | i \in I\}$ kümesinde $\sum\limits_{i \in I_o} A_i = U$ olacak şekilde bir sonlu $\{A_i | i \in I_o\}$ alt kümesi vardır. M nin tüm altmodülleri için bu durum sağlandığından, her boştan farklı $\{A_i | i \in I\}$ kümesinde,

$$\sum_{i\in I} A_i = \sum_{i\in I_0} A_i$$

olacak şekilde bir sonlu $\{A_i|i \in I_0\}$ alt kümesi vardır.

$(5) \Rightarrow (4)$. Teorem 2.1.31 gereğince ispatın diğer kısmına dual olarak ilerler.

$(1) \Rightarrow (5)$. (1) kabulünden $i \in I$ olmak üzere her sonlu çokluktaki $A_i \leq M$ altmodüllerin tüm toplamlarının kümesinde bir maksimal eleman vardır. Bu eleman $D := \sum_{i\in I_0} A_i$ olsun. D nin maksimalliğinden, her $j \in I$ için $D + A_j = D$ ve buradan $\sum_{j\in I} A_j \leq D$ olur. Sonuç olarak $D = \sum_{j\in I} A_j$ elde edilir.

$(5) \Rightarrow (3)$. $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$ M nin A_i altmodüllerinin bir artan zinciri olsun. O zaman (5) kabulünden

$$\sum_{i=1,2,\ldots} A_i = \sum_{i=1,2,\ldots,n} A_i$$

olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı vardır. Böylece $i \geq n$ için $A_n = A_i$ olur. Yani, M nin altmodüllerinin her

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$$

artan zinciri sonlu adımda durur. □

Tanım 3.1.5. [1] Bir M sağ R-modülü,

(1). Teorem 3.1.3 teki (3) özelliğini sağlıyorsa *azalan zincir koşullu modül* ve

(2). Teorem 3.1.4 teki (3) özelliğini sağlıyorsa *artan zincir koşullu modül*

olarak adlandırılır. Buradan açıkça bir M modülü Artin modüldür ancak ve ancak M, azalan zincir koşullu bir modüldür. Benzer şekilde bir M modülü Noether modüldür ancak ve ancak M, artan zincir koşullu bir modüldür.

Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 ün $(1) \Leftrightarrow (2)$ denkliklerinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1.6. [1] *M bir sol R-modül, K ve N M nin altmodülleri olmak üzere*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

sol R-modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. O zaman M Artin (Noether) modüldür ancak ve ancak K ve N Artin (Noether) modüldür.

İspat: $(\Rightarrow)$. M modülü Artin olsun. Şimdi kısa tam dizi tanımından f ve g, R-modül homomorfizmaları olmak üzere verilen kısa tam dizisinin,

$$0 \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} M$$

alt dizisini düşünelim. Kabulden dizi, tam olduğu için

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$$

dir. f homomorfizmasının tanım kümesi 0 (sıfır) olduğundan

$$0 = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$$

dir. $\mathrm{Ker}(g) = 0$ olduğu için g homomorfizması birebirdir. Yani, g bir monomorfizmadır. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoremi gereğince

$$K/\mathrm{Ker}(g) \cong \mathrm{Im}(g)$$

olduğundan,

$$K \cong K/0 \cong \mathrm{Im}(g) \qquad (\bigstar)$$

dir. $\mathrm{Im}(g) \leq M$ olduğu için K modülü, M modülünün bir altmodülüne izomorftur. Kabulden M modülü Artin olduğundan Teorem 3.1.3 ün $(1) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince M nin her altmodülü de Artindir. Buradan $\mathrm{Im}(g)$ Artin olur. Artin modüller izomorfizma altında korunduğu için $(\bigstar)$'dan K modülü Artin olur. Şimdi ν ve h, R-modül homomorfizmaları olmak üzere verilen kısa tam dizisinin

$$M \xrightarrow{\nu} N \xrightarrow{h} 0$$

alt dizisini düşünelim. Kabulden dizi, kısa tam dizi olduğu için

$$\mathrm{Im}(\nu) = \mathrm{Ker}(h)$$

dir. Burada h, sıfır homomorfizması olduğu için $\mathrm{Ker}(h) = N$ dir. O zaman $\mathrm{Im}(\nu) = N$ olur. Yani, ν bir epimorfizmadır. 1. İzomorfizma Teoreminden

$$M/\mathrm{Ker}(\nu) \cong \mathrm{Im}(\nu) = N$$

ve böylece $M/\mathrm{Ker}(\nu) \cong N$ olur. Kabulden M modülü Artin olduğu için Teorem 3.1.3 ten M nin her bölüm modülü Artindir. O zaman $M/\mathrm{Ker}(\nu)$ bölüm modülü de Artin olur. Artin modüller izomorfizma altında korunduğu için N modülü de Artin olur.

$(\Leftarrow)$. K ve N Artin modüller olsun. Şimdi M modülünün Artin olduğunu göstereceğiz. Bunun için kabulde verilen kısa tam diziyi; ispatın diğer kısmında kabul edilen f, g, ν ve h homomorfizmaları ile düşünelim:

$$0 \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} M \xrightarrow{\nu} N \xrightarrow{h} 0$$

İspatın diğer kısmında gösterildiği gibi g bir monomorfizma ve ν bir epimorfizmadır. Buradan açıkça $K \leq M$ ve $M/K \cong N$ olarak kabul edebiliriz.

$$L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_n \geq \ldots \qquad (\spadesuit)$$

M nin altmodüllerinin bir azalan zinciri olsun. Buradan

$$L_1 + K \geq L_2 + K \geq \ldots \geq L_n + K \geq \ldots$$

M/K nın altmodüllerinin bir azalan zinciri olur. Varsayımdan N modülü Artin ve $M/K \cong N$ olduğu için izomorfizma özelliği gereğince M/K bölüm modülü Artin olur. O zaman

$$L_m + K = L_{m+i} + K \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı vardır. Ayrıca $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $L_i \cap K \leq K$ olduğu için

$$L_1 \cap K \geq L_2 \cap K \geq \ldots \geq L_n \cap K \geq \ldots$$

K nın altmodüllerinin bir azalan zinciridir. Kabulden K modülü Artin olduğundan

$$L_n \cap K = L_{n+i} \cap K \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı vardır.

$$(L_i \cap K) \leq (L_i + K) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

olduğu için $n \geq m$ dir. Varsayımdan (♠) zincirinde her $i = 1, 2, 3, \ldots$ için $L_n \geq L_{n+i}$ dir ve Modülarite kuralından

$$\begin{aligned} L_n &= L_n \cap (L_n + K) = L_n \cap (L_{n+i} + K) \\ &= L_{n+i} + (L_n \cap K) = L_{n+i} + (L_{n+i} \cap K) = L_{n+i} \end{aligned}$$

dir. Yani $i = 1, 2, 3, \ldots$ için $L_n = L_{n+i}$ olur. Sonuç olarak M nin altmodüllerinden oluşan (♠) azalan zinciri n. adımda durur. Böylece Teorem 3.1.3 ün $(3) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince M modülü Artin olur. Aynı ispat, Noether modüller için benzer şekilde yapılır. □

Önerme 3.1.7. [4] *Herhangi bir pozitif n tamsayısı için R-modüllerinin bir $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ direk toplamı Noether (Artin) dir ancak ve ancak her M_i Noether (Artin) dir.*

İspat: $(\Rightarrow)$. $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ direk toplamı Noether olsun. Her M_i modülü, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ direk toplamının bir altmodülüne izomorftur. Teorem 3.1.4 gereğince Noether modüllerin her altmodülü de Noether olduğu için her bir M_i modülü Noether olur. $(\Leftarrow)$. $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere her M_i modülü Noether olsun. Aynı zamanda $1 \leq m < n$ olacak şekilde her pozitif m tamsayısı için $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ direk toplamı Noether olsun (Tümevarım Yöntemi). Şimdi $m = n - 1$ için

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. Kabulden R-modüllerinin $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ direk toplamı ve M_n modülü Noether olduğundan, Sonuç 3.1.6 gereğince R-modüllerinin $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ direk toplamı Noether olur. Aynı ispat, benzer şekilde Artin modüller için de yapılır. $\square$

Sonuç 3.1.8. [10] *Bir M modülü için aşağıdaki özellikler vardır:*

(1). *M modülü, Artin altmodüllerinin bir sonlu toplamı ise M Artin modüldür.*

(2). *M modülü, Noether altmodüllerinin bir sonlu toplamı ise M Noether modüldür.*

İspat: (1). $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere $A_i \leq M$ ve her A_i altmodülü Artin olsun. İspatı, n üzerinde tümevarım ile yapacağız:

$n = 1$ için iddia açıktır. $n - 1$ için iddia geçerli olsun. Şimdi her i için A_i altmodülleri Artin olmak üzere

$$M = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

olduğunu kabul edelim. O zaman

$$L := \sum_{i=1}^{n-1} A_i$$

toplamı Artindir. 2. İzomorfizma Teoreminden,

$$M/A_n = (L + A_n)/A_n \cong L/L \cap A_n$$

dir. Teorem 3.1.3 gereğince L Artin ise $L/L \cap A_n$ de Artindir. Bu özellikler izomorfizma altında korunduğu için M/A_n bölüm modülü Artin olur. Aynı zamanda kabulden A_n altmodülünün Artin olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak $A_n \leq M$ ve M/A_n Artin olduğu için, Teorem 3.1.3 ün $(2) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince M bir Artin modül olur.
(2). (1) ispatının duali olup Teorem 3.1.3 yerine Teorem 3.1.4 kullanılır. □

Teorem 3.1.9. $[10]$ *Bir M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*
(1). *M Artin ve Noether modüldür.*
(2). *M modülü sonlu uzunlukludur.*

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. M modülü Noether olduğu için Teorem 3.1.4 ten M nin her altmodülü de Noetherdir. Öyleyse M nin sıfırdan farklı her A altmodülünde bir maksimal A' altmodülü vardır. Her böyle A için bir sabit A' altmodülü seçilsin. O zaman

$$M \supsetneqq M' \supsetneqq M'' \supsetneqq M''' \supsetneqq \cdots$$

azalan zincirini düşünelim. Kabulden M modülü Artin olduğu için bu zincir, sonlu adımda durmak zorundadır. Böylece bu zincir M modülünün bir kompozisyon serisi olur. Tanım 2.1.38 den M modülünün uzunluğu kompozisyon serisinin uzunluğuna eşittir. Kompozisyon serisinin uzunluğu da sonlu olduğu için M modülü sonlu uzunlukludur.
$(2) \Rightarrow (1)$. **A**$:= A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots,$ M nin altmodüllerinin bir artan zinciri ve l, M modülünün uzunluğu olsun. ($l = M$ nin kompozisyon serisinin uzunluğu)
İddia: **A** zincirinde en fazla $(l + 1)$ farklı A_i vardır.
İspat: Şimdi $(l + 1)$ den büyük olacak şekilde farklı A_i ler olduğunu kabul edelim. O zaman

$$A_{i_1} \lneqq A_{i_2} \lneqq \cdots \lneqq A_{i_{l+2}}$$

formunda **A** nın bir alt zinciri vardır. Kabulden M modülü sonlu uzunluklu olduğu için Lemma 2.1.39 gereğince bu alt zincir bir kompozisyon serisine inceltilebilir. Sonuç olarak M modülünün uzunluğu $\geq l+1$ olur. Fakat bu durum kabulümüz olan M modülünün l uzunluğu ile çelişki oluşturur. O halde **A** zinciri, M modülünün l uzunluğu için en fazla $l+1$ farklı A_i içerir. Böylece M modülünün artan zinciri sonlu adımda durur. Sonuç olarak M modülünün her sonlu uzunluğu için bu durum sağlandığından M Noether bir modül olur. Benzer şekilde M nin Artin modül olduğu gösterilir. □

Sonuç 3.1.6 ve Teorem 3.1.9 dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1.10. [4] M, M_1 ve M_2 sıfırdan farklı R-modüller olmak üzere

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$$

R-modül homomorfizmalarının bir kısa tam dizisi olsun. O zaman M modülünün bir kompozisyon serisi vardır ancak ve ancak M_1 ve M_2 modüllerinin bir kompozisyon serisi vardır.

İspat: $(\Rightarrow)$. M modülünün bir kompozisyon serisinin var olduğunu kabul edelim. O zaman Tanım 2.1.38 in (4) özelliği gereğince, M modülü sonlu uzunlukludur. Öyleyse Teorem 3.1.9 dan açıkça, M modülü hem Artin hem de Noether olur. O halde Sonuç 3.1.6 gereğince, M_1 ve M_2 modülleri hem Artin hem de Noether olarak elde edilir. Böylece, Teorem 3.1.9 dan M_1 ve M_2 modülleri sonlu uzunluklu olur ve sonuç olarak Tanım 2.1.38 gereğince, sıfırdan farklı olan M_1 ve M_2 modüllerinin bir kompozisyon serisi vardır.

$(\Leftarrow)$. Yukarıdaki ispatın dualidir. □

3.2. Artin ve Noether Modüllerin Endomorfizmaları

$M = M_R$ bir modül ve φ, M modülünün bir endomorfizması yani, $\varphi : M \to M$ bir homomorfizma olsun. O zaman $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere φ^n, aynı zamanda M modülünün bir endomorfizmasıdır ve

$$\mathrm{Im}(\varphi) \geq \mathrm{Im}(\varphi^2) \geq \mathrm{Im}(\varphi^3) \geq \ldots \qquad (\blacksquare)$$
$$\mathrm{Ker}(\varphi) \leq \mathrm{Ker}(\varphi^2) \leq \mathrm{Ker}(\varphi^3) \leq \ldots \qquad (\bigstar)$$

dir. M modülü Artin olduğu durumda ($\blacksquare$) zinciri, sonlu adımda durur ve M nin Noether olduğu durumda ($\bigstar$) zinciri, sonlu adımda durur. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Teorem 3.2.1. [10] *φ, M modülünün bir endomorfizması olsun. Bu durumda*

(1). *M Artin ise $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ ve her $n \geq n_0$ için $M = \mathrm{Im}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ dir.*
(2). *M Artin ve φ bir monomorfizma ise φ bir otomorfizmadır.*
(3). *M Noether ise $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ ve her $n \geq n_0$ için $0 = \mathrm{Im}(\varphi^n) \cap \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ dir.*
(4). *M Noether ve φ bir epimorfizma ise φ bir otomorfizmadır.*

İspat: (1). M bir Artin modül olsun. O halde yukarıda verilen ($\blacksquare$) azalan zincir koşulundan, $n \geq n_0$ için $\mathrm{Im}(\varphi^{n_0}) = \mathrm{Im}(\varphi^n)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O zaman $n \geq n_0$ için $\mathrm{Im}(\varphi^n) = \mathrm{Im}(\varphi^{2n})$ dir. Şimdi $x \in M$ olsun. Buradan $\varphi^n(x) \in \mathrm{Im}(\varphi^n) = \mathrm{Im}(\varphi^{2n})$ dir. Böylece $\varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$ olacak şekilde bir $y \in M$ vardır. O halde $\varphi^n(x - \varphi^n(y)) = 0$ olur. Buradan $k := x - \varphi^n(y) \in \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ dir. Böylece $x = \varphi^n(y) + k \in \mathrm{Im}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ olur. Öyleyse $M \leq \mathrm{Im}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ dir. Tersi açıktır. Yani, $\mathrm{Im}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\varphi^n) \leq M$ dir. Sonuç olarak $M = \mathrm{Im}(\varphi^n) + \mathrm{Ker}(\varphi^n)$ elde edilir.

(2). φ bir monomorfizma ise, açıkça her $n \in \mathbb{Z}^+$ için φ^n de bir monomorfizmadır. Yani, $\mathrm{Ker}(\varphi^n) = 0$ dır. O zaman (1)'den $M = \mathrm{Im}(\varphi^{n_0})$ dır. Böylece $\mathrm{Im}(\varphi^{n_0}) \leq \mathrm{Im}(\varphi)$ olduğundan $M = \mathrm{Im}(\varphi)$ elde edilir. O halde φ bir epimorfizmadır. Sonuç olarak φ bir otomorfizma olur.

(3). Kabulden M bir Noether modül olduğundan yukarıda verilen $(\bigstar)$ artan zincir koşulu gereğince, $n \geq n_0$ için $\text{Ker}(\varphi^{n_0}) = \text{Ker}(\varphi^n)$ olmak üzere bir $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O halde $n \geq n_0$ için $\text{Ker}(\varphi^n) = \text{Ker}(\varphi^{2n})$ olur. Şimdi $x \in \text{Im}(\varphi^n) \cap \text{Ker}(\varphi^n)$ olsun. O zaman $x = \varphi^n(y)$ olacak şekilde bir $y \in M$ vardır ve $0 = \varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$ dir. Böylece $y \in \text{Ker}(\varphi^{2n}) = \text{Ker}(\varphi^n)$ olur. Buradan $x = \varphi^n(y) = 0$ dır. Sonuç olarak $\text{Im}(\varphi^n) \cap \text{Ker}(\varphi^n) = 0$ elde edilir.

(4). Kabulden φ bir epimorfizma olduğundan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için φ^n de bir epimorfizmadır. Yani, $\text{Im}(\varphi^n) = M$ dir. (3)'ten $\text{Ker}(\varphi^{n_0}) = 0$ olur. Böylece $\text{Ker}(\varphi) \leq \text{Ker}(\varphi^{n_0})$ olduğu için $\text{Ker}(\varphi) = 0$ dır. O halde φ bir monomorfizmadır. Sonuç olarak, φ bir otomorfizma olur. $\square$

Sonuç 3.2.2. [10] M, sonlu uzunluklu bir modül ve φ, M nin bir endomorfizması olsun. O zaman

(1). $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ ve her $n \geq n_0$ için $M = \text{Im}(\varphi^n) \bigoplus \text{Ker}(\varphi^n)$ dir.

(2). φ bir otomorfizmadır ancak ve ancak φ bir epimorfizmadır ancak ve ancak φ bir monomorfizmadır.

İspat: (1). M sonlu uzunluklu bir modül olduğu için Teorem 3.1.9 un $(2) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince, M hem Artin hem de Noetherdir. O zaman n_0 pozitif tamsayısı için, Teorem 3.2.1 in (1) ve (3) özelliğinde verilen n_0 sayılarının en büyüğünü alalım. Buradan $n \geq n_0$ için M modülünün Artin olmasından $M = \text{Im}(\varphi^n) + \text{Ker}(\varphi^n)$ ve M nin Noether olmasından $\text{Im}(\varphi^n) \cap \text{Ker}(\varphi^n) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $M = \text{Im}(\varphi^n) \bigoplus \text{Ker}(\varphi^n)$ olur.

(2). M sonlu uzunluklu bir modül olduğu için hem Artin hem de Noetherdir. O zaman Teorem 3.2.1 in (2) ve (4) koşulları gereğince φ nin monomorfizma ve epimorfizma özelliklerinden herhangi birini sağlaması, diğerlerini de iki yönlü gerektirir. $\square$

3.3. Yarıbasit Modüller Üzerindeki Zincir Koşulları

Bu bölümde konu ile ilgili olan bazı tanımlar verilip, gerekli özelliklerin bazıları ispatsız olarak ifade edilecektir.

Önerme 3.3.1. [1, Proposition 6.12] $(M_1, \ldots, M_n)$ R-modüllerinin sonlu bir ailesi olsun. O zaman

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = \coprod_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i' \quad \text{ve} \quad M_i \cong M_i'$$

dır.

Önerme 3.3.2. [1, Proposition 9.4] M bir yarıbasit sol R-modül ve $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$, M nin basit altmodüllerinin bir dizisi olmak üzere

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$$

olsun.

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \qquad (\clubsuit)$$

R-modüllerinin bir kısa tam dizisi ise; $(\clubsuit)$ kısa tam dizisi parçalanabilir (split), K ve N modülleri yarıbasittir. Buna bağlı olarak, $B \subseteq A$ olmak üzere bir B alt kümesi ve

$$N \cong \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta \qquad \text{ve} \qquad K \cong \bigoplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$$

izomorfizmaları vardır.

Daha önceden sonlu üretilmiş ve sonlu eşüretilmiş modül tanımları Bölüm 2'de verilmişti. Fakat üretilmiş modüller ve eşüretilmiş modüller ile ilgili olarak aşağıdaki alternatif tanımlara ihtiyacımız olacaktır:

Tanım 3.3.3. [1] M bir sol R-modül ve $\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{U}$ da bir (sonlu) indislenmiş $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi var ve

$$\bigoplus_{\alpha\in A} U_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

bir epimorfizma ise, o zaman M modülüne $\mathcal{U}$ *ile (sonlu) üretilmiştir* ya da $\mathcal{U}$, M *yi (sonlu) üretir* denir.

Tanım 3.3.4. [1] M bir sol R-modül ve $\mathcal{U}$ sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{U}$ da bir (sonlu) indislenmiş $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ kümesi var ve

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$$

bir monomorfizma ise, o zaman M ye $\mathcal{U}$ *ile (sonlu) eşüretilmiştir* ya da $\mathcal{U}$, M *yi (sonlu) eşüretir* denir.

Sonlu eşüretilmiş modülün yukarıdaki tanımına dayalı olarak da aşağıdaki önermeye ihtiyacımız olacaktır:

Önerme 3.3.5. [1, Proposition 10.2] M bir sol R-modül olsun. M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

(1). M modülü sonlu eşüretilmiştir.

(2). $\bigcap_A Kerf_\alpha = 0$ olmak üzere her

$$f_\alpha : M \to U_\alpha \qquad (\alpha \in A)$$

kümesi için, $\bigcap_F Kerf_\alpha = 0$ olacak şekilde bir sonlu $F \subseteq A$ kümesi vardır.

(3). Her $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indis kümesi ve

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_A U_\alpha$$

monomorfizması için, bir sonlu $F \subseteq A$ kümesi ve bir

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_F U_\alpha$$

monomorfizması vardır.

Önerme 3.3.6. [1] Bir yarıbasit M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

(1). M modülü sonlu eşüretilmiştir.

(2). $(i = 1, 2, \dots, n)$ için T_i ler basit modüller olmak üzere
$M = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ dir.

(3). M modülü sonlu üretilmiştir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2). M modülü sonlu eşüretilmiş olsun. O zaman Tanım 3.3.4 ten açıkça, M modülü basit modüllerin bir çarpımının içine gömülebilir. Buradan Önerme 3.3.5 (1) $\Rightarrow$ (3) koşulu gereğince M modülü, sonlu çokluktaki basit modüllerin bir çarpımı içine gömülebilir. Yani; bu sonlu çokluktaki basit modüllerin çarpımını $\prod_F T_\alpha$ olarak kabul edersek, o zaman bir

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_F T_\alpha$$

monomorfizması vardır. Aynı zamanda Önerme 3.3.1 gereğince

$$\prod_F U_\alpha = \bigoplus_F T_\alpha$$

sağlanır. Bu durumda

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_F T_\alpha$$

monomorfizmasının varlığından söz edebiliriz. Böylece, Önerme 3.3.2 den $B \subseteq F$ olmak üzere $M \cong \bigoplus_{\alpha \in B} T_\alpha$ ve sonuç olarak $i = 1, 2, \dots, n$ için $M = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (3). $i = 1, 2, \dots, n$ için T_i ler basit modül olmak üzere

$$M = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$$

olduğunu kabul edelim. Buradan açıkça, M modülü bir sonlu baz (taban) kümesine sahiptir. Sonuç olarak, [1, Proposition 10.1 $(e) \Rightarrow (a)$] gereğince M bir sonlu üretilmiş modül olur.

$(3) \Rightarrow (1)$. M modülünün sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. Kabulden M modülü yarıbasit olduğu için, tanım gereğince M basit altmodülleri tarafından üretilir. O zaman (3) kabulümüz gereğince M modülü, basit altmodüllerinin bir sonlu $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ kümesi tarafından üretilir. Şimdi (1) özelliğini ispatlamak için, n tamsayısı üzerinde tümevarım uygulayalım. O zaman $n = 1$ ise
$M = T_1$ basit modüldür ve buradan açıkça, M modülü sonlu eşüretilmiş olur. O halde $n > 1$ ve n den daha küçük sayıda basit modüller tarafından üretilen herhangi bir modülün sonlu eşüretilmiş olduğunu kabul edelim. Şimdi $\bigcap \mathcal{A} = 0$ olacak şekilde $\mathcal{A}$, M nin altmodüllerinin bir kümesi olsun. Buradan bir $L \in \mathcal{A}$ için $T_n \cap L = 0$ olur. Öyleyse sonlu üretilmiş modüllerle ilgili verilen Tanım 3.3.3 gereğince bir

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} T_i \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Kabulden $M = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ modülü yarıbasit olduğu için Önerme 3.3.2 gereğince, L altmodülü yarıbasittir. Ayrıca $T_n \cap L = 0$ olduğu için, yine Önerme 3.3.2 den her S_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ basit modül ve $m < n$ olmak üzere $L = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_m$ dir. Öyleyse $m < n$ olduğu için tümevarım kabulümüzden, L altmodülü sonlu eşüretilmiş olur. Şimdi
$\mathcal{A}' = \{N \cap L \mid N \in \mathcal{A}\}$, $\bigcap \mathcal{A}' = 0$ olacak şekilde L nin altmodüllerinin bir kümesi olsun. O zaman L sonlu eşüretilmiş olduğundan, bir sonlu $\{N_1, \ldots, N_k\} \subseteq \mathcal{A}$ kümesi için

$$0 = (L \cap N_1) \cap (L \cap N_2) \cap \ldots \cap (L \cap N_k) = L \cap N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k$$

dır. Böylece $\bigcap \mathcal{A} = 0$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin bir $\mathcal{A}$ kümesinde, $L \cap N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k = 0$ olacak şekilde bir sonlu $\{L, N_1, N_2, \ldots, N_k\} \subseteq \mathcal{A}$ alt kümesi vardır ve açıkça bu durum, M nin altmodüllerinin her $\mathcal{A}$ kümesi için sağlanır. Sonuç olarak, tanım gereğince M modülü sonlu eşüretilmiş olarak elde edilir. $\square$

Şimdi sonraki bölümde de kullanacağımız Artin ve Noether modüllerin bir özelliğini kanıtlayalım. Bunun için önce aşağıdaki tanıma ihtiyacımız vardır:

Tanım 3.3.7. [10] M bir sağ R-modül olsun. O zaman
(a). M modülü *direk parçalanabilir (directly decomposable)* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $M = 0$ veya M modülünün 0 ve kendisinden başka bir direk toplananı vardır.
(b). M modülü *direk parçalanamaz (directly indecomposable)* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $M \neq 0$ ve M modülünün 0 ve kendisinden başka bir direk toplananı yoktur.

Önerme 3.3.8. [1] *M, direk toplananları üzerinde artan ya da azalan zincir koşuluna sahip (yani, M modülü Noether ya da Artin) sıfırdan farklı bir modül olsun. O zaman M modülü, direk parçalanamayan altmodüllerinin bir sonlu kümesinin direk toplamıdır. Yani $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere M nin direk parçalanamayan M_i altmodülleri için*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$$

biçimindedir.

İspat: M direk parçalanamayan altmodüllerinin bir sonlu direk toplamı olmayan, sıfırdan farklı bir modül olsun. Her böyle M modülü için M' ve N', M nin kendisinden farklı altmodülleri ve ayrıca M' direk parçalanamayan altmodüllerinin sonlu direk toplamı olmayacak şekilde bir

$$M = N' \oplus M' \qquad\qquad (\blacksquare)$$

direk toplamı seçilsin. O zaman

$$M = N' \oplus M', \qquad M' = N'' \oplus M'', \quad \ldots$$

(■) direk toplamlarının bir dizisidir. Buradan M nin direk toplananlarının

$$N' \lneqq N' \oplus N'' \lneqq \ldots \qquad \text{ve} \qquad M \gneqq M' \gneqq M'' \gneqq \ldots$$

sonsuz zincirleri vardır. Şimdi eğer kabulden M modülü Noether ise, o zaman Teorem 3.1.4 ün $(1) \Rightarrow (3)$ koşulu gereğince M, altmodüllerinin

$$N' \lneqq N' \oplus N'' \lneqq \ldots$$

artan sonsuz zinciri ile çelişki oluşturur. Ya da kabulden M modülü Artin ise, o zaman Teorem 3.1.3 ün $(1) \Rightarrow (3)$ koşulu gereğince M, altmodüllerinin

$$M \gneqq M' \gneqq M'' \gneqq \ldots$$

azalan sonsuz zinciri çelişki oluşturur. Sonuç olarak sıfırdan farklı bir M modülü Noether ya da Artin ise, direk parçalanamayan altmodüllerinin bir sonlu direk toplamıdır. □

Önerme 3.3.9. [1] *Her bir M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(a). *$Rad(M) = 0$ ve M modülü Artindir.*

(b). *$Rad(M) = 0$ ve M modülü sonlu eşüretilmiştir.*

(c). *M modülü yarıbasit ve sonlu üretilmiştir.*

(d). *M modülü yarıbasit ve Noetherdir.*

(e). *M modülü, basit altmodüllerinin bir sonlu kümesinin direk toplamıdır.*

Önerme 3.3.9 un ispatı öncesinde, aşağıda verilecek olan önermeye ihtiyaç vardır:

Önerme 3.3.10. [1, Proposition 9.16] M bir sol R-modül olsun. O zaman $Rad(M) = 0$ dır ancak ve ancak M modülü, basit modüllerin sınıfı tarafından eşüretilmiştir. Ayrıca, M modülü yarıbasit ise $Rad(M) = 0$ dır.

Şimdi Önerme 3.3.9 un ispatını verebiliriz:

Teorem 3.3.9 un İspatı: $(a) \Rightarrow (b)$. $Rad(M) = 0$ ve M modülü Artin olsun. O zaman Teorem 3.1.3 ün $(1) \Rightarrow (4)$ koşulu gereğince, M modülünün tüm bölüm modülleri sonlu eşüretilmiştir. Açıkça 0, M nin bir altmodülü ve $M/0$, M nin bir bölüm modülüdür. O halde $M/0$ sonlu eşüretilmiştir. $M/0 \cong M$ olduğu için M modülü sonlu eşüretilmiştir.

$(d) \Rightarrow (c)$. M modülü yarıbasit ve Noether olsun. M modülü Noether olduğu için Teorem 3.1.4 ten, M nin tüm altmodülleri sonlu üretilmiştir. Aynı zamanda M, kendisinin bir altmodülü olduğu için sonlu üretilmiştir.

$(b) \Rightarrow (e)$. $Rad(M) = 0$ ve M modülü sonlu eşüretilmiş olsun. $Rad(M) = 0$ olduğu için Önerme 3.3.10 dan M, basit modüllerin $(U_\alpha)_A$ sınıfı tarafından eşüretilmiştir. Aynı zamanda kabulden M modülü sonlu eşüretilmiş olduğu için $F \subseteq A$ olmak üzere M modülü, basit modüllerin bir sonlu $(U_\alpha)_F$ sınıfı tarafından eşüretilmiştir. O zaman Önerme 3.3.5 in $(1) \Rightarrow (3)$ koşulu gereğince

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_F U_\alpha$$

monomorfizması vardır. Dolayısıyla M modülü, sonlu $\prod_F U_\alpha$ çarpımının bir altmodülüne izomorftur. Önerme 3.3.1; sonlu $\prod_F U_\alpha$ çarpımının, bir sonlu direk toplam olmasını gerektirir. U_α modülleri basit olduğu için tanım gereğince, $\prod_F U_\alpha = \bigoplus_F U_\alpha$ yarıbasittir. Şimdi $B \subseteq F$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_F U_\alpha \longrightarrow \bigoplus_B U_\alpha \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. $\bigoplus_F U_\alpha$ yarıbasit olduğu için Önerme 3.3.2 den M modülü yarıbasittir. O halde M modülü sonlu eşüretilmiş ve yarıbasit olduğu için, Önerme 3.3.6 nın $(1) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince (e) özelliği sağlanmış olur.

$(c) \Rightarrow (e)$. M modülü yarıbasit ve sonlu üretilmiş olsun. Önerme 3.3.6 nın $(3) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince (e) özelliği sağlanır.

$(e) \Rightarrow (c)$. Açıktır.

$(e) \Rightarrow (a)$ ve $(e) \Rightarrow (d)$. M modülü, basit altmodüllerinin bir sonlu kümesinin direk toplamı olsun. O halde M modülü tanımdan yarıbasit olur. Önerme 3.3.10 gereğince, M modülü yarıbasit ise $Rad(M) = 0$ dır. Bir basit modülün 0 ve kendisinden başka altmodülü olmadığı için, altmodüllerinin hem azalan hem de artan zinciri sonlu bir adımda durur. Dolayısıyla basit modüller, Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 gereğince hem Artin hem de Noetherdir. Öyleyse M modülü, hem Artin hem de Noether olan altmodüllerinin bir direk toplamı olur. Sonuç olarak Önerme 3.1.7 gereğince, M modülü hem Artin hem de Noetherdir. □

Önerme 3.3.9 dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.11. [1] *Bir yarıbasit M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(a). *M Artindir.*

(b). *M Noetherdir.*

(c). *M sonlu üretilmiştir.*

(d). *M sonlu eşüretilmiştir.*

3.4. Artin ve Noether Modüllerin Karakterizasyonu

Bu bölümde sonlu üretilmiş modül ve sonlu eşüretilmiş modül kavramlarını, Artin ve Noether modüllerin karaterizasyonu için kullanacağız. Bunu yaparken socle ve radikal kavramlarının, Artin ve Noether modüller üzerindeki rollerini inceleyeceğiz:

Teorem 3.4.1. [10] *M, sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. O zaman M nin her öz altmodülü, M nin bir maksimal altmodülünde içerilir.*

İspat: M, sonlu üretilmiş bir sağ R-modül olsun. O zaman M modülünün sonlu elemanlı bir üreten sistemi vardır. Buradan $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ kümesi, M modülünün bir üreten sistemi ve A, M nin bir öz altmodülü $(A \subsetneqq M)$ olsun. Şimdi M nin, A yı içeren öz altmodüllerinden oluşan bir Φ kümesini

$$\Phi := \{B \mid A \leq B \lneqq M\}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça, $A \in \Phi$ olduğu için Φ kümesi boştan farklıdır. Aynı zamanda Φ kümesi, kapsama altında sıralıdır. Zorn Lemmayı uygulayabilmek için her tam sıralı $\Gamma \subseteq \Phi$ alt kümesinin, Φ de bir üst sınıra sahip olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için

$$C := \bigcup_{B \in \Gamma} B$$

tanımlayalım. O zaman Φ kümesinin tanımından $A \leq C$ olur. Şimdi $C = M$ olduğunu kabul edelim. O halde M modülü sonlu üretilmiş olduğu için C de öyledir. Yani, $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\} \subseteq C$ olmak üzere $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\}$ kümesi, C nin de bir üreten sistemidir. Öyleyse C, tanımı gereğince tam sıralı olduğu için $\{m_1, m_2, \ldots, m_t\} \subseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \Gamma$ vardır. Böylece $B = M$ elde edilir. Bu durum da baştaki $B \lneqq M$ kabulü ile çelişki oluşturur. O halde $C \lneqq M$ dir. Buradan $C \in \Phi$ olur. Böylece Φ nin her tam sıralı Γ alt kümesi için, Φ kümesinde bir C üst sınırı vardır. Sonuç olarak Zorn Lemma gereğince, Φ kümesinin bir maksimal D elemanı vardır. O halde geriye sadece D nin, M modülü için de maksimal olduğunu göstermek kalır. Şimdi bunun için $D \leq L \lneqq M_R$ olduğunu kabul edelim. O zaman $L \in \Phi$ olur. Fakat kabulden D, Φ kümesinin maksimal elemanı olduğu için çelişki elde ederiz. Böylece $D = L$ olur. Sonuç olarak D, M nin bir maksimal altmodülüdür. $\square$

Buradan şu sonucu çıkarabiliriz: Eğer $M \neq 0$ olmak üzere M sonlu üretilmiş bir modül ise; yukarıdaki ispatta $A = 0$ alındığında Φ kümesi, M nin tüm öz altmodüllerini içerir. Buradan yine Zorn Lemmayı uygularsak, M nin bir maksimal altmodülü olduğu sonucuna ulaşırız [Lemma 2.1.30].

Teorem 3.4.2. [10] *M bir sağ R-modül olsun. M modülü sonlu üretilmiş ise $Rad(M)$, M de small $(Rad(M) \ll M)$ dur. Özel durum olarak, $Rad(R_R) \ll R_R$ dir.*

İspat: $M = M_R$ ve M modülünün sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. Şimdi

$$Rad(M) + C = M \text{ ve } C \lneqq M$$

olsun. O zaman kabulden M sonlu üretilmiş olduğu için Teorem 3.4.1 den C altmodülü, $B \leq M$ olacak şekilde M modülünün bir B maksimal altmodülünde içerilir. Tanım 2.1.58 gereğince $Rad(M)$, M nin tüm maksimal altmodüllerinin arakesiti olduğu için $Rad(M) \leq B$ dir. Böylece

$$M = Rad(M) + C \leq B$$

elde edilir. Fakat bu durum $B \leq M$ kabulü ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak $Rad(M) + C = M$ için $C = M$ dir. Yani, $Rad(M) \ll M$ olur. □

Teorem 3.4.3. [10] *M bir sağ R-modül olsun. M modülü sonlu üretilmiştir ancak ve ancak*

(a). $Rad(M)$, M modülünde small $(Rad(M) \ll M)$ dur ve

(b). $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiştir.

İspat: $(\Rightarrow)$. M modülü sonlu üretilmiş olsun. O zaman Teorem 3.4.2 gereğince $Rad(M) \ll M$ dir. O halde geriye sadece $M/Rad(M)$ nin sonlu üretilmiş olduğunu göstermek kalır. Açıkça, M den $M/Rad(M)$ ye bir doğal epimorfizma vardır. Kabulden M modülü sonlu üretilmiş olduğu için, M nin epimorf görüntüsü de sonlu üretilmiş olur. Öyleyse $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiştir.

$(\Leftarrow)$. M modülü için (a) ve (b) nin sağlandığını kabul edelim. $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiş olduğundan, Tanım 2.1.27 gereğince $M/Rad(M)$ nin bir sonlu üreten sistemi vardır. Şimdi

$$\{\bar{x}_i | \bar{x}_i = x_i + Rad(M),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kümesi, $M/Rad(M)$ nin üreten sistemi olsun. O zaman

$$x_1R + x_2R + \ldots + x_nR + Rad(M) = M$$

dir. Aynı zamanda (a) kabulünden $Rad(M) \ll M$ olduğunu biliyoruz. O halde $x_1R + x_2R + \ldots + x_nR + Rad(M) = M$ için

$$x_1R + x_2R + \ldots + x_nR = M$$

elde edilir. Buradan

$$\{x_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kümesi, M modülünün sonlu üreten sistemi olur. Sonuç olarak M, Tanım 2.1.27 gereğince bir sonlu üretilmiş modüldür. □

Sonuç 3.4.4. [10] *M bir sağ R-modül olsun. M modülü Noetherdir ancak ve ancak M nin her U altmodülü için*

(a). $Rad(U) \ll U$ ve

(b). $U/Rad(U)$ sonlu üretilmiştir.

İspat: $(\Rightarrow)$. M modülü Noether olsun. O zaman Teorem 3.1.4 ün $(1) \Rightarrow (4)$ koşulu gereğince, M nin her altmodülü sonlu üretilmiştir. Öyleyse her $U \leq M$ için U sonlu üretilmiş olur. Teorem 3.4.3 ten,

$$Rad(U) \ll U \text{ ve } U/Rad(U) \text{ sonlu üretilmiştir.}$$

$(\Leftarrow)$. Her $U \leq M$ için (a) ve (b) sağlansın. O zaman Teorem 3.4.3 gereğince her U altmodülü sonlu üretilmiş olur. Böylece Teorem 3.1.4 ün $(4) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince M modülü Noetherdir. □

Şimdi Artin modüller üzerindeki karakterizasyonu inceleyelim:

Teorem 3.4.5. [10] *Sıfırdan farklı bir sağ R-modül M için aşağıdaki özellikler denktir:*

(1). *M sonlu eşüretilmiştir.*

(2). (a). *$Soc(M)$, M modülünde essential $(Soc(M) \leq_e M)$ ve*

(b). *$Soc(M)$ sonlu eşüretilmiştir.*

(3). *Q_i ler bir basit R-modülün bir injektif hull'u olmak üzere, M modülünün bir $I(M)$ injektif hull'u için*

$$I(M) = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n$$

dir.

İspat için aşağıdaki iki önermeye ihtiyacımız olacaktır:

Önerme 3.4.6. [1, Proposition 5.16] M bir modül, $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ olsun. O zaman

(1). K, M de essential ($K \leq_e M$) dir ancak ve ancak K, N de essential $(K \leq_e N)$ ve N, M de essential $(N \leq_e M)$ dır.

(2). $H \cap K \leq_e M$ dir ancak ve ancak $H \leq_e M$ ve $K \leq_e M$ dir.

Önerme 3.4.7. [1, Proposition 9.19] $M = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$ olmak üzere $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, M nin altmodüllerinin bir indislenmiş kümesi olsun. O zaman

$$Soc(M) = \bigoplus_{\alpha \in A} Soc(M_\alpha) \qquad \text{ve} \qquad Rad(M) = \bigoplus_{\alpha \in A} Rad(M_\alpha)$$

dır.

Teorem 3.4.5 in İspatı: $(1) \Rightarrow (2)$. M modülü sonlu eşüretilmiş olsun.

(a). Şimdi $K \leq M$ altmodülü için

$$Soc(M) \cap K = 0$$

olduğunu kabul edelim. Socle tanımından, $Soc(M)$ nin M deki tüm essential altmodüllerin arakesiti olduğunu biliyoruz. O zaman kabulden M modülü sonlu eşüretilmiş olduğu için

$$L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n \cap K = 0$$

olacak şekilde M nin sonlu $L_1, L_2, \ldots, L_n$ essential altmodülleri vardır. Buradan Önerme 3.4.6 (2) özelliği gereğince $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere M nin L_i essential altmodüllerinin $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n$ sonlu arakesiti de M nin bir essential altmodülü olur. O halde essential altmodül tanımı gereğince, $(L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_n) \cap K = 0$ iken $K = 0$ olmalıdır. Bu durum açıkça, M nin herhangi bir K altmodülü için sağlanır. Sonuç olarak her $K \leq M$ altmodülü için

$$Soc(M) \cap K = 0 \qquad \text{iken} \qquad K = 0$$

elde edildiğinden, essential altmodül tanımı gereğince $Soc(M) \leq_e M$ olur.

(b). Açık bir şekilde, sonlu eşüretilmiş bir modülün her altmodülü de sonlu eşüretilmiş olur. Öyleyse kabulden M modülü sonlu eşüretilmiş olduğu için, $Soc(M)$ de sonlu eşüretilmiştir.

$(2) \Rightarrow (1)$. M modülü için (a) ve (b) özelliklerinin sağlandığını kabul edelim. Şimdi $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin bir

$$\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$$

kümesini alalım. O zaman $Soc(A_i) \leq A_i$ olduğu için

$$\bigcap_{i \in I} Soc(A_i) = 0$$

olur. Ayrıca, her $i \in I$ için $A_i \leq M$ olduğundan $Soc(A_i) \leq Soc(M)$ dir. O halde (b) kabulünden $Soc(M)$ sonlu eşüretilmiş olduğundan,

$$\bigcap_{i\in I} Soc(A_i) = 0 \qquad \text{için} \qquad \bigcap_{i\in I_0} Soc(A_i) = 0$$

olacak şekilde bir sonlu $I_0 \subseteq I$ alt kümesi vardır. Socle tanımı gereğince, her $A \leq M$ altmodülü için,

$$Soc(A) = A \cap Soc(M)$$

dir. Böylece

$$0 = \bigcap_{i\in I_0} Soc(A_i) = \bigcap_{i\in I_0} (A_i \cap Soc(M)) = \left(\bigcap_{i\in I_0} A_i\right) \cap Soc(M)$$

elde edilir. (a) kabulünden $Soc(M)$, M de essential altmodül olduğu için

$$0 = \left(\bigcap_{i\in I_0} A_i\right) \cap Soc(M) \qquad \text{iken} \qquad \bigcap_{i\in I_0} A_i = 0$$

olmalıdır. Öyleyse $\mathcal{A}$ kümesinde, $\bigcap_{i\in I_0} A_i = 0$ olacak şekilde bir sonlu $\{A_i \mid i \in I_0\}$ alt kümesi vardır. Bu durum M nin altmodüllerinin aynı özelliğe sahip her $\mathcal{A}$ kümesi için sağlanır. Sonuç olarak, tanımdan M bir sonlu eşüretilmiş modül olur.

$(2) \Rightarrow (3)$. $Soc(M) \leq_e M$ ve $Soc(M)$ sonlu eşüretilmiş olsun. Aynı zamanda $I(M)$ nin, $M \leq I(M)$ olmak üzere M modülünün bir injektif hull'u olduğunu kabul edelim. O zaman baştaki kabulden $M \neq 0$ ve (a) kabulümüzden $Soc(M) \leq_e M$ olduğu için $Soc(M) \neq 0$ olur. Şimdi E_i ler basit R-modüller olmak üzere

$$Soc(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n \qquad (\bullet)$$

ve $Q_i \leq I(M)$ olacak şekilde Q_i, E_i nin injektif hull'u olsun. O zaman $(\bullet)$ kabulünden açıkça,

$$Soc(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$$

sağlanır. Yine kabulden her Q_i, bir E_i nin injektif hull'u olduğu için $E_i \leq_e Q_i$ dir. O halde Lemma 2.1.53 gereğince

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$$

dir ve bu toplamlar açık bir şekilde $I(M)$ de içerildiği için

$$Soc(M) \leq \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$$

olur. İnjektif modüllerin sonlu direk toplamı yine injektif olduğu için, $\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$ direk toplamı injektiftir ve böylece $\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$, $I(M)$ de bir direk toplanan olur. (a) kabulünden $Soc(M) \leq_e M$ ve injektif hull özelliğinden $M \leq_e I(M)$ olduğu için, Önerme 3.4.6 (1) gereğince $Soc(M) \leq_e I(M)$ olur. O zaman $Soc(M) \leq \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$ olduğundan, $Soc(M) \leq_e I(M)$ için

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i \leq_e I(M)$$

elde edillir. Böylece, $\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$ nin $I(M)$ de bir direk toplanan ve aynı zamanda $\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i \leq_e I(M)$ olması,

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Q_i = I(M)$$

sonucunu gerektirir.

$(3) \Rightarrow (2)$. Genelliği bozmadan E_i ler basit R-modüller, her Q_i bir basit E_i modülünün bir injektif hull'u olacak şekilde $E_i \leq_e Q_i$ ve M nin bir $I(M)$ injektif hull'u için

$$M \leq I(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_i$$

özelliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman $E_i \leq_e Q_i$ olduğu için E_i, Q_i nin tek basit altmodülüdür. O halde Önerme 3.4.7 den

$$Soc(I(M)) = \bigoplus_{i=1}^{n} Soc(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \qquad (\star)$$

elde edilir. Buradan socle tanımı gereğince $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ direk toplamı, $I(M)$ nin tüm essential altmodüllerinin arakesitidir. Açıkça, injektif hull özelliğinden $M \leq_e I(M)$ ve buradan her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $E_i \leq M$ olur. Böylece

$$Soc(M) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \qquad (\star\star)$$

elde edilir. Aynı zamanda kabulden her E_i basit modül olduğu için, bu modüllerin ikişer ikişer arakesitleri de sıfırdır. Buradan açıkça $Soc(M)$, sonlu sayıda basit R-modül E_i ler tarafından sonlu üretilmiş bir modüldür ve ayrıca yarıbasit modül tanımı gereğince $Soc(M)$ yarıbasittir. O halde Önerme 3.3.6 $(3) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince $Soc(M)$, bir sonlu eşüretilmiş modül olur. Yani, istenen $(2)(b)$ özelliği sağlanır. $(\star)$ ve $(\star\star)$'dan $Soc(M) = Soc(I(M))$ ve Lemma 2.1.53 gereğince $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i \leq_e I(M)$ olur. Buradan

$$Soc(M) = Soc(I(M)) \leq_e I(M)$$

elde edilir. Böylece $Soc(M) \leq_e M$ olur ve sonuç olarak istenen $(2)(a)$ özelliği sağlanır. □

Sonuç 3.4.8. [10] *Bir M_R modülü Artindir ancak ve ancak her M/U bölüm modülü için*

(a). $Soc(M/U)$, M/U *da essentialdır* $(Soc(M/U) \leq_e M/U)$ *ve*

(b). $Soc(M/U)$ *sonlu eşüretilmiştir.*

İspat: $(\Rightarrow)$. M_R modülü Artin olsun. O zaman Teorem 3.1.3 gereğince M modülünün her M/U bölüm modülü sonlu eşüretilmiştir. Böylece Teorem 3.4.5 in $(1) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince $Soc(M/U)$, M/U da essential ve $Soc(M/U)$ sonlu eşüretilmiştir.

$(\Leftarrow)$. Bir M_R modülünün her M/U bölüm modülü için (a) ve (b) sağlansın. Açıkça Teorem 3.4.5 in $(2) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince her M/U sonlu eşüretilmiştir. Sonuç olarak Teorem 3.1.3 ten, her bölüm modülü sonlu eşüretilmiş olan M_R modülü Artin olur. $\square$

4. ARTAN VE AZALAN ZİNCİR KOŞULLU HALKALAR

Bu bölümde halkalar üzerindeki artan ve azalan zincir koşulları çalışılarak, bağlantılı olduğu halka ve modül yapıları ile ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca, yer yer konuların tarihsel gelişimlerine yönelik bilgiler verilmiştir [1], [3], [4], [6], [7], [10], [15], [16].

4.1. Noether ve Artin Halkalar

Teorem 4.1.1. [6] *R bir halka ve $I_1, I_2, \ldots,$ R nin idealleri olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:*

(1). *R halkasının ideallerinin boş olmayan her kümesinin, kapsama işlemine göre bir maksimal elemanı vardır.*

(2). *R halkasının her ideali sonlu üretilmiştir.*

(3). *R halkasının ideallerinin her*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_i \subseteq \ldots$$

artan zinciri sonlu adımda durur. Yani, k bir pozitif tamsayı olmak üzere her $i \geq k$ için $I_i = I_k$ dır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. I, R halkasının bir ideali olsun.

$$X = \{J : J, R \text{ nin sonlu üretilmiş bir ideali ve } J \subseteq I\}$$

kümesini göz önüne alalım. $(0) \subseteq I$ olduğu için X kümesi boştan farklıdır. (1) kabulünden X kümesinde bir maksimal M elemanı vardır. X kümesinin tanımı gereğince M ideali sonlu üretilmiştir. $M = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ olsun. Şimdi bir $a \in I$ için

$$M' := M + (a) = (m_1, m_2, \ldots, m_r, a)$$

idealini göz önüne alalım. Açıkça, M' ideali sonlu üretilmiştir. M', I idealinde içerildiği için X kümesinin elemanıdır. Fakat

$$M = (m_1, m_2, \dots, m_r) \subseteq (m_1, m_2, \dots, m_r, a) = M'$$

ve varsayımdan M ideali, X kümesinde maksimal olduğu için çelişki elde edilir. O zaman $M = M'$ olmak zorundadır. O halde bu şekilde alınan her $a \in I$ aynı zamanda M idealinin bir elemanı olur. Yani, $M \subseteq I$ dır. Böylece $M = I$ elde edilir. Sonuç olarak, I sonlu üretilmiş olur.

$(2) \Rightarrow (3)$.

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_i \subseteq \dots \qquad (\blacklozenge)$$

R halkasının ideallerinin bir artan zinciri olsun. Açıkça,

$$I := \bigcup_{i \geq 1} I_i$$

R halkasının bir idealidir. O zaman (2) kabulünden I ideali sonlu üretilmiştir. Şimdi $I = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları $\bigcup I_i$ birleşimine ait olduğu için, a_i elemanlarının ait olduğu I_i ideallerinin en büyük indislisi I_k ise, o zaman her $a_i \in I_k$ yani $I \subseteq I_k$ olur. Buradan $I = I_k$ elde edilir. Sonuç olarak $(\blacklozenge)$ artan zinciri, k. adımda durur.

$(3) \Rightarrow (1)$. X, R nin ideallerinin boştan farklı bir kümesi olsun. X kümesinin bir maksimal elemanı olmadığını kabul edelim. O zaman X kümesindeki her I ideali için $I \subsetneqq J$ olacak şekilde bir $J \in X$ bulunur. Buradan tümevarım ile birbirinden farklı ideallerin sonsuz

$$I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq I_i \subsetneqq \dots$$

artan zinciri vardır. Bu durum ise (3) kabulümüz ile çelişki oluşturur. Öyleyse X kümesinin bir maksimal elemanı vardır. $\square$

Tanım 4.1.2. [6] Teorem 4.1.1 deki denk koşullardan birini sağlayan halkaya *Noether halka* denir.

Teorem 4.1.3. [6] R bir halka ve $I_1, I_2, \ldots,$ R nin idealleri olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:
(1). R halkasının ideallerinin her

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$$

azalan dizisi sonlu adımda durur.
(2). R halkasının ideallerinden oluşan boştan farklı her kümenin bir minimal elemanı vardır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. S, R halkasının ideallerinden oluşan boştan farklı bir küme olsun. S kümesinin bir I_1 elemanını alalım. I_1, S kümesinde minimal değilse, $I_1 \supsetneq I_2$ olacak şekilde S kümesinde bir I_2 elemanı vardır. I_2, S kümesinde minimal değilse, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3$ olacak şekilde S kümesinde bir I_3 elemanı vardır. Bu şekilde devam edilerek S kümesinin elemanlarının oluşturduğu bir

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$$

azalan dizisi bulunur. Bu dizi, (1) kabulünden sonlu bir t adımında durur. Yani, $I_t = I_{t+i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ olur. Böylece I_t, S kümesinin bir minimal elemanıdır.
$(2) \Rightarrow (1)$. R halkasında bir

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \qquad (\blacktriangle)$$

azalan idealler zincirini alalım. Bu ideallerin oluşturduğu kümeye S diyelim. (2) kabulünden, $k \geq 1$ olmak üzere S kümesinde bir I_k minimal elemanı vardır. Sonuç olarak, $(\blacktriangle)$ zinciri k. adımda durur. $\square$

Tanım 4.1.4. [6] Teorem 4.1.3 teki denk koşullardan birini sağlayan halkaya *Artin halka* denir.

Önceki bölümde modüller için verilen Artin ve Noether tanımları [Tanım 3.1.1] baz alınarak, halkalar için aşağıdaki genel tanıma ulaşılır:

Tanım 4.1.5. [1]

(1). Bir R halkası *sağ Noether* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ sağ regular R_R modülü Noetherdir.

(2). Bir R halkası *sağ Artin* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ sağ regular R_R modülü Artindir.

(3). Bir R halkası *Noether* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ R_R ve ${}_RR$ modülleri Noetherdir.

(4). Bir R halkası *Artin* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ R_R ve ${}_RR$ modülleri Artindir.

Lemma 4.1.6. [10] R bir halka olsun. O zaman:

(1). R_R bir sağ Noether halka ise, R_R nin her bölüm halkası Noetherdir.

(2). R_R bir sağ Artin halka ise, R_R nin her bölüm halkası Artindir.

İspat: (1). $A \leq R_R$ olsun. O zaman R_R modülünün Noether olması durumunda, $(R/A)_R$ bölüm modülü de Noetherdir. R/A ideal olarak $(R/A)_R$ sağ R-modülü ile çakıştığından ispat açıktır.

(2). (1)'in dualidir. $\square$

Önerme 4.1.7. [1] Bir R halkası için aşağıdaki özellikler denktir:

(a). R sol Artin halkadır.

(b). R nin Artin modül olan bir ${}_RG$ üreteci vardır.

(c). Her sonlu üretilmiş sol R-modül Artindir.

(d). Her sonlu üretilmiş sol R-modül sonlu eşüretilmiştir.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$. R birimli bir halka olduğu için ${}_RR$ bir üreteçtir. Böylece (a) kabulünden ${}_RR$ Artin olduğundan istenen (b) koşulu elde edilmiş olur.

$(b) \Rightarrow (c)$. R halkasının Artin olan bir ${}_RG$ üreteci var olsun. Buradan Önerme 3.1.7 gereğince, her sonlu F kümesi için $G^{(F)}$ bir Artin modül olur. Eğer M sonlu üretilmiş bir modül ise [1, Proposition 10.1] gereğince M, bir sonlu F kümesi için $G^{(F)}$ nin bir bölüm modülüne izomorf olur. O halde $G^{(F)}$ Artin modül olduğu için Teorem 3.1.3 gereğince $G^{(F)}$ nin her bölüm modülü de Artindir. Sonuç olarak, Artin modül özelliği izomorfizma altında korunduğu için M modülü Artin olur.

$(c) \Rightarrow (d)$. (c) koşulunu kabul edelim. Şimdi M, bir sonlu üretilmiş sol R-modül olsun. O zaman kabulden M modülü Artin olur. Buradan Teorem 3.1.3 $(1) \Rightarrow (4)$ koşulu gereğince M nin her bölüm modülü sonlu eşüretilmiştir. Öyleyse $M/0$ bölüm modülü sonlu eşüretilmiş olur. Sonuç olarak $M/0 \cong M$ olduğundan, M modülü sonlu eşüretilmiş olarak elde edilir.

$(d) \Rightarrow (a)$. (d) koşulunu kabul edelim. Şimdi ${}_RR$, sonlu üretilmiş bir modül olsun. Buradan açık bir şekilde, ${}_RR$ nin her bölüm modülü de sonlu üretilmiş olur. Öyleyse (d) kabulünden, ${}_RR$ nin her bölüm modülü sonlu eşüretilmiş olur. O halde Teorem 3.1.3 $(4) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince, her bölüm modülü sonlu eşüretilmiş olan ${}_RR$ modülü Artindir. □

Önerme 4.1.8. [1] *Bir R halkası için aşağıdaki özellikler denktir:*

(a). *R sol Noetherdir.*

(b). *R nin Noether modül olan bir ${}_RG$ üreteci vardır.*

(c). *Her sonlu üretilmiş sol R-modül Noetherdir.*

(d). *Her sonlu üretilmiş sol R-modülün her altmodülü de sonlu üretilmiştir.*

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$. R birimli bir halka olduğu için ${}_RR$ bir üreteçtir. Sonuç olarak (a) kabulünden, R nin sol Noether olan bir ${}_RR$ üreteci vardır. Böylece (b) koşulu sağlanmış olur.

$(b) \Rightarrow (c)$. R halkasının Noether olan bir ${}_RG$ üreteci var olsun. O zaman Önerme 3.1.7 gereğince her sonlu F kümesi için $G^{(F)}$ bir Noether modül olur. Eğer M

sonlu üretilmiş bir modül ise [1, Proposition 10.1] gereğince M, bir sonlu F kümesi için $G^{(F)}$ nin bir bölüm modülüne izomorf olur. O halde $G^{(F)}$ Noether olduğu için Teorem 3.1.4 gereğince, $G^{(F)}$ nin her bölüm modülü de Noetherdir. Sonuç olarak, Noether modül özelliği izomorfizma altında korunduğu için M modülü Noether olur.

$(c) \Rightarrow (d)$. (c) koşulunu kabul edelim. Şimdi M bir sonlu üretilmiş sol R-modül olsun. O zaman kabulden M modülü Noetherdir. Böylece Teorem 3.1.4 $(1) \Rightarrow (4)$ koşulu gereğince M nin her altmodülü sonlu üretilmiş olur.

$(d) \Rightarrow (a)$. (d) koşulunu kabul edelim. Şimdi $_RR$ sonlu üretilmiş bir modül olsun. O zaman kabulden $_RR$ nin her altmodülü de sonlu üretilmiştir. O halde Teorem 3.1.4 $(4) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince, her altmodülü sonlu üretilmiş olan $_RR$ modülü Noether olur. $\square$

Önerme 4.1.7 ve Önerme 4.1.8 deki $(a) \Rightarrow (c)$ koşulları doğrudan aşağıdaki şekilde ispatlanır:

Sonuç 4.1.9. [10] *R bir halka olsun. O zaman:*

(1). *R bir sağ Artin halka ve $M = M_R$ sonlu üretilmiş ise, M modülü Artindir.*

(2). *R bir sağ Noether halka ve $M = M_R$ sonlu üretilmiş ise, M modülü Noetherdir.*

İspat: (1). $x \in M$ için

$$\begin{aligned} \varphi_x : R &\longrightarrow M \\ r &\longmapsto xr \end{aligned}$$

dönüşümünü düşünelim. Açıkça, φ_x dönüşümü bir homomorfizmadır. 1. İzomorfizma Teoreminden sağ R-modüller olarak $R/Ker(\varphi_x) \cong Im(\varphi_x) = xR$ dir. Kabulden R bir sağ Artin halka olduğu için Lemma 4.1.6 gereğince $R/Ker(\varphi_x)$ bölüm halkası Artin olur. O halde izomorfizma özelliğinden bu durum xR için de sağlanır. Yani, xR sağ R-modülleri Artindir. Varsayımdan M modülünün sonlu üretilmiş olduğunu biliyoruz. Şimdi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi, M modülünün üreten sistemi olsun. O zaman Sonuç 3.1.8 gereğince

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i R$$

Artin olur.
(2). (1)'in dualidir. □

Şimdi aşağıda konu ile ilgili olan önemli bir sonucu verelim:

Sonuç 4.1.10. [15] R bir temel ideal halkası olsun. O zaman R bir Noether halkadır. Böylece her temel ideal bölgesi (TİB), bir Noether tamlık bölgesidir.

İspat: Bir temel ideal halkası R de, her sol ya da sağ ideal tek bir a elemanı ile üretilir. O halde, R halkasının her ideali sonlu üretilmiştir. Böylece Teorem 4.1.1 den, R bir Noether halka olur. Tanım gereğince TİB, her ideali temel ideal olan bir tamlık bölgesidir. Sonuç olarak, her TİB bir Noether tamlık bölgesi olur. □

Ayrıca Artin ve Noether halka tanımlarından yola çıkılarak, Önerme 3.1.7 den Noether (ya da Artin) halkaların direk toplamına dayalı aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.1.11. [4] Bir R halkası sağ Noether (Artin) dir ancak ve ancak her $n \geq 1$ tamsayısı için, serbest (free) modül $R^{(n)}$ Noether (Artin) dir.

İspat: [10, 4.4.3 Lemma] gereğince, $R^{(n)}$ bir serbest R-modüldür. Serbest modül tanımı gereğince de

$$\text{her } i \text{ için } \; A_i \cong R_R \text{ olmak üzere } \quad R^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

dir.

$(\Rightarrow)$. Şimdi R halkasının sağ Noether (Artin) olduğunu kabul edelim. O zaman tanımdan R_R bir Noether (Artin) modüldür. Öyleyse izomorfizma altında Noether (Artin) modül özelliği korunduğu için, her bir A_i modülü de Noether (Artin) olur. Sonuç olarak, Önerme 3.1.7 den açıkça $R^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ direk toplamı Noether (Artin) olarak elde edilir.

$(\Leftarrow)$. Serbest modül $R^{(n)}$ nin Noether (Artin) olduğunu kabul edelim. O zaman $R^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ olduğu için, Önerme 3.1.7 gereğince her A_i modülü Noether (Artin) olur. O halde $A_i \cong R_R$ ve Noether (Artin) modül özelliği izomorfizma altında korunduğu için, R_R bir Noether (Artin) modül olur. Böylece R bir Noether (Artin) halka olarak elde edilir. $\square$

4.2. Örnekler

Örnek 4.2.1. [10] Her sonlu boyutlu vektör uzayı, sonlu uzunlukludur.

Bunu görmek için V_K, K bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, V_K nın bir bazı (tabanı) olsun. O zaman $(x_1K + x_2K + \ldots + x_{i+1}K)/(x_1K + x_2K + \ldots + x_iK) \cong x_{i+1}K \cong K$ dan her bölüm basit olduğu için

$$0 \lneqq x_1K \lneqq x_1K + x_2K \lneqq \ldots \lneqq x_1K + x_2K + \ldots + x_nK = V_K,$$

V_K nın bir kompozisyon serisidir. Sonuç olarak V_K bir kompozisyon serisine sahip olduğu için, Tanım 2.1.38 in (4) özelliği gereğince V_K sonlu uzunluklu olur.

Örnek 4.2.2. [10] Sonsuz boyutlu V_K vektör uzayı ne Artin ne de Noetherdir: $\{x_i | i \in \mathbb{Z}^+\}$, V_K nın doğrusal (lineer) bağımsız elemanlarının bir kümesi olsun. O zaman

$$V_K = \sum_{i=1}^{\infty} x_i K \supsetneqq \sum_{i=2}^{\infty} x_i K \supsetneqq \sum_{i=3}^{\infty} x_i K \supsetneqq \ldots \textit{(azalan)} \text{ ve}$$

$$x_1 K \subsetneqq x_1 K + x_2 K \subsetneqq x_1 K + x_2 K + x_3 K \subsetneqq \ldots \textit{(artan)}$$

zincirlerini düşünebiliriz. Bu zincirler sonlu adımda durmadığı için sonsuz boyutlu V_K uzayı, ne Artin ne de Noetherdir.

Örnek 4.2.3. [6] $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası Noetherdir, fakat Artin değildir.
$\mathbb{Z}$ halkası Noetherdir: $\mathbb{Z}$ halkasında,

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_i \subseteq \ldots$$

ideallerin bir artan zinciri olsun. $\mathbb{Z}$, temel ideal bölgesi (TİB) ve dolasıyla $\mathbb{Z}$ halkasının her ideali, temel ideal olduğu için

$$I_1 = (a_1) \subseteq I_2 = (a_2) \subseteq \ldots \subseteq I_i = (a_i) \subseteq \ldots \qquad (\bigstar)$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ tamsayıları vardır. Böylece

$$a_1 = a_2 b_1, \quad a_2 = a_3 b_2, \quad a_3 = a_4 b_3, \ldots$$

olacak şekilde $b_1, b_2, b_3 \ldots$ tamsayıları vardır. $(\bigstar)$ zincirindeki kapsamalar $\subsetneqq$ şeklinde olsaydı,

$$a_1 = a_2 b_1, \quad a_2 = a_3 b_2, \quad a_3 = a_4 b_3, \ldots$$

eşitliklerindeki $b_1, b_2, b_3 \ldots$ tamsayılarının hiçbiri ± 1 olamazdı. Buradan

$$a_1 = a_2 b_1 = a_3 b_2 b_1 = a_4 b_3 b_2 b_1, \ldots$$

olacak şekilde a_1 tamsayısı yazılabilirdi. Yani, a_1 in çarpanlarının sayısı sonlu olmazdı. Bu durum ise, Aritmetiğin Temel Teoremi ile çelişki oluştururdu. Sonuç olarak $(\bigstar)$ zinciri, sonlu adımda durmalıdır. O halde $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası

Noerherdir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası Artin değildir: $\mathbb{Z}$ halkasında, sonlu bir adımda durmayan

$$2\mathbb{Z} \supsetneqq 4\mathbb{Z} \supsetneqq 8\mathbb{Z} \supsetneqq 16\mathbb{Z} \supsetneqq \dots$$

azalan zinciri vardır.

Örnek 4.2.4. [7] $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkası, hem Artin hem de Noetherdir.

Açıkça, $\mathbb{Q}$ bir cisimdir. Bu yüzden, aslında bu örnekte bir cismin nasıl hem Artin hem de Noether olduğu gösterilecektir.

$\mathbb{Q}$ cismi Artindir: Açıkça $\mathbb{Q}$ bir cisim olduğu için, $\mathbb{Q}$ bir değişmeli halkadır ve buradan $\mathbb{Q}$ nun idealleri iki yanlıdır. $\mathbb{Q}$ nun iki aşikar (trivial) ideali, $\{0\}$ ve $\mathbb{Q}$ dur. Şimdi $\mathbb{Q}$ nun ideallerinin, sadece $\{0\}$ ve $\mathbb{Q}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için I, $\mathbb{Q}$ nun bir aşikar olmayan ideali ve $a \in I$ olsun. I bir ideal olduğundan, her $r \in \mathbb{Q}$ için $rI \subseteq I$ dir. Öyleyse, her $r \in \mathbb{Q}$ için $ra \in I$ olur. Açıkça $a \in I$ olduğu için, $a \in \mathbb{Q}$ dur. O zaman $\mathbb{Q}$ bir cisim olduğu için, a elemanının $\mathbb{Q}$ da a^{-1} ile göstereceğimiz bir tersi vardır. Buradan $\mathbb{Q}$ nun birim elemanı 1 için

$$1 = \underbrace{a^{-1}}_{\in\mathbb{Q}}\underbrace{a}_{\in I} \in I$$

elde edilir. O halde $\mathbb{Q}$ nun birim elemanı 1, I idealinde içerildiği için; açıkça $I = \mathbb{Q}$ olur. Böylece $\mathbb{Q}$ nun aşikar olmayan herhangi bir I ideali, yine kendisi yani, $\mathbb{Q}$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $\mathbb{Q}$ nun, $\{0\}$ ve $\mathbb{Q}$ olmak üzere sadece iki ideali vardır. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ nun ideallerinin azalan zinciri, sadece

$$\mathbb{Q} \supsetneqq \{0\}$$

zinciridir. Açık bir şekilde bu azalan zincir sonlu adımda durduğu için, Teorem 4.1.3 gereğince $\mathbb{Q}$ cismi Artin olur.

$\mathbb{Q}$ halkası Noetherdir: Rasyonel sayılar cismi $\mathbb{Q}$ nun Noether özelliği için, $\mathbb{Q}$ nun Artin özelliğinin ispatı ile aynı yöntem izlenir. Yani, $\mathbb{Q}$ nun idealleri sadece $\{0\}$ ve $\mathbb{Q}$ dur. O halde $\mathbb{Q}$ nun ideallerinin artan zinciri tek olup,

$$\{0\} \subsetneqq \mathbb{Q}$$

şeklindedir. Buradan kolayca görüldüğü gibi bu artan zincir sonlu adımda durduğu için, Teorem 4.1.1 gereğince $\mathbb{Q}$ cismi Noether olur. Sonuç olarak, $\mathbb{Q}$ cismi hem Artin hem de Noether olarak elde edilir.

Örnek 4.2.5. [10] p bir asal sayı ve $\mathbb{Q}_p := \{\frac{a}{p^i} | a \in \mathbb{Z}$ ve $i \in \mathbb{N}\}$ yani, paydası p nin bir kuvveti (p^0 =1'i içeren) olan rasyonel sayıların kümesi olsun. O zaman $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}$ nun toplamsal alt grubudur ve $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}_p$ dir.

İddia: $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-modül olarak Artindir, fakat Noether değildir.

İspat: $\left|\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}\right)$, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ nin $\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ ile üretilen $\mathbb{Z}$-altmodülü olsun. O zaman $\dfrac{1}{p^{i+1}} \notin \left|\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}\right)$ için

$$0 \leq \left|\frac{1}{p} + \mathbb{Z}\right) \leq \left|\frac{1}{p^2} + \mathbb{Z}\right) \leq \left|\frac{1}{p^3} + \mathbb{Z}\right) \leq \ldots$$

artan zinciri sonlu adımda durmadığından $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ Noether değildir. $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ nin Artin olduğunu göstermek için, yukarıda verilen zincirde $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ nin tüm öz altmodüllerinin var olduğunu göstermeliyiz. O zaman açıkça, altmodüllerinin her boştan farklı kümesinde bir en küçük altmodül vardır. İlk olarak,

$$\textbf{(*)} \qquad (a,p) = 1 \Rightarrow \left|\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z}\right) = \left|\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}\right)$$

olduğunu gösterelim. $(a,p) = 1$ olduğundan, $ab + p^i c = 1 \Rightarrow \dfrac{ab}{p^i} - \dfrac{1}{p^i} = -c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $b, c \in \mathbb{Z}$ elemanları vardır. Böylece

$$\frac{ab}{p^i} + \mathbb{Z} = \frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \Rightarrow \left|\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}\right) \leq \left|\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z}\right)$$

olur. Diğer taraftan, $\left|\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z}\right) \leq \left|\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}\right)$ olduğundan bu iddia sağlanır. Şimdi $B \leq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ olsun. O zaman burada iki farklı durum vardır:

1. $durum:$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $i \geq n$ olmak üzere bir $i \in \mathbb{N}$ ve $(a,p) = 1$ olmak üzere

bir $\dfrac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \in B$ vardır (Yani, B de yüksek dereceli elemanlar vardır). Böylece **(*)**'dan açıkça, her $z/p^n + \mathbb{Z} \in B$ için $B = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ dir.

2. $durum$: $(a, p) = 1$ olmak üzere bir $\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \in B$ için bir maksimal $i \in \mathbb{N}$ vardır (Yani, B de yüksek dereceli herhangi bir eleman yoktur). Sonuç olarak, **(*)**'dan

$$\left| \tfrac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \right) = \left| \tfrac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \right) = B$$

elde edilir.

Örnek 4.2.6. [10] Bir taraf üzerinde (sağ ya da sol) Artin ve Noether, sonuç olarak sonlu uzunluklu olan; fakat diğer taraf üzerinde ne Artin ne de Noether olan bir halka örneği:

R ve K cisim ve R, K nın genişletilmiş sonsuz boyutlu cismi olsun. Örneğin, $R = \mathbb{R}$ ve $K = \mathbb{Q}$. Şimdi S, $k \in K$ ve $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $\begin{pmatrix} k & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$ biçimindeki tüm matrislerin halkası olsun. Açıkça görüldüğü gibi, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim eleman olmak üzere S bir halkadır.

S, ne sol Artin ne de sol Noetherdir: $\{x_i | i \in \mathbb{Z}^+\}$, K üzerinde doğrusal (lineer) bağımsız olan R nin elemanlarının kümesi ve

$$s_i := \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}^+$$

olsun. O zaman

$$\begin{pmatrix} k & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} s_i = \begin{pmatrix} 0 & kx_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$Ss_i = \begin{pmatrix} 0 & Kx_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

s_i ile üretilmiş bir sol idealdir. K sonsuz boyutlu olduğundan

$$Ss_1 \subsetneqq Ss_1 + Ss_2 \subsetneqq Ss_1 + Ss_2 + Ss_3 \subsetneqq \dots$$

sol ideallerin bir artan zinciri ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} Ss_i \supsetneqq \sum_{i=2}^{\infty} Ss_i \supsetneqq \sum_{i=3}^{\infty} Ss_i \supsetneqq \dots$$

sol ideallerin bir azalan zinciridir. Her iki zincir de sonlu adımda durmadığı için S ne sol Artin ne de sol Noetherdir.

S_s nin sonlu boyutlu (hem sağ Artin hem de sağ Noether) olduğunu göstermek için, S_s nin bir kompozisyon serisi açık bir şekilde verilecektir. Bunun için S nin iki elemanının çarpımını göz önüne alalım:

$$\begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hk & hr_1 + a_1 r_2 \\ 0 & a_2 r_2 \end{pmatrix}$$

Şimdi

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

O zaman bu sağ idealler, açıkça basittir (Çünkü, R bir cisimdir) ve $A_1 \cap A_2 = 0$ dır. O zaman

$$A_1 + A_2/A_1 \cong A_1/A_1 \cap A_2 \cong A_2 \, ,$$

aynı zamanda basit olur. O halde $0 \leq A_1 \leq A_1 + A_2 \leq S$, S_s nin bir kompozisyon serisidir. Geriye sadece $A_1 + A_2$ nin, S de maksimal olduğunu göstermek kalır. Şimdi $\begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \notin A_1 + A_2$ olsun. Buradan $h \neq 0$ dır. O zaman $B := A_1 + A_2 + \begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} S$ için

$$\left(\begin{pmatrix} h & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h^{-1} & -h_1^{-1} a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$$

elde edilir. Böylece $B = S$ olur. Sonuç olarak S_s, sonlu uzunlukludur ve buradan açıkça, S_s hem sağ Artin hem de sağ Noetherdir.

Örnek 4.2.7. [3] K bir cisim olsun. Şimdi katsayıları K cisminden olmak üzere bir t değişkeni ile elde edilen $K[t]$ polinom halkasını düşünelim. Tüm pozitif n tamsayıları için $K[t]/(t^n)$ bölüm halkası, hem Artin hem de Noetherdir:
$K[t]/(t^n) \cong K^n$ dir. İzomorfizma altında boyut kavramı korunduğu için $K[t]/(t^n)$, boyutu n olan bir sonlu bir vektör uzayıdır. Sonuç olarak, Teorem 3.1.9 gereğince $K[t]/(t^n)$ bölüm halkası hem Artin hem de Noether olur.

Örnek 4.2.8. [3] Bir R halkası üzerinde $t_1, t_2, \ldots$ bilinmeyenleri ile elde edilen $R[t_1, t_2, \ldots]$ polinom halkası, ne Noether ne de Artindir:

$$(t_1) \subsetneqq (t_1, t_2) \subsetneqq (t_1, t_2, t_3) \subsetneqq \ldots$$

artan zinciri sonlu adımda durmadığı için, Teorem 3.1.4 gereğince $R[t_1, t_2, \ldots]$ polinom halkası Noether değildir ve

$$(t_1) \supsetneqq (t_1^2) \supsetneqq (t_1^3) \supsetneqq \ldots$$

azalan zinciri sonlu adımda durmadığı için, Teorem 3.1.3 gereğince $R[t_1, t_2, \ldots]$ polinom halkası Artin değildir.

4.3. Hilbert Baz Teoremi

Cebirsel geometrinin kayda değer başlangıcı, 1630-1795 yılları arasında Pierre de Fermat ve Rene Descartes ile olmuştur. Birçok matematikçi, cebirsel problemleri geometriyi kullanarak açıklamaya çalışmıştır. Bu matematikçilerin birçoğuna göre cebirsel geometrinin arkasındaki genel düşünce, halkaların ideallerini ilgilendiren cebirsel sorular ile geometrik soruların aynı olduğudur. David Hilbert ve Emmy Noether birlikte ortaya çıkana kadar bu konu ile ilgili çok sayıda teorik çalışma geliştirilmiştir. David Hilbert, 1888 yılında bir polinom halkası üzerindeki bir sonlu grupla ilgili sonlu üretilmiş halka kavramına yönelik ünlü Baz Teoremini ispatlamıştır. Emmy Noether, David Hilbert'in bu soyut yaklaşımından oldukça etkilenmiştir. Daha sonra Emmy Noether, verilen halkaların sadece sonlu üretilmiş idealleri ile ilgilenerek bu halkalarla ilgili soruları aza indirgemiştir. Bu durum cebirsel geometri alanında, Noether halkalarla ilgili Hilbert Baz teoreminin doğmasına neden olmuştur [16].

Teorem 4.3.1. [10] *R bir sağ Noether halka olsun. O zaman* $R[x]$ *polinom halkası sağ Noetherdir.*

İspat: İspat için, $R[x]$ polinom halkasında her A sağ idealinin sonlu üretilmiş olduğunu göstereceğiz. Şimdi $A \neq 0$ olduğunu kabul edelim. İspat üç adımda elde edilir.

1. Adım: $r_n \neq 0$ olmak üzere $P(x) = x^n r_n + x^{n-1} r_{n-1} + \ldots + r_0 \in R[x]$ ise r_n, $P(x)$ polinomunun baş katsayısıdır. $R[x]$'de sıfır polinomunun baş katsayısı 0 dır. $A_0 := A$ sağ idealindeki polinomların baş katsayılarının kümesi olarak tanımlansın.

İddia: $A_0 \leq R_R$ dir.

İspat: $a, b \in A_0$, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise, o zaman

$$P_1(x) = x^m a + x^{m-1} a_{m-1} + \ldots \in A$$
$$P_2(x) = x^n b + x^{n-1} a_{n-1} + \ldots \in A$$

polinomları vardır. Ayrıca $ar_1 + br_2 \neq 0$ olmak üzere $r_1, r_2 \in R$ olsun. Buradan

$$P_1(x) x^n r_1 + P_2(x) x^m r_2 \in A_0$$

elde edilir. Böylece $ar_1 + br_2 \in A_0$ ve sonuç olarak $A_0 \leq R_R$ olur.

R_R Noether olduğu için, A_0 sonlu üretilmiştir [Teorem 3.1.4]. Her $a_i \neq 0$ olmak üzere $a_1, a_2, \ldots, a_k$ A_0 ın bir üreten sistemi olsun. O zaman verilen sırada baş katsayılar $a_1, a_2, \ldots, a_k$ olacak şekilde $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x) \in A$

polinomları vardır. x in kuvvetleri ile çarpılarak tüm $P_i(x)$ polinomları, aynı n derecesine sahip olacak şekilde düzenlenebilir. Şimdi

$$B := \sum_{i=1}^{k} P_i(x)R[x]$$

olsun. O zaman B sonlu üretilmiştir ve $B \leq A$ dır.

2. Adım: Şimdi $F(x) \in A$ olsun.

İddia: $G(x) \in B$ ve $H(x) = 0$ ya da $H(x)$ in derecesi $\leq n$ olacak şekilde $F(x)$,

$$F(x) = G(x) + H(x)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: Eğer $F(x) = 0$ ya da $F(x)$ in derecesi $\leq n$ ise, $F(x) = H(x)$ olmak üzere iddia geçerlidir. Şimdi $F(x)$ in derecesi $t > n$ olsun. b, $F(x)$ in baş katsayısı ise $r_i \in R$ olmak üzere b,

$$b = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_k r_k$$

biçiminde yazılabilir.

$$F_1(x) := F(x) - \left(\sum_{i=1}^{k} P_i(x) r_i \right) x^{t-n}$$

ise, F_1 polinomunun derecesi $\leq t-1$ ya da $F_1(x) = 0$ dır. Böylece

$$G_1(x) := \left(\sum P_i(x) r_i \right) x^{t-n}$$

iken $G_1(x) \in B$ olmak üzere $F(x) = G_1(x) + F_1(x)$ dir. $F_1(x)$ in derecesi $\geq n$ olması durumunda, buna bağlı olarak $F_1(x)$ i parçayabiliriz: $G_2(x) \in B$ ve $F_2(x) = 0$ ya da $F_2(x)$ in derecesi $\leq (t-2)$ olmak üzere

$$F_1(x) = G_2(x) + F_2(x)$$

dir. Buradan $G_1(x) + G_2(x) \in B$ ve $F_2(x) = 0$ ya da $F_2(x)$ in derecesi $\leq (t{-}2)$ olmak üzere

$$F(x) = G_1(x) + F_1(x) = G_1(x) + G_2(x) + F_2(x)$$

dir. En çok $(t - n)$ adımdan sonra istenilen

$$\textbf{(*)} \qquad F(x) = G(x) + H(x)$$

parçalanması elde edilir. $F(x) \in A$ ve $G(x) \in B \leq A$ olduğu için

$$H(x) = F(x) - G(x) \in A \cap (R + xR + \ldots + x^n R)$$

olur.

3. Adım: Şimdi $A \cap (R + xR + \ldots + x^n R)$ sağ R-modülünü düşünelim. Bu modül, bir sağ Noether R halkası üzerinde sonlu üretilmiş $x + xR + \ldots + x^n R$ sağ R-modülünün bir R-altmodülüdür. O zaman R sağ Noether halka ve $x + xR + \ldots + x^n R$ sağ R-modülü sonlu üretilmiş olduğu için, Sonuç 4.1.9 un (2) özelliği gereğince $x + xR + \ldots + x^n R$ modülü Noether olur. Buradan $A \cap (x + xR + \ldots + x^n R) \leq x + xR + \ldots + x^n R$ olduğu için Teorem 3.1.4 gereğince $A \cap (x + xR + \ldots + x^n R)$ sonlu üretilmiştir. Şimdi

$$A \cap (x + xR + \ldots + x^n R) = \sum_{i=1}^{l} Q_i(x) R[x]$$

olsun. Bu durumda

$$A = \sum_{i=1}^{k} P_i(x) R[x] + \sum_{j=1}^{l} Q_j(x) R[x]$$

olduğunu göstereceğiz. $P_i(x)$, $Q_j(x) \in A$ olduğu için eşitliğin sağ tarafı, A da içerilir ve aynı zamanda **(*)**’dan A, sağ tarafta içerilir. Böylece ispat tamamlanır.

Yani, A sağ ideali sonlu üretilmiştir. Sonuç olarak, Teorem 3.1.4 ten $R[x]$ polinom halkası sağ Noether olur. □

Teorem 4.3.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.3.2. [10] *R bir sağ Noether halka olsun. O zaman $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom halkası sağ Noetherdir.*

4.4. Noether Halkaların Karakterizasyonu

Bu bölümde Noether halkalarla ile ilgili modüllerin derinlemesine bir teorisinin temelini oluşturan Noether halkaların bir karakterizayonunu vereceğiz. İspat, esas olarak Baer Kriterine dayanmaktadır.

Teorem 4.4.1. [10, Baer Kriteri 5.7.1] Bir Q_R modülü injektiftir ancak ve ancak her $U \leq R_R$ sağ ideali ve her $\rho : U \to Q$ homomorfizması için,
$i : U \to R$ bir içerim dönüşümü olmak üzere $\rho = \tau i$ olacak şekilde bir
$\tau : R_R \to Q$ homomorfizması vardır.

Teorem 4.4.2. [10] *Bir R halkası için aşağıdaki özelllikler denktir:*

(1). *R_R Noetherdir.*

(2). *İnjektif sağ R-modüllerin her direk toplamı injektiftir.*

(3). *Basit sağ R-modüllerin injektif hull'larının her sayılabilir direk toplamı injektiftir.*

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2). $Q := \bigoplus_{i \in I} Q_i$, Q_i injektif sağ R-modüllerin bir (iç veya dış) direk toplamı olsun. Baer Kriteri gereğince Q modülünün injektif olduğunu ispatlamak için her $U \leq R_R$ sağ ideali ve her $\rho : U \to Q$ homomorfizması için $i : U \to R$ içerim dönüşümü olmak üzere $\rho = \tau i$ olacak şekilde bir $\tau : R \to Q$ homomorfizmasının varlığını göstermek yeterlidir. R_R Noether ve $U \leq R_R$ olduğu için, U sonlu üretilmiştir:
$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ kümesi U idealinin bir üreten sistemi olmak üzere

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i R$$

olsun. Burada $i = 1, 2, \ldots, n$ için ρ altında u_i lerin $\rho(u_i)$ görüntüleri, sadece sonlu çokluktaki Q_i için sıfırdan farklı bileşkelere sahiptir. Bu sonlu çokluktaki Q_i ler; I_0, I nın bir sonlu alt kümesi olmak üzere $i \in I_0$ olacak şekildeki Q_i lerdir.

$$i_0 : \bigoplus_{i \in I_0} Q_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

bir içerim dönüşümü ve ρ_0, ρ homomorfizmasının U tanım kümesinin $U = \sum_{i=1}^{n} u_i R$ için yeniden düzenlenmesi ile $\bigoplus_{i \in I_0} Q_i$ ye kısıtlandırılan bir homomorfizması olsun. Yani,

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i R \xrightarrow{\rho_0} \bigoplus_{i \in I_0} Q_i \xrightarrow{i_0} \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

olsun. Buradan $\rho = i_0 \rho_0$ olur. I_0 sonlu olduğu için, $\bigoplus_{i \in I_0} Q_i$ injektiftir ve Baer Kriteri gereğince aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir τ_0 homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\rho_0"'] & R \arrow[dl, dashed, "\tau_0"] \\
\bigoplus_{i \in I_0} Q_i \arrow[d, "i_0"'] & \\
\bigoplus_{i \in I} Q_i &
\end{tikzcd}$$

Sonuç olarak, eğer $\tau := i_0 \tau_0$ olarak tanımlanırsa

$$\rho = i_0 \rho_0 = i_0 \tau_0 i = \tau i$$

olarak elde edilir. Böylece, Baer Kriteri gereğince $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ injektif olur.

$(2) \Rightarrow (3)$. (2) nin bir özel durumudur.

$(3) \Rightarrow (1)$. R_R nin Noether olmadığını kabul edelim. O zaman R nin öz altmodüllerinden oluşan ve sonlu adımda durmayan bir artan zinciri vardır:

$$A := A_1 \lneqq A_2 \lneqq A_3 \lneqq \dots$$

O halde

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

aynı zamanda R nin bir sağ idealidir ve her $a \in A$ için, "her $i \geq n_a$ için $a \in A_i$" olacak şekilde bir $n_a \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Çünkü, yukarıdaki A zinciri R nin A_i öz alt sağ ideallerinden oluşan bir artan zincirdir. Dolasıyla belirli bir $n_a \in \mathbb{N}$ indisi ve sonrasındaki A_i öz alt sağ ideallerinde $a \in A$ bulunacak, fakat n_a indisinin öncesindeki A_i öz alt sağ ideallerinde bulunmayacaktır. Her $a \in A$ için böyle bir $n_a \in \mathbb{Z}^+$ bulabiliriz. Şimdi her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $c_i \in A$, $c_i \notin A_i$ olsun. Lemma 2.1.30 gereğince devirli $(c_i R + A_i)/A_i$ modülünde bir maksimal N_i/A_i altmodülü vardır. O zaman

$$E_i := ((c_i R + A_i)/A_i)/(N_i/A_i),$$

bir basit (=minimal) sağ R-modüldür. $\nu_i : (c_i R + A_i)/A_i \longrightarrow E_i$ bir doğal epimorfizma olsun. $E_i \leq I(E_i)$ olmak üzere $I(E_i)$, E_i nin bir injektif hull'u ve $\iota_i : E_i \longrightarrow I(E_i)$ bir içerim dönüşümü olsun. Buradan $i = 1, 2, 3, \dots$ için ι_i' bir içerim dönüşümü ve $\eta_i \iota_i'(\bar{c}_i) = \iota_i \nu_i(\bar{c}_i) \neq 0$ olmak üzere bir

$$\begin{tikzcd}
(c_iR + A_i)/A_i \arrow[r, "\iota_i'"] \arrow[d, "\nu_i"'] & A/A_i \arrow[ddl, dashed, "\eta_i"] \\
E_i \arrow[d, "\iota_i"'] & \\
I(E_i) &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı vardır. Şimdi $\eta_i(a + A_i)$, $\alpha(a)$ nın i ninci bileşeni olacak şekilde bir

$$\alpha : A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} I(E_i)$$
$$a \longmapsto \sum_{i=1}^{n_a} \eta_i(a + A_i)$$

homomorfizması tanımlayalım. $i \geq n_a$ için $a \in A_i$ olduğundan, $\alpha(a)$ direk toplamda içerilir (Eğer bir dış direk toplam olarak $\bigoplus I(E_i)$ yi düşünürsek, o zaman $\alpha(a) = (\eta_i(a + A_i))$ dir). Kabulden $\bigoplus_{i=1}^{\infty} I(E_i)$ injektif olduğundan,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
\bigoplus_{i=1}^{\infty} I(E_i) &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir β homomorfizması vardır. b_i, $\bigoplus I(E_i)$ direk toplamında $\beta(1)$ in i ninci bileşeni olsun. Buradan $i \geq n$ için $b_i = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $\alpha(a) = \beta(a) = \beta(1)a$, $a \in A$ olduğu için $\eta_i(a + A_i) = b_i a$ dır. Böylece $i \geq n$ ve her $a \in A$ için $\eta_i(a + A_i) = 0$ olur.

Fakat η_i nin tanımından $\eta_n(c_n + A_n) \neq 0$ olduğu için, çelişki elde edilir. Sonuç olarak, R_R bir Noether modül olur. $\square$

Uyarı 4.4.3. [10] *Teorem 4.4.2 nin ispatında sadece* $(1) \iff (2)$ *koşulu ile ilgilenseydik, ispat daha basit olabilirdi. Fakat sonraki teorem için* $(3) \Rightarrow (1)$ *koşuluna ihtiyacımız var.* $(3) \Rightarrow (1)$ *koşulun ispatının aksine,* $(2) \Rightarrow (1)$ *koşulunun ispatı daha kolay ve anlaşılırdır:*

İspat: $(2) \Rightarrow (1)$. Şimdi bu ispat, R_R nin sağ ideallerinin oluşturduğu herhangi bir

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots \qquad (\spadesuit)$$

artan zincirinden başlanarak elde edilir. Yine

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

olsun. Şimdi η_i ler,

$$\eta_i : A/A_i \longrightarrow I(A/A_i)$$
$$a + A_i \longmapsto a + A_i$$

olacak şekilde içerim dönüşümleri olsun ve

$$\alpha(a) := \sum_{i=1}^{n_a} (a + A_i), \quad a \in A$$

olacak şekilde

$$\alpha : A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} I(A/A_i)$$

tanımlansın. η_i tanımından $\eta_i(a + A_i) = a + A_i$ olduğu için,

$$\alpha(a) := \sum_{i=1}^{n_a} (a + A_i) = \sum_{i=1}^{n_a} \eta_i(a + A_i)$$

dir. O zaman $i \geq n_a$ için $a \in A$ olduğundan, $\eta_i = 0$ olur. Sonuç olarak, $i \geq n_a$ için $A = A_i$ dir. Yani, ($\spadesuit$) artan zinciri belli bir adımda durur. O halde, Teorem 3.1.4 gereğince R_R bir Noether modül olur. Böylece $(2) \Rightarrow (1)$ koşulunun ispatı tamamlanır. $\square$

Eğer R herhangi bir halka ve

$$i = 1, 2, \ldots, n \text{ olmak üzere } \eta_i : M_i \longrightarrow I(M_i),$$

M_i sağ R-modüllerinin sonlu çokluktaki injektif hull'ları ise

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \eta_i : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} I(M_i)$$

direk toplamı, aynı zamanda bir injektif hull olur. Eğer R_R Noether ise, o zaman Teorem 4.4.2 ve Lemma 2.1.53 gereğince herhangi bir I indis kümesi için aynı sonuç yine sağlanır. Böylece sonlu çokluktaki injektif modüllerin direk toplamı yine injektif olduğundan, sonsuz çokluktaki injektif modüllerin direk toplamının injektif olması için R_R nin Noether olması gerektiği sonucuna ulaşırız.

Sonuç 4.4.4. [10] *R_R Noether ve $(M_i | i \in I)$, sağ R-modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer*

$$\eta_i : M_i \longrightarrow I(M_i),$$

M_i modülünün herhangi bir injektif hull'u ise

$$\bigoplus_{i \in I} \eta_i : \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} I(M_i),$$

$\bigoplus_{i \in I} M_i$ direk toplamının bir injektif hull'udur.

4.5. Artin ve Noether Halkalar Üzerindeki İnjektif Modüllerin Parçalanışı

Bu bölümde Artin ve Noether halkalar üzerindeki injektif modüller için

(1). Bir M modülünün, hangi varsayımlar altında direk parçalanamayan N_i altmodüllerinin bir direk toplamına $\big(M = \bigoplus N_i\big)$ parçalanışı vardır?
(2). Direk parçalanamayan modüllerin özellikleri nelerdir?

soruları cevaplandırılacaktır. Bunun için önce gerekli olan bazı tanımlar ifade edilip, ispatlar için gerekli olan yardımcı teoremler aşağıda ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 4.5.1. [10] M bir sağ R-modül olsun.
(a). $U \lneqq M$ olsun. M modülü, *U üzerinde indirgenemez (meet-irreducible)* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ $U \lneqq A$, $U \lneqq B$ olacak şekilde her $A, B \leq M$ altmodülleri için $U \neq A \cap B$ dir.
(b). M modülü *indirgenemez (irreducible ya da meet-irreducible)* olarak adlandırılır $:\Leftrightarrow$ M modülü 0 üzerinde indirgenemezdir.

Teorem 4.5.2. [10, Theorem 6.6.2] $Q_R \neq 0$ olmak üzere Q_R, bir injektif modül olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:
(1). Q modülü direk parçalanamazdır.
(2). Q modülü, her sıfırdan farklı altmodülünün injektif hull'udur.
(3). Q modülünün her sıfırdan farklı altmodülü indirgenemezdir.
(4). Q modülü, indirgenemez bir altmodülünün injektif hull'udur.

Sonuç 4.5.3. [10, Corollaries 6.6.3]
(a). Bir basit R-modülünün injektif hull'u direk parçalanamazdır.
(b). Bir direk parçalanamaz injektif Q modülü, en çok bir basit altmodül içerir.

Sonuç 4.5.4. [10] R_R bir Artin modül ise, o zaman her direk parçalanamaz, injektif $Q_R \neq 0$ modülü; bir basit R-modülün injektif hull'udur.

İspat: $0 \neq q \in Q$ olsun. Buradan qR, yalnızca q elemanı ile üretilen sıfırdan farklı bir modüldür. O halde qR, Q_R modülünün sonlu üretilmiş bir altmodülüdür. Kabulden R_R Artin olduğu için Sonuç 4.1.9 un (1) koşulu gereğince, sonlu üretilmiş olan qR altmodülü Artin olur. O zaman Artin modül tanımından, qR nin bir basit E altmodülü vardır. $E \leq qR \leq Q$ olduğu için Teorem 4.5.2 nin $(1) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince Q, basit E altmodülünün bir injektif hull'udur. $\square$

Önerme 4.5.5. [10] R_R Noether ise her injektif Q_R modülü, direk parçalanamayan altmodüllerinin bir direk toplamıdır. Ayrıca R_R Artin ise (daha sonra Sonuç 4.7.11 de gösterilecek: R_R Artin ise R_R Noetherdir) Q_R nin direk parçalanamayan toplananlarından her biri, bir basit R-modülün bir injektif hull'udur.

Şimdi Önerme 4.5.5 in ispatı için, öncelikle gerekli olan iki lemmayı verelim:

Lemma 4.5.6. [10] Γ, bir M_R modülünün altmodüllerinin bir kümesi olsun. O zaman $U \leq M_R$ altmodülleri için

$$(\bullet) \qquad \sum_{U \in \Lambda} U = \bigoplus_{U \in \Lambda} U$$

olacak şekilde Γ kümesinin tüm Λ alt kümelerinin arasında bir maksimal Λ_0 kümesi vardır.

İspat: Γ kümesinin $(\bullet)$ özelliğini sağlayan tüm Λ alt kümelerinden oluşan bir G kümesi,

$$G := \{\Lambda \mid \Lambda \subseteq \Gamma \text{ ve } (\bullet) \text{ özelliği sağlanır}\}$$

olarak tanımlansın. O zaman G kümesi, kapsama işlemine göre sıralıdır. Açıkça,

$$0 = \sum_{U \in \emptyset} U = \bigoplus_{U \in \emptyset} U$$

olduğu için $\emptyset \in G$ dir. Öyleyse G kümesi boştan farklıdır. Şimdi H, G nin bir tam sıralı alt kümesi ve

$$\Omega := \bigcup_{\Lambda \in H} \Lambda$$

olsun. O zaman $\Omega \subseteq \Gamma$ dır.

İddia: $\Omega \in G$ yani, Ω kümesi $(\bullet)$ özelliğini sağlar.

İspat: Şimdi bu durumun olmadığını kabul edelim. O zaman Ω kümesindeki altmodüllerin toplamı direk değildir. Öyleyse bu toplamın, direk olmayan bir sonlu alt toplamı olmak zorundadır. Fakat kabulden H, kapsama işlemine göre bir tam sıralı alt küme olduğu için Ω kümesinden alınan sonlu çokluktaki altmodüller, toplamları direk olacak şekilde bir $\Lambda \in H$ kümesinin içindedir. O halde kabulümüz ile H alt kümesinin tanımı arasında bir çelişki elde ederiz. Böylece $\Omega \in G$ olur. Öyleyse Ω, G kümesinde tam sıralı H alt kümesinin bir üst sınırı olur. Bu durum, G nin her tam sıralı H alt kümesi için sağlanır. Sonuç olarak, Zorn Lemma gereğince G kümesinde bir maksimal Λ_0 elemanı vardır. $\square$

Lemma 4.5.6 dan yola çıkılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.5.7. [10]

(a). Her M_R modülü için, toplamı direk olacak şekilde M_R modülünün direk parçalanamayan, injektif altmodüllerinden oluşan bir maksimal küme vardır.

(b). Her M_R modülü için, toplamı direk olacak şekilde M_R modülünün basit altmodüllerinden oluşan bir maksimal küme vardır.

İspat: Lemma 4.5.6 dan

Γ = bir M_R modülünün direk parçalanamayan, injektif altmodüllerinin kümesi ise, (a) koşulu sağlanır ve

$\Gamma =$ bir M_R modülünün basit altmodüllerinin kümesi ise, (b) koşulu sağlanır. $\square$

Lemma 4.5.8. [10] R_R Noether ise, her sıfırdan farklı M_R modülü bir sıfırdan farklı, indirgenemez altmodül içerir.

İspat: $B \neq 0$ olmak üzere B, M modülünün sonlu üretilmiş bir altmodülü olsun. Buradan 4.1.9 (2) koşulu gereğince B altmodülü Noetherdir. Şimdi bu özelliğe sahip olan her B altmodülünün indirgenemez, sıfırdan farklı bir altmodül içerdiğini gösterelim:

$\Delta = \{X \mid X \lneqq B$ ve X, B de inco'dur$\}$, B de B nin bir altmodülünün arakesit tümleyenleri (inco'su) olacak şekilde B nin öz altmodüllerinin kümesi olsun. 0 altmodülü, B nin inco'su olduğu için Δ kümesi boştan farklıdır. B Noether olduğundan, Δ kümesinde bir maksimal $X_0 \lneqq B$ elemanı vardır. Şimdi X_0, $U_0 \leq B$ nin bir inco'su olsun. O zaman açıkça, $U_0 \neq 0$ dır.

İddia: Her $0 \neq C \leq U_0$ altmodülü, U_0 da essentialdır ve sonuç olarak U_0 indirgenemezdir.

İspat: Şimdi $L \leq U_0$ için $C \cap L = 0$ olsun. Kabulden $X_0 \cap U_0 = 0$ ve $0 \neq C \leq U_0$ olduğu için, $C \cap X_0 = 0$ dır. Buradan $C \cap (X_0 + L) = 0$ olur. X_0 ın maksimalliğinden ve $C \neq 0$ (böylece $C' \neq B$) olduğundan, $X_0 + L = X_0$ dır. O zaman $L \leq X_0$ ve buradan $L \leq U_0 \cap X_0 = 0$ olur. O halde $L = 0$ dır. Yani, $C \cap L = 0$ için $L = 0$ elde edilir. Essential altmodül tanımı gereğince $C \leq_e U_0$ dır. Her $0 \neq C \leq U_0$ altmodülü için, bu durum sağlanır. $0 \neq C$ altmodüllerinin ikili arakesitleri sıfırdan farklı olacağından, tanım gereğince U_0 altmodülü indirgenemezdir. Sonuç olarak $M_R \neq 0$ modülünün bir sıfırdan farklı, indirgenemez U_0 altmodülü vardır. $\square$

Şimdi artık Önerme 4.5.5 in ispatına bakabiliriz:

Önerme 4.5.5 in İspatı: Sonuç 4.5.7 gereğince toplamı direk olacak şekilde bir Q_R modülünün direk parçalanamayan, injektif altmodüllerinin bir maksimal kümesini göz önüne alalım. Şimdi burada gösterilmesi gereken, R_R Noether ve Q_R injektif olduğu durumda; bu maksimal kümenin elemanlarınn direk toplamı, aslında Q_R nin kendisini verdiğidir. Maksimal küme içindeki elemanların direk toplamı,

$$Q_0 := \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

olsun. Kabulden R_R Noether ve Q_i ler injektif olduğu için, Teorem 4.4.2 nin $(1) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince Q_0 injektiftir. O halde Q_0, Q modülünün bir direk toplananıdır:

$$Q = Q_0 \oplus Q_1.$$

Şimdi $Q_1 \neq 0$ olsun. Kabulden R_R Noether ve $Q_1 \neq 0$ olduğu için, Lemma 4.5.8 gereğince Q_1 bir sıfırdan farklı, indirgenemez M altmodülünü içerir. $I(M)$, Q_1 de M altmodülünün bir injektif hull'u olsun. O zaman $M \neq 0$ olduğu için, $I(M) \neq 0$ dır. Aynı zamanda $I(M)$ injektif olduğu için, Q_1 in bir direk toplananıdır. Şimdi

$$Q_1 = I(M) \oplus Q_2$$

olsun. Kabulden $I(M) \neq 0$, bir indirgenemez M altmodülünün injektif hull'u olduğu için Teorem 4.5.2 $(4) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince direk parçalanamazdır. O halde $Q_0 \oplus I(M)$ direk toplamı, aynı zamanda Q modülünün direk parçalanamayan, injektif altmodüllerinin bir direk toplamı olur. Bu durum ise, $Q_0 := \bigoplus_{i \in I} Q_i$ nin maksimalliği ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak,

$$Q = Q_0 := \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

dir. Eğer R_R sadece Noether değil, aynı zamanda Artin ise; o zaman Sonuç 4.5.4 gereğince her bir sıfırdan farklı Q_i altmodülü, Q nun bir basit altmodülünün injektif hull'u olur. □

4.6. Artin ve Noether Halkaların Radikalleri

Bu bölümde bir R halkasının Jacobson radikali $J(R)$ nin, Artin ve Noether özellikleri ile olan ilişkisi incelenecektir. Öncesinde gerekli olan bazı tanımlar ifade edilip, ilgili özellikler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 4.6.1. [1] R bir halka ve $x \in R$ olsun.

(1). x elemanı *sağ quasi-regular* olarak adlandırılır :⇔ $(1-x)$ in R halkasında bir sağ tersi vardır.

(2). Benzer şekilde x elemanı *sol quasi-regular* olarak adlandırılır :⇔ $(1-x)$ in R halkasında bir sol tersi vardır.

(3). x elemanı *quasi-regular* olarak adlandırılır :⇔ $(1-x)$ in R halkasında bir (sağ ve sol) tersi vardır.

(4). R halkasının bir alt kümesi *sol quasi-regular* olarak adlandırılır :⇔ R halkasının her elemanı sol quasi-regulardır.

(5). R halkasının bir alt kümesi *sağ quasi-regular* olarak adlandırılır :⇔ R halkasının her elemanı sağ quasi-regulardır.

(6). R halkasının bir alt kümesi *quasi-regular* olarak adlandırılır :⇔ R halkasının her elemanı quasi-regulardır.

Özellik 4.6.2. [1] Bir pozitif n tamsayısı için $x^n = 0$ olmak üzere $x \in R$ (yani x, R halkasının nilpotent elemanı) olsun. O zaman

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})(1 - x) = 1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

dir. Buradan x elemanı quasi-regular olur. Sonuç olarak, x elemanı nilpotent ise quasi-regulardır.

Önerme 4.6.3. [1, Proposition 15.2] R halkasının bir I sol ideali için aşağıdaki durumlar denktir:

(a). I ideali sol quasi-regulardır.

(b). I ideali quasi-regulardır.

(c). I ideali, R halkasında smalldur.

Bir R halkası için Tanım 2.1.60 gereğince

$$Rad(R_R) = J(R) = Rad(_RR)$$

dir. Dikkat edilirse; Önerme 4.6.3 ün koşullarını sağlayan R nin bir I sol ideali, Jacobson radikalinin tanımı gereğince $J(R)$ de içerilir. Böylece aşağıdaki genel sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.6.4. [1, Corollary 15.10] R bir halka olsun. O zaman R halkasının her nil (tek yanlı ya da iki yanlı) ideali, sol quasi-regulardır. Bu yüzden R halkasının her nil (tek yanlı ya da iki yanlı) ideali, $J(R)$ de içerilir.

Özellik 2.1.63 ten bir R halkasının her nilpotent (tek yanlı ya da iki yanlı) I ideali, bir nil idealdir. O zaman Sonuç 4.6.4 ten açıkça her nilpotent I ideali, $J(R)$ radikalinde içerilir.

Sonuç 4.6.5. [1, Corollary 15.8] R bir halka olmak üzere

$$J(R/J(R)) = 0$$

dır.

Önerme 4.6.6. [1] R halkası sol Artin olsun. O zaman R halkası yarıbasittir ancak ve ancak $J(R) = 0$ dır. Ayrıca, $R/J(R)$ yarıbasittir.

İspat: R halkası sol Artin olsun. O zaman, Tanım 4.1.5 gereğince ${}_RR$ modülü Artindir.
$(\Rightarrow)$. R bir yarıbasit halka olsun. O zaman Tanım 2.1.56 gereğince ${}_RR$ modülü, yarıbasit ve ${}_RR$ nin her altmodülü, bir direk toplananıdır. Buradan 0, ${}_RR$ nin tek small altmodülüdür. Yine tanım gereğince $J(R)$, ${}_RR$ nin small altmodüllerinin toplamı olduğunu biliyoruz. 0, ${}_RR$ modülünün tek small altmodülü olduğu için $J(R) = 0$ olur.
$(\Leftarrow)$. $J(R) = 0$ olsun. Aynı zamanda baştaki kabulden ${}_RR$ modülü Artin olduğu için, Önerme 3.3.9 $(a) \Rightarrow (c)$ koşulu gereğince ${}_RR$ modülü yarıbasittir. Böylece tanımdan R halkası yarıbasit olur.
Şimdi R halkası sol Artin ise, $R/J(R)$ nin yarıbasit olduğunu gösterelim: Kabulden R halkası sol Artin olduğu için ${}_RR$ modülü Artindir. O zaman Teorem 3.1.3 ten ${}_RR$ nin her bölüm modülü de Artindir. Buradan $R/J(R)$ Artin olur. Ayrıca, Sonuç 4.6.5 gereğince $J(R/J(R)) = 0$ dır. Böylece Önerme 3.3.9 $(a) \Rightarrow (c)$ koşulu gereğince $R/J(R)$ modülü yarıbasit olur. □

Benzer şekilde modüller için de aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.6.7. [10, Corollary 9.2.3] $M = M_R$ modülü Artin ise, $M/Rad(M)$ yarıbasittir.

Sonraki önermenin ispatı için, sıfırlayanlar ile ilgili aşağıdaki sonuca ihtiyacımız olacaktır:

Sonuç 4.6.8. [1, Corollary 15.5] R bir halka olsun. O zaman R nin Jacobson radikali $J(R)$, basit sol (sağ) R-modüllerin sınıfının R halkasındaki sıfırlayanıdır.

Önerme 4.6.9. [1] Bir R halkası ve onun Jacobson radikali $J(R)$ için aşağıdaki özellikler denktir:
(a). $R/J(R)$ yarıbasittir.

(b). $R/J(R)$ sol Artindir.

(c). Basit sol R-modüllerin her çarpımı yarıbasittir.

(d). Yarıbasit sol R-modüllerin her çarpımı yarıbasittir.

(e). Her sol R-modül M için, $Soc(M) = r_M(J(R))$ dir.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$. $R/J(R)$ yarıbasit olsun. Ayrıca, Sonuç 4.6.5 ten bir R halkası için $J(R/J(R)) = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde, Önerme 4.6.6 gereğince $R/J(R)$ sol Artin olur.

$(b) \Rightarrow (a)$. $R/J(R)$ sol Artin olsun. Yine Sonuç 4.6.5 gereğince $J(R/J(R)) = 0$ dır. O zaman Önerme 3.3.9 $(a) \Rightarrow (c)$ koşulu gereğince $R/J(R)$ yarıbasit olur.

$(a) \Rightarrow (e)$. $R/J(R)$ yarıbasit ve M bir sol R-modül olsun. Sonuç 4.6.8 den $J(R)$, her basit sol R-modülün R halkasındaki (sol) sıfırlayanıdır. Aynı zamanda socle tanımı gereğince $Soc(M)$ nin, M deki tüm basit altmodüllerin toplamı olduğunu biliyoruz. O halde her ${}_RM$ sol R-modülü için $J(R)$, $Soc(M)$ yi sıfırlar. Buna bağlı olarak $Soc(M)$, $J(R)$ nin M deki (sağ) sıfırlayanının bir alt kümesi olur. Yani, $Soc(M) \subseteq r_M(J(R))$ dir. Şimdi tersini gösterelim: Sıfırlayan tanımı gereğince açıkça, $J(R)r_M(J(R)) = 0$ dır. Buradan $r_M(J(R))$, bir $R/J(R)$-modüldür. O halde (a) kabulünden $R/J(R)$ yarıbasit olduğu için, $r_M(J(R))$ bir yarıbasit modül olur. Böylece yarıbasit modül ve socle tanımından $r_M(J(R))$, $Soc(M)$ de içerilir. Yani, $r_M(J(R)) \subseteq Soc(M)$ dir. Sonuç olarak ${}_RM$ sol R-modülü için

$$Soc(M) = r_M(J(R))$$

elde edilir.

$(e) \Rightarrow (d)$. Her sol R-modül M için, $Soc(M) = r_M(J(R))$ olsun. Yine Sonuç 4.6.8 den $J(R)$ nin, her basit sol R-modülünün R halkasındaki (sol) sıfırlayanı olduğunu biliyoruz. O zaman yarıbasit modül tanımından $J(R)$, tüm yarıbasit sol R-modüllerini de sıfırlar. Buna bağlı olarak $J(R)$, yarıbasit sol R-modüllerinin her çarpımını da sıfırlar. O halde açıkça yarıbasit sol R-modüllerinin her çarpımı,

$J(R)$ nin bu çarpımlardaki sıfırlayanına eşit olur. Böylece (e) kabulünden yarıbasit sol R-modüllerin her çarpımı, aslında kendisinin socle'si olur. Sonuç olarak yarıbasit sol R-modüllerin her çarpımı, yarıbasit olarak elde edilir.

$(d) \Rightarrow (c)$. Açıktır.

$(c) \Rightarrow (a)$. (c) koşulunu kabul edelim. Ayrıca Sonuç 4.6.5 ten, R halkası için $J(R/J(R)) = 0$ olduğunu biliyoruz. O zaman Önerme 3.3.10 gereğince $J(R/J(R)) = 0$ dır ancak ve ancak $R/J(R)$, basit R-modüllerinin sınıfı tarafından eşüretilmiştir. Şimdi bu basit R-modüller sınıfı, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ olsun. Öyleyse eşüretilmiş modüllerle ilgili verilen Tanım 3.3.4 gereğince bir

$$0 \longrightarrow R/J(R) \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Aynı zamanda (c) kabulümüz gereğince, basit sol R-modüllerinin her çarpımı yarıbasit olduğu için $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ çarpımı yarıbasit olur. Sonuç olarak, Önerme 3.3.2 gereğince $R/J(R)$ de yarıbasit olarak elde edilir. □

Sonuç 4.6.10. [1] R bir sol Artin halka ve M bir sol R-modül olsun. O zaman

$$Soc(M) = r_M(J(R)) \leq_e M$$

dir.

İspat için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız olacaktır:

Lemma 4.6.11. [1, Lemma 5.19] R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. O zaman bir $K \leq M$ altmodülü, M de essentialdır ancak ve ancak her $0 \neq x \in M$ için, $0 \neq rx \in K$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır (yani, her $0 \neq x \in M$ için $Rx \cap K \neq 0$ dır).

Sonuç 4.6.10 un İspatı: $0 \neq x \in M$ alalım. O zaman $Rx \neq 0$ dır ve açıkça Rx; yalnızca bir x elemanı ile sonlu üretilmiş bir sol R-modül olup, M nin bir altmodülüdür. Kabulden R halkası Artin olduğundan, Sonuç 4.1.9 (1) özelliği gereğince Rx bir Artin modül olur. Öyleyse Sonuç 3.4.8 gereğince $Soc(Rx)$, Rx modülünde essential olur. O halde essential altmodül tanımından

$$Soc(Rx) = Rx \cap (Soc(M)) \neq 0$$

elde edilir. Bu durum, M modülünden alınacak her sıfırdan farklı x elemanı için sağlanır. Dolayısıyla $Soc(M)$ nin M deki her sıfırdan farklı Rx altmodülü ile arakesiti, yine sıfırdan farklı olarak elde edilir. Böylece Lemma 4.6.11 den $Soc(M)$, M de essential ($Soc(M) \leq_e M$) olur. Kabulden R halkası sol Artin olduğu için, Önerme 4.6.6 gereğince $R/J(R)$ yarıbasittir. O zaman Önerme 4.6.9 $(a) \Rightarrow (e)$ koşulu gereğince $Soc(M) = r_M(J(R))$ olur. Sonuç olarak,

$$Soc(M) = r_M(J(R)) \leq_e M$$

elde edilir. □

4.7. Azalan Zincir Koşullu Bir Halkanın Artan Zincir Koşulunu Sağlaması

Sol (sağ) Artin olan bir halkanın, aynı zamanda sol (sağ) Noether olduğunu ispatlamak zannedildiği gibi kolay değildir. Yirminci yüzyılda Emmy Noether ve Emil Artin, zincir koşullu halkalar üzerinde çalıştıkları zaman; ne E. Noether ne de E. Artin bu konuyla ilgili "zaten biliyoruz" izlenimi vermemişlerdir. Artin halkaların bu teorisi, artan zincir koşullu halkaların başlangıç teorisinden ayrı olarak düşünülmüştür. Charles Hopkins, 1939 yılında azalan zincir koşullu halkaların artan zincir koşulunu da sağladığını ispatladığında, soyut cebir alanında oldukça şaşırtıcı bir gelişme yaşanmıştır. Emmy Noether'in doktora öğrencisi olan Jacob Levitzki ise, bir sol (sağ) Noether halkasının her tek yanlı nil idealinin nilpotent olduğunu kanıtlamıştır. Bu iki teorem de halka teorisinde oldukça önemlidir. Bu kısımda Hopkins ve Levitzki teoremlerine ve bu iki teoremden elde edilen sonuca değineceğiz.

Teorem 4.7.1. [1] R bir sol Artin halka olsun. O zaman $J(R)$, R halkasının en büyük tek nilpotent (sol, sağ ya da iki yanlı) idealidir.

Teorem 4.7.1 in ispatı için aşağıdaki teorem ve lemmaya ihtiyacımız olacaktır:

Teorem 4.7.2. [10, Theorem 9.2.1(e)] M bir sağ R-modül olsun. O zaman M modülü sonlu üretilmiş ve $M \neq 0$ ise, $Rad(M) \neq M$ dir.

Lemma 4.7.3. [1, Corollary 8.8] R bir halka olsun. O zaman regular ${}_RR$ modülü bir üreteçtir.

Teorem 4.7.1 in İspatı: R bir sol Artin halka olsun. Her nilpotent idealin, aynı zamanda bir nil ideal olduğunu biliyoruz. O zaman Sonuç 4.6.4 gereğince R halkasının her nilpotent ideali, $J(R)$ de içerilir. Bu durumda, $J(R)$ nin nilpotent olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi $J = J(R)$ nin

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots \qquad (\spadesuit)$$

azalan zincirini düşünelim. Kabulden R halkası sol Artin olduğu için, Teorem 4.1.3 gereğince ($\spadesuit$) zinciri, sonlu bir adımda durmalıdır. Yani, bir pozitif n tamsayısı için $J^n = J^{n+1} = \dots$ dir. Şimdi J^n nin sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Γ, R halkasının J^n tarafından sıfırlanmayan sol ideallerinin oluşturduğu bir kümesi (yani Γ kümesinin elemanları, J^n ile çarpımı sıfır olmayan sol idealler) olsun. Açıkça, $J^n \neq 0$ olduğu için

$$J^n J^n = J^{2n} \neq 0$$

dır. Buradan $J^n \in \Gamma$ dır. Öyleyse, Γ kümesi boştan farklıdır. Kabulden R halkası sol Artin olduğu için Teorem 4.1.3 ten Γ kümesinin, $J^n I \neq 0$ özelliğine göre bir minimal I elemanı vardır. Şimdi $J^n x \neq 0$ olmak üzere $x \in I$ olsun. O zaman sol ideal tanımı gereğince

$$Jx \leq Rx \leq I$$

dır. Varsayımdan $J^n = J^{n+1}$ olduğu için

$$J^n(Jx) = J^{n+1}x = J^n x \neq 0$$

yani, $J^n(Jx) \neq 0$ elde edilir. Öyleyse, $Jx \in \Gamma$ olur. Kabulden I sol ideali, Γ kümesinde minimal olduğu için $I = Jx$ dir. Buradan $Jx = Rx$ olur. Lemma 4.7.3 gereğince ${}_RR$, üreteç olduğu için bir sonlu üretilmiş sol R-modüldür. O zaman Teorem 4.7.2 ye göre ${}_RR$ sonlu üretilmiş ve ${}_RR \neq 0$ ise,

$$Rad({}_RR) = J(R) \neq {}_RR$$

dir. Buradan $Rx \neq Jx$ elde edilir. Fakat bu durum, $Rx = Jx$ gerçekliği ile bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak baştaki $J^n \neq 0$ kabulümüz yanlış olup, $J^n = 0$ dır. Yani, $J = J(R)$ nilpotenttir. □

Teorem 4.7.4. [10] R bir halka olsun.

(1). R değişmeli ve Artin bir halka ise, o zaman $J(R)$, R halkasının tüm nilpotent elemanlarının kümesidir.

(2). R_R Artin ise, o zaman her M_R sağ R-modülü için

$$Rad(M) = MJ(R) \ll M \qquad \text{dir.}$$

Aynı şekilde R_R Artin ise, o zaman her ${}_RM$ sol R-modülü için

$$Rad(M) = J(R)M \ll M \qquad \text{dir.}$$

Teorem 4.7.4 ün ispatı için aşağıdaki teoreme ihtiyacımız olacaktır:

Teorem 4.7.5. [10, Theorem 9.3.5] $R/J(R)$ bir yarıbasit halka ise, o zaman her M_R modülü için aşağıdaki özellik sağlanır:

$$Rad(M) = MJ(R)$$

Teorem 4.7.4 ün İspatı: (1). Kabulden R bir Artin halka olduğu için, Teorem 4.7.1 den $J(R)$ nilpotenttir. Dolayısıyla $J(R)$ nin her elemanı da nilpotenttir. Şimdi bir pozitif n tamsayısı için $a^n = 0$ olacak şekilde R halkasından bir nilpotent a elemanını alalım. Kabulden R halkası değişmeli olduğu için,

$$(aR)^n = a^n R^n = a^n R = 0R = 0$$

elde edilir. Buradan aR, R halkasının bir nilpotent ideali olur. Teorem 4.7.1 den R halkasının nilpotent ideallerinin en büyüğü, Jacobson radikali $J(R)$ olduğu için $aR \leq J(R)$ dir. Böylece $a \in aR \leq J(R)$ elde edilir. Yani, R halkasının her nilpotent a elemanı, $J(R)$ nin bir elemanıdır.
(2). R_R Artin olsun. O zaman Önerme 4.6.6 dan, $R/J(R)$ yarıbasittir. Böylece Teorem 4.7.5 gereğince, M_R modülü için

$$Rad(M) = MJ(R)$$

ve ${}_RM$ modülü için

$$Rad(M) = J(R)M$$

dir. Yine kabulden R_R Artin olduğu için, Teorem 4.7.1 gereğince $J(R)$ nilpotenttir. O zaman $(J(R))^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı vardır. Şimdi $U \leq M_R$ için

$$M = U + MJ(R) \qquad (*)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman $(*)$ eşitliğinin sağ tarafında, M yerine $(n-1)$ defa $U + MJ(R)$ koyulursa,

$$
\begin{aligned}
M &= U + MJ(R) \\
&= U + \Big(U + MJ(R)\Big)J(R) \\
&= U + UJ(R) + M(J(R))^2 \\
&= U + UJ(R) + \Big(U + MJ(R)\Big)(J(R))^2 \\
&= U + UJ(R) + U(J(R))^2 + M(J(R))^3 \\
&\ \vdots \\
&= U + UJ(R) + U(J(R))^2 + \cdots + U(J(R))^{n-1} + M\,\underbrace{(J(R))^n}_{=0} \\
&= U + \underbrace{UJ(R) + U(J(R))^2 + \cdots + U(J(R))^{n-1}}_{\in U} \\
&= U \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\blacklozenge)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Çünkü, Lemma 2.1.5 $(1) \Rightarrow (2)$ koşulu gereğince $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$ için $U(J(R))^i \in U$ olur ve buradan Lemma 2.1.5 $(1) \Rightarrow (3)$ koşulu gereğince $UJ(R) + U(J(R))^2 + \cdots + U(J(R))^{n-1}$ toplamı, U altmodülünde içerilir. Böylece $(\blacklozenge)$'dan

$$M = U + MJ(R) \quad \text{için} \quad U = M$$

elde edilir. Açıkça bu durum, M nin tüm U altmodülleri için sağlanır. Sonuç olarak, small altmodül tanımı gereğince $MJ(R) \ll M$ olur. Yani, $Rad(M) = MJ(R) \ll M$ dir.

Benzer şekilde, $J(R)M$ nin M de small $\big(Rad(M) = J(R)M \ll M\big)$ olduğu gösterilir. $\square$

Sonuç 4.7.6. [1] R bir sol Artin halka ve M bir sol R-modül olsun. O zaman M modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

(a). M sonlu üretilmiştir.

(b). M Artindir.

(c). $M/J(R)M$ sonlu üretilmiştir.

İspat için, konu ile ilgili aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız olacaktır:

Lemma 4.7.7. [1, Corollary 15.18] R bir halka olsun. O zaman her sol R-modül M için

$$J(R)M \leq Rad(M)$$

dir. Ayrıca $R/J(R)$ yarıbasit ise, o zaman her sol R-modül M için $M\big/J(R)M$ yarıbasittir.

Sonuç 4.7.6 nın İspatı: $(a) \Rightarrow (b)$. Sonuç 4.1.9 (1) den açıktır.
$(b) \Rightarrow (c)$. M modülünün Artin olduğunu kabul edelim. Şimdi

$$0 \longrightarrow J(R)M \longrightarrow M \longrightarrow M\big/J(R)M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. Kabulden M bir Artin modül olduğu için, Sonuç 3.1.6 gereğince $J(R)M$ ve $M\big/J(R)M$ modülleri de Artin olur. Yine kabulden R halkası sol Artin olduğu için, Önerme 4.6.6 dan $R/J(R)$ yarıbasittir. O halde, Teorem 4.7.5 ten $J(R)M = Rad(M)$ ve Lemma 4.7.7 den $M\big/J(R)M$ yarıbasit olur. Öyleyse Önerme 3.3.10 gereğince $Rad(M\big/J(R)M) = 0$ dır. Aynı zamanda varsayımdan M modülü Artin olduğu için, Teorem 3.1.3 gereğince M nin tüm bölüm modülleri de Artindir. Buradan $M\big/J(R)M$ Artin olur. Sonuç olarak, Önerme 3.3.9 $(a) \Rightarrow (c)$ koşulu gereğince $M\big/J(R)M$ sonlu üretilmiştir.
$(c) \Rightarrow (a)$. Şimdi $M\big/J(R)M$ modülünün sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. Baştaki kabulden R halkası sol Artin olduğu için, $R/J(R)$ bir sol Artin halkadır. O halde, Önerme 4.6.9 $(b) \Rightarrow (a)$ koşulu gereğince $R/J(R)$ yarıbasit olur. Öyleyse Teorem 4.7.5 ten $J(R)M = Rad(M)$ ve Lemma 4.7.7 den $M/J(R)M$ yarıbasit olur. Buradan $M\big/J(R)M = M/Rad(M)$ eşitliği elde edilir. O zaman kabulden $M\big/J(R)M$ nin sonlu üretilmiş olması, $M/Rad(M)$ nin de sonlu üretilmiş olmasını gerektirir. Geriye $Rad(M)$ nin M de small $(Rad(M) \ll M)$

olduğunu göstermek kalır. Yine kabulden R bir sol Artin halka olduğu için, Teorem 4.7.4 ün (2) özelliğinden

$$Rad(M) = J(R)M \ll M$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 3.4.3 gereğince, M modülü sonlu üretilmiş olur.

□

Teorem 4.7.8. [Hopkins] [1] $J = J(R)$ olmak üzere R bir halka olsun. R halkası sol Artindir ancak ve ancak R halkası sol Noether, J nilpotent ve R/J yarıbasittir.

Teorem 4.7.8 in ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır:

Lemma 4.7.9. [1, Corollary 15.12] I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer I nil ideal ve $J(R/I) = 0$ ise, o zaman $I = J(R)$ dir.

Teorem 4.7.8 in İspatı: R halkası sol Artin olsun. O zaman Teorem 4.7.1 den, J nilpotent ve Önerme 4.6.6 dan, R/J yarıbasittir. Bu yüzden R/J yi yarıbasit ve J nin nilpotent olduğunu kabul edebiliriz. Buradan bir pozitif n tamsayısı için $J^n = 0$ olsun. Şimdi n üzerinde tümevarım yöntemi uygulayalım:
$n = 1$ ise, o zaman $J^n = J = 0$ ve $R = R/J$ yarıbasittir. Böylece yarıbasit R halkası için, Sonuç 3.3.11 gereğince R sol Artindir ancak ve ancak R sol Noetherdir. Yani, $n = 1$ için ispat sağlanır. Şimdi $n > 1$ olsun ve n den küçük nilpotent indislerinin her halkası için, ifadenin sağlandığını kabul edelim. Lemma 4.7.9 gereğince

$$J(R/J^{n-1}) = J/J^{n-1}$$

dir. O zaman tümevarım varsayımından, R/J^{n-1} sol Artindir ancak ve ancak R/J^{n-1} sol Noetherdir. Şimdi sol R-modüllerin

$$0 \longrightarrow J^{n-1} \longrightarrow R \longrightarrow R/J^{n-1} \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. Sonuç 3.1.6 gereğince, R halkası Artin (Noether) dir ancak ve ancak J^{n-1} ve R/J^{n-1} Artin (Noether) dir. Fakat $J^n = J(J^{n-1}) = 0$ ve R/J yarıbasit olduğu için, J^{n-1} yarıbasittir. O halde Sonuç 3.3.11 den, J^{n-1} Artindir ancak ve ancak J^{n-1} Noetherdir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Benzer şekilde modüller için de aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.7.10. [10] R bir halka, $R/J(R)$ yarıbasit ve $J(R)$ nilpotent olsun. O zaman bir M_R modülü için aşağıdaki özellikler denktir:
(1). M_R Artindir.
(2). M_R Noetherdir.
(3). M_R sonlu uzunlukludur.

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$. Kabulden $R/J(R)$ yarıbasit ve $J(R)$ nilpotent olduğu için, Hopkins teoremi gereğince M_R $(= R_R)$ Artindir ancak ve ancak M_R $(= R_R)$ Noetherdir.
$(3) \Rightarrow (1)$ ve $(3) \Rightarrow (2)$. M_R modülü sonlu uzunluklu olsun. O zaman Teorem 3.1.9 un $(2) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince, M_R modülü hem Artin hem de Noether olur. $\square$

Sonuç 4.7.11. [10] Bir R halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır:
(a). R_R Artin ve M_R Artin ise, o zaman M_R Noetherdir.
Aynı şekilde R_R Artin ve M_R Noether ise, o zaman M_R Artindir.
(b). R_R Artin ise, o zaman R_R Noetherdir.
(c). R_R Artin ve ${}_RR$ Noether ise, o zaman ${}_RR$ Artindir.

İspat: (a). R_R Artin ve M_R Artin olsun. O zaman R_R Artin olduğu için, Önerme 4.6.6 gereğince $R/J(R)$ yarıbasit ve Teorem 4.7.1 gereğince $J(R)$ nilpotenttir.

Sonuç olarak $R/J(R)$ yarıbasit ve $J(R)$ nilpotent olduğundan, Teorem 4.7.10 gereğince M_R Artin ise M_R Noether olur. Aynı şekilde, M_R Noether ise M_R Artindir.

(b). R_R Artin olsun. O zaman $R_R = M_R$ için (a)'nın bir özel durumudur.

(c). R_R Artin ve ${}_RR$ Noether olsun. O zaman ${}_RM = {}_RR$ için Teorem 4.7.10 dan istenen sağlanır. □

Teorem 4.7.12. [Levitzki] [1] R halkası sol Noether ise, o zaman R halkasının her nil tek yanlı ideali nilpotenttir.

İspat: R halkası sol Noether olsun. O zaman Teorem 4.1.1 gereğince, R halkası bir maksimal nilpotent ideale sahiptir. Bu ideale N diyelim. $S = R/N$ olsun. O zaman 0 ideali, S deki tek nilpotent idealdir. Özelliği gereğince her nilpotent ideal, nil ideal olduğu için 0 ideali, aynı zamanda S nin bir nil sağ idealidir. Şimdi iddiamız, 0 idealinin S deki tek nil sağ ideal olduğudur. Bunu görmek için, $0 \neq I \leq S_S$ olmak üzere I nın nil olduğunu kabul edelim. Varsayımdan R halkası sol Noether olduğu için, $S = R/N$ de sol Noetherdir. O zaman S sol Noether olduğundan,

$$\{l_S(x) \mid 0 \neq x \in I\}$$

kümesi bir maksimal eleman içerir. Bu elemana $l_S(x)$ diyelim. Şimdi $xs \neq 0$ olmak üzere $s \in S$ olsun. $xs \in I$ nilpotenttir. Buradan bir pozitif k tamsayısı için $(xs)^{k+1} = 0$ ve $(xs)^k \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Açıkça, $l_S(x) \subseteq l_S((xs)^k)$ dır. Fakat kabulden $l_S(x)$ maksimal olduğu için, $l_S(x) = l_S((xs)^k)$ ve buradan $xsx = 0$ olur. Böylece $(SxS)^2 = 0$, $x = 0$ ve iddiamız sağlanmış olur. O halde eğer I, R halkasında bir nil sağ ideal ise, o zaman

$$(I + N)/N = 0 \in R/N$$

ve $I \subseteq N$ dir. Yani N, R halkasının her nil sağ idealini içerir. Fakat eğer $a \in R$ ve Ra nil ise, o zaman aR aynı zamanda nildir $\Big((ra)^n = 0 \Rightarrow (ar)^{n+1} = 0\Big)$. Bu yüzden N, aynı zamanda R halkasının her nil sol idealini de içerir. Sonuç olarak N nilpotent olduğundan, ispat tamamlanır. $\square$

Hopkins teoremi ve Levitzki teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.7.13. [1] R halkası sol Noether olsun. Eğer $R/J(R)$ yarıbasit ve $J(R)$ nil ise, o zaman R halkası sol Artindir.

4.8. Artin ve Noether Halkaların Karakterizasyonu

Teorem 4.8.1. [10] R bir halka olsun.

(a). Aşağıdaki özellikler denktir:

(1). R_R Noetherdir.

(2). Her injektif Q_R modülü, direk parçalanamayan (injektif) altmodüllerinin bir direk toplamıdır.

(b). Aşağıdaki özellikler denktir:

(1). R_R Artindir.

(2). Her injektif Q_R modülü, basit R-modüllerin injektif hull'larının bir direk toplamıdır.

İspata başlamadan önce gerekli olan teoremi verelim:

Teorem 4.8.2. [10, Theorem 5.6.3(a)] $\varphi : M_1 \to M_2$ bir izomorfizma, $\eta_1 : M_1 \to Q_1$ bir injektif hull ve Q_2 injektif olmak üzere $\eta_2 : M_2 \to Q_2$ bir monomorfizma olsun. O zaman

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta_1"'] & M_2 \arrow[d, "\eta_2"] \\ Q_1 \arrow[r, "\psi"] & Q_2 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (komütatif) ve

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_2 : M_2 &\to Im(\psi) \\ m &\mapsto \eta_2(m) \end{aligned}$$

M_2 nin bir injektif hull'u olacak şekilde bir

$$\psi : Q_1 \to Q_2$$

split (parçalanabilir) monomorfizması vardır. η_2, M_2 nin bir injektif hull'udur ancak ve ancak ψ bir izomorfizmadır.

Teorem 4.8.1 in İspatı: (a) ve (b) özelliklerinin $(1) \Rightarrow (2)$ koşulları, daha önce Önerme 4.5.5 te ispatlandı. Şimdi Sonuç 4.7.11 den "R_R Artin ise R_R Noether" olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla R_R nin sadece Artin olduğu kabul edilerek $(1) \Rightarrow (2)$ koşullarının ispatı, Önerme 4.5.5 kullanıldığında daha rahat görülebilir.

(b) $(2) \Rightarrow (1)$. Her injektif Q_R modülü, basit R-modüllerin injektif hull'larının bir direk toplamı olsun. Şimdi R_R nin herhangi bir R/A bölüm modülünü alalım. $R/A \leq I(R/A)$ olmak üzere $I(R/A)$, R/A nın bir injektif hull'u olsun. O zaman kabulden Q_i ler, basit R-modüllerinin injektif hull'ları olmak üzere

$$I(R/A) = \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

dir. Açıkça, R/A devirli olduğu için sonlu üretilmiştir. Buradan R/A, bir sonlu I_0 alt toplamında içerilir:

$$R/A \leq \bigoplus_{i \in I_0} Q_i, \qquad I_0 \text{ sonlu.}$$

İnjektif hull özelliğinden, $R/A \leq_e I(R/A)$ olduğu için $I = I_0$ dır. Yani,

$$I(R/A) = \bigoplus_{i \in I_0} Q_i$$

dir. O halde Teorem 3.4.5 in $(3) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince, R/A bölüm modülü sonlu eşüretilmiştir. Bu sonuç, R_R nin tüm bölüm modülleri için sağlanır. Böylece Teorem 3.1.3 ün $(4) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince R_R Artin olur.

(a) $(2) \Rightarrow (1)$. Bu ispat, Teorem 4.4.2 (3) özelliğinin sağlandığının gösterilmesiyle elde edilir. Bunun için $E_i \leq Q_i$ olmak üzere

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i,$$

basit E_i R-modüllerin Q_i injektif hull'larının bir direk toplamı olsun.

$M \leq I(M)$ olmak üzere $I(M)$, M nin injektif hull'u olsun. Bu durumda, $M = I(M)$ olduğunu kanıtladık. İnjektif hull özelliğinden $M \leq_e I(M)$ olduğu için, $Soc(M) = Soc(I(M))$ dir. Ayrıca, Önerme 3.4.7 den

$$Soc(M) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Soc(Q_i)$$

ve socle tanımından

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} Soc(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$

olduğu için,

$$Soc(M) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Soc(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$

elde edilir. Şimdi (2) kabulünü kullanalım. O zaman D_i ler, direk parçalanamayan injektif modüller olmak üzere

$$I(M) = \bigoplus_{j \in J} D_j$$

dir. Şimdi

$$J_1 = \{j \mid j \in J \text{ ve } Soc(D_j) \neq 0\}$$

olsun. O zaman Önerme 3.4.7 ve socle tanımından,

$$Soc(I(M)) = \bigoplus_{j \in J_1} Soc(D_j)$$

dir. Ayrıca Sonuç 4.5.3 (b) özelliği gereğince direk parçalanamayan injektif D_j modülleri, en çok bir basit altmodül içerir. $Soc(D_j) \neq 0$ ise o zaman F_j, D_j modülündeki tek basit altmodül olmak üzere socle tanımından

$$F_j := Soc(D_j)$$

dir ve D_j modülü, F_j basit atmodülünün injektif hull'udur. Sonuç olarak

$$Soc(I(M)) = \bigoplus_{j \in J_1} F_j$$

ve $Soc(M) = Soc(I(M))$ olduğu için,

$$Soc(I(M)) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i = \bigoplus_{j \in J_1} F_j$$

elde edilir. Krull-Remak-Schmidt Teoreminden, $Soc(I(M))$ nin bu iki parçalanışı izomorftur. Eğer $E_i \cong F_j$ ise, o zaman Teorem 4.8.2 den $Q_i \cong D_j$ ve Krull-Remak-Schmidt Teoremin birebir-örten olmasından,

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i = \bigoplus_{j \in J_1} D_j$$

elde edilir. Böylece

$$I(M) = \left(\bigoplus_{j \in J_1} D_j\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J \setminus J_1} D_j\right)$$

olduğu için M, $I(M)$ injektif modülünün bir direk toplananına izomorftur. Dolayısıyla M injektif olur. O halde Teorem 4.4.2 nin (3) özelliği sağlanır. Sonuç olarak Teorem 4.4.2 nin $(3) \Rightarrow (1)$ koşulu gereğince R_R Noether olur.

□

Bir R halkası için, Teorem 4.8.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.8.3. [10] R_R Noether fakat Artin değil ise, o zaman basit altmodül içermeyen bir direk parçalanamaz injektif R-modül vardır.

 102

5. DEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNDE ZİNCİR KOŞULLARI

Bu bölümde halkalar, aksi belirtilmedikçe birimli ve değişmeli olarak alınacaktır. Değişmeli halkalarda artan ve azalan zincir koşulları oldukça ilgi çekicidir. Yirminci yüzyılda Emmy Noether ve Emil Artin'in değişmeli halkaların idealleri üzerindeki zincir koşullarına dayalı çalışmaları, dünya çapında birçok matematikçi tarafından soyut cebir alanında devrimsel olarak nitelendirilmiştir. Bu bölümde, birimli ve değişmeli halkaların artan ve azalan zincir koşullarına dayalı ideal yapıları incelenmiştir [1], [3], [5], [8], [9], [11], [12], [17], [18].

5.1. Primary Parçalanış

Bu kısımda, daha sonra Noether ve Artin halkalarda kullanılacak olan "bir idealin primary parçalanışı" ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 5.1.1. [8] R bir değişmeli halka ve Q, R nin bir ideali olsun. Q *primary ideal* olarak adlandırılır :$\Leftrightarrow$

(i). $Q \neq R$ ve

(ii). Her $a, b \in R$ için $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ iken, bir pozitif n tamsayısı için $b^n \in Q$ dur.

Yukarıdaki tanımdan bir değişmeli halkanın her asal idealinin, bir primary ideal olduğu açıktır.

Teorem 5.1.2. [8, Theorem 2.9] R birimli ve değişmeli bir halka ve Q, R nin bir primary ideali olsun. O zaman $\sqrt{Q}$, R halkasının Q yu içeren bir asal idealidir.

Teorem 5.1.2 ye dayalı tanım aşağıdaki şekildedir:

Tanım 5.1.3. [8] R birimli ve değişmeli bir halka ve Q, R nin bir primary ideali olsun. R nin bir $\mathcal{P}$ asal ideali için $\mathcal{P} = \sqrt{Q}$ ise o zaman Q, $\mathcal{P}$*-primary* *ideal* ya da $\mathcal{P}$ *asalına ait primary ideal* ya da $\mathcal{P}$ *asalı için primary ideal* olarak adlandırılır.

Q idealinin $\mathcal{P}$ radikali ise Q *nun ilgili asal ideali (associated prime ideal of* Q*)* olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.4. [3], [18] R birimli ve değişmeli bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. O zaman $1 \leq i \leq n$ için Q_i ler, R halkasının primary idealleri olmak üzere

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i \qquad\qquad (\bigstar)$$

ise, $(\bigstar)$'a *I idealinin bir primary parçalanışı (primary decomposition)* denir. Başka bir ifade ile I idealinin primary parçalanışı, R halkasının primary ideallerinin bir sonlu arakesitidir. Buradan Q_i lere, *I idealinin primary bileşenleri* denir. Ayrıca, primary parçalanışı olan bir I ideali *parçalanabilir (decomposable)* olarak ifade edilir.

Eğer $(\bigstar)$'da

(i). $1 \leq i \leq n$ için radikal ideal $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$ lerin hepsi birbirinden farklı ve

(ii). $1 \leq i, j \leq n$ için $Q_j \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} Q_i$

ise, o zaman I idealinin $(\bigstar)$ primary parçalanışı *minimal (ya da irredundant, reduced, normal)* olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.5. [3], [18] Tanım 5.1.4 te $(\bigstar)$, I idealinin bir minimal (irredundant, reduced) primary parçalanışı ise, o zaman $1 \leq i \leq n$ için $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$ asal idealleri *I nın ilgili asal idealleri* ya da kısaca, *I nın asal idealleri* olarak adlandırılırlar. Buradan I nın asal ideallerinin $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n\}$ kümesindeki bir minimal eleman *I nın bir minimal (ya da isolated) asal ideali* olarak adlandırılır. Başka bir ifade ile, her $j \neq i$ için $\mathcal{P}_j \nsubseteq \mathcal{P}_i$ ise o zaman $\mathcal{P}_i$, I nın bir minimal (isolated) asal idealidir. Ayrıca verilen minimal parçalanıştaki her bir Q_i ye, *I nın* *bir primary bileşeni* denir. Eğer $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$, I nın bir minimal (isolated) asal ideali ise, o zaman Q_i ye *I nın bir minimal (ya da isolated) primary bileşeni* denir.

Teorem 5.1.6. [8, Theorem 2.13] R birimli ve değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Eğer I idealinin bir primary parçalanışı varsa, o zaman I nın bir minimal (reduced, irredundant) primary parçalanışı vardır.

5.2. Noether Halkalarda Primary Parçalanış

Emanuel Lasker; bir polinom halkasındaki her idealin, bu halkadaki primary ideallerinin bir sonlu arakesiti olduğunu kanıtlamıştır. Başlangıçta bu teorem, polinom halkaları ve yakınsayan kuvvet dizileri ile sınırlandırılmıştır. Emmy Noether ise bu teoremin faaliyet alanını genişleterek, her Noether halka için bu teoremin doğruluğunu kanıtlamıştır. Şimdilerde bu teorem, Lasker-Noether teoremi olarak anılmaktadır [9].
Bu kısımda, bir Noether halkanın her idealinin bir primary parçalanışı olduğunu ve buna bağlı olarak, bu ideallerin her birinin aslında bir minimal (irredundant, reduced) primary parçalanışı olduğunu göreceğiz.

Daha önceden Tanım 4.5.1 de, indirgenemez (irreducible) modül tanımına yer verilmişti. Şimdi bu kısımda ihtiyacımız olan, indirgenemez (irreducible) ideal tanımı verilecektir:

Tanım 5.2.1. [17] R bir değişmeli halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. I ideali *indirgenemez (irreducible ya da meet-irreducible)* olarak adlandırılır :⇔

(i). $I \neq R$ ve

(ii). $I \subsetneq I_1$ ve $I \subsetneq I_2$ olacak şekilde R nin her I_1, I_2 idealleri için $I \neq I_1 \cap I_2$

dir.

Lemma 5.2.2. [3] R birimli ve değişmeli bir Noether halka olsun. O zaman R deki her ideal, R nin indirgenemez ideallerinin bir sonlu arakesitidir.

İspat: $\mathcal{F}$, R halkasında indirgenemez ideallerinin sonlu arakesitleri olmayan R nin tüm ideallerinin bir kümesi olsun. Şimdi $\mathcal{F}$ kümesinin boştan farklı olduğunu kabul edelim. O zaman kabulden R halkası Noether olduğu için, $\mathcal{F}$ kümesinin bir maksimal J elemanı vardır. Öyleyse R halkasında J yi içeren J den farklı her ideal, $\mathcal{F}$ kümesinin bir elemanı değildir. Dolayısıyla bu ideallerin her biri, R nin indirgenemez ideallerinin bir sonlu arakesiti olmak zorundadır. Ayrıca $\mathcal{F}$ kümesindeki her eleman, kendi kopyalarının bir sonlu arakesiti olarak yazılabileceği için; R nin bir indirgenemez ideali olamaz. Aksi takdirde $\mathcal{F}$ tanımı ile çelişki oluşturur. O halde $J \in \mathcal{F}$ olduğu için, J ideali indirgenemez değildir. Bu yüzden $K \supsetneqq J$, $I \supsetneqq J$ için $J = K \cap I$ olacak şekilde R nin I, K idealleri vardır. O zaman $I, K \notin \mathcal{F}$ olduğu için; I ve K idealleri, R halkasındaki indirgenemez ideallerinin sonlu arakesitleri olur. Böylece $J = K \cap I$ olduğundan, J ideali de R halkasındaki indirgenemez ideallerinin bir sonlu arakesiti olur. Fakat bu durumda $J \notin \mathcal{F}$ olacağı için, bir çelişki elde ederiz. Böylece $\mathcal{F}$ bir boş kümedir. Sonuç olarak Noether olan R halkasındaki her ideal, R nin indirgenemez ideallerinin bir sonlu arakesitidir. $\square$

Lemma 5.2.3. [17] Birimli ve değişmeli olan bir Noether R halkada her indirgenemez ideal, bir primary idealdir.

İspat: I, R halkasının bir primary olmayan ideali olsun. O zaman $ab \in I$ ve $b \notin I$ iken, tüm pozitif m tamsayıları için $a^m \notin I$ olacak şekilde bir $a, b \in R$ ikilisi vardır. Açıkça, $a \neq 0$ dır. Şimdi R nin ideallerinin bir

$$I : (a) \subseteq I : (a^2) \subseteq \cdots \subseteq I : (a^n) \subseteq \cdots \qquad (\blacktriangle)$$

artan zincirini düşünelim. Şöyle ki: Tanım 2.1.72 den

$$I : (a) = \{x \in R \mid x(a) \subseteq I\}$$

dır. $x(a) \subseteq I$ ise, o zaman $xa \in I, xa^2 \in I, \ldots, xa^n \in I, \ldots$ dır. Bu yüzden $x \in I : (a)$ ise, o zaman $x \in I : (a^2)$ olur. Yani $n \geq 1$ için $x \in I : (a^n)$ ise, $x \in I : (a^{n+1})$ dir. Kabulden R Noether olduğu için, (▲) artan zinciri bir sonlu adımda durmalıdır. Öyleyse, $I : (a^m) = I : (a^{m+1})$ olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı vardır. Yine kabulden R halkası Noether olduğu için, Lemma 5.2.2 gereğince R nin her ideali, R nin indirgenemez ideallerinin bir sonlu arakesitidir.
İddia: Baştaki kabulden $b \notin I$ olduğu için (I, b), R nin I ve b ile üretilen bir idealini göstermek üzere

$$I = I : (a^m) \cap (I, b) \qquad (\spadesuit)$$

dir.
İspat: Şimdi kabulden $a^m \notin I$ olduğu için, $I \subsetneqq I : (a^m)$ ve aynı zamanda kabulden $b \notin I$ olduğu için, $I \subsetneqq (I, b)$ dir. Buradan açıkça,

$$I \subseteq I : (a^m) \cap (I, b) \qquad (\blacksquare)$$

olur. Geriye $I : (a^m) \cap (I, b) \subseteq I$ olduğunu göstermek kalır. Şimdi bunun için, bir $r \in I : (a^m) \cap (I, b)$ alalım. O zaman $s, x \in I$ ve $t, y \in R$ olmak üzere r elemanı, $r = s + ta^m = x + yb$ şeklinde yazılabilir. Kabulden R halkası değişmeli olduğu için, $s + ta^m = x + yb$ eşitliğinde her iki tarafını a ile işlem yaparsak,

$$(s + ta^m)a = (x + yb)a$$

ve buradan

$$\begin{aligned} ta^{m+1} &= (x + yb)a - sa \\ &= xa + y\underbrace{ba}_{=ab} - sa \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(x-s)}_{\in I}\underbrace{a}_{\in R}}_{\in I} + \underbrace{\underbrace{y}_{\in R}\underbrace{ab}_{\in I}}_{\in I} \in I$$

elde edilir. Yani, $t \in I : (a^{m+1})$ dir. Kabulden $I : (a^{m+1}) = I : (a^m)$ olduğu için, $t \in I : (a^m)$ olur. Bu durumda, $ta^m \in I$ dır. O halde $r = s + ta^m \in I$ olur. Böylece

$$I : (a^m) \cap (I, b) \subseteq I \qquad (\blacklozenge)$$

olur. Sonuç olarak, (■) ve (♦)'den

$$I = I : (a^m) \cap (I, b)$$

elde edilir. O zaman $I \subsetneqq I : (a^m)$ ve $I \subsetneqq (I, b)$ olacak şekilde I, R nin $I : (a^m)$ ve (I, b) ideallerinin bir arakesiti olduğu için; tanım gereğince I ideali, R nin bir indirgenemez ideali değildir. Böylece I bir indirgenemez ideal ise, o zaman I nın primary ideal olduğu gösterilmiş oldu. □

Lemma 5.2.2 ve Lemma 5.2.3 ten aşağıdaki Lasker-Noether teoremi elde edilir:

Teorem 5.2.4. [Lasker-Noether] [9], [17] Birimli ve değişmeli olan bir Noether R halkadaki her ideal, R nin sonlu sayıda primary ideallerinin bir arakesitidir. Özel olarak, R nin her idealinin bir primary parçalanışı vardır.

İspat: Kabulden R halkası Noether olduğu için; Lemma 5.2.2 gereğince R halkasındaki her ideal, R nin indirgenemez ideallerinin bir sonlu arakesitidir. Aynı zamanda Lemma 5.2.3 gereğince R halkası Noether olduğu için; R nin her indirgenemez ideali, R nin bir primary idealidir. Böylece R deki her ideal, R nin primary ideallerinin bir sonlu arakesiti olarak gösterilebilir. Sonuç olarak, Tanım 5.1.4 ten, R halkasındaki her idealin bir primary parçalanışı vardır. □

Lasker-Noether teoremi ve Teorem 5.1.6 dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.2.5. [17] R birimli ve değişmeli bir Noether halka olsun. O zaman R halkasındaki her I idealinin, bir minimal (irredundant, reduced) primary parçalanışı vardır.

5.3. Noether Halkaların Diğer Özellikleri

Bu kısımda, birimli ve değişmeli Noether halkalardaki ideallerin diğer özelliklerine değineceğiz.
Konu ile ilgili bir sonraki önermenin ispatı için, aşağıdaki Multinomial teoremine ihtiyacımız olacaktır:

Teorem 5.3.1. [5, **Multinomial Teoremi**] $1 \leq i \leq t$ için, $0 \leq n_i \leq n$ olmak üzere her n_i bir tamsayı ve $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$ olacak şekilde pozitif n, t tamsayıları için; $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_t)^n$ nin açılımında
${x_1}^{n_1}{x_2}^{n_2}{x_3}^{n_3}\ldots{x_t}^{n_t}$ teriminin katsayısı

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_t!}$$

dir.

Önerme 5.3.2. [3] Birimli ve değişmeli bir Noether R halkasında her ideal, kendi radikalinin bir kuvvetini içerir.

İspat: Kabulden R halkası Noether olduğu için, Teorem 4.1.1 (2) gereğince R nin her ideali sonlu üretilmiştir. O zaman R halkasının bir I ideali için, $\sqrt{I}$ radikal ideali sonlu üretilmiş olur. Şimdi bir pozitif k tamsayısı için $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ kümesi, $\sqrt{I}$ nın üreten sistemi olsun. Buradan açıkça $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \sqrt{I}$ olduğundan; radikal ideal $\sqrt{I}$ nın tanımı gereğince her bir x_i $(1 \leq i \leq k)$ için $x_i^{n_i} \in I$ olacak şekilde bir pozitif n_i tamsayısı vardır. Bu n_i tamsayılarının toplamı, bir pozitif m tamsayısı için

$$m = \sum_{i=1}^{k} n_i \qquad \text{olarak tanımlansın.}$$

Şimdi $(\sqrt{I})^m$ yi düşünelim. Kabulden $\sqrt{I} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ olduğundan, Multinomial teoremi gereğince her i $(1 \leq i \leq k)$ için $0 \leq r_i \leq m$ olmak üzere her r_i, bir tamsayı ve $r_1 + \ldots + r_k = m$ olacak şekilde

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^m = \sum_{r_1+\ldots+r_k=m} \frac{m!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} \; ({x_1}^{r_1} {x_2}^{r_2} \ldots {x_k}^{r_k})$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $(\sqrt{I})^m$, $r_1 + \ldots + r_k = m$ olacak şekilde ${x_1}^{r_1} {x_2}^{r_2} \ldots {x_k}^{r_k}$ çarpımları ile üretilir. Bu durumda m nin tanımından, en az bir i indisi için $r_i \geq n_i$ olmalıdır. Çünkü tersini düşündüğümüzde; her i $(1 \leq i \leq k)$ için $r_i < n_i$ olacağından, $r_1 + \ldots + r_k$ toplamı m tamsayısını veremez. O halde R halkası değişmeli olduğundan, en az bir i indisi için $r_i \geq n_i$ olduğu durumda

$${x_i}^{r_i} = \underbrace{{x_i}^{n_i}}_{\in I} \underbrace{{x_i}^{(r_i - n_i)}}_{\in R} \in I$$

dır. Aynı mantık ile her bir ${x_1}^{r_1} {x_2}^{r_2} \ldots {x_k}^{r_k}$ çarpımı, I idealinin bir elemanı olur. Böylece bu çarpımların toplamları da I idealinde içerileceğinden,
$(\sqrt{I})^m \subseteq I$ elde edilir. $\square$

Sonuç 5.3.3. [3] R değişmeli ve birimli bir Noether halka ve M, R nin bir maksimal ideali ve I, R nin herhangi bir ideali olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir:

(1). I, M-primarydir.

(2). $\sqrt{I} = M$ dir.

(3). Bir pozitif n tamsayısı için, $M^n \subseteq I \subseteq M$ dir.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$. Tanım 5.1.3 ten açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$. Kabulden M, R halkasının maksimal ideali olduğu için;

[3, Proposition 4.2] gereğince $\sqrt{I} = M$ ise, o zaman I bir primary idealdir. Yine kabulden R halkası birimli ve değişmeli olduğu için; Teorem 2.1.13 ten M, aynı zamanda R halkasının bir asal idealidir. Sonuç olarak $\sqrt{I} = M$ kabulü için, Tanım 5.1.3 gereğince I ideali M-primary olur.

$(2) \Rightarrow (3)$. $\sqrt{I} = M$ olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 2.1.65 (1) den açıkça, $I \subseteq M$ dir. Kabulden R bir Noether halka olduğu için, Önerme 5.3.2 gereğince I ideali, kendi radikalinin bir kuvvetini içerir. Öyleyse bir pozitif n tamsayısı için, $M^n = (\sqrt{I})^n \subseteq I$ olmalıdır. Böylece $M^n \subseteq I \subseteq M$ sağlanmış olur.

$(3) \Rightarrow (2)$. Bir pozitif n tamsayısı için

$$M^n \subseteq I \subseteq M \qquad (\circledast)$$

olsun. Kabulden R birimli ve değişmeli bir halka olduğu için; Teorem 2.1.13 ten M maksimal ideali, aynı zamanda R nin bir asal idealidir. O zaman $(\circledast)$ kapsamlarında radikal alınırsa, Teorem 2.1.65 (7) gereğince

$$M = \sqrt{M^n} \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{M} = M$$

olur. Sonuç olarak, $\sqrt{I} = M$ elde edilir. □

5.4. Artin Halkaların Diğer Özellikleri

Bu kısımda, birimli ve değişmeli Artin halkalar ve bu halkaların ideallerine dayalı genel özelliklere değineceğiz.

Önerme 5.4.1. [3] R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının nilradikali $nil(R)$, R nin tüm asal ideallerinin arakesitidir.

İspat: $(\Rightarrow)$. $\mathcal{R}'$, R halkasının tüm asal ideallerinin arakesitini göstersin. Şimdi $f \in R$ elemanı, nilpotent $(f \in nil(R))$ ve $\mathcal{P}$, R halkasının bir asal ideali olsun.

O zaman f nilpotent olduğundan, bir pozitif n tamsayısı için $f^n = 0 \in \mathcal{P}$ olur. Kabulden $\mathcal{P}$ asal ideal olduğu için, asal ideal tanımı gereğince

$$0 = f^n = ff^{n-1} \in \mathcal{P} \qquad \text{ise, o zaman} \qquad f \in \mathcal{P} \ \text{ ya da } \ f^{n-1} \in \mathcal{P}$$

dir. Şimdi $f \notin \mathcal{P}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $f^{n-1} \in \mathcal{P}$ olur. Buradan $f^{n-1} = ff^{n-2} \in \mathcal{P}$ ve kabulden $f \notin \mathcal{P}$ olduğu için, yine $\mathcal{P}$ idealinin asal özelliği gereğince $f^{n-2} \in \mathcal{P}$ elde edilir. Böylece n üzerinde tümevarım yöntemi ile $f \in \mathcal{P}$ bulunur. Bu durum, R halkasından alınacak herhangi bir $\mathcal{P}$ asal ideali için de sağlanır. O zaman $f \in \mathcal{R}'$ olur. Sonuç olarak, $nil(R) \subseteq \mathcal{R}'$ elde edilir.
$(\Leftarrow)$. $\mathcal{R}'$, yine R halkasının tüm asal ideallerinin arakesitini göstersin ve tersine $f \in R$ elemanı nilpotent olmasın $(f \notin nil(R))$. Σ,

$$n > 0 \qquad \text{ise} \qquad f^n \notin J$$

özelliğine sahip J ideallerinin bir kümesi olsun. Kabulden f elemanı nilpotent olmadığı için, $n > 0$ ise o zaman $f^n \neq 0$ olur. Açıkça, $0 \neq f^n \notin 0$ dır. Buradan $0 \in \Sigma$ elde edilir. Böylece Σ, boştan farklı bir kümedir. Σ kümesinin elemanları kapsamaya göre sıralıdır. O halde Zorn Lemma gereğince, Σ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal elemana $\mathcal{P}$ diyelim. Şimdi $\mathcal{P}$ idealinin, asal ideal olduğunu göstermeliyiz: $x, y \notin \mathcal{P}$ olsun. O zaman $\mathcal{P}+(x)$ ve $\mathcal{P}+(y)$ idealleri, $\mathcal{P}$ yi içerir. Kabulden $\mathcal{P}$, Σ kümesinin maksimal elemanı olduğu için $\mathcal{P}+(x)$ ve $\mathcal{P}+(y)$ idealleri, Σ kümesinin bir elemanı değildir. Öyleyse bazı pozitif m, n tamsayıları için

$$f^m \in \mathcal{P} + (x), \qquad f^n \in \mathcal{P} + (y)$$

olur. Buradan $f^{m+n} \in \mathcal{P} + (xy)$ elde edilir. Açıkça $m + n > 0$ olduğu için; $\mathcal{P} + (xy)$ ideali, Σ kümesinin bir elemanı değildir. O halde $xy \notin \mathcal{P}$ olur. Bu durumda $x, y \notin \mathcal{P}$ için $xy \notin \mathcal{P}$ olduğundan, $\mathcal{P}$ bir asal ideal olur. Aynı zamanda

Σ kümesinin tanımı gereğince $f \notin \mathcal{P}$ olduğu için, $f \notin \mathcal{R}'$ olur. Böylece R halkasının nilpotent olmayan her f elemanı için, f yi içermeyen bir $\mathcal{P}$ asal ideali bulunabilir. Öyleyse R halkasının tüm asal ideallerinin arakesiti olan $\mathcal{R}'$, yalnızca R halkasının nilpotent elemanlarından oluşur. Sonuç olarak, $\mathcal{R}' = nil(R)$ elde edilir. $\square$

Önerme 5.4.2. [3] *R birimli ve değişmeli bir Artin halka olsun. O zaman R halkasının tüm asal ideallleri maksimaldir.*

İspat: R birimli ve değişmeli bir Artin halka ve P, R halkasının bir asal ideali olsun. O zaman $B = R/P$ bir tamlık bölgesidir. Kabulden R bir Artin halka olduğu için, Lemma 4.1.6 gereğince B bir Artin tamlık bölgesi olur. Şimdi $x \neq 0$ olmak üzere $x \in B$ alalım ve B nin bir

$$(x) \supsetneqq (x^2) \supsetneqq (x^3) \supsetneqq \ldots \qquad (*)$$

azalan zincirini düşünelim. B Artin olduğu için; Teorem 4.1.3 gereğince $(*)$ azalan zinciri, sonlu adımda durmalıdır. O zaman bir pozitif n tamsayısı için, $(x^n) = (x^{n+1})$ dir. Buradan bir $y \in B$ için, $x^n = x^{n+1}y$ olur. B bir tamlık bölgesi ve $x \neq 0$ olduğu için; $x^n = x^{n+1}y$ eşitliğinde her iki tarafta x^{-n} ile işlem yaparsak, $1 = xy$ elde edilir. Böylece, x elemanı tersinir olur. O halde B nin sıfırdan farklı her x elemanının, B de bir tersi vardır ve buradan $B = R/P$, bir cisim olur. Sonuç olarak, P bir maksimal idealdir. $\square$

Sonuç 5.4.3. [3] R birimli ve değişmeli bir Artin halka olsun. O zaman R halkasının nilradikali $nil(R)$, R halkasının Jacobson radikali $J(R)$ ye eşittir.

İspat: R birimli ve değişmeli bir Artin halka olsun. Önerme 5.4.1 gereğince R halkasının nilradikali $nil(R)$, R nin tüm asal ideallerinin bir arakesitidir. Kabulden R halkası Artin olduğu için, Önerme 5.4.2 gereğince R nin tüm asal idealleri maksimaldir. O halde $nil(R)$, R halkasının tüm maksimal ideallerinin bir arakesiti olur. Böylece R halkasının Jacobson radikali $J(R)$, Tanım 2.1.60 gereğince R nin tüm maksimal ideallerinin arakesiti olduğu için $nil(R) = J(R)$ elde edilir. □

Şimdi sonraki teorilerde ilerleyebilmek için, ihtiyacımız olan ideal çarpımı (ideal product) tanımını verelim:

Tanım 5.4.4. [11] R bir değişmeli ve birimli halka, $I \subseteq R$ olmak üzere I, R nin bir ideali ve M bir R-modül olsun.

(1). I ve M nin

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+,\ a_i \in I \text{ ve } m_i \in M \right\}$$

çarpımı, $a \in I$ ve $m \in M$ olmak üzere tüm $a \cdot m$ *çarpımları ile üretilen bir abel grup* olarak tanımlanır. Açıkça IM, M nin bir altmodülüdür.

(2). Özel bir durum olarak M modülü yerine R halkasının bir başka J ideali alınırsa (yani $M = J$ olarak), IJ çarpımı *ideal çarpımı* olarak adlandırılır. Açıkça ideal çarpımının bu oluşumu, değişme ve birleşme özelliklerine sahip olup

$$IJ \subseteq I \cap J \qquad \text{ve} \qquad \sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$$

kurallarını sağlar.

(3). $n \in \mathbb{N}$ için I^n, $I^0 := R$ olmak üzere n tane I idealinin çarpımını ifade eder.

Önerme 5.4.5. [12] R bir değişmeli ve birimli halka ve $M_1, M_2, \ldots$ R halkasının birbirinden farklı maksimal idealleri olsun. O zaman $M_1 M_2 \cdots M_n$ ideal çarpımı, $M_1 M_2 \cdots M_{n-1}$ ideal çarpımının bir öz altmodülüdür.

İspat: Kabulden $M_1, M_2, \ldots$ birbirinden farklı maksimal idealler olduğundan, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $f_i \in M_i \backslash M_n$ olacak şekilde bir f_i elemanı bulunabilir.

Şimdi $M_1M_2\cdots M_{n-1} = M_1M_2\cdots M_n$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$f_1f_2\cdots f_{n-1} \in M_1M_2\cdots M_{n-1} = M_1M_2\cdots M_n \subseteq M_n$$

elde edilir. Böylece $f_1f_2\cdots f_{n-1} \in M_n$ olur. Bu durum ise $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için $f_i \in M_i \backslash M_n$ kabulümüz ile çelişki oluşturur. Öyleyse,

$$M_1M_2\cdots M_{n-1} \neq M_1M_2\cdots M_n$$

dir. Sonuç olarak, ideal çarpımı özelliğinden

$$M_1M_2\cdots M_n \subsetneqq M_1M_2\cdots M_{n-1}$$

elde edilir. Yani $M_1M_2\cdots M_n$ çarpımı, $M_1M_2\cdots M_{n-1}$ çarpımının bir öz altmodülüdür. □

Sonuç 5.4.6. [12] R bir değişmeli ve birimli Artin halka olsun. O zaman R halkasının, yalnızca sonlu sayıda maksimal ideali vardır.

İspat: R bir değişmeli ve birimli Artin halka ve R nin sonsuz sayıda, birbirinden farklı $M_1, M_2, \ldots$ maksimal ideallerinin var olduğunu kabul edelim. O zaman Önerme 5.4.5 ten, R halkasının maksimal ideallerinin bir

$$M_1 \supsetneqq M_1M_2 \supsetneqq M_1M_2M_3 \supsetneqq \ldots \qquad (\bigstar)$$

sonsuz azalan zinciri elde edilir. Fakat kabulden R halkası Artin olduğu için, Teorem 4.1.3 gereğince (★) azalan zincirinin sonlu adımda durması gerekiyordu. Bu durumda, R halkasının Artin özelliği ile R nin maksimal ideallerinin sonsuz azalan zinciri (★) bir çelişki oluşturur. O halde bir Artin R halkasının, sadece sonlu sayıda birbirinden farklı maksimal idealleri vardır. □

Teorem 5.4.7. [17] R bir değişmeli ve birimli halka ve sıfır ideali, R halkasının (birbirinden farklı olma koşulu olmaksızın) maksimal ideallerinin bir sonlu çarpımı olsun. O zaman R bir Noether halkadır ancak ve ancak R bir Artin halkadır.

İspat: R bir değişmeli ve birimli halka ve $M_1, M_2, \ldots, M_n$

$$(0_R) = M_1 M_2 \cdots M_n$$

olmak üzere R halkasının maksimal idealleri olsun. Buradan ideal çarpımı tanımını kullanacak olursak, R halkasının maksimal ideallerinin bir

$$(\clubsuit) \qquad R = M_0 \supsetneqq M_1 \supseteq M_1M_2 \supseteq M_1M_2M_3 \supseteq \ldots \supseteq M_1M_2\cdots M_n = (0_R)$$

azalan zincirini elde ederiz. Kabulden $1 \leq i \leq n$ için M_i maksimal olduğundan, R/M_i bir cisim olur. M_1/M_1M_2 , R/M_2 cismi üzerinde bir vektör uzayıdır:

$$\begin{aligned} R/M_2 \times M_1/M_1M_2 &\longrightarrow M_1/M_1M_2 \\ (a,v) &\longmapsto av \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Eğer $r + M_2 \in R/M_2$ ve $x + (M_1M_2)$, M_1/M_1M_2 nin bir elemanı ise; o zaman

$$(r + M_2)(x + M_1M_2) = rx + xM_2 + rM_1M_2 = rx + M_1M_2 \in M_1/M_1M_2$$

elde edilir. Çünkü, $M_1M_2 \subseteq M_1$ ve $x \in M_1$ dir. M_1/M_1M_2, bir toplamsal abel grup olduğu için R/M_2 nin elemanları ile skaler çarpımına bakılarak; M_1/M_1M_2 nin, R/M_2 cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğu görülür. O halde genelleyecek olursak; $2 \leq k \leq n$ olmak üzere $(M_1M_2\cdots M_{k-1})/(M_1M_2\cdots M_k)$, R/M_k cismi üzerinde bir vektör uzayıdır (yani, bir R/M_k-modüldür). $1 \leq k \leq n$ için her $V_{k-1} = (M_1M_2\cdots M_{k-1})/(M_1M_2\cdots M_k)$, bir sonlu boyutlu vektör uzayı olur. Her sonlu boyutlu vektör uzayının, sonlu uzunluklu olduğunu Örnek 4.2.1 de göstermiştik. O zaman her V_{k-1} vektör uzayı, sonlu uzunlukludur. Buradan

Teorem 3.1.9 gereğince, V_{k-1} Noerherdir ancak ve ancak V_{k-1} Artindir. Şimdi $1 \leq k \leq n$ için

$$0 \longrightarrow M_1 M_2 \cdots M_k \longrightarrow M_1 M_2 \cdots M_{k-1} \longrightarrow V_{k-1} \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini ele alalım. Açıkça $M_1 M_2 \cdots M_k$ çarpımı, V_{k-1} in bir altmodülüdür. O zaman Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 gereğince, $M_1 M_2 \cdots M_k$ Noetherdir ancak ve ancak $M_1 M_2 \cdots M_k$ Artindir. Böylece Sonuç 3.1.6 dan, $M_1 M_2 \cdots M_k$ ve V_{k-1} Noetherdir (Artindir) ancak ve ancak $M_1 M_2 \cdots M_{k-1}$ Noether (Artin) olur. Sonuç olarak $1 \leq k \leq n$ olmak üzere her $M_1 M_2 \cdots M_{k-1}$ için Artin özelliğin, Noether özelliğine denkliği sağlanır. Buradan $k = 1$ alınırsa, ($\clubsuit$) zincirinden $M_0 = R$ elde edilir. Öyleyse, R Noether halkadır ancak ve ancak R Artin halkadır. $\square$

Şimdi bir sonraki Teorem 5.4.9 için gerekli olan, "boyut (dimension)" tanımını verelim:

Tanım 5.4.8. [3] Bir değişmeli ve birimli R halkasının $P_0, P_1, \ldots, P_n$ asal ideallerinin oluşturduğu

$$P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq P_n$$

sonlu artan dizisi, R halkasının asal ideallerinin bir zinciridir. Bu zincirin uzunluğu, Tanım 2.1.38(1) gereğince n dir. R halkasındaki asal ideallerin tüm zincirlerinin uzunluklarının en büyük üst sınırı (supremum'u), *R halkasının Krull boyutu (Krull dimension)* olarak tanımlanır ve k-$dimR$ ile gösterilir. $R \neq 0$ için

$$k\text{-}dimR \geq 0 \qquad \text{ya da} \qquad k\text{-}dimR = +\infty$$

dur. Örneğin, bir cismin boyutu 0 ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının boyutu 1 dir.

Teorem 5.4.9. [3] R bir değişmeli ve birimli halka olsun. R halkası Artindir ancak ve ancak R halkası Noether ve k-$dimR = 0$ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$. R bir Artin halka olsun. O zaman Önerme 5.4.2 gereğince, R halkasının tüm asal idealleri maksimaldir. Maksimalliğin tanımı gereğince R halkasının bir M_i maksimal ideali için, $M_i \subsetneqq A \subsetneqq R$ olacak şekilde herhangi bir A ideali yoktur. Dolayısıyla R nin maksimal ideallerinin oluşturduğu artan zincir, her M_i maksimal ideali için kendisi ile sınırlıdır. Yani, $M_i = P_0$ dır. Sonuç olarak, boyut tanımı gereğince $k\text{-}dimR = 0$ olur. O halde geriye sadece R halkasının Noether olduğunu göstermek kalır. Kabulden R halkası Artin olduğu için, Sonuç 5.4.6 gereğince R halkasının sonlu sayıda maksimal ideali vardır. Şimdi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ R halkasının birbirinden farklı maksimal idealleri olsun. Aynı zamanda Tanım 2.1.60 gereğince $J(R)$, R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesiti olduğunu biliyoruz. O zaman ideal çapımı tanımından

$$M_1M_2 \cdots M_n \subseteq M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n = J(R)$$

elde edilir. Teorem 4.7.1 den R halkası Artin ise, o zaman R halkasının Jacobson radikali $J(R)$, nilpotenttir. Öyleyse bir pozitif k tamsayısı için $J^k(R) = J^k = 0$ dır. Buradan

$$(M_1M_2 \cdots M_n)^k \subseteq (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n)^k = J^k = 0$$

olur. O zaman $(M_1M_2 \cdots M_n)^k = 0$ dır. Böylece $M_1M_2 \cdots M_n = 0$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 5.4.7 gereğince, R halkası Artindir ancak ve ancak R halkası Noetherdir.

$(\Leftarrow)$. R bir değişmeli ve birimli Noether halka ve $k\text{-}dimR = 0$ olsun. O zaman boyut tanımı gereğince R halkasının asal ideallerinin her artan zinciri, yalnızca bir P_0 asal idealinden oluşur. Ayrıca bir değişmeli ve birimli R halkasının her maksimal idealinin, bir asal ideal olduğunu biliyoruz [Teorem 2.1.13]. Buradan R halkasının maksimal ideallerinin her artan zinciri, maksimal ideal tanımı gereğince yalnızca bir maksimal idealden meydana gelir. Dolayısıyla bu maksimal ideallerin her artan zincirinin uzunluğu, 0 dır. Öyleyse kabulden $k\text{-}dimR = 0$ olduğu için, R halkasının her asal ideali maksimal olur. Yine kabulden R halkası Noether olduğu için, yalnızca sonlu sayıda asal ideal içerir. Böylece R halkasının sonlu sayıda maksimal ideali olur. Şimdi $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, R halkasının maksimal ideallerinin bir kümesi olsun. O zaman Önerme 5.4.1 gereğince R halkasının nilradikali $nil(R)$, R nin tüm asal ideallerinin arakesiti olduğu için

$$nil(R) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$$

olur. Kabulden R halkası Noether olduğundan, Teorem 4.7.12 gereğince $nil(R)$ ideali nilpotenttir. Buradan bir pozitif k tamsayısı için

$$0 = (nil(R))^k = (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n)^k \supseteq (M_1 M_2 \cdots M_n)^k$$

elde edilir. O zaman $(M_1 M_2 \cdots M_n)^k = 0$ olur. Böylece $M_1 M_2 \cdots M_n = 0$ dır. Sonuç olarak Teorem 5.4.7 gereğince, R halkası Noetherdir ancak ve ancak R halkası Artindir. $\square$

Şimdi daha önceden birimli halkalarla ilgili verilen Sonuç 4.7.11 (b) deki özelliğin, birimli halkalara değişme özelliğinin de eklenmesiyle meydana gelen farklı bir ifadesine değineceğiz. Bunun için aşağıdaki tanıma ihtiyacımız olacaktır:

Tanım 5.4.10. [3] R değişmeli ve birimli bir halka ve I, J R nin idealleri olsun. Eğer $I + J = (1_R)$ (yani, $I + J = R$) ise, I ve J idealleri *aralarında asal (coprime ya da comaksimal)* olarak adlandırılır. Böylece aralarında asal I, J idealleri için $IJ = I \cap J$ dir. Açık bir şekilde, I ve J idealleri aralarında asaldır ancak ve ancak $x + y = 1_R$ olacak şekilde $x \in I$ ve $y \in J$ vardır.

Teorem 5.4.11. [17] R bir değişmeli ve birimli halka olsun. O zaman

R Artin ise, R Noetherdir.

İspat: Kabulden R halkası birimli ve değişmeli olduğu için, R nin cisim olma olasılığından söz edebiliriz. Bu durumda eğer R cisim ise, o zaman R hem Artin hem de Noetherdir. Böylece istenen koşul sağlanır. Şimdi R nin cisim olmadığını ve Artin halka olduğunu kabul edelim. O zaman R halkası Artin olduğu için, Teorem 4.7.1 gereğince $J(R)$ nilpotent olur. Aynı zamanda Sonuç 5.4.6 gereğince, R halkasının yalnızca sonlu sayıda maksimal ideali vardır. Şimdi bu maksimal idealler, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $M_1, M_2, \ldots, M_n$ olsun. O halde Jacobson radikali tanımından,

$$J(R) = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n \qquad (\clubsuit)$$

elde edilir. Böylece geriye sadece $0_R = M_1 M_2 \cdots M_n = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ olduğunu göstermek kalır. Bu durum da ancak $i \neq j \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ için $M_i + M_j = R$ yani M_i, M_j ikililerinin aralarında asal (coprime, comaximal) olması ile mümkündür. Kabulden $M_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ maksimal olduğundan,

her $r \notin M_i$ için $(1_R - rx) \in M_i$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. $(\bigstar)$

Çünkü $r \notin M_i$ olduğu durumda; M_i nin maksimalliğinden M_i ve r ile üretilen bir (M_i, r) ideali, R halkasının kendisine eşit olur. Şimdi $r \in M_j \backslash M_i$ alalım. O zaman $(\bigstar)$ özelliğini sağlayan bir $x \in R$ vardır. Kabulden M_j, R nin maksimal ideali olduğu için $rx \in M_j$ olur. Buradan

$$\underbrace{(1_R - rx)}_{\in M_i} + \underbrace{rx}_{\in M_j} = 1_R \in (M_i + M_j)$$

elde edilir. Böylece $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ $i \neq j$ olmak üzere $(\clubsuit)$'deki her M_i, M_j ikilisi, Tanım 5.4.10 gereğince aralarında asal (coprime, comaximal) olur. Sonuç olarak, comaximal özelliğinden

$$M_1 M_2 \cdots M_n = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$$

dir. O halde geriye sadece bu eşitliğin, aslında R halkasının sıfır idealini verdiğini göstermek kalır. Şimdi $J(R)$ nilpotent olduğundan, bir pozitif t tamsayısı için $(J(R))^t = 0$ olsun. O zaman kabulden R halkası değişmeli olduğu için,

$$(0_R) = (J(R))^t = (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n)^t = (M_1 M_2 \cdots M_n)^t = {M_1}^t {M_2}^t \cdots {M_n}^t$$

elde edilir. Böylece R halkasının maksimal ideallerinin sonlu (tekrarlı) çarpımı, ${M_1}^t {M_2}^t \cdots {M_n}^t = 0_R$ olur. Sonuç olarak Teorem 5.4.7 gereğince, R halkası Artindir ancak ve ancak R halkası Noetherdir. $\square$

Yerel halka [Tanım 2.1.9] ve yarıyerel halka [Tanım 2.1.10] tanımlarından yola çıkılarak, Artin halkalarla ilgili aşağıdaki iki özellik elde edilir:

Özellik 5.4.12. [11] Yarıyerel halka tanımı ile birimli ve değişmeli bir Artin halka, yarıyereldir.

Özellik 5.4.13. [3] R birimli ve değişmeli bir Artin yerel halka ve M, R halkasının maksimal ideali olsun. O zaman R halkası Artin olduğu için, Önerme 5.4.2 gereğince R halkasının her asal ideali maksimaldir. Aynı zamanda R halkası yerel olduğu için M, R nin tek maksimal idealidir. O halde M, R halkasının tek asal ideali olur. Böylece Önerme 5.4.1 den M, R nin nilradikali $nil(R)$ ye eşit olur. Buradan nilradikal tanımı gereğince, M idealinin her elemanı nilpotenttir. Açıkça R halkası Artin olduğu için, Sonuç 5.4.3 gereğince $nil(R) = M = J(R)$ dir. Öyleyse M ideali, aynı zamanda R nin Jacobson radikalidir. Bu durumda Teorem 4.7.1 gereğince, M bir nilpotent maksimal ideal olur. Sonuç olarak, R halkasının her elemanı ya tersinir ya da nilpotenttir.

Şimdi yerel halkalarla ilgili bir başka karakterizasyonu verelim:

Önerme 5.4.14. [3] R bir değişmeli ve birimli Noether yerel halka ve M, R halkasının maksimal ideali olsun. O zaman aşağıdaki iki özellikten yalnızca biri doğrudur:

(i). Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M^n \neq M^{n+1}$ dir ;

(ii). Bir pozitif n tamsayısı için $M^n = 0$ ise, o zaman R bir Artin yerel halkadır.

İspat için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır:

Lemma 5.4.15. [1, Nakayama Lemma] Bir R halkasının bir sol ideali I için aşağıdaki özellikler denktir:

(a). $I \leq J(R)$

(b). Her sonlu üretilmiş sol R-modül M için $IM = M$ ise, o zaman $M = 0$ dır.

(c). Her sonlu üretilmiş sol R-modül M için IM, M de smalldur.

Önerme 5.4.14 ün İspatı: Önermede verilen iki özellikten biri sağlanıyor ise, diğeri sağlanmayacaktır. Yani birinin sağlandığını göstermemiz, diğerinin yokluğu için kanıttır. Şimdi bunun için (i) özelliğinin sağlanmadığını kabul edelim ve bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M^n = M^{n+1}$ olsun. Kabulden R halkası Noether olduğu için, Teorem 4.1.1 gereğince R nin her ideali sonlu üretilmiştir. O zaman M bir sonlu üretilmiş maksimal ideal ve R bir sonlu üretilmiş halkadır. Buradan açıkça, R bir sonlu üretilmiş sol R-modül ve M bir sonlu üretilmiş sol R-altmodül olur. O zaman ideallerin çarpım özelliğinden; pozitif n tamsayısı için M^n, bir sonlu üretilmiş sol R-altmodül olur. Aynı zamanda kabulden R halkası yerel olduğu için M, R halkasının tek maksimal idealidir. Buradan Jacobson radikalinin tanımı gereğince, $J(R) = M$ elde edilir. Böylece Nakayama Lemma (b) özelliğinden, $M^n = M^{n+1} = MM^n$ kabulü için $M^n = 0$ olmalıdır. Öyleyse, geriye sadece R halkasının Artin olduğunu göstermek kalır. Şimdi $\mathcal{P}$, R halkasının bir asal ideali olsun. O zaman $M^n = 0 \in \mathcal{P}$ olur. Yani, $M^n \subseteq \mathcal{P}$ dir. Buradan her iki tarafın radikali alındığında, Bölüm 2'de verilen radikal özellikleri gereğince

$$\sqrt{M^n} = M \qquad \text{ve} \qquad \sqrt{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$$

olur. O halde $M = \sqrt{M^n} \subseteq \sqrt{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ ve böylece $M \subseteq \mathcal{P}$ elde edilir. Aynı zamanda kabulden M bir maksimal ideal olduğu için, $\mathcal{P} \subsetneqq M$ dir. O halde $M = \mathcal{P}$ olmalıdır. Yani R halkasının her $\mathcal{P}$ asal ideali, R nin tek maksimal ideali M ye eşittir. Böylece M, R halkasının tek asal ideali olur. Sonuç olarak yerel halkalarla ilgili verilen Özellik 5.4.13 gereğince, bu durum ancak yerel R halkasının Artin olması ile mümkündür. □

Şimdi bir sonraki teoremin ispatı için, ideallerin primary parçalanışları ile ilgili aşağıdaki teoreme ihtiyaç olacaktır:

Teorem 5.4.16. [3, 2nd uniqueness theorem (4.11)] R bir değişmeli ve birimli halka olmak üzere I, R nin bir parçalanabilir ideali; $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$, I nın bir minimal primary parçalanışı ve $\{\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}_\mathfrak{m}}\}$, I nın minimal (isolated) asal ideallerinin bir kümesi olsun. O zaman $\mathfrak{q}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_{i_m}$, I idealinin minimal primary parçalanışından bağımsızdır. Özel olarak, I idealinin minimal (isolated) primary bileşenleri, I ile tek türlü tanımlanırlar.

Teorem 5.4.17. [Artin halkalar için yapı teoremi] [3] Bir değişmeli ve birimli Artin R halkası, değişmeli ve birimli Artin yerel halkalarının (izomorfizma farkıyla) bir tek türlü sonlu direk çarpımıdır.

İspat: R bir değişmeli ve birimli Artin halka olsun. O zaman Sonuç 5.4.6 gereğince, R nin yalnızca sonlu sayıda maksimal ideali vardır. Şimdi $1 \leq i \leq n$ olmak üzere M_i ler, R halkasının birbirinden farklı maksimal idealleri olsun. O halde, tanımdan R halkasının Jacobson radikali

$$J(R) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$$

olur. Buradan R halkası Artin olduğu için, Teorem 4.7.1 gereğince $J(R)$ nilpotenttir. Öyleyse bir pozitif k tamsayısı için

$$(J(R))^k = \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k = 0$$

olmalıdır. Aynı zamanda ideal çarpımı tanımından $\prod_{i=1}^{n} M_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} M_i$ olduğu için,

$$\prod_{i=1}^{n} {M_i}^k = \Big(\prod_{i=1}^{n} M_i\Big)^k \subseteq \Big(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\Big)^k = 0$$

olur. Böylece bir pozitif k tamsayısı için

$$\prod_{i=1}^{n} {M_i}^k = 0 \qquad (\clubsuit)$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} \Phi : R &\longrightarrow \prod_{i=1}^{n} (R/{M_i}^k) \\ x &\longmapsto (x + {M_1}^k, x + {M_2}^k, \ldots, x + {M_n}^k) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir Φ homomorfizması tanımlayalım. Kabulden R halkası birimli ve değişmeli olduğu için, Teorem 2.1.13 ten her $(1 \leq i \leq n)$ M_i, aynı zamanda R halkasının bir asal idealidir. Yine kabulden $(1 \leq i, j \leq n)$ $i \neq j$ iken M_i ve M_j, birbirinden farklı maksimal idealler olduğu için $M_i + M_j = (1_R)$ olmalıdır. Öyleyse Teorem 2.1.65 gereğince, $(1 \leq i, j \leq n)$ $i \neq j$ için

$$\begin{aligned} \sqrt{{M_i}^k + {M_j}^k} = \sqrt{\sqrt{{M_i}^k} + \sqrt{{M_j}^k}} = \sqrt{M_i + M_j} = \sqrt{(1_R)} = (1_R) \\ \Longleftrightarrow {M_i}^k + {M_j}^k = (1_R) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tanımdan, $(1 \leq i, j \leq n)$ $i \neq j$ için ${M_i}^k$ ve ${M_j}^k$ aralarında asal (coprime, comaximal) idealler olur. O zaman,
[3, Proposition 1.10 (i)] gereğince $\prod_{i=1}^{n} {M_i}^k = \bigcap_{i=1}^{n} {M_i}^k$ ve [3, Proposition 1.10 (ii)] gereğince Φ homomorfizması örten olmalıdır. O halde, $(\clubsuit)$'den

$$0 = \prod_{i=1}^{n} {M_i}^k = \bigcap_{i=1}^{n} {M_i}^k$$

elde edilir ve buradan [3, Proposition 1.10 (iii)] gereğince Φ homomorfizması injektif (birebir) olur. Sonuç olarak, Φ bir izomorfizmadır. Yani,

$$R \cong \prod_{i=1}^{n} (R/{M_i}^k)$$

dır. Şimdi her bir $(R/{M_i}^k)$ bölüm halkasının, bir Artin yerel halka olup olmadığına bakalım:

Açıkça R halkası kabulden Artin olduğu için, Lemma 4.1.6 (2) gereğince her bir $(R/{M_i}^k)$ bölüm halkası Artindir. Geriye bu bölüm halkalarının yerel olduğunu göstermek kalır. İdeal çarpımı tanımından,

$$ {M_i}^k = \underbrace{M_i \cdots M_i}_{k-tane} \subseteq \underbrace{M_i \cap \ldots \cap M_i}_{k-tane} = M_i$$

dir. Buradan açıkça, $M_i \in (R/{M_i}^k)$ olur. Kabulden M_i ideali R de maksimal olduğu için; M_i, $(R/{M_i}^k)$ bölüm halkasında da maksimal ideal olur. O halde $(R/{M_i}^k)$ nın elemanları, $x \in R$ için $x + {M_i}^k$ şeklinde olduğundan M_i, $(R/{M_i}^k)$ nın tek maksimal ideali olur. Böylece tanımdan, her bir $(R/{M_i}^k)$ bölüm halkası yereldir. Sonuç olarak R halkası, Artin yerel $(R/{M_i}^k)$ bölüm halkalarının bir sonlu direk çarpımına izomorf olur.

Şimdi geriye sadece bu sonlu direk çarpımın, tek olduğunu göstermek kalır: Tersine, bu çarpımın tek olmadığını ve her $(1 \leq i \leq m)$ R_i, bir değişmeli ve birimli Artin yerel halka olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^{m} R_i$ olduğunu kabul edelim. O zaman izomorfizma özelliğinden her i için, bir $\varphi_i : R \to R_i$ örten homomorfizması vardır. $r_i = Ker(\varphi_i)$ olsun. Buradan φ_i ler birer örten homomorfizma olduğu için, [3, Proposition 1.10 (ii)] gereğince $(1 \leq i, j \leq m)$ $i \neq j$ için her r_i, r_j ikilisi, aralarında asal (coprime, comaximal) olur. Ayrıca $R \cong \prod_{i=1}^{m} R_i$ izomorfizmasından, [3, Proposition 1.10 (iii)] gereğince $\bigcap_{i=1}^{m} r_i = (0)$ olmalıdır. Kabulden R_i ler, birer değişmeli ve birimli Artin yerel halka olduğu için; Özellik 5.4.13 gereğince her R_i halkasının yalnızca bir asal (aynı zamanda maksimal olan) ideali vardır. Şimdi bunun için $\mathfrak{q}_i$, R_i halkasının tek asal ideali ve $\mathfrak{p}_i = {\varphi_i}^{-1}(\mathfrak{q}_i)$ olduğunu kabul edelim. O zaman yine izomorfizma özelliğinden her $\mathfrak{p}_i$, R nin bir asal idealidir. Varsayımdan R bir değişmeli ve birimli Artin halka olduğu için, Önerme 5.4.2 gereğince her $\mathfrak{p}_i$, R halkasının bir maksimal ideali olur. Açıkça halkanın Jacobson radikali tanımından, $J(R_i) = \mathfrak{q}_i$ ve Teorem 4.7.1 den, $\mathfrak{q}_i$ nilpotent olur. Öyleyse bir pozitif t_i tamsayısı için, ${\mathfrak{q}_i}^{t_i} = 0$ dır. Bu durumda izomorfizma özelliği gereğince,

$$r_i = Ker(\varphi_i) = {\varphi_i}^{-1}(0) = {\varphi_i}^{-1}({\mathfrak{q}_i}^{t_i}) = [{\varphi_i}^{-1}(\mathfrak{q}_i)]^{t_i} = {\mathfrak{p}_i}^{t_i}$$

elde edilir. Eğer r_i idealinin radikali alınırsa, Teorem 2.1.65 (7) den $\sqrt{r_i} = \sqrt{{\mathfrak{p}_i}^{t_i}} = \mathfrak{p}_i$ olur. O zaman $\mathfrak{p}_i$, R halkasının maksimal (hem de asal olan) ideali olduğu için; [3, Proposition 4.2] gereğince $r_i = {\mathfrak{p}_i}^{t_i}$ bir $\mathfrak{p}_i$-primary ideal olur. Böylece tanımdan $\bigcap\limits_{i=1}^{m} r_i = (0)$, R halkasında sıfır idealinin bir primary parçalanışıdır. $(1 \leq i, j \leq m)$ $i \neq j$ için her r_i, r_j ikilisi aralarında asal (coprime, comaximal) idealler olduğundan, $(1_R) = r_i + r_j$ dir. Buradan Teorem 2.1.65 gereğince,

$$(1_R) = \sqrt{(1_R)} = \sqrt{r_i + r_j} = \sqrt{\sqrt{r_i} + \sqrt{r_j}} = \sqrt{\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1_R)$$

olmalıdır. O halde tanımdan $(1 \leq i, j \leq m)$ $i \neq j$ için, her $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j$ ikilisi de aralarında asal (coprime) ideallerdir. Öyleyse tanımdan $1 \leq i \leq m$ için $\mathfrak{p}_i$ ler, (0) ın minimal (isolated) asal idealleri ve böylece $\mathfrak{p}_i$ ler, R halkasının minimal asal idealleridir. Buna bağlı olarak her r_i, (0) ın bir minimal (isolated) primary bileşeni olur. Böylece her r_i minimal (isolated) primary bileşeni, Teorem 5.4.16 gereğince R ile tek türlü tanımlanır. Sonuç olarak 1. İzomorfizma Teoreminden elde edilen $R_i \cong R/r_i$ halkaları, R ile tek türlü tanımlanırlar. □

KAYNAKLAR

[1] Anderson, F. W., and Fuller, K. R. 1992. Rings and Categories of Modules. Graduate Texts in Math., No:13, Springer-Verlag, 376 s., New York.

[2] Artin, E. 1927. Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. Abh. Math. Sem. U. Hamburg: 251-260.

[3] Atiyah, M. F., and Macdonald, I. G. 1969. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, University of Oxford, 128 s., Great Britain.

[4] Bland, P. E. 2011. Rings and Their Modules. Hubert and Co. GmbH and Co. KG, 452 s., Göttingen, Germany.

[5] Grimaldi, R. P. 2004. Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, fifth edition. Pearson Education, Inc., 980 s., United States of America.

[6] Güngöroğlu, G., ve Harmancı, A. 1999. Soyut Cebire Giriş Dersleri Problemler ve Çözümleri. Hacettepe Üniversitesi, 171 s., Türkiye.

[7] Heflin, M. 2012. Lecture Notes: Abstract Algebra (Math 434). Mathematics and Computer Science Department, University of Puget Sound.

[8] Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York Inc., 502 s., United States of America.

[9] Jacobson, N. 1995. Basic Algebra II, second edition. W.H. Fremann and Company, 686 s., United States of America.

[10] Kasch, F. 1982. Modules and Rings. Academic Press, London Mathematical Society Monograph no:17, 372 s., London.

[11] Kemper, G. 2011. A Course in Commutative Algebra. Graduate Texts in Mathematics 256, Springer-Verlag, 246 s., Berlin Heidelberg.

[12] Laksov, D. 2002. Lecture Notes: Doktorandkurs i Algebra. Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology.

[13] Malik, D.S., and Mordeson, J. N., and Sen, M.K. 2007. Introduction to Abstract Algebra. Department of Mathematics, Creighton University, 266 s., United States of America.

[14] Noether, E. 1921. Idealtheorie in Ringbereichen. **Math. Annalen**, 83: 24-66.

[15] Pakianathan, J. 2003. Lecture Notes: Math 436. Department of Mathematics, University of Rochester.

[16] Radford, D. 2016. All Student Theses: On Emmy Noether and Her Algebraic Works. Mathematics Depatment, Governors State University.

[17] Sivaramakrishnan, R. 2006. Certain Number-Theoretic Episodes in Algebra, Second Edition. Chapman and Hall/CRC, 416 s., New York.

[18] Zariski, O., and Samuel, P. 1965. Commutative Algebra, Volume I. D. Van Nostrand Company, Inc., 329 s., United States of America.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Buşra Togay
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Sivas, 12.10.1992

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	busratogay0928@gmail.com
Tarih	:	26.12.2018