T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-040

SCOTT TOPOLOJİ ÜZERİNE

Funda Nur KARAKAYA

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Funda Nur KARAKAYA tarafından hazırlanan Scott Topoloji Üzerine başlıklı tez, 06.09.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Dr. Öğr.Üyesi Süleyman GÜLER	Aydın ADÜ	
Üye :	Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Aydın ADÜ	
Üye :	Doç. Dr. Mehmet Ali BALCI	MSKÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2018 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

06.09.2018

Funda Nur KARAKAYA

ÖZET

Scott Topoloji Üzerine

Funda Nur KARAKAYA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER
2018, 43 sayfa

Bu tez esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde tezin konusu hakkında genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde esnek küme ve esnek Scott topoloji ile ilgili tanımlar verilerek bu tanımların bazı özellikleri üzerinde durulmuştur.
Tezin son bölümünde, Scott küme ve Scott topoloji tanımları verilip bu uzaylarda Scott topolojiye göre posetlerin sürekliliği ve posetlerde filtrelerin yakınsaklık yapısı incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler:
Esnek Küme, Poset, Esnek Scott Topolojik Uzaylar, Scott İç, Scott Açık, Scott Kapalı, Scott Filtre.

ABSTRACT

On Scott Topology

Funda Nur KARAKAYA

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Süleyman GÜLER
2018, 43 pages

This thesis essentially consists of three chapters.
In the first chapter, general informations about the subject of the thesis is introduced.In the second chapter, the definition of soft set and soft Scott topology are introduced and some basic definitions and properties about those notions are studied.
In the last part of the thesis, Scott set and Scott topology are defined. Then the continuity of posets via Scott topology and convergences of filters by posets are investigated. soft semi-open sets are introduced and their properties are given. Moreover, a generalization of soft continuity named soft weak continuity and soft almost continuity are defined and some properties are .

Key Words:
Soft Set, Poset, Soft Scott topological Spaces, Scott Interior, Scott Open Set, Scott Closed Set, Scott Filter.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER'e; tezin yazımında ve biçimlenmesinde emeği geçen değerli bölüm hocalarıma ve tüm bölüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme ve arkadaşlarıma, göstermiş oldukları sabır ve anlayış için yürekten teşekkür ederim.

Funda Nur KARAKAYA

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI v
ÖZET vii
ABSTRACT ix
ÖNSÖZ xi
SİMGELER DİZİNİ xv

1. GİRİŞ 1

2. ESNEK SCOTT TOPOLOJİK UZAYLAR 3
2.1. Esnek Kümeler ve Temel Özellikleri 3
2.2. Esnek Kümelerde Sıralama İle İlgili Sonuçlar 6
2.3. Esnek Scott Topoloji 10

3. SCOTT TOPOLOJİK UZAYLAR 15
3.1. Scott Kümeler 15
3.2. Scott Filtreler ve Özellikleri 22
3.3. Scott Topolojiye Göre Posetlerin Sürekliliği 25
3.3.1. Soyut Bazlar ve Round İdeal 27
3.4. Posetlerde Yakınsak Uzaylar 29
3.4.1. $(P,\downarrow_d)$ ve $(P,\downarrow_c)$ arasındaki ilişki 30
3.4.2. Posetlerde Meet-Süreklilik 36

KAYNAKLAR 41

ÖZGEÇMİŞ 43

SİMGELER DİZİNİ

E	Parametrelerin kümesi
(F,E)	Esnek küme
$\tilde{\subset}$	Esnek alt küme
$\urcorner E$	E kümesinin değili
$(F,A)^c = (F^c, \urcorner A)$	(F,A)'nın tümleyeni
Φ	Boş esnek küme
$\tilde{X}$	Evrensel esnek küme
$sint(F,E)$	(F,E)'nin esnek içi
$scl(F,E)$	(F,E)'nin esnek kapanışı
$\tilde{\mathscr{V}}(x)$	x'in tüm esnek komşuluk kümesi
$(F,E)'$	(F,E)'nin yığılma noktası kümesi
$\mathfrak{B}$	Esnek baz
e_F	Esnek nokta
$int^s(F,E)$	Esnek yarı-iç
$cl^s(F,E)$	Esnek yarı-kapanış
$\tilde{\cup}$	Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim
$DCPO$	Yönlendirilmiş tam poset
$\downarrow A$	A kümesinin ekūsü
$\uparrow A$	A kümesinin ebası

1. GİRİŞ

Sürekli latisler üzerinde yapılan çalışmalarda iki tane önemli topoloji vardır. Bunlardan biri Scott Topolojidir. Scott Topoloji D. S. Scott tarafından 1972 yılında Continuous Lattice makalesinde tanımlanmıştır. [7] Scott topoloji, teorik bilgisayar bilimi ve topolojik kafes teorilerinde de oldukça kullanışlı bir kavramdır.
Bu tezin 3. bölümün 1. kısmında M. M. Kovar tarafından 2004 yılında yayımlanmış olan çalışma [15] incelenerek Hofmann-Mislove DCPO hakkında bilgi verildi. Bir sonraki bölümde posetler için gömülü baz kavramı verildi. Gömülü bazlar ve Scott topolojiye göre posetlerin süreklililiğinin karakterizasyonu incelendi. Son olarak posetler üzerinde filtre yakınsaklıkları üzerinde duruldu.
Çoğu zaman gerçek yaşamda karşılaşılan problemlerin kesin çözümü bulunmayabilir, bu durumda bu problemler yaklaşık olarak çözülebilir. Bu problemlerin çözümü için D. Molodtsov 1999 yılında ekonomi, mühendislik ve ekoloji alanında karşılaşılan problemlerin çözümü için başlangıç uzayına dayanan esnek kümeler kavramını tanımlamıştır. Molodtsov'un esnek küme teorisini ayrıntılarıyla Maji ve arkadaşları incelemişlerdir. Daha sonra, Babitha esnek küme teorisiyle ilgili tanımlar vermiştir. Sonrasında, Babitha ve Sunil esnek kümelerin sıralamasını öne sürmüş ve kısmi sıralı esnek kümeyi tanımlamışlardır. Esnek küme bağıntısı ile ilgili daha ileri tanımlar olarak esnek kümelerin çekirdek ve kapanışları Yang ve Guo tarafından ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra, Park ve diğerleri denklik bağıntısı üzerinde çalışmış ve yarı-sıralı esnek denklik bağıntısının (F,A) esnek kümesi üzerinde bir tam kafes oluşturduğunu kanıtlamıştır. Bu tezin 2. bölümünün son kısımında esnek küme bağıntılarını kullanarak Tanay ve arkadaşları tarafından tanımlanan esnek Scott topoloji [3] hakkında bilgi verildi. Esnek scott topolojiyi tanımlamak için yönlendirilmiş ve yönlendirilmiş tam esnek küme hakkında bilgi verdik.

2. ESNEK SCOTT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremlerin yanı sıra, genel olarak konu bütünlüğünü sağlamak amacıyla esnek topolojik uzaylarda sık sık kullanılan bazı kavramlar da ayrıntılarıyla verilecektir.

2.1. Esnek Kümeler ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1 [14] *U başlangıç evreni, E parametrelerin kümesi olsun. $P(X)$ U'in kuvvet kümesi ve A, E nin bir alt kümesi olsun. $F : A \to P(U)$ dönüşümü olmak üzere (F,A) çiftine U üzerinde bir esnek küme denir. Diğer bir ifadeyle, esnek küme U'nun alt kümelerinin parametrelerle ifade edilen ailesidir.*

Tanım 2.2 [14] *U üzerindeki (F,A) esnek kümesi eğer her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.*

Tanım 2.3 [14] *U evreni üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun.*
(i) $A \subset B$ ve
(ii) $\forall e \in A$, $F(e)$ ve $G(e)$ özdeş yaklaşımlar, öyle ki $F(e) = G(e)$
ise (F,A) ya (G,B) nin alt esnek kümesidir denir ve $(F,A) \,\tilde{\subset}\, (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 [17] *Her $x \in A$ için $F^c(x) = U - F(x)$ olmak üzere $(F,A)^c$ ye (F,A) nın esnek tümleyeni denir ve $(F,A)^c = (F^c,A)$ olarak gösterilir.*

Tanım 2.5 [17] *U üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesi olması için $C = A \cup B$ ve her $e \in C$ için*

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A \backslash B \\ G(e), & e \in B \backslash A \\ F(e) \cup G(e), & e \in A \cap B \end{cases} \tag{2.1.1}$$

dır ve $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6 [8] *U üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ve $A\cap B \neq \emptyset$ olsun. Bu esnek kümelerinin kesişimi (H,C) esnek kümesi olması için $C = A\cap B$ ve her $e\in C$ için*

$$H(e) = F(e)\cap G(e) \tag{2.1.2}$$

dır ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.7 [19] *X boştan farklı bir küme, A parametreler kümesi olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan X in esnek alt kümelerinin ailesi $\tilde{\tau}$, X üzerinde bir esnek topolojidir.*
1. $\Phi,\tilde{X}\in\tilde{\tau}$,
2. $\tilde{\tau}$ ya ait sonlu esnek kümelerin esnek arakesiti $\tilde{\tau}$ ya aittir.
3. $\tilde{\tau}$ ya ait herhangi sayıda esnek kümelerin esnek birleşimi de $\tilde{\tau}$ ya aittir.
Eğer $\tilde{\tau}$ X esnek kümesi üzerinde bir esnek topoloji ise, $(X,\tilde{\tau},A)$ üçlüsüne de esnek topolojik uzay denir.

Tanım 2.8 [19] *Eğer $\tilde{\tau}$, X üzerinde bir esnek topoloji ise $\tilde{\tau}$'nun elemanlarına $(X,\tilde{\tau},A)$ esnek topolojik uzayı üzerinde esnek açık küme denir.*

Tanım 2.9 [19] *$(X,\tilde{\tau},A)$ esnek topolojik uzay ve (G,B), $(X$ üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $(G,B)^c$ esnek açık küme ise (G,B) esnek kümesine esnek kapalı küme denir.*

Tanım 2.10 *[12] (F,A) ve (G,B) olmak üzere X üzerinde iki esnek küme olsun. $H: A\times B\to P(U\times U)$, $(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b) = F(a)\times G(b)$ şeklinde tanımlı $(H,A\times B)$ esnek kümesine (F,A) ve (G,B) nin esnek kartezyen çarpımı denir ve $(H,A\times B) = (F,A)\times(G,B)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.11 *[12] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. $(F,A)\times(G,B)$ kartezyen çarpımın bir $\preceq$ esnek alt kümesine (F,A) kümesinden (G,B) kümesine* *bir esnek bağıntı denir.*

Diğer bir deyişle, (F,A) *dan* (G,B) *ye olan* $R = (H_1, S)$ *şeklindeki* $\preceq$ *bağıntısı için* $S \subset A \times B$ *ve* $\forall (a,b) \in S$ *için* $H_1(a,b) = H(a,b)$ *olacak şeklinde tanımlanır.*

Tanım 2.12 *[12] R,* (F,A) *dan* (G,B)*ye esnek bağıntısı olsun.*
$A_1 = \{a \in A : H(a,b) \in R, \exists b \in B\}$ *ve her* $a_1 \in A_1$ *için* $D(a_1) = F(a_1)$ *olmak üzere* (D, A_1) *esnek kümesi* $\preceq$ *nin tanım kümesidir denir.*
$B_1 = \{b \in B : H(a,b) \in R, \exists a \in A\}$ *ve her* $b_1 \in B_1$ *için* $RG(b_1) = G(b_1)$ *olmak üzere* (RG, B_1) *esnek kümesi* $\preceq$ *nin değer kümesidir denir.*

Tanım 2.13 *[12] R,* (F,A) *üzerinde bir bağıntı olmak üzere;*
(1) *Her* $a \in A$ *için* $H_1(a,a) \in R$ *ise R yansıyandır.*
(2) $H_1(a,b) \in R$ *iken* $H_1(b,a) \in R$ *ise R simetriktir.*
(3) *Her* $a,b,c \in A$ *için* $H_1(a,b) \in R$ *ve* $H_1(b,c) \in R$ *için* $H_1(a,c) \in R$ *ise R geçişkendir.*

Tanım 2.14 *[12]* (F,A) *üzerinde R ikili esnek bağıntısı ters simetriktir* $\Leftrightarrow$ $\forall F(a), F(b) \in (F,A)$ *için* $F(a) \times F(b) \in R$ *ve* $F(b) \times F(a) \in R$ *için* $F(a) = F(b)$ *dır.*

Tanım 2.15 *[12]* (F,A) *üzerindeki esnek küme bağıntısı olan* $\leq$ *yansıyan, ters simetrik ve geçişken ise* (F,A) *da kısmi sıralanmıştır.* $(F,A,\leq)$ *üçlüsüne kısmi sıralı esnek küme denir.*

Tanım 2.16 *[12]* (F,A) *üzerinde* $\leq$ *bir sıralama olmak üzere* $F(a)$ *ve* $F(b)$ (F,A) *nın iki elemanı olsun. Eğer* $F(a) \leq F(b)$ *ya da* $F(b) \leq F(a)$ *ise* $F(a)$ *ve* $F(b)$ *sıralamada karşılaştırılabilirdir denir. Eğer karşılaştırılamıyorsa* $F(a)$ *ve* $F(b)$ *kıyaslanamaz iki elemandır denir.*

Tanım 2.17 *[12] (F,A) esnek kümesi üzerinde $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer (F,A) nın her iki elemanı $\leq$ sıralamasıyla karşılaştırılabilir ise $\leq$ (F,A) üzerinde tam ya da doğrusal sıralamadır denir.*

2.2. Esnek Kümelerde Sıralama İle İlgili Sonuçlar

Tanım 2.18 *[12] $B \subset A$ ve (F,A) nın R sıralamasıyla $(G,B)\tilde{\subset}(F,A)$ olsun. (G,B) de her iki eleman karşılaştırılabilir ise (G,B), (F,A) içinde bir zincirdir.*

Tanım 2.19 *[12] $(G,B,\leq)$ kısmi sıralı esnek küme olsun.O zaman;*
a) $\forall x \in B$ için "$\leq$" sıralamasında $b \in B$ olmak üzere $G(b) \leq G(x)$ ise $G(b)$ (G,B) nin en küçük elemanıdır.
b) "$\leq$" sıralamasında $b \in B$ için $G(b) \leq G(x)$ ve $G(x) \neq G(b)$ olacak şekilde $x \in R$ yoksa $G(b)$ (G,B) nin minimal elemanıdır.
a') Herhangi bir $b \in B$ olmak üzere $\forall x \in B$ için $G(x) \leq G(b)$ oluyorsa "$\leq$" sıralamasına göre $G(b)$ (G,B) nin en büyük elemanıdır.
b') Herhangi bir $b \in B$ olmak üzere $G(x) \leq G(b)$ ve $G(x) \neq G(b)$ olacak şekilde "$\leq$" sıralamasına göre $x \in R$ yoksa $G(b)$ (G,B) nin maksimal elemanıdır.

Örnek 2.20 *[12] $U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ evren kümesi, $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ parametre kümesi $A = \{e_1,e_2,e_3,e_5,e_6\}$ ve $B = \{e_1,e_3,e_5\}$ olsun.*
$F(e_1) = \{h_1,h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1,h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3,h_4,h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$, $F(e_6) = \{h_1,h_5\}$ ve $G(e_1) = \{h_1,h_4\}$, $G(e_3) = \{h_3,h_4,h_5\}$, $G(e_5) = \{h_1\}$ olmak üzere (F,A) ve (G,B) esnek kümelerini alalım. Tanımdan $(G,B)\tilde{\subset}(F,A)$ dır. (F,A) üzerinde $\leq$ bağıntısını aşağıdaki şekilde tanımlansın:
$\leq = \{F(e_1) \times F(e_1), F(e_2) \times F(e_2), F(e_3) \times F(e_3), F(e_5) \times F(e_5), F(e_6) \times F(e_6), F(e_1) \times F(e_3), F(e_1) \times F(e_5), F(e_1) \times F(e_6), F(e_2) \times F(e_3), F(e_2) \times F(e_5), F(e_2) \times F(e_6), F(e_3) \times F(e_5), F(e_3) \times F(e_6), F(e_5) \times F(e_6)\}$
Buradan $F(e_1)$ ve $F(e_2)$ (F,A) nın minimal elemanları ve $F(e_6)$ (F,A) nın

maksimal ve en büyük elemanıdır. Benzer şekilde $G(e_1) \times G(e_1)$, $G(e_3) \times G(e_3)$, $G(e_5) \times G(e_5)$, $G(e_1) \times G(e_3)$, $G(e_3) \times G(e_5)$, $G(e_1) \times G(e_5) \in \leq$ *buradan* (G,B) *üzerinde ;*$G(e_1)$ *in minimal ve en küçük eleman olduğu, ayrıca* $G(e_5)$ *in maksimal ve en büyük elemanıdır.*

Ayrıca (G,B) *nin her iki elemanı karşılaştırılabilir olduğundan* (G,B) (F,A) *da bir zincirdir.*

Tanım 2.21 *[12]* $\leq$, (F,A) *üzerinde bir sıralama ve* $(G,B)\tilde{\subset}(F,A)$ *olmak üzere;*

- *Her* $x \in B$ *için* $F(a) \leq G(x)$ *olacak şekilde bir* $a \in A$ *varsa;* $F(a)$, $(F,A,\leq)$ *sıralı esnek kümesi içerisinde* (G,B) *nin bir alt sınırıdır denir.*

- *Herhangi bir* $a \in A$ *için* (G,B), $(F,A,\leq)$ *üzerinde* (G,B) *nin bütün alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanı ise;* $F(a)$, $(F,A,\leq)$ *sıralı esnek kümesi içerisinde* (G,B) *nin infimumu ya da en büyük alt sınırıdır denir.*

Benzer şekilde;

- *Her* $x \in B$ *için* $G(x) \leq F(a)$ *olacak şekilde bir* $a \in A$ *varsa;* $F(a)$, $(F,A,\leq)$ *sıralı esnek kümesi içerisinde* (G,B) *nin bir üst sınırıdır denir.*

- *Herhangi bir* $a \in A$ *için* (F,A), $(F,A,\leq)$ *üzerinde* (G,B) *nin bütün üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanı ise* $(F,A,\leq)$ *üzerinde* (G,B) *nin supremumu ya da en küçük üst sınırıdır denir.*

Örnek 2.22 *Örnek* 2.20 *de gösterilen* (F,A) *ve* (G,B) *esnek kümelerini ele alalım.* $F(e_5)$ *ve* $F(e_6)$ $(F,A,\leq)$ *sıralı esnek kümesindeki* (G,B) *nin üst sınırlarıdır.* $F(e_5)$, (G,B) *nin supremumudur.* $F(e_1)$, (G,B) *nin alt sınırıdır ve böylece* (G,B) *nin* $(F,A,\leq)$ *üzerinde infimumudur.*

Tanım 2.23 *[12] Yansıyan ve geçişmeli* $\leq$ *bağıntısının olduğu bir* (F,A) *esnek kümesi ele alalım. Bu bağıntı yarı sıralıdır ve* (F,A) *ya yarı sıralı esnek küme denir.*

Tanım 2.24 *[12] (F,A) bir esnek küme olsun. Eğer sonlu parametreli bir esnek küme ise, (F,A) ya sonlu esnek küme denir.*

Tanım 2.25 *[12] (F,A) bir yarı sıralı esnek küme olsun. (G,B) nin her sonlu esnek alt kümesi (G,B) için üst sınıra sahipse ve normal ise (F,A) nın esnek alt kümesi olan (G,B) yönlendirilmiş esnek küme denir.*

Örnek 2.26 *$U=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ ve $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ olmak üzere (F,A) esnek kümesi $F(a_1)=\{e_1,e_2\}$, $F(a_2)=\{e_2\}$, $F(a_3)=\{e_4,e_5,e_6\}$ olsun.*
$\leq=\{F(a_1)\times F(a_1), F(a_2)\times F(a_2), F(a_3)\times F(a_3), F(a_1)\times F(a_2), F(a_2)\times F(a_3), F(a_1)\times F(a_3)\}$ olmak üzere
(F,A), $\leq$ bağıntısıyla yönlendirilmiş esnek kümedir.

Tanım 2.27 *[3] (F,A), $\leq$ bağıntısıyla yarı sıralı bir esnek küme olsun.*
$(G,B)\tilde{\subset}(F,A)$ için

- *$C=\{a\in A : F(a)\leq G(b), \exists b\in B\}$ ve $H=F\mid_C$ olmak üzere $\downarrow(G,B)=(H,C)$ dir.*
- *$D=\{a\in A : G(b)\leq F(a), \exists b\in B\}$ ve $K=F\mid_D$ olmak üzere $\uparrow(G,B)=(K,D)$ dir.*
- *$(G,B)=\downarrow(G,B)$ ise (G,B) bir alt esnek kümedir.*
- *$(G,B)=\uparrow(G,B)$ ise (G,B) bir üst esnek kümedir.*
- *Eğer (G,B) bir yönlü alt esnek küme ise bir idealdir.*

Örnek 2.28 *Örnek 2.26 daki esnek küme bağıntısı $\leq$ ve (F,A) esnek kümesini ele alalım.*
$B=\{a_1,a_2\}$ ve (G,B) esnek kümesi $G(a_1)=\{e_1,e_2\}$, $G(a_2)=\{e_2\}$ olsun. O halde $(G,B)\tilde{\subset}(F,A)$ dır.
$C=\{a\in A : G(b)\leq F(a), \exists b\in B\}=\{a_1,a_2,a_3\}$ ve $H=F\mid_C$ olmak üzere $\uparrow(G,B)=(H,C)$

$D = \{a \in A : F(a) \leq G(b), \exists b \in B\} = \{a_1, a_2\}$ ve $K = F|_D$ olmak üzere $\downarrow (G,B) = (K,D)$

Buradan $D = B$ ve $\downarrow (G,B) = (G,B)$ dir ve (G,B) bir alt esnek kümedir.

Tanım 2.29 *[3] Her yönlendirilmiş esnek alt kümenin bir supremumu var ise böyle kısmi sıralı esnek kümeye yönlendirilmiş tam esnek küme denir.*

Örnek 2.30 *[3] $A = \mathbb{Z}^+$ alalım. $U = \mathbb{R}^*$ genişletilmiş reel sayılar ve $F : \mathbb{Z} \to \wp(\mathbb{R}^*)$ $a \in A$ için $F(a) = (1, a+1]$ olsun. (F,A) esnek kümesi için kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı esnek kümedir.*

Lemma 2.31 *[3] (F,A) bir yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme ve $(G_1,B_1)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. $\uparrow (G_1,B_1) = (G_1,B_1)$, $\uparrow (G_2,B_2) = (G_2,B_2)$ olmak üzere $(G_2,B_2)\tilde{\subseteq}(F,A)$ ve I indeks kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $(G_i,B_i)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman;*

(i) $\uparrow ((G_1,B_1)\tilde{\bigcap}(G_2,B_2)) = \uparrow (G_1,B_1)\tilde{\bigcap} \uparrow (G_2,B_2)$.

(ii) $\uparrow (\tilde{\bigcup}_{i\in I}(G_i,B_i)) = \tilde{\bigcup}_{i\in I} \uparrow (G_i,B_i)$

İspat. (i) Tanım 2.6 ve Tanım 2.27 den $B = B_1 \cap B_2$ olmak üzere $\uparrow ((G_1,B_1)\tilde{\bigcap}(G_2,B_2)) = \uparrow (G,B) = (K,D)$ olsun.

$K(d) \in (K,D)$ olsun. O zaman $G(b) = G_1(b_1) \cap G_2(b_2) = F(b)$ olmak üzere $G(b) \leq K(d)$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. Buradan $b \in B_1$, $b \in B_2$ ise $G_1(b) \leq K(d)$ ve $G_2(b) \leq K(d)$. Buradan $K(d) \in \uparrow (G_1,B_1) = (K_1,D_1)$ ve $K(d) \in \uparrow (G_2,B_2) = (K_2,D_2)$. Ayrıca $d \in D_1 \cap D_2$ ve $K_1(d) \cap K_2(d) = F(d) \cap F(d) = F(d) = K(d)$ olduğundan $K(d) \in \uparrow (G_1,B_1)\tilde{\bigcap} \uparrow (G_2,B_2)$ dir.

Diğer taraftan $K(d) \in \uparrow (G_1,B_1)\tilde{\bigcap} \uparrow (G_2,B_2)$ olsun. $\uparrow (G_1,B_1) = (G_1,B_1)$ ve $\uparrow (G_2,B_2) = (G_2,B_2)$ olduğundan $K(d) \in (G_1,B_1)\tilde{\bigcap}(G_2,B_2)$ elde edilir. Böylece $K(d) \in \uparrow (G_1,B_1)\tilde{\bigcap}(G_2,B_2)$ dir.

(ii) de (i) e benzer şekilde ispatlanır. □

2.3. Esnek Scott Topoloji

Tanım 2.32 *[3] (F,A) bir yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman (G,B) ye aşağıdaki şartları sağlıyorsa Scott açık esnek küme denir:*

(i) $(G,B) = \uparrow (G,B)$;

(ii) $(D,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olacak şekildeki yönlendirilmiş tam esnek kümeler için $\sup(D,C) \in (G,B)$ ise $(D,C)\tilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ dir.

Teorem 2.33 *[3] (F,A) nın bütün Scott açık esnek kümelerinin koleksiyonu esnek topolojidir.*

İspat. $\tilde{\tau}$, (F,A) nın Scott açık esnek kümelerinin bir kümesi olsun.

(i) Tanım 2.32 deki iki koşul da sağladığından $\Phi, (F,A) \in \tilde{\tau}$ olur.

(ii) $(G_1,B_1),(G_2,B_2) \in \tilde{\tau}$ ve $(G,B) = (G_1,B_1)\tilde{\cap}(G_2,B_2)$ olsun.

Buradan, $\uparrow (G_1,B_1) = (G_1,B_1)$ ve $\uparrow (G_2,B_2) = (G_2,B_2)$.

O zaman $\uparrow (G,B) = (G,B)$. (D,C) yönlendirilmiş esnek kümesi için $\sup(D,C) \in (G_1,B_1)$ olsun, o zaman $\sup(D,C) \in (G_1,B_1)$ ve $\sup(D,C) \in (G_2,B_2)$. O zaman $D(e_1),D(e_2)$ (D,C) nin elemanları olmak üzere $D(e_1) \in (G_1,B_1)$, $D(e_2) \in (G_2,B_2)$ vardır. (D,C) yönlendirilmiş esnek küme olduğunda $sup\{D(e_1),D(e_2)\} = D(e)$ (D,C) dedir. Tanım 2.32 deki (ii) şartından dolayı $D(e)$, (G_1,B_1) ve (G_2,B_2) nin elemanıdır. Böylece $(D,C)\tilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$.

(iii) λ indeks kümesi olsun ve $i \in \lambda$ için $(F_i,A_i) \in \tilde{\tau}$ olsun. O zaman her $e \in A_j \setminus \tilde{\bigcup}_{i\neq j} A_i$ için $F_j(e) = F(e)$, her $e \in \tilde{\bigcap}_{i\in\lambda} A_i$ için $F_i(e) = F(e)$ ve her $i \in \lambda$ için $(F_i,A_i) \in \tilde{\tau}$ olduğunda

$$\tilde{\bigcup_{i\in\lambda}}(F_i,A_i) = \uparrow (\tilde{\bigcup_{i\in\lambda}}(F_i,A_i)),$$

olur. Varsayalım (D,C) yönlendirilmiş esnek kümesi için $\sup(D,C) \in \tilde{\bigcup}(F_i,A_i)$ olsun. O zaman en az bir $i \in \lambda$ için, $\sup(D,C) \in (F_i,A_i)$. Her $i \in \lambda$ için (F_i,A_i) Tanım 2.32 deki $(\imath\imath)$ şartını sağladığında $(D,C)\tilde{\cap}(F_i,A_i) \in \tilde{\tau}$. Böylece $\tilde{\tau}$ esnek topolojidir. □

Tanım 2.34 *[3] (F,A) nın bütün Scott açık esnek kümelerinin koleksiyonuna (F,A) üzerinde Esnek Scott Topoloji denir.*

Tanım 2.35 *[3] $(F,A,\tilde{\tau})$ esnek Scott topoloji ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. Buradan eğer $(G,B)^c$ Scott açık esnek küme ise (G,B) ye Scott kapalı esnek küme denir. Aşağıdaki şartları sağlayan (S) özelliği olan (G,B) ye yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olan (F,A) nın esnek alt kümesi denir.*
(S) Eğer herhangi bir esnek (D,C) kümesi için $\sup(D,C) \in (G,B)$ ise, $G(b) \geq D(c)$ olmak üzere her $G(b) \in (D,C)$ için $G(b) \in (G,B)$ olacak şekilde $D(c) \in (D,C)$ vardır.

Örnek 2.36 *$U = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ başlangıç evreni ve $A = \{a_1,a_2,a_3\}$ olsun. $F(a_1) = \{e_1,e_2\}$, $F(a_2) = \{e_2\}$, $F(a_3) = \{e_4,e_5,e_6\}$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesini ele alalım.*
$\leq = \{F(a_1) \times F(a_1), F(a_2) \times F(a_2), F(a_3) \times F(a_3), F(a_1) \times F(a_2), F(a_2) \times F(a_3), F(a_1) \times F(a_3)\}$ olacak şekilde (F,A) üzerinde bir esnek küme bağıntısı tanımlansın.
Bu bağıntıyı $F(a_1) \leq F(a_1), F(a_2) \leq F(a_2), F(a_3) \leq F(a_3), F(a_1) \leq F(a_2), F(a_2) \leq F(a_3), F(a_1) \leq F(a_3)$ olarak da ifade edebiliriz. (F,A), $\leq$ bağıntısı ile yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümedir. (F,A) nın bütün esnek alt kümelerini incelendiğinde, $B_1 = \{a_3\}$ ve $F_1 = F\,|_{B_1}$, $\uparrow (F_1,B_1) = (F_1,B_1)$ şeklinde (F_1,B_1) esnek kümesi vardır. $i = 3$ dışında $F(a_3) \leq F(a_i)$ olacak şekilde bir F_{a_i} bulunamaz. Benzer şekilde $B_2 = \{a_2,a_3\}$, $F_2 = F\,|_{B_2}$ ve $\uparrow (F,A) = (F,A)$, $\uparrow \Phi = \Phi$ olduğundan $\uparrow (F_2,B_2) = (F_2,B_2)$ olur. Sonuç olarak, Scott açık esnek kümeler $\{(F_1,B_1),(F_2,B_2),(F,A),\Phi\}$ olarak elde edilir.

Not 2.37 *Herhangi bir yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümede, bir küme eğer bir üst esnek küme ise Scott açık esnek küme demektir.*

Örnek 2.38 $U=(-\infty,0]$ *başlangıç evreni ve* $A=\mathbb{Z}^-$ *parametre kümesi,* $(F,A)=\{F(\alpha)=(\alpha,0] \mid \alpha\in A\}$ *şeklinde tanımlanan* (F,A) *bir esnek küme olsun.* $F(\alpha)\leq F(b)\Leftrightarrow a\leq b$ *ile tanımlı* $(F,A)\leq$ *bağıntısıyla yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olmak üzere* (F,A) *üzerinde* $\leq$ *esnek küme bağıntısını ele alalım.* (F,A) *nın bütün esnek alt kümelerini inceleyelim.* (F,A) *nın* $\uparrow(G,B)=(G,B)$ *yi sağlayan tüm alt kümeleri* $B_x=\{b\in\mathbb{Z}^- \mid x\leq b\}$ *ve* $G=F\mid_{B_x}$ *olmak üzere* $(F,A),\Phi$ *ve* (G,B_x) *dir.*

$\sup(D,C)\in(G,B)$ *ve* $\sup(D,C)=G(b)$ *olacak şekilde* (D,C) *bir yönlendirilmiş kısmi sıralı esnek küme olsun.* $G(b)\in(G,B)$ *ise* $b\in B$ *dir. O zaman her* $c\in C$ *için,* $D(c)\leq G(b)$ *dir. Buradan* $\forall c\in C$ *için* $c\leq b$ *ve öyleyse* $b\in C$ *olur. O halde* $(D,C)\cap(G,B)$ *de en azından* $G(b)$ *vardır. Buradan* $(D,C)\tilde{\cap}(G,B)\neq\Phi$ *elde edilir. Sonuç olarak, bu* (G,B) *esnek alt kümeleri* (F,A) *yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümesi için Scott açık esnek kümelerdir.*

Örnek 2.39 $U=[-\infty,0]$ *başlangıç evreni ve* $A=\mathbb{Z}^-$ *parametre kümesi olsun.* $(F,A)=\{F(a)\mid a\in A\}=\{F(a)=(a,0]\mid a\in A\}$ *şeklinde bir* (F,A) *esnek kümesi tanımlansın.* $F(a)\leq F(b):\Leftrightarrow F(a)\supseteq F(b)$ *şeklinde* (F,A) *üzerinde tanımlanan* $\leq$ *esnek küme bağıntısını ele alalım.*

(1) $(a,0]\subseteq(a,0]$ *ise* $F(a)\leq F(a)$ *olur.*

(2) $F(a)\leq F(b)$ *ve* $F(b)\leq F(a)$ *ise* $(b,0]\subseteq(a,0]$ *ve* $(a,0]\subseteq(b,0]$ *olur. Buradan* $(a,0]=(b,0]$ *elde edilir. O zaman* $a=b$ *dir. Buradan* $F(a)=F(b)$ *olur.*

(3) $F(a)\leq F(b)$ *ve* $F(b)\leq F(c)$ *olsun. O zaman* $(b,0]\subseteq(a,0]$ *ve* $(c,0]\subseteq(b,0]$ *olur. Buradan* $(c,0]\subseteq(a,0]$ *elde edilir ve* $F(a)\leq F(c)$ *olur.*

Dolayısıyla (F,A), $\leq$ *esnek küme bağıntısı ile kısmi sıralı bir esnek kümedir.*

(D,C) *yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olsun.* $\mathbb{Z}^-$ *yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme olduğundan* $\sup(D,C)$ *vardır ve* $\sup(D,C)\in(F,A)$ *dır. Böylece* (F,A) *yönlendirilmiş tam kısmi sıralı bir esnek kümedir.* $F(x)\in(F,A)$ *olmak üzere* (F,A) *nın esnek alt kümelerini ele aldığımızda* $B=\{b\in\mathbb{Z}\mid x\leq b\}$ *ve* $G=F\mid_B$

olacak şekilde,

$(G,B) = \{G(b) \mid F(x) \leq G(x)\} = \{G(b) \mid (b,0] \subseteq (x,0]\}$ *dir. O zaman* $\uparrow (G,B) = (G,B)$ *olur. Ayrıca* $\sup(D,C) \in (G,B)$ *olan her yönlendirilmiş esnek küme için* $(D,C)\tilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ *olduğu gösterilebilir.* $\sup(D,C) = G(b)$ *olsun. O zaman* $G(b) \in (G,B)$ *olduğundan* $b \in B$ *dir. Buradan* $\forall c \in C$ *için* $D(c) \leq G(b)$ *olur. O zaman* $\forall c \in C$ *için,* $c \leq b$ *dir ve buradan* $b \in C$ *elde edilir. Böylece* $(D,C)\tilde{\cap}(G,B)$ *en azından* $G(b)$ *yi içerir. Böylece* $(D,C)\tilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ *olur. Böylece* (F,A) *nın bu* (G,B) *esnek alt kümeleri Scott açık esnek kümelerdir.*

Bu çalışmada, kısmi sıralı esnek kümeleri ilerletildi ve sıralı esnek kümeler için bazı tanımlar üzerinde duruldu. Ayrıca, esnek Scott topoloji tanımı verilerek esnek Scott topoloji üzerinde bazı örnekler çalışıldı. Bu tanım ve örnekler bu konuda yapılacak olan çalışmalara ışık tutacaktır.

3. SCOTT TOPOLOJİK UZAYLAR

Sürekli latisler üzerinde yapılan çalışmalarda iki tane önemli topoloji vardır. Bunlardan biri Scott Topolojidir. Scott Topoloji D. S. Scott tarafından 1972 yılında Continuous Lattice makalesinde tanımlanmıştır. [7]

3.1. Scott Kümeler

Tanım 3.1 *P posetinin bir A alt kümesi eğer boştan farklı ve A'nın elemanlarından oluşan her ikilinin A'da üst sınırı varsa yönlüdür. Eğer P'nin her yönlü alt kümesinin supremumu varsa (en küçük üst sınır) bu P posetine DCPO adı verilir.*

Tanım 3.2 *P bir poset olsun. P'nin* $A \subseteq P$ *alt kümesi*

1. Eğer $A = \downarrow A = \{x \in P : x \leq y, \exists y \in A\}$ *ise aşağı bir küme olarak adlandırılır.*

2. Eğer $A = \uparrow A = \{x \in P : x \geq y, \exists y \in A\}$ *ise yukarı bir küme olarak adlandırılır.*

Tanım 3.3 *Bir P posetinin bir A alt kümesi boştan farklı ve A nın ikililerin herbirinin A da bir üst sınırı varsa A ya yönlendirilmiş küme denir. P posetinin her yönlendirilmiş alt kümesinin bir supremumu varsa P posetine bir DCPO denir.*

Tanım 3.4 *Herhangi bir A kümesinin alt sınırlarının kümesi* $A^{\downarrow} = \{d \in P : d \leq a, \forall a \in A \text{ için}\}$ *olarak tanımlansın.* $U \subseteq P$ *alt kümesi eğer* (i) *U bir üst küme ve* (ii) *her* $D \subseteq P$ *yönlü kümesi için P içinde bir supremumu varsa,* $\vee D \in U$ $D \cap U \neq \emptyset$ *anlamına geliyorsa U Scott açık küme olarak adlandırılır. P'nin tüm Scott açık kümeleri P'de bir topoloji oluşturur, Scott topoloji olarak adlandırılır ve* $\sigma(P)$ *olarak gösterilir.*

Eğer $P \setminus A$ *Scott açık ise* $A \subseteq P$ *alt kümesi Scott kapalıdır. Böylelikle eğer* (i) *A alt bir küme ve* (ii) $\vee D$ *varsa* $\vee D \in A$ *sağlanıyorsa A Scott kapalıdır.*

Tanım 3.5 *$f : P \to Q$ posetleri arasındaki eşleme eğer P ve Q da Scott topolojilere uygun olarak sürekli ise Scott süreklidir.*

Lemma 3.6 *$f : P \to Q$ eşlemesi eğer yönlü kümelerin mevcut ekusünü koruyorsa yani herhangi bir $D \subseteq P$ yönlü kümesi için $\vee D$ var olduğunda $f(\vee D) = \vee f(D)$ durumu sağlandığında Scott süreklidir.*
P posetinin herhangi bir a elemanı, eğer $a \leq d$ olacak şekilde $d \in D$ varsa, $b \leq \vee D$ ve her D yönlü kümesi için supremumu varsa, b için alt sınırdır, $a \ll b$ ile gösterilir.

Tanım 3.7 *Her $y \in P$ için, $\{x \in P : x \ll y\}$ bir yönlü küme ve $\vee\{x \in P : x \ll y\} = y$ ise P poseti süreklidir.*

Tanım 3.8 *Eğer bir kafes $f(j) \in K(j)$ değerleri ile J üzerinde tanımlanan ayırma fonksiyonlarının kümesi olan M'de $\wedge_{j\in J} \vee_{k\in K(j)} x_{j,k} = \vee_{f\in M} \wedge_{j\in J} x_{j,f(j)}$ özdeşliğine sahip L'de herhangi bir $\{x_{j,k} : j \in J, k \in K(j)\}$ ailesi için tam ise tam dağılımlıdır denir.*

Lemma 3.9 *$\sigma(P)$ bir tam dağılmalı kafes $\Leftrightarrow$ P poseti süreklidir.*

Tanım 3.10 *[9] P bir poset ve $B \subseteq P$ olsun. Poset P üzerinde ilgili işlemi alma anlamına gelen alt indis P olduğunda eğer $\forall a \in P; \forall d \in D_a, d \ll_P a$ ve $\sup_P D_a = a$ olacak şekilde $D_a \subseteq B$ yönlendirilmiş kümesi varsa B P nin bir bazı olarak adlandırılır.*
Bir P DCPO süreklidir $\Leftrightarrow$ bir baza sahiptir.

Tanım 3.11 *X kümesinin bir $\mathscr{A}$ filtresi (i) $A \cap B \in \mathscr{A}$ ise $A, B \in \mathscr{A}$ ve (ii) $A \in \mathscr{A}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathscr{A}$ sağlandığında X'in alt kümelerinin koleksiyonudur. X kümesinin bir filtre bazı $\mathscr{B}$ olmak üzere:*
(i) $B \in \mathscr{B}$ ise $B \neq \emptyset$

(ii) Eğer $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ ve $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathscr{B}$ şartını sağlıyorsa $\mathscr{P}(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesidir.

$\mathscr{B}$ X'in bir filtre bazı olsun. O zaman $\mathscr{B}$'yi içeren en küçük filtre $\mathscr{B}$ tarafından üretilen filtre olarak adlandırılır ve $[\mathscr{B}]$ ile gösterilir. Açık olarak, $[\mathscr{B}] = \{A \subseteq X : A \supseteq B, \exists B \in \mathscr{B}\}$. $\{\{x\}\}$ bazı tarafından üretilmiş olan temel filtre olarak adlandırılan filtre $[x]$ ile simgelenir.

Tanım 3.12 *Bir (filtre) yakınsak uzay aşağıdaki iki aksiyoma sahipse ΦX (X üzerinde tüm filtrelerin koleksiyonu) ile X arasında '$\downarrow$' bağıntısı ile birlikte X bir kümedir:*

(i) Her $x \in X$ için $[x] \downarrow x$ (nokta filtre aksiyomu)

(ii) $\mathscr{A} \downarrow x$ ve $\mathscr{B} \supseteq \mathscr{A}$ ise $\mathscr{B} \downarrow x$ (alt filtre aksiyomu)

Her (X, τ) topolojik uzayı için $\mathscr{N}(x)$ x'in tüm komşuluklarının koleksiyonunu simgelemek üzere, eğer $\mathscr{N}(x) \subseteq \mathscr{A}$ ise $\mathscr{A} \downarrow x$ şeklinde tanımlanan bir $(X, \downarrow_\tau)$ eş yakınsak uzay vardır. Eğer X üzerinde herhangi bir τ topolojisi için $\downarrow = \downarrow_\tau$ ise $(X, \downarrow)$ yakınsak uzayı topolojiktir.

Diğer bir taraftan verilen bir (X, τ) yakınsak uzayı, X üzerinde bir $\tau_\downarrow$ topolojisi tanımlarsak, herhangi bir $O \subseteq X$ için, eğer herhangi bir $\mathscr{A}$ filtresi için $\mathscr{A} \downarrow x$ ve $x \in O$ durumunda $O \in \mathscr{A}$ ise $O \in \tau_\downarrow$. $(X, \tau_\downarrow)$ topolojik uzayı, $(X, \downarrow)$ yakınsak uzayı tarafından oluşan bir topolojik uzaydır.

Tanım 3.13 *Bir P poseti için (i) $x \leq \vee D$ ve (ii) her $d \in D$ için $d \in A^\downarrow$ olacak şekilde $A \in \mathscr{A}$ vardır durumlarını sağlayan bir yönlü $D \subseteq P$ kümesi varsa, $\mathscr{A} \downarrow_d x$ şeklinde filtreler ve noktalar arasında tanımlanan bir $\downarrow_d$ bağıntısı tanımlansın. Kolaylık olması için, $(P, \downarrow_d)$ yazmak yerine P_d kullanalım.*

Açıkça görünüyor ki, yukarıdaki tanımda geçen (ii) şartı $D \subseteq \cup_{A \in \mathscr{A}} A^\downarrow$ ya denktir. $(P, \downarrow_d)$'nin bir yakınsak uzay olduğunu kanıtlamak oldukça basittir.

Lemma 3.14 *Herhangi bir P poseti, aşağıdakileri sağlar:*

(i) *Eğer $D \subseteq P$ bir yönlü küme ise, $\{\uparrow d : d \in D\}$ P'de bir filtre bazdır.*

(ii) *$\vee D$ var olan herhangi bir $D \subseteq P$ yönlü kümesi için $x = \vee D$ olmak üzere $[\{\uparrow d : d \in D\}] \downarrow_d x$ elde edilir.*

Lemma 3.15 *Her P poseti, P üzerinde $(P, \downarrow_d)$ Scott topolojisini üretir.*

İspat. $U \subseteq P$ kümesi üretilen topolojide açık olsun. U'nun Scott açık olduğu gösterilmelidir. $x \in U$ ve $y \in \uparrow x$ olacak şekilde $x \leq y$ olsun. $x \in D$, $x \in (\uparrow x)^{\downarrow}$ için $\vee D = x$ olacak şekilde bir $D = \{x\}$ yönlü kümesi olduğundan $[\uparrow x] \downarrow_d x$ yazılır. Buradan $\uparrow x \subseteq U$ ve $y \in U$ içeren $U \in [\uparrow x]$. Böylece U bir üst kümedir. Varsayalım ki $\vee D$ var ve $\vee D \in U$ olmak üzere $D \subseteq P$ bir yönlü küme olsun. Lemma $3(ii)$ gereğince , $[\{\uparrow d : d \in D\}] \downarrow_d \vee D$ ve buradan da $D \cap U \neq \emptyset$ sağlayan ek olarak herhangi bir $d \in D$ için $\uparrow d \subseteq U$ olduğunda $U \in [\{\uparrow d : d \in D\}]$. Dolayısıyla U Scott açıktır.

Diğer bir taraftan, U P'de Scott açık ve herhangi bir $x \in U$ için $\mathscr{A} \downarrow_d x$ olsun. O zaman $D \subseteq \cup_{A \in \mathscr{A}} A^{\downarrow}$ ve $x \leq \vee D$ olacak şekilde $D \subseteq P$ bir yönlü kümesi vardır. U Scott açık ve $x \in U$ olduğundan, $\vee D \in U$. Böylece $d \in D \cap U$ vardır. Herhangi bir $A \in \mathscr{A}$ için $d \in A^{\downarrow}$ olsun. O zaman her $a \in A$ için $d \leq a$. $d \in U$ ve U bir üst küme olduğundan $A \subseteq U$ bunun sonucu olarak da $U \in \mathscr{A}$.Dolayısıyla U üretilen topolojide açıktır. $\square$

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X'de $\leq$ özelleştirme yarısıralaması $cl(\{y\})$ $\{y\}$'nin kapanışı olmak üzere, $x \leq y$ eğer $x \in cl(\{y\})$ şeklinde tanımlanan yarı-kısmi sıralama bağıntısıdır. Bir X yakınsak uzayının üretilen yarısıralaması onun üretilen topolojisinin özelleştirme yarı-sıralaması olarak tanımlanır.

Not 3.16 *Her P poseti için, $(P, \sigma(P))$'nin özelleştirme sıralaması, $P[3]$'de sıralama ile çakışır.*

Sonuç 3.17 *Her P poseti için, $(P, \downarrow_d)$ P'de sıralama üretir.*

Tanım 3.18 *$(X,\leq)$ bir poset, $L \subseteq X$ olsun. $\forall a,b \in X$ için*

$$\downarrow\{a\} \cap \downarrow\{b\} \subseteq \downarrow L \Rightarrow (a \in \downarrow L) \vee (b \in \downarrow L)$$

ise L'ye asal denir.

Eğer $(X,\leq)$ sonlu ise, herhangi bir $p \in X$ asal $\Leftrightarrow$ tek elemanlı p küme olarak asal olduğu rahatlıkla görülebilir. Bu yüzden asal eleman notunu sonlu olmasına gerek olmayan posetler şeklinde sunabiliriz. Böylece metnin devamında $(X,\leq)$ posetinin p elemanının asal olduğu anlamına gelir $\Leftrightarrow$ $\{p\}$ önceki tanıma göre asaldır. Bir sonraki lemma da gösterir ki; asal küme ve filtre kavramları iki yönlüdür.

Lemma 3.19 *$(X,\leq)$ bir poset olsun. O zaman $L \subseteq X$ asaldır $\Leftrightarrow$ $F = X \setminus \downarrow L$ bir filtredir.*

İspat. $L \subseteq X$ asal olsun. O zaman $F = X \setminus \downarrow L$ bir aşağı alt kümedir. $a,b \in F$ olsun. Bu durumda $a,b \notin \downarrow L$, $c \in \downarrow\{a\} \cap \downarrow\{b\}$ öyle ki $c \notin \downarrow L$ yani $c \in F$ dir. Tersine, F bir filtre olsun. Kabul edelim ki $a,b \in X$ için $\downarrow\{a\} \cap \downarrow\{b\} \subseteq \downarrow L$ olsun. O zaman $a,b \notin \downarrow L$, ise $a,b \in F$ dir. Yani, $c \leq a, c \leq b$ olacak şekilde $c \in F$ vardır. O zaman $c \in \downarrow\{a\} \cap \downarrow\{b\}$ dır fakat $c \notin L$ dir. Bu bir çelişkidir. $\square$

Tanım 3.20 *X bir küme, $\Phi \subseteq 2^x$ olsun. Eğer Kya yaklaşan her eleman olmak üzere $\varphi \subseteq \Phi$ her filtre baz için $K \cap (\cap\varphi) \neq \emptyset$ ise $K \subseteq X$ üst filtreli kompakt denir. Eğer $\{\uparrow\{x\} \mid x \in X\}$ asıl üst kümelerin ailesine uyan yüksek filtreli kompakt ise $K \subseteq X$ $(X,\leq)$ bir DCPO'da yüksek filtreli kompakttır.*

Eğer $(X,\leq)$ DCPO sonlu birleşme noktası, üst aralık topolojisine uyan kompakt küme aynı anlamda üst filtreli kompakttır.

Aşağıdaki Lemma ile Scott topoloji ve üst aralık topolojisi arasında "de Groot-like" ilişkisi verilmiştir.

Lemma 3.21 *$(X,\leq)$ bir DCPO olsun. O halde $K \subseteq X$ Scott kapalıdır $\Leftrightarrow$ K üst aralık topolojisinde ve üst filtreli kompakt kümede saturated dır.*

İspat. $K \subseteq X$ Scott kapalı olsun. O zaman $F = X \backslash K$ bir üst küme ve böylece $F = \bigcup_{a\in F} \uparrow\{a\}$ dır. Yani, $K = X \setminus \bigcup_{a\in F} \uparrow\{a\} = \bigcap_{a\in F}(X\setminus \uparrow\{a\})$ dır. K üst aralık topolojisinde açık kümelerin bir arakesiti olduğundan saturated dır. $\varphi = \{\uparrow\{a\} \mid a \in A\}$, $\forall a \in A$ için $K \cap \uparrow\{a\} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir filtre baz olsun. φ filtre baz olduğundan eğer $a, b \in A$ için $\uparrow\{c\} \subseteq \uparrow\{a\} \cap \{b\}$ olacak şekilde $c \in A$ vardır, yani, $c \geq a, b$ dir. Buradan A yönlendirilmiştir. Ayrıca, eğer $a \in A$ ise $x \in K \cap \uparrow\{a\}$ olacak şekilde x elemanı vardır . Bu da $a \leq x$ demektir ve K aşağı alt küme olduğundan $a \in K$ elde edelir. Bu yüzden $A \subseteq K$ dır. K Scott kapalı olduğundan $u = \sup A \in K$ dır. Ama $u \in K \bigcap (\bigcap_{a\in A} \uparrow\{a\})$. Bu da Knın üst filtreli kompakt olduğu anlamına gelir.

Diğer taraftan $K \subseteq X$ üst filtreli kompakt ve üst aralık topolojisinde saturated olsun. $K = \bigcap_{a\in F}(X\setminus \uparrow\{a\})$ olacak şekilde $F \subseteq X$ vardır ve dolayısıyla K bir aşağı alt kümedir. $A \subseteq K$ yönlendirilmiş olsun. O zaman $\Phi = \{\uparrow\{a\} \mid a \in A\}$ bir kapalı filtre bazdır. K üst filtreli kompakt olduğundan, $t \in K \bigcap (\bigcap_{a\in A} \uparrow\{a\})$ vardır. O zaman $\forall a \in A$ için $t \geq a$, yani $t \geq \sup A$ dır. K bir aşağı alt küme olduğundan, $\sup A \in K$ dır. Buradan, K Scott kapalıdır. □

Önerme 3.22 *$(X, \leq)$ bir DCPO, ω X üzerinde bir aralık topolojisi, ω_P $P \subseteq X$ üzerinde alt uzay topolojisi olsun. O zaman aşağıda verilen (i) ve (ii) şartları denktir.*

(i) (1) Her $F \subseteq X$ Scott açık filtresi için, eğer $\psi(x) = P \setminus \uparrow\{x\}$ $L = \bigcap_{a\in F} \psi(a)$ olarak tanımlarsak, L kümesi üst filtreli kompakttır, (P, ω_P) de saturated dır ve $F = \{x \mid x \in X, L \subseteq \psi(x)\}$ dır.

(2) (P, ω_P) de her üst filtreli kompakt ve saturated olan $L \subseteq P$ için, $\downarrow L$ kümesi Scott açık ve süzgeç olacak şekilde $P \subseteq X$ vardır.

(ii) (1) Her $K \subseteq X$ Scott kapalı asal kümesi için, (P, ω_P) de $L = P \cap K$ üst filtreli kompakt kümedir, saturated dır ve $K = \downarrow L$ dır.

(2) (P,ω_P) *de her* $K \subseteq X$ *üst filtreli kompakt ve saturated olan* $L \subseteq P$ *için,* $\downarrow L$ *kümesi Scott kapalı ve asaldır, olacak şekilde* $P \subseteq X$ *vardır.*

İspat. $F \subseteq X$ bir Scott açık filtre $\Leftrightarrow K = X \setminus F$ bir Scott kapalı asal küme, olduğu açıktır. Ayrıca $\bigcap\limits_{a\in F} \psi(a) = \bigcap\limits_{a\in F} (P \setminus \uparrow \{x\}) = P \setminus \bigcup\limits_{a\in F} \uparrow \{a\} = P \setminus F = P \cap K$ ve $X \setminus \downarrow L = \{x \mid x \in X, x \notin \downarrow L\} = \{x \mid x \in X, L \cap \uparrow \{x\} = \emptyset\} = \{x \mid x \in X, L \subseteq \psi(x)\}$. Artık (ii) nin (i) in yeniden düzenlenmesi olduğu açıktır. □

Tanım 3.23 $(X,\leq)$ *bir DCPO olsun. Eğer* $(X,\leq)$ *Önerme* 3.22 *teki* (i) *veya* (ii) *deki şartlardan birini sağlıyorsa,* $(X,\leq)$ *Hoffmann-Mislove'dur denir.* (i) *veya* (ii) *deki* $P \subseteq X$ *kümesine* $(X,\leq)$ *nın genelleştirilmiş spektrumu;* ω_P *topolojisine* P *üzerinde genelleştirilmiş hull kernel topolojisi adı verilir.*
Bir sonraki önerme bir Hoffmann-Mislove DCPO da genelleştirilmiş spektrumun tek türlü belirleneceğini gösterir.

Önerme 3.24 $(X,\leq)$ *bir Hoffmann-Mislove DCPO,* $S \subseteq X$ *onun herhangi bir genelleştirilmiş spektrumu olsun. O zaman* $S = \{p \mid p \in X, pasal\} = \{m \mid m,\ X$ *in bir Scott kapalı asal alt kümesinin bir maksimal elemanıdır*$\}$.

İspat. $M = \{m \mid m$ bir Scott kapalı asal kümenin bir maksimal elemanıdır$\}$ ve $P = \{p \mid p \in X, p$ asal$\}$ olsun. $p \in P$ bir asal eleman olsun. Bu durumda $\downarrow \{p\}$ bir Scott kapalı asal küme ve p onun maksimal elemanıdır. O halde $P \subseteq M$ dir. $m \in M$ ve $K \subseteq X$, $m \in K$ onun maksimal elemanı olmak üzere bir Scott kapalı asal küme olsun. O zaman $K = \downarrow (K \cap S)$, böylece $m \in \downarrow (K \cap S)$ dır. O zaman $m \leq t$ olan $t \in K \cap S$ vardır. Ama m K içerisinde maksimal, böylece $m = t \in S$ dır. Bu yüzden, $M \subseteq S$ dir. $s \in S$ olsun. O zaman $\{s\}$ açıkça yüksek filtreli kompakt olmakla birlikte $\downarrow \{s\}$ dir, $L = S \cap \downarrow \{s\}$ kümesi (S,ω_S) de saturated dır ve $\downarrow L = \downarrow \{s\}$ dır. Bu yüzden L ğ,üst filtreli kompakttır. O zaman $\downarrow L$ Scott kapalı ve asaldır, bu da özellikle s nin asal olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $S \subseteq P$. Buradan ispatı tamamlayan $P \subseteq M \subseteq S \subseteq P$ ifadesini elde ederiz. □

Not 3.25 *Eğer $(X,\leq)$ sonlu kesişenli bir DCPO ise, yani bu bir yönlendirilmiş tam $\wedge-$yarıkafes'tir. O zaman Önerme* 3.22 *teki* (i) *ve* (ii) *nin şartları sağlanmış olur. Şimdi, $L \subseteq P$ herhangi bir küme ve bazı $a,b \in X$ için $\downarrow\{a\} \cap \downarrow\{b\} \subseteq \downarrow L$ elde edilir. Bu nedenle $a \cap b \in \downarrow L$, böylece $a \cap b \leq p$ olacak şekilde bir $p \in L$ vardır. Fakat o zaman p asal olduğundan $a \leq p$ ya da $b \leq p$ dir. Bu durumda $a \in \downarrow L$ ya da $b \in \downarrow L$ olur. Bu yüzden L ve $\downarrow L$ asal kümelerdir. Ek olarak, eğer L üst-filtreli kompakt ise, o zaman $\downarrow L$ vardır ve Lemma* 3.21 *ten $\downarrow L$ Scott kapalıdır.*
Bu yüzden Önerme 3.22 *in* (i) *şartından Hoffmann-Mislove DCPO'ların Hoffmann-Mislove Teoremini sağladığını görebiliriz.*

Sonuç 3.26 $(X,\leq)$ *sonlu kesişenli bir DCPO olsun. O zaman* $(X,\leq)$ *bir Hoffmann-Mislove $\Leftrightarrow$ bir Scott kapalı asal kümenin her maksimal elemanı asaldır.*

Bir sonraki sonuç önceden bahsedilen Hoffmann-Mislove Teoreminin yeniden düzenlenmiş halidir. Not 3.26'daki kabullere ek olarak $(X,\leq)$ DCPO bir dağılmalı kafes olduğunu varsayacağız. Fakat bu $(X,\leq)$ bir çatıdır varsayımına denktir.

Sonuç 3.27 $(X,\leq)$ *bir çatı olsun. Bu durumda* $(X,\leq)$ *Hoffmann-Mislove'dur.*

İspat. $K \subseteq X$ bir Scott kapalı asal küme, $m \in K$ onun maksimal elemanı olsun. Kabul edelim ki herhangi bir $a,b \in X$ için $a \cap b \leq m$ olsun. O zaman $(a \vee m) \wedge (b \vee m) = (a \wedge b) \vee (a \wedge m) \vee (m \wedge b) \vee (m \vee m) = m$ elde edilir. Bu durumda $\downarrow\{a \vee m\} \cap \downarrow\{b \vee m\} \subseteq K$ dır, fakat K alt ve asaldır. Bu yüzden $a \vee m \in K$ ya da $b \vee m \in K$ olur. Fakat o zaman $a \vee m = m$ yada $b \vee m = m$ dir, yani m maksimal olduğundan $a \leq m$ ya da $b \leq m$ dir. Bu yüzden m bir asal elemandır. □

3.2. Scott Filtreler ve Özellikleri

Hofmann-Mislove DCPO'nun terimlerindeki Problem 527, onların genelleştirilmiş spektrumları, üst aralık topolojisi ve Scott açık topoloji arasındaki de-Groot-like ikilisine kısmi cevap verilecektir. Eğer aksi belirlenmemişse, kümelerin bütün saturated leri bu bölümde ayrıntılı olarak, üst-filtreli kompaktlık sayılmakla birlikte bir DCPO'da üst aralık topolojisine uyar.

Teorem 3.28 *[15] $(X,\leq)$ bir Hofmann-Mislove DCPO, $P \subseteq X$ onun genelleştirilmiş spektrumu olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir.*
(i) X üzerindeki Scott topolojinin Scott açık filtrelerden oluşan bir bazı vardır.
(ii) Her üst filtreli kompakt saturated $K \subseteq X$ kümesi için $K = \bigcup_{i\in I} K_i$ ve $K_i = \downarrow(P \cap K_i)$ olacak şekilde üst filtreli kompakt kümelerin $\{K_i\}_{i\in I}$ ailesi vardır.
(iii) X de her üst filtreli kompakt saturated küme, Xin genelleştirilmiş spektrumunun üst filtreli kompakt alt kümelerinin saturatedlarının bir arakesitidir.

İspat. $L \subseteq P$ yüksek-filtreli kompakt $\Leftrightarrow \downarrow L$ yüksek filtreli kompakt olduğundan (ii) ve (iii) şartlarının denkliği açıktır. Varsayalım ki (i) sağlansın. $K \subseteq X$ bir üst filtreli kompakt küme, üst aralık topolojisinde saturated olsun. Bu durumda, Lemma 3.21'ten $F = X \setminus K$ bir Scott açık kümedir. (i) den, $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ dır, her F_i bir Scott açık filtre olmak üzere $K_i = X \setminus F_i$ olarak tanımlayalım. O zaman $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ dir ve Lemma 3.19 den, her K_i bir Scott kapalı asal kümedir. $(X,\leq)$ Hofmann-Mislove olduğundan, tanım gereği $L_i = P \cap K_i$ genelleştirilmiş spektrumunun üst-filtreli kompakt alt kümesidir ve $K_i = \downarrow L_i$, bu da (iii) ü verir.
Kabul edelim ki (ii) sağlansın. $F \subseteq X$ bir Scott açık küme olsun. $K = X \setminus F$ alalım. Lemma 3.21'ten K üst filtreli kompakt ve üst aralık topolojisinde saturated olduğu elde edilir. (ii) den, $K = \bigcap_{i\in I} K_i$, her K_i üst-filtreli kompakt olmakla birlikte $L_i = P \cap K_i$ ve $K_i = \downarrow L_i$ dır. $(X,\leq)$ Hofmann-Mislove olduğundan, $K_i$nin tanımı gereği Scott kapalı ve asal olur, böylece Lemma 3.19den $F_i = X \setminus K_i$ bir Scott açıktır ve $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ buradan da (i) elde edilir. □

Sonuç 3.29 $(X,\leq)$ *bir çatı olsun. Bu durumda X üzerinde Scott topoloji, ω üst aralık topolojisinin Groot duali olan ω^d dir. Ayrıca, X üzerindeki Scott topolojisinin Scott açık filtrelerinin bazı vardır $\Leftrightarrow$ X in spektrumlarının kompakt alt kümelerinin saturasyonları ω^d için kapalı bir bazı teşkil eder.*

Şimdi, bu DCPO ları Scott açık filtreler tarafindan üretilen topolojileri T_0 olacak şekilde karakterize edelim.

Teorem 3.30 *[15] $(X,\leq)$ bir Hofmann-Mislove DCPO, $P \subseteq X$ onun genelleştirilmiş spektrumu olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir:*
(i) X üzerinde Scott açık filtreler tarafindan üretilmiş topoloji T_0'dır.
(ii) $\forall x,y \in X$ için x,y noktalarından biri L nin saturasyonunda olacak diğeri olmayacak şekilde $L \subseteq P$ üst-filtreli kompakt L vardır.
(iii) $\forall x,y \in X, x \neq y$ için $x \leq p, y \nleq p$ ya da $x \nleq p, y \leq p$ olacak şekilde $p \in X$ asal elemanı vardır.

İspat. $x,y \in X$ olsun. O zaman Lemma 3.19'den $x \in F$ $y \notin F$ olacak şekilde $F \subseteq X$ bir Scott açık filtresi vardır $\Leftrightarrow$ $x \notin K$, $y \in K$ olacak şekilde $K \subseteq X$ bir Scott kapalı asal kümesi vardır. Fakat bir Hofmann-Mislove DCPO'da, her Scott kapalı asal küme, genelleştirilmiş spektrumun üst-filtreli kompakt alt kümesinin bir saturasyonudur, ve tersine, genelleştirilmiş spektrumun bir üst-filtreli kompakt alt kümesinin saturasyonu Scott kapalı ve asaldır. Buradan (i) ve (ii) denktir.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ açıktır. O zaman şimdi $(ii) \Rightarrow (iii)$ gösterelim.
(ii) sağlansın. $x,y \in X$ ve $x \in \downarrow L$ ve $y \notin \downarrow L$ olacak şekilde $L \subseteq P$ üst-filtreli kompakt olsun. O zaman $\downarrow L$ bir Scott kapalı asal kümedir, öyleyse $\downarrow L$, $x \leq p$ olacak şekilde en az bir p maksimal elemanına sahiptir. Açıktır ki $y \nleq p$ dir aksi halde $y \in \downarrow L$ olurdu. Ancak *nerme*3.24 den p asaldır. Böylece (iii) sağlanır. $\square$

Sonuç 3.31 (X,τ) *bir topolojik uzay ve* $(\tau,\subseteq)$ *açık kümelerin bir çatısı olsun. O zaman τ üzerinde Scott açık filtreler tarafindan üretilen topoloji T_0'dır.*

İspat. $U,V \in \tau$ ve $U \neq V$ olsun. O zaman $U \nsubseteq V$ ya da $U \nsupseteq V$ dır. İlk durumu ele alalım (Diğer durum da benzerdir). O zaman $p \notin V$ olacak şekilde bir $p \in U$ vardır. Bu durumda $p \in X \setminus V$ ve $cl\{p\} \subseteq X \setminus V$ olur. Buradan $V \cap cl\{p\} = \emptyset$ elde edilir. Şimdi $P = X \setminus cl\{p\}$ alalım. O zaman $V \subseteq P$ ve $U \subsetneq P$ dir. $P \in \tau$ nun asal olduğunu gösterelim. $R \cap S \subseteq P$ olacak şekilde $R, S \in \tau$ olsun. O zaman $p \in R \cap S$ ve böylece $p \notin R$ ya da $p \notin S$ olur. R, S açık kümeler olduğundan, $R \cap cl\{p\} = \emptyset$ ya da $S \cap cl\{p\} = \emptyset$ elde edilir. Fakat o zaman $R \subseteq P$ ya da $S \subseteq P$ olur. Buradan P asaldır. Bir önceki teoremden ispat tamamlanmış olur. $\square$

3.3. Scott Topolojiye Göre Posetlerin Sürekliliği

Bu bölümde DCPO olmayan poset leri ele alındı ve posetler için gömülü baz kavramından bahsedilerek bazı tanım ve teoremlere yer verildi.

Önerme 3.32 *[13] Eğer P bir sürekli poset ise $\ll$ yaklaşma bağıntısının interpolasyon özelliği vardır:*

$$x \ll z \Rightarrow \exists y \in P \text{ öyle ki } x \ll y \ll z$$

İspat. $D = \{u \in P : \exists y \in P$ öyle ki $x \ll y \ll z\}$ tanımlansın. $\forall p \in P$ için $\downarrow p$ nin yölendirilmişlik ve yaklaşıklık özelliğinden D nin yönlendirilmişi ve en küçük üst sınırı olan z yi bulundurduğu çıkarımı kolaylıkla yapılabilir. Böylece $x \ll z$ den $x \leq u$ olacak şekilde $u \in D$ varlığı çıkarılabilir. D nin tanımından, istenen $x \leq u \ll y \ll z$ olacak şekilde $y \in P$ vardır. $\square$

Tanım 3.33 *[13] B ve P poset olsun. Eğer $j : B \to P$*

(1) *j var olan yönlü alt kümeleri korur.*

(2) *$j : B \to j(B)$ bir sıralı izomorfizmadır.*

(3) *$j(B)$ P için bir bazdır.*

gerçekliyorsa o zaman (B, j) P için bir gömülü baz olarak adlandırılır. Eğer $B \subseteq P$ ve (B, i) i içine dönüşümü P için gömülü bir baz ise o zaman B, P için bir gömülü bazdır denebilir.

Eğer $B \subseteq P$, B P için bir gömülü baz olması için gerek ve yeter koşul $D \subseteq B$ yönlendirilmiş kümesi için $\sup_B D$ ve $\sup_B D = \sup_P D$ vardır. Eğer (B, j) P için bir gömülü baz ise $j(B) \subseteq P$ P için bir gömülü baz olduğu görülür.

Önerme 3.34 *[13] Eğer B, T için bir gömülü baz ise,* $\forall x,y \in B$ *için* $x \ll_B y \Leftrightarrow x \ll_T y$ *dır.*

İspat. $x,y \in B$ ve $x \ll_B y$ olsun. $D_y \subseteq B$ Tanım 3.10 deki mevcut yönlü küme olsun. $\sup_T D \geq y$ olan yönlü $D \subseteq T$ için, $\sup_B D_y = \sup_T D_y = y \in B$ ve $x \ll_B y$ olduğundan, $x \leq b$ olacak şekilde bir $b \in D_y \subseteq B$ bulunsun. Böylece $b \in D_y$ ve $b \ll_T y, x \leq b \leq d$ olacak şekilde $d \in D$ vardır ve $x \ll_T y$ dir.
Diğer taraftan, $x,y \in B$ ve $x \ll_T y$ olsun. $D \subseteq B$ ve $\sup_B D \geq y$ olsun. Tanım 3.33 (1) den $\sup_T D = \sup_B D \geq y$. Bu durumda $x \ll_T y$ den $x \leq d$ olacak şekilde $d \in D$ vardır. Bu da istenildiği gibi $x \ll_B y$ olduğunu gösterir. □

Önerme 3.35 *[13] Eğer B bir poset P için bir baz ise, P süreklidir; eğer B P için bir gömülü baz ise (izomorfizme göre), o zaman B nin kendisi de süreklidir.*

İspat. Eğer P bir B bazına sahipse P nin sürekli olduğu açıktır. Eğer B, P için bir gömülü baz ise B nin sürekli olduğunu gösterelim. $a \in B \subseteq P$ olsun. O zaman $\downarrow_P a$ yönlüdür ve $\sup \downarrow_P a = a$ dır. Tanım 3.10'de $D_a \subseteq B$ yönlü küme olsun. Buradan D_a $\sup_B D_a = \sup_P D_a = a \in B$ sağlayan B de yönlüdür. Önerme 3.34'ten, her $d_a \in D_a$ için $d_a \ll_B a$ elde edelir. Böylece B kendisi için bir bazdır ve önermenin ilk kısmından B süreklidir. □

Örnek 3.36 *Rasyonel sayılar kümesinin* $\mathbb{Q}$*, reel sayılar kümesi* $\mathbb{R}$ *için bir gömülü baz olduğu rahatlıkla görülebilir. Böylece, Önerme 3.35'ten,* $\mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{Q}$ *sürekli posetlerdir. Açıkça, bir yönlü doğrulama her lineer sıralı kümenin bir sürekli poset olduğunu gösterir.*

Örnek 3.37 $\mathbb{N}$ *doğal sayılar ve* $\forall n \in N$ *için* $\mathbb{N}^T = \mathbb{N} \cup \{t, T\}$ $n < t < T$ *olacak şekilde lineer sıralıdır. O zaman* $\mathbb{N}^T$*,* $B = \mathbb{N} \cup \{T\}$ *bazı olan bir cebirsel kafestir. Açıktır ki;* $\mathbb{N}$*' nin yönlü katılımı B'de T elemanı,* $\mathbb{N}$*nin* $\mathbb{N}^T$ *ye katılımıyla* $t \neq T$ *elemanıdır. Böylece B* $\mathbb{N}^T$ *için bir gömülü baz değildir. Bununla birlikte B kendisi bir cebir kafestir.*

Örnek 3.38 *Her* $(x,y),(u,v) \in S$*,* $(x,y) \leq (u,v) \Leftrightarrow x \leq u$ *ve* $y \leq v$ *için* $\leq$ *kısmi sıralamasıyla* $S = \{(0,y) : y \in [0,1]\} \cup \{(x,0) : x \in [0,1]\} \cup \{(x,1) : x \in [0,1]\}$ *olsun. O zaman* $(S,\leq)$ *bir sürekli kafestir. Açıktır ki;* $S \setminus \{(1,0)\}$ *S için bir bazdır. Bu baz S nin kısıtlı sıralamasına göre sürekli değildir.*

Önerme 3.39 *[13] Eğer B P için bir gömülü baz ve P Q için bir gömülü baz ise B de Q için bir gömülü bazdır.*

İspat. İspatı açıktır. □

Önerme 3.40 *[13] Eğer* B_i $P_i (i = 1,2)$ *bir gömülü baz ise* $B_1 \times B_2$ *nokta tabanlı çarpım posetinde* $P_1 \times P_2$ *için bir (gömülü) bazdır.*

İspat. İspatı açıktır. □

3.3.1. Soyut Bazlar ve Round İdeal

Gömülü bazların soyut bazlar ve halka ideal tamlama ile yakın bağıntıya sahiptir. Önce [20] de soyut bazlar ve görünen bağlantılı sonuçların konseptlerini tekrar edelim.

Tanım 3.41 *[20]* $(P,\prec)$ *ikili bağıntıya sahip bir küme olsun.* $\prec$ *ikili bağıntısı eğer geçişli* $(x \prec y, y \prec z \Rightarrow x \prec z)$ *ve güçlü interpolasyon özelliği varsa, tamamıyla geçişli olarak adlandırılır:*

$$\forall |F| < \infty, F \prec z \Rightarrow \exists y \prec z \text{ öyle ki } F \prec y,$$

burada $F \prec y$*,* $\forall t \in F$*için*$t \prec y$ *anlamına gelmektedir. Eğer* $(B,\prec)$ *tamamıyla geçişli olan ikili bağıntıya sahip bir küme ise* $(B,\prec)$ *bir soyut baz olarak adlandırılır.*

Tanım 3.42 *[20]* $(B,\prec)$ *bir soyut baz olsun. B nin boştan farklı I alt kümesi*

(1) $\forall y \in I, x \prec y \Rightarrow x \in I$*;*

(2) $\forall x,y \in I, \exists z \in I$ *öyle ki* $x \prec z$ *ve* $y \prec z$

şartlarını sağlıyorsa I ya round ideal denir.

B nin bütün round ideallerinin kümesi, kümelerdeki kapsama bağıntısına göre B nin bir ideal tamlaması olarak tanımlanır ve $RI(B)$ *ile gösterilir.*

Eğer B bir P sürekli DCPO için bir baz ise yaklaşma bağıntısının B'ye kısıtlanmışı $(B, \ll)$ *bir soyut bazdır. [20] den P nin* $RI(B)$*'ye izomorf olduğu gösterilmiştir.*

Önerme 3.43 *[20]* $(B, \prec)$ *bir soyut baz olsun.* $\forall y \in B, j(y) = \Downarrow y := \{x : x \prec y\}$ *olacak şekilde* $j : B \to RI(B)$ *dönüşümü tanımlansın. O zaman* $j(B)$, $RI(B)$ *için bir bazdır ve böylece* $RI(B)$ *bir sürekli bölgedir.*

Bir sonraki önerme gömülü bazlar ile soyut bazların bağıntılarının genel bir örneğini verir.

Önerme 3.44 *Eğer P bir sürekli poset ise* (P, j), $RI(P)$ *için bir gömülü bazdır; buradaki j Önerme* 3.43 *teki* $(P, \ll)$ *nın soyut bazıdır.*

İspat. Bir önceki önermeden, $j(P)$, $RI(P)$ için bir bazdır. P nin sürekliliğinden j sürekli ve $j : P \to j(P) \subseteq RI(P)$ bir sıralı izomorfizmadır sonucu elde edilir. Böylece, Tanım 3.33 den istenilen sonuca ulaşılır. □

Teorem 3.45 *P bir sürekli poset ve* $x, y \in P$ *olsun. O halde P de* $x \ll_P y$ *olması için gerek ve yeter koşul her* $p \in P$ *için* $j(p) = \downarrow p \in RI(P)$ *ile tanımlı* $j : P \to RI(P)$ *dönüşümü için* $RI(P)$ *de* $j(x) \ll_{RI(P)} j(y)$ *dır.*

İspat. İspatı açıktır. □

Teorem 3.46 *P bir poset olsun. O zaman P süreklidir* $\Leftrightarrow$ $RI(P)$ *round ideal tamlaması için* (P, j) *bir gömülü bazdır.*

İspat. Eğer (P, j) $RI(P)$ round ideal tamlaması için bir gömülü baz ise o zaman $j(P)$, $RI(P)$ için bir gömülü bazdır. Önerme 3.35 ten, $P \cong j(P)$ ve $RI(P)$ ikisi de süreklidir. Tersine, eğer P sürekli ise o zaman Önerme 3.44 ten (P, j) nin $RI(P)$ için bir gömülü baz olduğu elde edilir □

Şimdi posetlerin sürekliliği için birinci karakterizasyon teoremini verelim.

Teorem 3.47 *Bir P poseti süreklidir $\Leftrightarrow$ bir DCPO için bir gömülü bazına sıralı izomorfiktir.*

İspat. Eğer P sürekli ise, Teorem 3.46 dan bir DCPO olan round ideal tamlama $RI(P)$ için $P \cong j(P)$ bir gömülü bazdır. Tersine, eğer P bir Q DCPO için bir gömülü bazına sıralı izomorfik ise, Önerme 2.5 ten P süreklidir. □

Teorem 3.48 *Eğer P bir Q DCPO için bir gömülü baz ise $RI(P) \cong Q$ dır.*

İspat. Önerme 3.35 ten, Q süreklidir. Böylece, [20] deki Önerme 2.2.25$(1)]$ den istenilen $RI(P) \cong Q$ elde edilir. □

Sonuç 3.49 *P, T için bir gömülü baz ve T bir DCPO Q için bir gömülü baz ise, o zaman $RI(P) \cong RI(T) \cong Q$ dır.*

İspat. Önerme 3.39 ve Teorem 3.48 ten sonuç açıktır. □

Örnek 3.50 *X bir sonsuz küme olsun. $Fint(X)$ ise küme kapsamasıyla sıralanmış X'in bütün sonlu alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman $Fint(X)$ bir cebirsel posettir. $Fin(X)$'in X'in kuvvet kümesi olan $P(X)$ için bir gömülü bazdır. Dolayısıyla, Teorem 3.48'den $RI(Fin(X))$ round ideal tamlaması izomorfizma ile sadece $P(X)$ dir.*

3.4. Posetlerde Yakınsak Uzaylar

3.4.1. $(P, \downarrow_d)$ ve $(P, \downarrow_c)$ arasındaki ilişki

[20] de, Heckmann her DCPO için bir $(P,\downarrow_c)$ yakınsak yapıyı şu şekilde tanımlamıştır: Her P DCPO ve $\mathscr{A}$ filtresi için, $'cl'$ Scott topolojide kapanış operatörü olmak üzere $x \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}) \Leftrightarrow A \downarrow_c x$. Bu tanım sadece DCPO lar yerine herhangi bir P posetine de uygulanabilir olduğu görülmüştür.

Lemma 3.51 *Herhangi bir P poseti için* $\downarrow_d \subseteq \downarrow_c$ *sağlanır.*

İspat. $\mathscr{A} \downarrow_d x$ olsun. Bu durumda $x \le \vee D$ olan $D \subseteq \cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}$ bir yönlendirilmiş vardır. O zaman $D \subseteq cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ dır ve buradan $\vee D \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ elde edilir. Her Scott kapalı kümenin bir aşağı küme olması sebebiyle $x \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ dır. Bu yüzden $\mathscr{A} \downarrow_c x$ dır. □

P'nin bir A aşağı alt kümesinin; $x \in cl(A)$, bir $D \subseteq A$ yönlendirilmiş kümesi için $x \le \vee D$ sağlıyorsa tek basamak kapanışına sahiptir denir. Bir P posetinin her aşağı alt kümesinin tek basamak kapanışı varsa P nin tek basamak kapanışı vardır denir. P posetinin bir B alt kümesi için $A \subseteq P$ olmak üzere $B = A^{\downarrow}$ oluyorsa o zaman B ye bir aşağı kesittir denir.

Lemma 3.52 *Bir P poseti için, aşağı kesitlerinin yönlendirilmiş koleksiyonlarının her birleşiminin tek basamak kapanışı olması için* $\Leftrightarrow$ $\downarrow_d = \downarrow_c$ *olmasıdır.*

İspat. Eğer $\downarrow_d = \downarrow_c$ ise herhangi $\mathscr{A}$ filtresi ve $x \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ için $\mathscr{A} \downarrow_c x$ dır ve böylece $\mathscr{A} \downarrow_d x$ olur. O zaman herhangi bir $D \subseteq \cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}$ yönlendirilmiş kümesi için $x \le \vee D$ dır. Buradan $\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}$ tek basamak kapanışı vardır. Eğer $\mathscr{F} = \{F_i : i \in I\}$ yönlendirilmiş alt kesitlerin bir koleksiyonu ise, o zaman $\mathscr{B} = \{F_i^{\uparrow} : i \in I\}$ bir filtre bazdır. Herhangi bir $F_i \in \mathscr{F}$ için F_i bir alt kesit olduğundan $F_i = F_i^{\uparrow\downarrow}$ dır. Böylece $\cup\mathscr{F} = \cup\{B^{\downarrow} : B \in \mathscr{B}\} = \cup\{A^{\downarrow} : A \in [\mathscr{B}]\}$ olur ve buradan $\cup\mathscr{F}$ tek basamak kapanışı vardır.

Diğer taraftan alt kesitlerin her yönlendirilmiş koleksiyonunun bileşimi tek basamak kapanışlı ise, bu durumda herhangi bir $\mathscr{A}$ filtresi için $\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}$ tek basamak kapanışlıdır. Eğer $\mathscr{A} \downarrow_c x$ ise o zaman $x \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ dır böylece

$\mathscr{A} \downarrow_d x$'i sağlayan herhangi $D \subseteq \cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}$ yönlendirilmiş kümesi için $x \leq \vee D$ dır. Bir önceki Lemma dan $\downarrow_d = \downarrow_c$ elde edilir. □

Eğer P nin tek basamak kapanışı varsa o zaman $\downarrow_d = \downarrow_c$ dır.

Lemma 3.53 *Her sürekli posetin tek basamak kapanışı vardır.*

İspat. Kabul edelim ki P bir sürekli poset ve $A \subseteq P$, $A = \downarrow A$ olsun. $A' = \{x \in P :$ bir yönlendirilmiş $E \subseteq A$ vardır, $\vee E \geq x\}$. A' Scott kapalı olduğunu gösterelim. A' bir aşağı alt kümedir, şimdi yönlendirilmiş kümelerin supremumunun altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\vee D$ var olmak üzere $D \subseteq A'$ yönlendirilmiş olsun. Her $d \in D$ için, P sürekli olduğundan $\vee \Downarrow d = d$ olan $\Downarrow d = \{x \in P : x \ll d\}$ bir yönlendirilmiş kümedir. $C = \cup\{\Downarrow d : d \in D\}$ olsun. O zaman $\vee C = \vee\{\vee(\Downarrow d) : d \in D\} = \vee D$ olan C, A'nın bir yönlendirilmiş alt kümesidir. Bu durumda her $d \in D$ ve $x \in \Downarrow d \subseteq C$ için, $d \leq \vee K$ yani herhangi bir $k \in K$ için $x \leq k$ olacak şekilde bir yönlendirilmiş $K \subseteq A$ kümesi vardır. Böylece her $x \in C$ için $x \in A$ dır. Dolayısıyla $C \subseteq A$ olduğundan $\vee D = \vee C \in A'$ elde edilir. □

Sonuç 3.54 *Herhangi sürekli P poseti için, $\downarrow_d = \downarrow_c$ dir.*

Bir sonraki Lemma her L tam kafesi için $\downarrow_c$ ve $\downarrow_d$'nin çakıştığını göstereceğiz. Burada L'nin tek basamak kapanışlı olması gerekli değildir.

Lemma 3.55 *L bir tam kafes ve $\mathscr{A}$ L'de bir filtre olsun. Herhangi $x \in L$ için aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\mathscr{A} \downarrow_d x$.

(2) $x \leq \vee_{A\in\mathscr{A}} \wedge A$.

(3) $\mathscr{A} \downarrow_c x$.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (3) : Lemma 3.51'ten açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (2) : $\mathscr{A} \downarrow_c x$ olsun. O zaman $x \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ dır. L bir tam kafes

olduğundan, herhangi bir $A \in \mathscr{A}$ alt kümesi için, $A^{\downarrow} = \downarrow \wedge A \subseteq \downarrow (\vee_{A\in\mathscr{A}} \wedge A)$ dır. Buradan $\downarrow (\vee_{A\in\mathscr{A}} \wedge A)$ bir Scott kapalı küme olduğundan $cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}) \subseteq \downarrow (\vee_{A\in\mathscr{A}} \wedge A)$ olur. Böylece $x \leq \vee_{A\in\mathscr{A}} \wedge A$ elde edilir.

$(2) \Rightarrow (1) : x \leq \vee_{A\in\mathscr{A}} \wedge A$ olsun. O zaman $D = \{\wedge A : A \in \mathscr{A}\}$ olmak üzere $x \leq \vee D$ dır. Açık olarak D bir yönlendirilmiş küme ve $D \subseteq \cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow}$, böylece $\mathscr{A} \downarrow_d x$ elde edilir. □ Şimdi $\downarrow_c \neq \downarrow_d$ olan bir DCPO için bir örnek verelim. Öncelikle, dikkat edelim ki herhangi bir $\mathscr{B}$ filtre bazı için, $\cup_{A\in[\mathscr{B}]} A^{\downarrow} = \cup_{B\in\mathscr{B}} B^{\downarrow}$ dir.

Örnek 3.56 *$P = \{x_n^i : i,n \in \mathbb{N}\} \cup \{x^i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{a\backslash : n \in \mathbb{N}\} \cup \{T\}$ olsun. P'deki sıralama şu şekilde tanımlanmış olsun:*

$\forall i \in \mathbb{N}.\ x_1^i \leq x_2^i \leq ... \leq x_k^i \leq ... \leq x^i \leq x^{i+1} \leq ... \leq T$ ve ve

$\forall i,k \in \mathbb{N}.\ x_k^i \leq a_k \leq a_{k+1} \leq ... \leq T$ olsun.

O zaman P bir DCPO ve

$(a) \vee\{x_k^i : k \in \mathbb{N}\} = x^i, \forall i \in \mathbb{N}$;

$(b) \vee\{a_k : k \in \mathbb{N}\} = \vee\{x^k : k \in \mathbb{N}\} = T$.

Bu durumda her bir k için $A_k = \{a_i : i \geq k\}$ olsun. O zaman $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ bir filtre bazdır. $\mathscr{A}$ $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ tarafından üretilen filtre olsun.

$A_1^{\downarrow} = \{x_1^1, x_1^2, ..., a_1\}$, $A_2^{\downarrow} = \{x_2^1, x_2^2, ..., a_2\}$,...,$A_k^{\downarrow} = \{x_k^1, x_k^2, ..., a_k\}$ ve $T \in cl(\cup_{A\in\mathscr{A}} A^{\downarrow})$ dır..

Bu yüzden P_c'de, $\mathscr{A}$ filtresi T'ye yakınsar. Diğer bir yandan, $A_1^{\downarrow}, ..., A_k^{\downarrow}$ kümelerin her birindeki elemanların kıyaslanamaz olduğu görülür. Buna ek olarak sadece bu $A_k^{\downarrow}$'ların bileşimi şeklinde yazılabilen yönlendirilmiş alt kümeler, herhangi bir $i \in \mathbb{N}$ için $\{x_k^i : k \in \mathbb{N}\}$ zincirlerinden tümüyle birinin alt kümeleridir. Dolayısıyla bu yönlendirilmiş kümelerin T'ye denk supremumu yoktur ve böylece $\mathscr{A}$ P_d'de T'ye yakınsamaz.

Lemma 3.57 *Herhangi $(X, \downarrow)$ yakınsak uzayı için, aşağıdaki şartlar denktir:*

(1) $(X, \downarrow)$ topolojiktir.

(2) τ, $(X, \downarrow)$ tarafından üretilen topoloji olmak üzere $\downarrow = \downarrow_\tau$ dır.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) : Farzedelim ki $(X,\downarrow)$ topolojiktir. O zaman tanımdan X'de herhangi bir σ topolojisi için $\downarrow=\downarrow_\sigma$ dır, yani $A\downarrow x \Leftrightarrow \mathscr{N}_\sigma(x)\subseteq\mathscr{A}$ dır. Herhangi $x\in X$ için $\mathscr{N}_{\tau_\downarrow}(x)\subseteq\mathscr{N}_\sigma(x)$ olduğunu iddia edelim. Herhangi $U\in\mathscr{N}_{\tau_\downarrow}(x)$ açık kümesini alalım. $(X,\downarrow)$ topolojik olduğundan, $\mathscr{N}_\sigma(x)\downarrow x$ her zaman sağlanır. $x\in U$ ile beraber üretilen $\tau_\downarrow$ topolojisinin tanımından $U\in\mathscr{N}_\sigma(x)$ ifade edilir. Böylece $\mathscr{N}_{\tau_\downarrow}(x)\subseteq\mathscr{N}_\sigma(x)$ olur.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Açıktır. □

Not 3.58 *Lemma* 3.55 *ve* 3.57*'dan,* $(P,\downarrow_d)$ *ve* $(P,\downarrow_c)$ *topolojiktir* $\Leftrightarrow$ $\tau=\sigma(P)$ *olmak üzere sırasıyla* $\downarrow_d=\downarrow_\tau$ *ve* $\downarrow_c=\downarrow_\tau$ *dır.*

Bir X yakınsak uzayı, eğer her bir noktanın filtre komşuluğu o noktaya yakınsıyor ise ön topolojiktir.

Teorem 3.59 *Bir P poseti için, aşağıdakiler denktir:*
(1) $(P,\downarrow_d)$ *topolojiktir.*
(2) $(P,\downarrow_d)$ *ön topolojiktir.*
(3) *P bir sürekli posettir.*
(4) *Herhangi bir* $x\in P$ *için,* $\mathscr{A}\downarrow_d x$ *olan* $\mathscr{A}$ *en küçük filtredir.*

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) : [5] den elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Varsayalım ki $(P,\downarrow_d)$ ön topolojik olsun. P'de $\downarrow_d$ tarafından üretilen topoloji Scott topolojidir. Varsayımdan, $\mathscr{N}_\sigma(x)$ x'in Scott komşuluğunu göstermek üzere $\mathscr{N}_\sigma(x)\downarrow_d x$ dir, böylece $\vee D\geq x$ sağlayan bir $D\subseteq\cup_{U\in\mathscr{N}_\sigma(x)}U^\downarrow$ yönlendirilmiş kümesi vardır. Bu her bir $u\in D$ için $u\ll x$ olduğunu göstermek için yeterlidir. Eğer $\vee W$ var ve $\vee W\geq x$ olan W bir yönlendirilmiş küme ise, her $U\in\mathscr{N}_\sigma(x)$ için $W\cap U\neq\emptyset$. $u\in D$ olduğundan $U\in\mathscr{N}_\sigma(x)$ için $u\in U^\downarrow$. $y\in W\cap U$ seçelim, buradan $y\geq u$ olur. Bundan dolayı $u\ll x$ olur. Böylece P süreklidir.
(3) $\Rightarrow$ (4) : $\mathscr{A}\downarrow_d x$ sağlayan her $\mathscr{A}$ filtresinin $\mathscr{N}_\sigma(x)$'i içermesi gerektiğinden bunu göstermek için $\mathscr{N}_\sigma(x)\downarrow_d x$'i kontrol etmek yeterlidir. $D=\{y\in P: y\ll x\}$ alalım.

O zaman $\vee D = x$ olan D yönlendirilmiş. Üstelik, her $y \in D$ için, $x \in U$ ve $y \in U^{\downarrow}$ olan $U = \{w : y \ll w\}$ Scott açıktır. Bunların hepsi $\mathscr{N}_{\sigma}(x) \downarrow_d x$ olduğunu gösterir.
$(4) \Rightarrow (3)$: $a \in P$ ve $\mathscr{A} \downarrow_d a$ olan $\mathscr{A}$ en küçük filtre olsun. Tanımdan $\vee D \geq a$ ve $D \subseteq \cup\{B^{\downarrow} : B \in \mathscr{A}\}$ olan D bir yönlendirilmiş kümedir. Şimdi $D \subseteq \{x \in P : x \ll a\}$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $e \in D$ ve $\vee W \geq a$ olan W yönlendirilmiş kümesi için, $[\uparrow w : w \in W]$ filtresi $\downarrow_d$ altında a'ya yakınsar, böylece $[\uparrow w : w \in W] \supseteq \mathscr{A}$. $e \leq w$ olmak üzere herhangi bir $w \in W$ için $e \in B^{\downarrow}$ ve $B \supseteq \uparrow w$ olacak şekilde $B \in [\uparrow w : w \in W]$ vardır. Buradan $e \ll a$.
$(3) \Rightarrow (1)$: P sürekli olsun. Eğer $\mathscr{A} \downarrow_d x$ ve U kümesi x elemanını içeren Scott açık küme ise, o zaman $\vee D \geq x$ ve $e \in D \cap U$ sağlayan bir $D \subseteq \cup_{A \in \mathscr{A}} A^{\downarrow}$ yönlendirilmiş kümesi vardır. Herhangi bir $A \in \mathscr{A}$ için $e \in A^{\downarrow}$ olduğunu varsayalım. O zaman $U \in \mathscr{A}$ olan $A \subseteq \uparrow e \subseteq U$. Bu durumda her $y \in P$ noktası için $\vee F = y$ olan $F = \{x \in P : x \ll y\}$ yönlendirilmişdir ve $x \in (\uparrow x)^{\downarrow}$ olan her $\uparrow x (x \in F)$ y nin bir komşuluğudur. Bu $\mathscr{N}_{\sigma}(x) \downarrow_d x$ olduğunu gösterir. Böylece $(P, \downarrow_d)$ topolojiktir. □

Tanım 3.60 *[21] $(X, \downarrow_X)$ ve $(Y, \downarrow_Y)$ iki yakınsak uzayı arasındaki bir $f : X \to Y$ fonksiyonu eğer $\mathscr{A} \downarrow_X x$ için $f^{+}(\mathscr{A}) \downarrow_Y f(x)$'i sağlarsa süreklidir denir.*

Tanım 3.61 *[21] X ve Y iki yakınsak uzayı için $[X \to Y]$ fonksiyon uzayı X'ten Y'ye $\mathscr{F} \downarrow f$ ile sürekli fonsiyonların kümesidir $\Leftrightarrow$ X'de her $\mathscr{A} \downarrow x$, Y'de $\mathscr{F}.\mathscr{A} \downarrow f(x)$. Burada $\mathscr{F}.\mathscr{A} = [F.A : F \in \mathscr{F}, A \in \mathscr{A}]$ ve $F.A = \{f(a) : f \in F, a \in A\}$ dır.*
Bir $(X, \downarrow)$ yakınsak uzayının her $\mathscr{A} \downarrow x$ ve x'in U açık komşulukları için, $\uparrow F \in \mathscr{A}$ olan bir sonlu $F \subseteq U$ alt kümesi varsa yerel sınırlıdır denir.

Önerme 3.62 *[21] Eğer Y bir topolojik uzay ise bu durumda P_d, $(P, \downarrow_d)$'yi simgelemek üzere ve $[P_d \to Y]$ P_d'den Y'ye sürekli fonksiyonların kümesini belirtmek üzere, $[P_d \to Y]$ topolojiktir.*

İspat. Herhangi bir P poseti için P_c'nin yerel sınırlı olduğu açıktır. Lemma 3.51'ten, ayrıca P_d yerel sınırlıdır. [20] deki Teorem 7.20'den $[P_d \to Y]$ topolojiktir sonucunu elde ederiz. $\square$

POS_d esnek sürekli dönüşümlerin ve posetlerin kategorisini simgelesin.
Herhangi bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, $f^+ : \Phi X \to \Phi Y$ tarafından $f^+(\mathscr{A}) = [f^+(A) : A \in \mathscr{A}]$ tanımlansın.

Önerme 3.63 *[21] $f : P_d \to Q_d$ eşlemesi süreklidir $\Leftrightarrow$ f P'den Q'ya bir Scott sürekli fonksiyondur.*

İspat. Varsayalım ki $f : P_d \to Q_d$ sürekli olsun. Eğer $x \leq y$ ise, o zaman $[y] \downarrow_d x$ ve $f^+([y]) \downarrow_d f(x)$ sağlanır. Bu $f(x) \leq f(y)$ anlamına gelir ve böylece f monotondur. Eğer $D \subseteq P$ bir yönlendirilmiş küme ve $\vee D$ varsa, o zaman $[\uparrow z : z \in D] \downarrow_d \vee D$ sağlanır. Böylece $f^+[\uparrow z : z \in D] \downarrow_d f(\vee D)$ olur. Buradan her bir $e \in E$ herhangi $z \in D$ ve $\vee E \geq f(\vee D)$ olan $f(z)$'den alt değerli olacak şekilde $E \subseteq Q$ bir yönlendirilmiş kümesi vardır. Bu durumda f monotondur, $\vee\{f(z) : z \in D\}$ vardır ve $f(\vee D)$'ye denktir.
Diğer taraftan, $f : P_d \to Q_d$ Scott sürekli ve $(P, \downarrow_d)$'de $\mathscr{A} \downarrow_d x$ olsun. O zaman $\vee D \geq x$ olacak şekilde bir $D \subseteq P$ yönlendirilmiş kümesi vardır ve her bir $e \in D$ için $e \in A^{\downarrow}$ olan $A \in \mathscr{A}$ vardır. f Scott sürekli olduğundan, $\vee f(D) = f(\vee D) \geq f(x)$ dir. f'nin monoton olmasından bütün $a \in A$ için $f(e) \in (f(A))^{\downarrow}$ anlamına gelen $f(e) \leq f(a)$ olur. Buradan $f^+(A) \downarrow_d f(x)$ elde edilir. $\square$

Buradan hareketle $P \to P_d$ bağlantılı ve tam olan bir $F : POS_d \to CONV$ fonktorunu gerer. Böylece POS_d $CONV$'nin bir tam alt kategorisine eşdeğer olduğu elde edilir.

Tanım 3.64 *[21] $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ izdüşümü için yakınsak uzayların $(X_i)_{i\in I}$ ailesinin çarpımı $\prod_{i\in I} X_i$ olsun. O zaman $\mathscr{A} \downarrow x$ çarpım uzayındadır $\Leftrightarrow$ her $i \in I$ için $\pi_i^+(\mathscr{A}) \downarrow x_i$ dir.*

Lemma 3.65 *[21] Posetlerin herhangi $(P_i)_{i\in I}$ koleksiyonu için, $(\prod_{i\in I} P_i)_d \to \prod_{i\in I}(P_i)_d$ birim dönüşümü süreklidir.*

İspat. Önerme 3.63'den, $\prod_{i\in I} P_i \to P_i$ izdüşümleri Scott süreklidir, böylece $(\prod_{i\in I} P_i)_d \to (P_i)_d$ süreklidir. Buradan $(\prod_{i\in I} P_i)_d$'den $\prod_{i\in I}(P_i)_d$'ye birim dönüşümü süreklidir. □

Önerme 3.66 *[21] Herhangi iki P ve Q poseti için, $(P\times Q)_d = P_d \times Q_d$ dir.*

İspat. Lemma 3.55 gereğince $\mathscr{A} \downarrow_d (x,y)$ $(P\times Q)_d$'de ise $\mathscr{A} \downarrow_d (x,y)$ $P_d \times Q_d$'dedir. Şimdi eğer $\mathscr{A} \downarrow_d (x,y)$ $P_d \times Q_d$'de ise o zaman $\mathscr{A}_d(x,y)$ $(P\times Q)_d$'de olacağını göstermemiz yeterlidir. $\mathscr{A} \downarrow_d (x,y)$ $P_d \times Q_d$'de olduğundan, $\pi_1^+(\mathscr{A}) \downarrow_d x$ ve $\pi_2^+(\mathscr{A}) \downarrow_d y$ dir. Bu durumda $\vee D \geq x$, $\vee E \geq y$ olacak şekilde P ve Q'nun sırasıyla D ve E yönlendirilmiş alt kümeleridir ve her bir $u \in D$ için $u \in (\pi_1^+(A))^{\downarrow}$ olan $A \in \mathscr{A}$ ve her bir $v \in E$ için $v \in (\pi_2^+(B))^{\downarrow}$ olan $B \in \mathscr{A}$ vardır. $K = D\times E$ olsun. O zaman
(a) K, $P\times Q$'nun bir yönlendirilmiş alt kümesidir.
(b) $\vee K = (\vee D, \vee E) \geq (x,y)$ dir. (c) Her $(u,v) \in K$ için, $u \in (\pi_1^+(A))^{\downarrow}$ ve $v \in (\pi_2^+(B))^{\downarrow}$ olan $A \in \mathscr{A}$ ve $B \in \mathscr{A}$ vardır. Buradan her $(p,q) \in (\pi_1^+(A), \pi_2^+(B))$ için $(u,v) \leq (p,q)$.
Bu durumda $A\cap B \in A$. $(r,s) \in A\cap B$ olsun. O zaman $(r,s) \in (\pi_1^+(A\cap B), \pi_2^+(A\cap B)) \subset (\pi_1^+(A), \pi_2^+(B))$, buradan da $(r,s) \geq (u,v)$ olur. Böylece $\mathscr{A}) \downarrow_d (x,y) \in (P\times Q)_d$ elde edilir. □

3.4.2. Posetlerde Meet-Süreklilik

Bu bölümde ek aksiyom[5]: $[CONV3]$ $\mathscr{A} \downarrow_d x$ ve $\mathscr{B} \downarrow_d x \Rightarrow \mathscr{A}\cap\mathscr{B} \downarrow_d x$ sağlayan $(P, \downarrow_d)$ yakınsak uzayının P posetleri üzerinde çalışacağız.

Tanım 3.67 (i) *Bir P poseti eğer $\bigvee D \geq x$ olan herhangi D yönlendirilmiş alt kümesi için, $x \downarrow D \cap \downarrow x$'in kapanışında ise meet-sürekli olarak adlandırılır.*

(ii) *Bir P poseti eğer $\bigvee D$, $\bigvee E$ var ve $\bigvee D \geq \bigvee E$ olan herhangi yönlendirilmiş D ve E altkümeleri için, $\bigvee H = \bigvee E$ olacak şekilde bir $H \subseteq \downarrow D \cap \downarrow E$ yönlendirilmiş altkümesi varsa, güçlü meet-sürekli olarak adlandırılır.*

Örnek 3.56'deki poset meet-sürekli olmayan bir DCPO dur. Bunu görmek için, $D = \{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_k^2\}$ alalım. $\bigvee D = x^2 \geq x^1$ olduğuna dikkat edelim. Bununla birlikte $\downarrow D \cap \downarrow x^1 = \emptyset$.

Her güçlü meet-sürekli posetin aynı zamanda meet-sürekli olduğunu doğrulamak gayet kolaydır.

Not 3.68 *Eğer P bir sürekli poset ise, güçlü meet-süreklidir. Aslında önemli olan, eğer D ve E $\bigvee D \geq E$ olacak şekilde P'nin yönlendirilmiş alt kümeleri ise, bu durumda herhangi $x \in E$ için, $\Downarrow x = \{y \in P : y \ll x\} \subseteq \downarrow D$. $H = \cup_{x \in E} \Downarrow x$ alalım. O zaman $\bigvee H = \bigvee_{x \in E} x = \vee E$ ve $H \subseteq \downarrow D \cap \downarrow E$.*

Bir meet-semilattice herhangi iki x ve y elemanı için, $x \wedge y$ bulunan P bir posettir.

Lemma 3.69 *L bir semi-lattice ve bir DCPO olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) *Herhangi $x \in L$ ve yönlendirilmiş $D \subseteq L$ için, $x \wedge \bigvee D = \bigvee \{x \wedge y : y \in D\}$*

(2) *L meet-süreklidir.*

(3) *L güçlü meet-süreklidir.*

(4) *$\bigvee D \geq x$ olan herhangi $D \subseteq L$ yönlendirilmiş kümesi için $\bigvee E = x$ olacak şekilde $E \subseteq \downarrow D \cap \downarrow x$ yönlendirilmişdir.*

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$: $\bigvee D \geq x$ olacak şekilde $D \subseteq L$ bir yönlendirilmiş küme olsun. $E = \{u \wedge x : u \in D\}$ olsun. Bu durumda E bir yönlendirilmiş kümedir ve $E \subseteq \downarrow D \cap \downarrow x$. $\downarrow D \cap \downarrow x$ bir alt değerli küme ve $\bigvee E = \bigvee \{u \wedge x : u \in D\}$ (1)den, $x \wedge \bigvee D =$

$\bigvee\{u \wedge x : u \in D\} = \bigvee E$. Böylece $x \wedge \bigvee D = x = \bigvee E$. Buradan da, $x \in cl(\downarrow D \cap \downarrow x)$.
$(2) \Rightarrow (1)$: $D \subseteq L$ bir yönlendirilmiş küme ve $x \in L$ olsun. $y = \bigvee D \wedge x$ olsun, böylece $y \leq \bigvee D$ ve $y \leq x$ olur. (2)den, $y \in cl(\downarrow D \cap \downarrow y) \subseteq cl(\downarrow D \cap \downarrow x)$. $\downarrow \bigvee\{x \wedge u : u \in D\} \supseteq cl(\downarrow D \cap \downarrow x)$ olduğunu dikkate alalım. Bu durumda, $y \in \downarrow \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$, böylece $y \leq \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$. Ayrıca, $y \geq \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$. Böylelikle, $y = \bigvee D \wedge x = \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$.
$(1) \Rightarrow (3)$: $D \subseteq L$ ve $\bigvee D \geq \bigvee E$ olan $E \subseteq L$ yönlendirilmiş kümeler olsun. O zaman $\bigvee D \wedge \bigvee E = \bigvee E$. (1)den, $\bigvee\{u \wedge \bigvee E : u \in D\} = \bigvee E$. (1) tekrar uygulanınca, $\bigvee\{\bigvee\{u \wedge e : u \in D\} : v \in E\} = \bigvee E$. $D' = \{u \wedge e : u \in D, v \in E\} =$ olsun. Bu durumda D' yönlendirilmişdir ve $\bigvee D' = \bigvee E$ olan $\downarrow D \cap \downarrow E$ tarafından kapsanır. Böylece (3) kanıtlanır.
$(1) \Rightarrow (4)$: $E = \{x \wedge y : y \in D\}$ olsun. O zaman E yönlendirilmiş ve $E \subseteq \downarrow D \cap \downarrow x$. (1)den, $\bigvee E = \bigvee\{x \wedge y : y \in D\} = x \wedge \bigvee D$. $\bigvee D \geq x$ olduğundan, $\bigvee E = x \wedge \bigvee D = x$.
$(4) \Rightarrow (1)$: (4)den, $\bigvee D \geq x$ ve böylece $x \in cl(\downarrow D \cap \downarrow x)$ olan $x \wedge \bigvee D = x = \bigvee E \in \downarrow D \cap \downarrow x$. $\downarrow \bigvee\{x \wedge u : u \in D\} \supseteq cl(\downarrow D \cap \downarrow x) \ni x$. Buradan $x \leq \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$. Ayrıca, $x \geq \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$. Böylelikle, $x = \bigvee D \wedge x = \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$. □

Önerme 3.70 *P bir poset olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:*
(1) *P güçlü meet-süreklidir.*
(2) *$\mathscr{A} \downarrow_d x$ ve $\mathscr{B} \downarrow_d x \Leftrightarrow \mathscr{A} \cap \mathscr{B} \downarrow_d x$.*

İspat. $(P, \downarrow_d)$ $(CONV3)$ şartını sağlasın. $\bigvee D \geq \bigvee E$ olacak şekilde $D \subseteq P$ ve $E \subseteq P$ yönlendirilmiş kümeleri varsa, $e = \bigvee E$ olan $[\uparrow u : u \in D] \downarrow_d e$ ve $[\uparrow v : v \in E] \downarrow_d e$ olur. Böylece $[\uparrow u : u \in D] \cap [\uparrow v : v \in E] \downarrow_d e$. Buradan $\bigvee H \geq e$ ve $H \cup \{B^{\downarrow} : B \in [\uparrow u : u \in D] \cap [\uparrow v : v \in E]\} \subseteq \downarrow D \cap \downarrow E$ olacak şekilde bir H yönlendirilmiş kümesi vardır. Açıkça görülüyor ki $\bigvee H = e = \bigvee E$.
Tersine, P'nin güçlü meet-sürekli olduğunu varsayalım. $\mathscr{A} \downarrow_d x$ ve $\mathscr{B} \downarrow_d x$ olsun. Bu durumda $D \subseteq \bigcup\{A^{\downarrow} : A \in \mathscr{A}\}$, $E \subseteq \bigcup\{B^{\downarrow} : B \in \mathscr{B}\}$ ve $\bigvee D \geq x$, $\bigvee E \geq x$ olacak şekilde D, E yönlendirilmiş kümeleri vardır. P güçlü meet-sürekli olduğundan,

$\bigvee H_1 = x$ olacak şekilde bir $H_1 \subseteq\downarrow D\cap\downarrow x$ yönlendirilmiş kümesi vardır. O zaman $\bigvee E \geq \bigvee H_1$ ve böylece de $\bigvee H_2 \geq \bigvee H_1 = x$ olacak şekilde bir $H_2 \subseteq\downarrow H_1\cap\downarrow E$ yönlendirilmiş kümesi vardır. Bu durumda $[\uparrow w : w \in H_2] \downarrow x$ ve $[\uparrow w : w \in H_2] \subseteq \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$. Buradan $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \downarrow_d x$ olduğu çıkar. □

P bir meet-semilattice olsun. O zaman $\wedge : P \times P \to P$ (x,y)'yi $x \wedge y$'ye götüren bir eşlemedir. X bir meet-semilattice ve $\wedge : X \times X \to X$ sürekli olmak üzere yakınsak $(X,\downarrow)$ semilatticei bir yakınsak uzaydır.

Önerme 3.71 *Bir P meet-semilattice için, $(P,\downarrow_d)$ bir yakınsak meet-semilattice $\Leftrightarrow$ $(P,\leq)$ meet-süreklidir.*

İspat. $(P,\downarrow_d)$ bir yakınsak meet-semilattice olduğunu varsayalım. Lemma 11'den, herhangi bir $x \in P$ ve yönlendirilmiş $D \subseteq P$ için sadece $x \wedge \bigvee D = \bigvee\{x \wedge y : y \in D\}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\wedge : X \times X \to X$ sürekli olduğundan Scott süreklidir. Böylece $\bigwedge(\bigvee\{(x,u) : u \in D\}) = \bigwedge(x, \bigvee D) = x \wedge \bigvee D = \bigvee\{\wedge(x,u) : u \in D\} = \bigvee\{x \wedge u : u \in D\}$.

Tersine, farzedelim ki $(P,\leq)$'nin meet-sürekli ve $\mathscr{A} \downarrow_d (x,y)$ olsun. Bu durumda $\pi_1^+(\mathscr{A}) \downarrow_d x$ ve $\pi_2^+(\mathscr{A}) \downarrow_d y$. $\pi_1^+(\mathscr{A}) \downarrow_d x$ olduğundan, $\bigvee D_1 \geq x$ ve $D_1 \subseteq \bigcup_{A_1 \in \pi_1^+(\mathscr{A})} A_1^{\downarrow}$ olacak şekilde $D_1 \subseteq P$ yönlendirilmiş kümesi vardır. $\pi_2^+(\mathscr{A}) \downarrow_d y$ olduğundan da, $\bigvee D_2 \geq y$ ve $D_2 \subseteq \bigcup_{A_2 \in \pi_2^+(\mathscr{A})} A_2^{\downarrow}$ olacak şekilde $D_2 \subseteq P$ yönlendirilmiş kümesi vardır. Bu durumda ise $\bigvee D_1 \wedge \bigvee D_2 \geq x \wedge y$, böylece $\bigvee\{u \wedge v : u \in D_1, v \in D_2\} \geq x \wedge y$. $D = \{u \wedge v : u \in D_1, v \in D_2\}$ bir yönlendirilmiş küme olduğu görülür. Her $u \in D_1$ ve her $v \in D_2$ için, $u \in A_1^{\downarrow}$ olan $A_1 \in \pi_1(\mathscr{A})$ ve $v \in A_2^{\downarrow}$ olan $A_2 \in \pi_2(\mathscr{A})$ vardır. $\overline{A_1} \in \mathscr{A}$, $A_1 \supseteq \pi_1^+(\overline{A_1})$ ve $\overline{A_2} \in \mathscr{A}$, $A_2 \supseteq \pi_2^+(\overline{A_2})$ vardır. $\overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ alalım. O zaman $u \wedge v \in \wedge(\overline{A})^{\downarrow}$. Bu yüzden tam olarak $(x_1,y_1) \in \overline{A}$, $x_1 \in \pi_1(\overline{A}) \subseteq \pi_1(\overline{A_1}) \subseteq A_1$, böylece $u \leq x_1$. Benzer bir yaklaşımla, $v \leq y_1$ □

Sonuç olarak, çok sayıda istenen özelliği olan herhangi bir P poseti için $\downarrow_d$ tanımını ispat etmiş olduk. Bu teorik bilgisayar bilimi gibi diğer alanlardaki uygulamalarda öncülük yapabilecek bir başlangıç olarak nitelendirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., 2009. On some new operations in soft set theory. **Comput. Math. Appl.,** 57: 1547-1553.

[2] Aygünoğlu, A., Aygün, H. 2011. Some notes on soft topological spaces. Neural Comput. Applic., Kocaeli, DOI 10.1007/s,00521-011-0722-3.

[3] B. Tanay, G. Yaylalı, 2013. New Structures On Partially Ordered Soft Sets and Scott Topology. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 7: 89-97

[4] Chen, B., 2013. Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces. **Appl. Math. Inf. Sci.,** 7: 287-294

[5] Çağman, N., Karataş, S., Enginoglu, S., 2011. Soft topology. **Comput. Math. Appl.,** 62: 351-358.

[6] Das, S., Samanta, S. K., 2013. Soft metric. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 6: 77-94.

[7] D. Scott, 1972. Continuous Lattices. **Lecture Notes In Math.Springer-Verlag.,** 97-136.

[8] Feng, F., Jun, Y., B., Zhao, X., 2008. Soft semirings. **Comput. Math. Appl.,** 56: 2621-2628.

[9] G.Gierz, K.H.Hofmann, K.Keimel, J.D.Lawson, M.Misslove, D.S.Scott, 2003. Continuous Lattice and Domains, **Cambridge Universty Press, Cambridge**.

[10] İ. Zorlutuna, İ.; Akdag, M.; Min, W. K.; Atmaca, S., 2012. Remarks on soft topological spaces. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 3: 171-185.

[11] Kharal, Athar; Ahmad, B., 2011. Mappings on soft classes. **New Math. Nat. Comput.,** 7: 471-481.

[12] K. V. Babitha and J.J. Sunil, 2010. Soft Set Relations and Functions. **Comput. Math. Appl.,** 60: 1840-1849.

[13] Luoshan Xu, 2006. Continuity of Posets via Scott Topolgy and Sobrification, **Topology and its. Appl.,** 153 1886-1894.

[14] Molodtsov, 1999. D. Soft set theory first results. **Comput. Math. Appl.,** 37: 19-31.

[15] M. M. Kovar, 2004. A Note On The Topology Generated By Scott Open Filters. **Universty of Technology, Brno**.

[16] Pazar V. B., Halis, A., 2013. On soft Hausdorff spaces. **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 5: 15-24.

[17] P.K.Maji, R.Biswas, A.R.Roy, 2003. On soft set theory. **Comput. Math. Appl.,** 45: 555-562.

[18] Sabir H., Bashir A., 2011. Some properties of soft topological spaces. **Comput. Math. Appl.,** 62: 4058-4067.

[19] Shabir, Muhammad; Naz, Munazza 2011. On soft topological spaces. **Comput. Math. Appl.,** 61: 1786-1799.

[20] S. Abramsky, A. Jung, 1995. Domain Theory. Inn: S. Abramsky, et all. (Eds.), **Handbook of Logic in Comp. Science,Clarendon Press, Oxford,** 3: 1-168.

[21] W. W. Shih, Z. Dongsheng and H. W. Kin, 2009. Filter Convergences Structures On Posets. **Proceeding of the 5th Assian Math. Conf., Malasia.**

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Funda Nur KARAKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi	:	AYDIN, 15.05.1991

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Anadolu Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	MEB Lise Matematik Öğretmeni

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	fnkarakaya@gmail.com
Tarih	:	