T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-037

k-TÜREVLİ GAMMA HALKALAR ÜZERİNE

Emel KORKMAZ

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Emel KORKMAZ tarafından hazırlanan "k-Türevli Gamma Halkalar Üzerine" başlıklı tez, 10.08.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof.Dr. Hatice KANDAMAR	AADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof.Dr. Nurcan ARGAÇ	Ege Ünv. Fen-Ed.Fak.	
Üye	:	Dr. Ögr. Üyesi Okan ARSLAN	AADÜ Fen-Ed.Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

10.08.2018

Emel KORKMAZ

ÖZET

k-TÜREVLİ GAMMA HALKALAR ÜZERİNE

Emel KORKMAZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR
2018, 57 sayfa

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır.
İlk bölümünde Gamma halkaları hakkında yapılan bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde halkalar ve gamma halkalardaki bazı temel tanımlar ile diğer kısımlarda gerekli olacak bazı özellikler verildi. Üçüncü bölümde Gamma halkasında k-türev ile ilgili bazı teoremlerde verilen hipotezlerden bir kısmının kaldırılıp kaldırılamayacağı incelenmiştir. [5] Dördüncü bölümde asal gamma halkalarının değişmeliliği üzerine çalışıldı ve teoremlerdeki hipotezler incelendi. [7]

Anahtar Sözcükler: Gamma halka, Asal gamma halka, *k*-türev, Değişmelilik

ABSTRACT

ON THE GAMMA RINGS WITH k-DERIVATION

Emel KORKMAZ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Hatice KANDAMAR
2018, 57 pages

In this study, there are four chapters. In the first chapter, Some studies on Gamma rings were mentioned. In the second chapter, we present some definations and theorems of rings and Gamma rings that will be used in following chapters. In the third chapter, the k-derivation of Gamma rings were given and hypotheses in theorems were examined. [5] In the forth chapter, commutativity of prime gamma rings is studied and theorems on this subject were examined. [7]

Key Words: Gamma ring, Prime gamma ring, *k*-derivation, Commutativity

ÖNSÖZ

Tez çalışmam ve üniversite hayatım boyunca bilgi birikiminden ve tecrübesinden faydalandığım, desteğini ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a sonsuz teşekkür ederim. Tüm yaşamım boyunca hep yanımda hissettiğim, bana her daim güvenen ve başaracağıma inanan, çocukları olmaktan gurur duyduğum aileme ve sonuna kadar direnmemi sağlayan sevgili eşim Sercan CANDAN'a şükranlarımı sunarım.

Emel KORKMAZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$C_R(R) = C(R)$	R halkasının merkezi
$C_R(X)$	X kümesinin merkezi
$C_\gamma(M) = C_\gamma$	M gamma halkasının γ-merkezi
$C_\gamma(X)$	X kümesinin γ-merkezi
$\mathrm{Ker}(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\mathrm{char}(R)$	R halkasının karakteristiği
$\mathrm{char}(M)$	M gamma halkasının karakteristiği
$\overline{X}$	X kümesi ile üretilen althalka
$[a,b]$	$= ab - ba$
$\mathrm{Ann}_l(B)$	B kümesinin sol sıfırlayanı
$(\Gamma, M)_N$	Nobusawa anlamında gamma halka
$(\Gamma, M)_B$	Barnes anlamında gamma halka
$(\Gamma, M)_{wN}$	zayıf Nobusawa anlamında gamma halka
$[\gamma, x]$	M nin sağ çarpım endomorfizması
$[y, \beta]$	M nin sol çarpım endomorfizması
(a)	a ile üretilen ideal
$(a)_\gamma$	a ile üretilen γ-ideal
$[u,v]_\gamma$	$= u\gamma v - v\gamma u$
$[\alpha, \beta]_a$	$= \alpha a \beta - \beta a \alpha$
$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}$ üzerinde $n \times m$ tipinde matrislerin kümesi

1. GİRİŞ

Üçlü cebirsel yapı olarak gamma halkası kavramı ilk olarak 1964 yılında N. Nobusawa tarafından ortaya konmuştur [10]. 1964 yılından günümüze kadar gamma halkalarının yapısı hakkında birçok çalışma yapılmıştır. Barnes, Γ ve M toplamsal iki grup olmak üzere Nobusawa'nın verdiği gamma halka tanımında yer alan $M \times \Gamma \times M \to M$ ve $\Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma$ üçlü çarpımından ikincisini kaldırarak gamma halkası tanımını genelleştirmiştir [1]. Gamma halkalarda türev tanımı ilk kez F. J. Jing tarafından 1987 yılında aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

M Barnes anlamında bir Γ-halka olsun. Bu durumda $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y)$ özelliğini sağlayan M den M ye d toplamsal dönüşümüne türev denir. 1991 yılında Barnes anlamında her Γ-halkasının Nobusawa anlamında bir Γ' halka olduğu Kyuno tarafından kanıtlanmıştır. [9]

Nobusawa anlamında asal Γ-halkasında F. J. Jing tarafından tanımlanan türevin sıfır olduğu H. Kandamar tarafından gösterildikten sonra Γ halkalarda aşağıda verilen türev tanımlanmıştır.

M bir Γ-halka, d, M den M ye ve k da Γ dan Γ ya toplamsal dönüşümler olmak üzere $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + xk(\gamma)y + x\gamma d(y)$ özelliğini sağlayan d dönüşümüne k-türev denir [8].

H. Kandamar bu çalışmasında, k-türevin sağladığı bazı özellikleri vermiştir ve karakteristiği 2 den farklı olan asal bir gamma halka üzerinde sıfırdan farklı bir d k-türevi verildiğinde herhangi bir $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için $k(\gamma) \neq 0$ ve $d(M) \subseteq C_\gamma$ iken M Γ-halkasının değişmeli olduğunu ispatlamıştır.

Daha sonra Γ-halkalarda tanımlanan k-türev operatör halkalarına taşınmış ve Γ-halkalarının değişmeli olması için gerek ve yeter koşulun operatör halkalarının değişmeli olması olduğu H. Kandamar tarafından kanıtlanmıştır.

Genellikle Γ-halkalarda yapılan çalışmalar halkaların değişmeliliği konusunda yapılan çalışmalara paralel yürütülmüştür. Bu konuda H.Kandamar, M.M.Rahman, A.C.Paul, M.Soytürk çalışmışlardır.

Gamma halkalar üzerindeki türev ve Jordan türev ilk olarak M. Sapancı ve A Nakajima tarafından ve bazı tam asal gamma halkalarda her Jordan türevin, genel türev olduğu ispatlanmıştır. A. Bresar ve J. Vukman bu ispatı özelleştirerek asal gamma halkalarda her Jordan türevin genel türev olduğunu ispatlamış [2] ve bunun yanısıra J. Vukman yarı asal gamma halkalar üzerinde Jordan sol türevi üzerine çalışmalar yapmıştır. M.M.Rahman, A.C.Paul tarafından, M, her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $a\alpha b\beta c = a\beta b\alpha c$ koşulunu sağlayan 2 torsion-free yarı asal bir Γ-halkada her Jordan türevin, M halkasında türev olduğu gösterilmiştir. M. Soytürk tarafından 1994 yılında karakteristiği 2 ve 3'ten farklı olan Barnes anlamında Γ-halkasında d_1 ve d_2 sıfırdan farklı türevler, $U < M$ olmak üzere $d_2(U) \subseteq U$ iken $d_1d_2(U)$ M nin Γ-merkezi tarafından kapsanıyorsa Mnin değişmeli olduğu gösterilmiştir.

Posner asal halkalarda d_1, d_2 türev olmak üzere $d_1d_2 = 0$ iken $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu göstermiştir. Ancak Γ-halkalarda d_1d_2 k-türev olmak üzere $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olmasına karşın $d_1d_2 = 0$ olduğu görülmüştür.

Bu çalışmanın giriş bölümünde Γ-halkalar hakkında yapılan çalışmaların bazıları derlenmiştir. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde H. Kandamar'ın "Gamma Halkasında k-türev" makalesine yer verilmiş, bazı teoremler için hipotezlerin kaldırılamayacağına dair örnekler incelenmiştir. Dördüncü bölümde H. Kandamar'ın "Asal Gamma Halkalarının Değişmeliliği" çalışması ele alınmış ve bu makalede verilen bazı teoremlerde hipotezlerin kaldırılıp kaldırılamayacağı incelenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kısımda, halkalar ve gamma halkalarda bazı temel tanımlar ile diğer kısımlarda gerekli olan bazı özellikler verilmiştir.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1. R halkasının bir S altkümesi, R halkasındaki işlemlere göre halka oluyorsa S kümesine R halkasının *althalkası* denir.

Tanım 2.1.2. S, R halkasının bir althalkası olsun.
(i) Her $r \in R$ ve $x \in S$ için $rx \in S$ ise S althalkasına R halkasının *sol ideali*
(ii) Her $r \in R$ ve $x \in S$ için $xr \in S$ ise S althalkasına R halkasının *sağ ideali*
denir. Eğer S, R halkasının hem sağ hem sol ideali ise S ye R halkasının *ideali* denir ve $S < R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. R bir halka olsun. $C(R) = \{x \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$ kümesine R halkasının *merkezi* denir. $C(R)$, R halkasının bir althalkasıdır fakat ideali değildir.

Tanım 2.1.4. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $na = 0$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar varsa bu pozitif tam sayıların en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir. Bu koşulu sağlayan hiç bir pozitif tam sayı yoksa , R halkasının karakteristiği 0 dır denir.

Tanım 2.1.5. R bir halka ve P onun bir ideali olsun. $P \neq R$ ve R halkasındaki herhangi A, B idealleri için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P idealine *asal ideal* denir.

Teorem 2.1.6. *R bir halka ve P, R halkasının kendisinden farklı bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P asal idealdir.*

Tanım 2.1.7. R bir halka ve $R \neq M$, R halkasının bir ideali olsun. Buna göre R halkasının $M \subseteq N \subseteq R$ olacak biçimde bir N ideali var iken $N = M$ veya $N = R$ koşulu sağlanıyor ise M idealine *maksimal ideal* denir.

Tanım 2.1.8. R bir halka olsun. Her $a,b \in R$ için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına *asal halka*, her $a \in R$ için $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına *yarı-asal halka* denir.

Tanım 2.1.9. R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. Eğer $I^n = \{0\}$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa I idealine R halkasının *nilpotent ideali* denir.

Tanım 2.1.10. M bir toplamsal değişmeli grup ve R bir halka olmak üzere $R \times M \to M$ fonksiyonu her $a,b \in M$ ve $r,s \in R$ için,

(i) $r(a+b) = ra + rb$

(ii) $(r+s)a = ra + sa$

(iii) $r(sa) = (rs)a$

koşullarını sağlıyorsa M grubuna *sol R-modül* denir. Ayrıca, R birimli halka olmak üzere her $a \in M$ için, $1_R a = a$ koşulu da sağlanıyorsa M sol R-modülüne *birimsel sol R-modül* denir. Benzer şekilde sağ R-modül ve birimsel sağ R-modül tanımları da yapılabilir.

Tanım 2.1.11. M toplamsal değişmeli bir grup olsun. R ve S herhangi iki halka olmak üzere,

(i) M bir sol R-modül,

(ii) M bir sağ S-modül,

(iii) Her $m \in M$, $r \in R$ ve $s \in S$ için $r(ms) = (rm)s$

koşulları sağlanıyorsa M ye R-S-bimodül denir.

Tanım 2.1.12. M bir R-modül ve N kümesi M modülünün boş olmayan bir altkümesi olsun. N, M toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubu olmak üzere her $r \in R$ ve $n \in N$ için, $rn \in N$ oluyorsa N kümesine M modülünün bir *altmodülü* denir.

Tanım 2.1.13. M bir R-modül olsun. Her $x \in R$ için $xM = 0$ iken $x = 0$ oluyorsa M ye *faithful R-modül* denir.

Tanım 2.1.14. R bir halka ve $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ sağlanıyorsa d dönüşümüne R halkasının *türevi* denir. [4]

Tanım 2.1.15. R bir halka ve $d : R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $a \in M$ için $d(a^2) = d(a)a + ad(a)$ eşitliği sağlanıyorsa d dönüşümüne R halkasının *Jordan türevi* denir. [2]

Teorem 2.1.16. *[11] R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka olmak üzere R halkasının herhangi iki türevi d_1 ve d_2 olsun. Eğer $d_1 \circ d_2$, R halkasının bir türevi ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olur.*

2.2. Gamma Halkaları

Tanım 2.2.1. M ve Γ toplamsal değişmeli iki grup olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} M \times \Gamma \times M \to M & \quad ve \quad & \Gamma \times M \times \Gamma \to \Gamma \\ (a, \alpha, b) \mapsto a\alpha b & & (\alpha, a, \beta) \mapsto \alpha a \beta \end{array}$$

işlemi var olsun her $a, b, c \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için,

(N1) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$
$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$
$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(N2) $(a\alpha b)\beta c = a(\alpha b\beta)c = a\alpha(b\beta c)$

(N3) $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere her $a, b \in M$ için $a\gamma b = 0$ ise $\gamma = 0$

koşulları sağlanıyorsa M ye *Nobusawa anlamında* Γ-*halka* denir ve $(\Gamma, M)_N$ ile gösterilir.

Barnes 1966 yılında, Nobusawa'nın yaptığı tanımdaki ikinci işlemi kaldırarak Nobusawa Γ-halka tanımını aşağıdaki şekilde genişletmiştir. [1].

Tanım 2.2.2. M ve Γ toplamsal değişmeli gruplar olsun. Her $a,b \in M$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b \in M$ olmak üzere, her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\gamma \in \Gamma$ için

(B1) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$
$a(\alpha+\beta)c = a\alpha c + a\beta c$
$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(B2) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

koşulları sağlanıyorsa M ye *Barnes anlamında* Γ*-halka* denir ve $(\Gamma,M)_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. M Barnes anlamında bir Γ-halka ve her $a \in M$, $\gamma,\beta \in \Gamma$ için $\gamma a\beta \in \Gamma$ olmak üzere her $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için $(a\alpha b)\beta c = a(\alpha b\beta)c$ koşulu sağlanıyorsa M ye *zayıf Nobusawa* Γ*-halka* denir ve $(\Gamma,M)_{wN}$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.4. *(i) [9, 1.2.1] M bir Nobusawa* Γ*-halka ise* Γ*, zayıf Nobusawa M-halkadır.*

(ii) [9, 1.2.2] M bir zayıf Nobusawa Γ*-halka ise* $\Lambda = \{\gamma \in \Gamma \mid M\gamma M = 0\}$ *olmak üzere M, Nobusawa* Γ/Λ*-halkadır.*

(iii) [9, 1.2.3] M bir Barnes Γ*-halka olsun. Bu durumda M Nobusawa* Γ'*-halka olacak biçimde* Γ *grubuna bağlı bir* Γ' *toplamsal değişmeli grubu vardır.*

Tanım 2.2.5. M Barnes anlamında bir Γ-halka olsun. M Γ-halkasının asal olması için gerek ve yeter koşul $a\Gamma M\Gamma b = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.6. M Nobusawa anlamında bir Γ-halka olsun. M Γ-halkasının asal olması için gerek ve yeter koşul $a\Gamma b = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Önerme 2.2.7. *M Nobusawa anlamında bir asal* Γ*-halka olsun. O zaman* Γ *Nobusawa anlamında bir asal M-halka olur.*

İspat: M Nobusawa anlamında bir asal Γ-halka olsun. Bu durumda $M\times\Gamma\times M$ den M ye ve $\Gamma\times M\times\Gamma$ dan Γ ya üçlü işlemleri tanımlıdır. her $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $a,b\in M$ için

$$(\alpha+\beta)a\gamma=\alpha a\gamma+\beta a\gamma$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Her $x,y\in M$ için

$$x(\alpha+\beta)a\gamma y=(x\alpha a+x\beta a)\gamma y=x\alpha a\gamma y+x\beta a\gamma y=x(\alpha a\gamma+\beta a\gamma)y$$

olur. Buradan

$$x[(\alpha+\beta)a\gamma-(\alpha a\gamma+\beta a\gamma)]y=0$$

elde edilir. Tanım 2.2.1 (N3) özelliği kullanılarak

$$(\alpha+\beta)a\gamma-(\alpha a\gamma+\beta a\gamma)=0$$

eşitliği elde edilir. Böylece her $\alpha,\beta\in\Gamma$ ve her $a,b\in M$ için

$$(\alpha+\beta)a\gamma=\alpha a\gamma+\beta a\gamma$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

$\alpha(a+b)\beta=\alpha a\beta+\alpha b\beta$ ve $\alpha a(\beta+\gamma)=\alpha a\beta+\alpha a\gamma$ eşitlikleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

Şimdi her $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$ ve $a,b\in M$ için

$$(\alpha a\beta)b\gamma=\alpha(a\beta b)\gamma=\alpha a(\beta b\gamma)$$

olduğunu gösterelim.

Her $x,y\in M$ için M nin Nobusawa anlamında Γ-halka olduğu göz önüne alınırsa

$$x(\alpha a\beta)b\gamma y=x\alpha(a\beta b)\gamma y$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Buradan

$$x(\alpha a\beta)b\gamma y-x\alpha(a\beta b)\gamma y=0$$

elde edilir. Bu ise

$$x((\alpha a\beta)b\gamma - \alpha(a\beta b)\gamma)y = 0$$

olmasını gerektirir. Tanım 2.2.1 (N3) özelliği kullanılarak, son ifadeden

$$(\alpha a\beta)b\gamma - \alpha(a\beta b)\gamma = 0$$

bulunur. Böylece $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ ve $a, b \in M$ için

$$(\alpha a\beta)b\gamma = \alpha(a\beta b)\gamma$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $x\alpha a(\beta b\gamma)y = x\alpha(a\beta b)\gamma y$ olduğu görülebilir.
Bu durumda Γ zayıf Nobusawa M-halka olur.
Şimdi her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $\alpha a\beta = 0$ iken $a = 0$ olduğunu gösterelim. Her $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $\alpha a\beta = 0$ olsun. Bu durumda $\Gamma a\Gamma = 0$ olur. M Nobusawa anlamında asal Γ-halka olduğundan,

$$\Gamma a\Gamma = 0 \Rightarrow M\Gamma(aM\Gamma) = 0 \Rightarrow a\Gamma M = 0 \Rightarrow a = 0$$

gerektirmeleri elde edilir. O halde Γ Nobusawa anlamında M-halka olur.
Şimdi Γ Nobusawa anlamında M-halkasının asal olduğunu gösterelim.
$\alpha, \beta \in \Gamma$ olmak üzere $\alpha M\beta = 0$ olsun. Bu durumda her $x, y, z, t \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ için

$$(x\alpha y)\delta(z\beta t) = 0$$

olur. Buradan

$$(x\alpha y)\Gamma(z\beta t) = 0$$

elde edilir. M Γ-halkasının asal olduğu göz önüne alınırsa her $x, y, z, t \in M$ için

$$x\alpha y = 0 \ V \ z\beta t = 0$$

olur. Burada M nin Nobusawa anlamında Γ-halka olduğu kullanılırsa

$$\alpha = 0 \ V \ \beta = 0$$

olduğu görülür ve böylece Γ, Nobusawa anlamında M-halkanın asal olduğu görülür. $\square$

2.3. Operatör Halkaları

Bu bölümde, gamma halka teorisi için önemli rol oynayan sağ ve sol operatör halkaları tanımlanacaktır.

Tanım 2.3.1. $(G,+)$ bir grup olsun.
$End(G) = \{\phi \mid \phi : G \to G\ grup\ homomorfizmas\text{ß}\}$ kümesi fonksiyonların toplamı ve bileşkesi ikili işlemleri ile bir halkadır. Bu halkaya G nin endomorfizmalarının halkası denir.

Önerme 2.3.2. *[9] M bir* Γ*-halka,* $x \in M$ *ve* $\gamma \in \Gamma$ *olsun.*

$$\begin{aligned} [\gamma,x] &: M \to M \\ m &\mapsto m[\gamma,x] = m\gamma x \end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon M toplamsal grubunun endomorfizmasıdır.

İspat: Önce $\gamma \in \Gamma$ ve $x \in M$ olmak üzere $[\gamma,x]$ in iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $m,m' \in M$ olmak üzere $m = m'$ olsun. $\gamma \in \Gamma$ ve $x \in M$ olmak üzere eşitliğin her iki yanı sağdan γx ile çarpılırsa $m\gamma x = m'\gamma x$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $m[\gamma,x] = m'[\gamma,x]$ olduğu görülür.
Şimdi her $m,n \in M$ için $(m+n)[\gamma,x] = m[\gamma,x]+n[\gamma,x]$ olduğunu gösterelim. Tanım 2.2.1 (N1) göz önüne alınırsa

$$(m+n)[\gamma,x] = (m+n)\gamma x = m\gamma x + n\gamma x = m[\gamma,x]+n[\gamma,x]$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece $[\gamma,x]$ fonksiyonunun M grubunun bir endomorfizması olduğu görülür.
Benzer şekilde bir M Γ-halka için, $x \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [x,\gamma] &: M \to M \\ m &\mapsto [x,\gamma]m = x\gamma m \end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyonun da M toplamsal grubunun endomorfizması olduğu gösterilebilir.
M toplamsal grubunun bütün sağ endomorfizmalarının halkasını $End^r(M)$ ve sol endomorfizmalarının halkasını $End^l(M)$ ile gösterelim.

M bir Γ-halka olmak üzere $\sum\limits_{sonlu} [\gamma_i, x_i]$, $\gamma_i \in \Gamma$, $x_i \in M$ elemanlarının kümesini R ile gösterelim. $R \subseteq End^r(M)$ olduğu açıktır. $\square$

Önerme 2.3.3. *[9] M bir Γ-halka, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $x_i \in M$ olmak üzere $\sum\limits_{sonlu} [\gamma_i, x_i]$ elemanlarının kümesi M toplamsal grubunun sağ endomorfizmalarının halkasının bir alt halkasıdır.*

M bir Γ-halka, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $x_i \in M$ olmak üzere $\sum\limits_{sonlu} [x_i, \gamma_i]$ elemanlarının kümesi L olmak üzere M toplamsal grubunun sol endomorfizmalarının halkasıdır.

Lemma 2.3.4. *[9] M bir Γ-halka olsun. Her $x, y \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için,*

$$[\gamma, x] + [\gamma, y] = [\gamma, x + y] \ ; \ [x, \gamma] + [y, \gamma] = [x + y, \gamma]$$

$$[\gamma, x] + [\mu, x] = [\gamma + \mu, x] \ ; \ [x, \gamma] + [x, \mu] = [x, \gamma + \mu]$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: M Γ halka olsun. Her $x, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $[\gamma, x] + [\gamma, y] = [\gamma, x + y]$ olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için

$$m([\gamma, x] + [\gamma, y]) = m[\gamma, x] + m[\gamma, y] = m\gamma x + m\gamma y = m\gamma(x + y) = m[\gamma, x + y]$$

eşitlikleri sağlandığından $[\gamma, x] + [\gamma, y] = [\gamma, x + y]$ olduğu görülür.

Şimdi her $x \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $[\gamma, x] + [\mu, x] = [\gamma + \mu, x]$ olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için

$$m([\gamma, x] + [\mu, x]) = m[\gamma, x] + m[\mu, x] = m\gamma x + m\mu x = m(\gamma + \mu)x$$

eşitlikleri sağlandığından $[\gamma, x] + [\mu, x] = [\gamma + \mu, x]$ olduğu görülür.

Benzer şekilde diğer eşitliklerin sağlandığı da gösterilebilir. $\square$

Lemma 2.3.5. *[9] M bir Γ-halka olsun. M faithful L-R-bimodüldür.*

İspat: M bir Γ-halka olsun. M Γ-halkasının bir L-R-bimodül olduğunu gösterelim. R halkasının $[\gamma, x]$ ve $[\beta, y]$ elemanları için gösterilen eşitliklerin $\sum\limits_{sonlu} [\gamma_i, x_i]$ ve

$\sum_{sonlu} [\beta_i, y_i]$ elemanları için de gösterilebileceği göz önüne alınarak R halkasından alınan elemanlar $\gamma \in \Gamma$, $x \in M$ olmak üzere $[\gamma, x]$ tipinde alınmıştır. Öncelikle M Γ-halkasının sağ R-modül olduğunu gösterelim. Her $m, m' \in M$ ve $r = [\gamma, x], r' = [\beta, y] \in R$ için

$$(m+m')r = (m+m')[\gamma,x] = (m+m')\gamma x = m\gamma x + m'\gamma x = m[\gamma,x] + m'[\gamma,x] = mr + m'r$$

$$m(r+r') = m([\gamma,x] + [\beta,y] = m[\gamma,x] + m[\beta,y] = mr + mr'$$

ve

$$(mr)r' = (m[\gamma,x])[\beta,y] = (m\gamma x)[\beta,y] = (m\gamma x)\beta y = m(\gamma x\beta y)$$

$$= m[\gamma, x\beta y] = m([\gamma,x][\beta,y]) = m(rr')$$

eşitlikleri sağlandığından M bir sağ R-modül olur. Benzer şekilde M Γ-halkasının sol L-modül olduğu da gösterilebilir.

Şimdi her $l \in L$, $m \in M$ ve $r \in R$ için $(lm)r = l(mr)$ olduğunu gösterelim. $x, y \in M$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ olmak üzere $l = [y, \beta]$ ve $r = [\gamma, x]$ olsun. Tanım 2.2.1 (N2) kullanılırsa

$$(lm)r = ([y,\beta]m)[\gamma,x] = (y\beta m)[\gamma,x] = (y\beta m)\gamma x$$

$$= y\beta(m\gamma x) = [y,\beta](m[\gamma,x]) = l(mr)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak M, L-R bimodül olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi M toplamsal grubunun faithful R-modül olduğunu gösterelim. Her $x \in M$ için $xr = 0$ iken $r = 0$ olduğunu yani $Mr = 0$ iken $r = 0$ olduğunu göstereceğiz. $r \in R$ olsun. Bu durumda $r = \sum_{sonlu} [\gamma_i, x_i]$, $\gamma_i \in \Gamma$, $y_i \in M$ formunda yazılır. r endomorfizması tanım kümesinin bütün elemanlarını sıfıra götürdüğünden sıfır olmak zorundadır. Benzer şekilde M toplamsal grubunun faithful L-modül olduğu da gösterilebilir. $\square$

$N \subseteq M$ ve $\Lambda \subseteq \Gamma$ altkümeleri için $[\Lambda, N]$ kümesi, $\gamma_i \in \Gamma$ ve $x_i \in M$ olmak üzere $[\gamma_i, x_i]$ elemanlarının sonlu toplamlarından oluşur. Benzer şekilde $[N, \Lambda]$ kümesi de tanımlanır. Buna göre sağ operatör halka $R = [\Gamma, M]$ ve sol operatör halka da $L = [M, \Gamma]$ olarak gösterilebilir.

2.4. Gamma Halkasında İdealler, Homomorfizmalar

Tanım 2.4.1. M bir Γ-halka olsun. Toplamsal M grubunun bir I altgrubu verildiğinde her $a \in I$, $\gamma \in \Gamma$ ve $m \in M$ için $a\gamma m \in I$ $(m\gamma a \in I)$ oluyorsa I kümesine M, Γ-halkasının *sağ(sol) ideali* denir. I, M Γ-halkasının hem sağ hem de sol ideali ise I ya M Γ-halkasının *ideali* denir ve $I < M$ ile gösterilir. M Γ-halkasının bir S altkümesi verildiğinde S kümesini içeren M Γ-halkasının tüm ideallerinin kesişimine *S tarafından üretilen ideal* denir ve (S) ile gösterilir.

Önerme 2.4.2. *[1] M bir Γ-halka olsun. $a \in M$ ile üretilen ideal,*

$$(a) = \left\{ \sum_{sonlu} na + x\alpha a + a\beta y + u\gamma a\delta v \mid x, y, u, v \in M, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesine eşittir.

Tanım 2.4.3. [9] $(\Gamma_1, M_1)_B$ ve $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkaları verilsin.
(i) θ, M_1 den M_2 ye bir grup homomorfizması
(ii) ϕ, Γ_1 den Γ_2 ye bir grup homomorfizması
(iii) Her $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ için $\theta(x\alpha y) = \theta(x)\phi(\alpha)\theta(y)$
özelliklerini sağlayan (ϕ, θ) sıralı ikilisine $(\Gamma_1, M_1)_B$ halkasından $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkasına bir homomorfizma denir.
Ayrıca θ ve ϕ birebir ve örten dönüşümler ise bu durumda (ϕ, θ) sıralı ikilisine, $(\Gamma_1, M_1)_B$ halkasından $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkasına bir izomorfizma denir. Bu durumda $(\Gamma_1, M_1)_B$ ve $(\Gamma_2, M_2)_B$ halkaları izomorftur denir ve $(\Gamma_1, M_1)_B \cong (\Gamma_2, M_2)_B$ olarak gösterilir.

Bu tanım Nobusawa anlamında verilen Gamma halkaları için aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.4.4. [9] (ϕ,θ), $(\Gamma_1,M_1)_N$ halkasından $(\Gamma_2,M_2)_N$ halkasına bir homomorfizması ve

(iv) Her $x\in M$ ve her $\alpha,\beta\in\Gamma$ için $\phi(\alpha x\beta)=\phi(\alpha)\theta(x)\phi(\beta)$

özelliğini de sağlıyor ise (ϕ,θ) sıralı ikilisine $(\Gamma_1,M_1)_N$ halkasından $(\Gamma_2,M_2)_N$ halkasına bir homomorfizma denir.

Tanım 2.4.5. M bir Γ-halka ve P, M Γ-halkasının bir ideali olsun. M Γ-halkasının herhangi iki A ve B ideali için $A\Gamma B\subseteq P$ olması $A\subseteq P$ veya $B\subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa P idealine *asal ideal* denir. Bir M Γ-halkasının sıfır ideali asal ideal ise M *asal* Γ-halkası olur.

Tanım 2.4.6. M bir Γ-halka olsun. Eğer $M\Gamma M\neq 0$ ve M Γ-halkasının sıfır ve kendisinden başka ideali yoksa M ye *basit* Γ-halka denir.

Tanım 2.4.7. [8] M bir Γ-halka, $d: M\to M$ ve $k:\Gamma\to\Gamma$ toplamsal fonksiyonlar olsun. Eğer her $a,b\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için $d(a\beta b)=d(a)\beta b+ak(\beta)b+a\beta d(b)$ eşitliği sağlanıyorsa d fonksiyonuna M Γ-halkasının *k-türevi* denir.

Tanım 2.4.8. M bir Γ-halka olsun ve $a\in M$ ile $\gamma\in\Gamma$ sabit elemanları verilsin. $I_{a\gamma}: M\to M$ ve $I_{\gamma a}:\Gamma\to\Gamma$ dönüşümleri sırasıyla her $m\in M$ için $I_{a\gamma}(m)=[a,m]_\gamma=a\gamma m-m\gamma a$ ve $I_{\gamma a}(\beta)=[\gamma,\beta]_a$ olarak tanımlansın. $I_{a\gamma}$ dönüşümüne γ ve a elemanları tarafından belirlenmiş $I_{\gamma a}$-iç türev denir.

2.5. $*$,$*'$,$+$, $+'$ İşlemleri

M Γ-halka ve R, L sırasıyla sağ ve sol operatör halkaları olsunlar.

R halkasının her P altkümesi ve M Γ-halkasının her T altkümesi için

$$P^*=\{x\in M:[\Gamma,x]\subseteq P\}$$

ve

$$T^{*'}=\{r\in R: Mr\subseteq T\}$$

kümeleri tanımlansın.

Önerme 2.5.1. *[9] R, M Γ-halkasının sağ operatör halkası, $P \subseteq R$ olmak üzere, P R halkasının sağ ideali ise P^*, M Γ halkasının sağ idealidir. Ayrıca R halkasının alt kümelerinin bir $\mathcal{C}$ ailesi için*

$$\bigcap_{P\in\mathcal{C}} P^* = (\bigcap_{P\in\mathcal{C}} P)^*$$

olur.

İspat: $P <_r R$ olsun. $P^* <_r M$ olduğunu gösterelim.

$P^* \subseteq M$ olduğu açıktır. Şimdi $x, y \in P^*$ olsun. Tanımdan $[\Gamma, x] \subseteq P$ ve $[\Gamma, y] \subseteq P$ olur. Bu durumda her $\gamma \in \Gamma$ için $[\gamma, x]$ ve $[\gamma, y] \in P$ olur. Burada $P <_r R$ olduğu kullanılırsa her $\gamma \in \Gamma$ için $[\gamma, x-y] = [\gamma, x] - [\gamma, y] \in P$ elde edilir. Böylece $[\Gamma, x-y] \subseteq P$ olur. Bu ise $x - y \in P^*$ olmasını gerektirir.

Şimdi $x \in P^*$ ve $m \in M$ olsun. Tanımdan $[\Gamma, x] \subseteq P$ olur. $P <_r R$ olduğu kullanılırsa $[\Gamma, mx] = m[\Gamma, x] \subseteq P$ olur ve $mx \in P^*$ olduğu görülür. Böylece $P^* <_r M$ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi de $\mathcal{C}$, R nin alt kümelerinin bir ailesi olsun.

$\bigcap\limits_{P\in\mathcal{C}} P^* = (\bigcap\limits_{P\in\mathcal{C}} P)^*$ olduğunu gösterelim.

$x \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{C}} P^*$ olsun. O zaman her $P \in \mathcal{C}$ için $x \in P^*$ olduğu görülür. P^* kümesinin tanımından her $P \in \mathcal{C}$ için $[\Gamma, x] \subseteq P$ olur. Bu ise $[\Gamma, x] \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{C}} P$ olmasını gerektirir. Tanım kullanılırsa $x \in (\bigcap\limits_{P\in\mathcal{C}} P)^*$ olduğu görülür. Diğer yandan

$$\begin{aligned} x \in (\bigcap_{P\in\mathcal{C}} P)^* &\Rightarrow [\Gamma, x] \subseteq \bigcap_{P\in\mathcal{C}} P \\ &\Rightarrow \forall P \in \mathcal{C} \; icin \; [\Gamma, x] \subseteq P \\ &\Rightarrow \forall P \in \mathcal{C} \; icin \; x \in P^* \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{P\in\mathcal{C}} P^* \end{aligned}$$

gerektirmeleri sağlandığından

$$(\bigcap_{P\in\mathcal{C}} P)^* \subseteq \bigcap_{P\in\mathcal{C}} P^*$$

olur. Böylece

$$\bigcap_{P\in\mathcal{C}} P^* = (\bigcap_{P\in\mathcal{C}} P)^*$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 2.5.2. *[9] R, M Γ-halkasının sağ operatör halkası, $T \subseteq M$ olmak üzere, $T <_r M$ ise $T^{*'} <_r R$ olur. Ayrıca M Γ-halkasının alt kümelerinin bir $\mathcal{D}$ ailesi için $\bigcap_{T\in\mathcal{D}} T^{*'} = (\bigcap_{T\in\mathcal{D}} T)^{*'}$ olur.*

R ve L, M Γ-halkasının sırasıyla sağ ve sol operatör halkaları olsunlar. Her $Q \subseteq L$ ve her $S \subseteq M$ için

$$Q^+ = \{x \in M : [x,\Gamma] \subseteq Q\}$$

ve

$$S^{+'} = \{l \in L : lM \subseteq S\}$$

kümeleri tanımlansın.

Önerme 2.5.3. *[9] L, M Γ-halkasının sol operatör halkası, $Q \subseteq L$ olmak üzere, $Q <_r L$ ise $Q^+ <_r M$ olur. Ayrıca L halkasının alt kümelerinin bir $\mathcal{K}$ ailesi için $\bigcap_{Q\in\mathcal{K}} Q^+ = (\bigcap_{Q\in\mathcal{K}} Q)^+$ olur.*

İspat: Lemmanın ispatı Önerme 2.5.1 ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Önerme 2.5.4. *[9] L, M Γ-halkasının sol operatör halkası, $S \subseteq M$ olmak üzere, $S <_r M$ ise $S^{+'} <_r L$ olur. Ayrıca M Γ-halkasının alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ koleksiyonu için $\bigcap_{S\in\mathcal{B}} S^{+'} = (\bigcap_{S\in\mathcal{B}} S)^{+'}$ olur.*

İspat: Lemmanın ispatı Önerme 2.5.1 ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Önerme 2.5.5. *[9] R ve L, M Γ-halkasının sırasıyla sağ ve sol operatör halkaları olsun. $P < R$, $Q < L$ ve $T < M$ asal idealler olsunlar. O zaman $T^{*'} < R$, $T^{+'} < L$ ve $P^*, Q^+ < M$ asal ideallerdir.*

İspat: Önerme 2.5.2 den $T < M$ iken $T^{*'} < R$ olduğu açıktır. $T^{*'}$ idealinin asal olduğunu gösterelim.

$U,V < R$ olmak üzere $UV \subseteq T^{*'}$ olsun. U ve V R halkasının idealleri olduğundan

$$URV \subseteq UV$$

elde edilir ve böylece

$$U[\Gamma,M]V \subseteq T^{*'}$$

olur. $*'$ işleminin tanımından $MU\Gamma MV \subseteq T$ olur ve T asal olduğundan

$$MU \subseteq T \; veya \; MV \subseteq T$$

elde edilir. Yine $T^{*'} = \{r \in R : Mr \subseteq T\}$ olduğundan

$$U \subseteq T^{*'} \; veya \; V \subseteq T^{*'}$$

olur. Yani $T^{*'}$ asal idealdir.

Benzer şekilde $T^{+'} < L$ asal olduğu gösterilebilir.

Şimdi $P^{*} < M$ asal olduğunu gösterelim.

$A,B < M$ ve $A\Gamma B \subseteq P^{*}$ olsun. R sağ operatör halkası olmak üzere,

$[\Gamma,A],[\Gamma,B] < R$ olur. R operatör halkasındaki çarpma işlemi göz önüne alınırsa

$$[\Gamma,A][\Gamma,B] = [\Gamma,A\Gamma B] \subseteq P$$

elde edilir. $P < R$ asal olduğundan

$$[\Gamma,A] \subseteq P \; veya \; [\Gamma,B] \subseteq P$$

elde edilir. Böylece

$$A \subseteq P^{*} \; veya \; B \subseteq P^{*}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece P^{*} idealinin asal ideal olduğu görülür.

$Q^{+} < M$ idealinin de asal olduğu benzer şekilde gösterilebilir. □

Teorem 2.5.6. *[9] $\mathcal{A}$, M Barnes anlamında Γ-halkasının tüm asal ideallerinin kümesi ve $\mathcal{B}$ R sağ(sol) operatör halkasının tüm asal ideallerinin kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ye $T < M$ asal idealini $T^{*'}$ idealine götüren birebir bir karşılık gelme vardır.*

İspat: T, M Γ-halkasının asal ideali olsun. $*'$ ve $*$ tanımlarından

$$(T^{*'})^* = \left\{x \in M : [\Gamma, x] \subseteq T^{*'}\right\} = \{x \in M : M\Gamma x \subseteq T\}$$

olur. T, M Γ-halkasının ideali olduğundan $M\Gamma T \subseteq T$ olur ve buradan $T \subseteq (T^{*'})^*$ elde edilir.

Diğer yandan $M\Gamma(T^{*'})^* \subseteq T$ ve T asal olduğundan

$$M \subseteq T \text{ veya } (T^{*'})^* \subseteq T$$

olur. Her iki durumda da $(T^{*'})^* \subseteq T$ olduğundan

$$(T^{*'})^* = T$$

elde edilir.

P, R halkasının asal ideali olsun. Bu durumda $*$ ve $*'$ işlemlerinin tanımı kullanılırsa

$$(P^*)^{*'} = \{r \in R : Mr \subseteq P^*\} = \{r \in R : [\Gamma, Mr] \subseteq P\}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. $P < R$ olduğu göz önüne alınırsa

$$[\Gamma, M]P \subseteq P$$

ifadesi sağlanır. Böylece $P \subseteq (P^*)^{*'}$ elde edilir.

Diğer yandan $[\Gamma, M(P^*)^{*'}] = R(P^*)^{*'} \subseteq P$ ve P asal olduğundan $(P^*)^{*'} \subseteq P$ olduğu görülür. Böylece

$$(P^*)^{*'} \subseteq P$$

olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç olarak M Γ-halkasının tüm asal idealleri ile R sağ operatör halkasının tüm asal ideallerinin birebir karşılık geldiği görülür.

Q, L halkasının asal ideali, T M halkasının asal ideali olmak üzere, $(T^{+'})^{+} = T$ ve $Q < L$ olmak üzere $(Q^{+})^{+'} = Q$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Böylece M Γ-halkasının tüm asal idealleri ile L sol operatör halkasının tüm asal ideallerinin birebir karşılık geldiği ispatlanabilir. $\square$

Sonuç 2.5.7. *R ve L, M Γ-halkasının sırasıyla sağ ve sol operatör halkaları olsunlar. O zaman R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi ile L halkasının tüm asal ideallerinin kümesi arasında P R halkasında asal ideal olmak üzere $P \to (P^{*})^{+'}$ şeklinde birebir bir karşılık gelme vardır. [9]*

3. Γ-halkasında k-türev

Bu bölümde H. Kandamar'ın Gamma halkasında k-türev makalesi ele alınmış ve bazı teoremlerde verilen hipotezlerden bir kısmının kaldırılıp kaldırılamayacağı incelenmiştir.

Lemma 3.0.1. *M, Nobusawa anlamında bir Γ-halka olsun. d, M Γ-halkasının bir k-türevi ise o zaman her $a \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $k(\alpha a \beta) = k(\alpha)a\beta + \alpha d(a)\beta + \alpha a k(\beta)$ eşitliği sağlanır.*

İspat: Her $x, y \in M$ için

$$d((x\alpha a)\beta y) = d(x\alpha a)\beta y + x\alpha a k(\beta)y + x\alpha a\beta d(y)$$

$$= d(x)\alpha a\beta y + xk(\alpha)a\beta y + x\alpha d(a)\beta y + x\alpha a k(\beta)y + x\alpha a\beta d(y)$$

olur. Diğer yandan,

$$d(x(\alpha a\beta)y) = d(x)\alpha a\beta y + xk(\alpha a\beta)y + x\alpha a\beta d(y)$$

sağlanır. Burada iki eşitiğin sol taraflarının eşit olduğu kullanılırsa

$$d(x)\alpha a\beta y + xk(\alpha)a\beta y + x\alpha d(a)\beta y + x\alpha a k(\beta)y + x\alpha a\beta d(y)$$

$$= d(x)\alpha a\beta y + xk(\alpha a\beta)y + x\alpha a\beta d(y)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece,

$$x(k(\alpha)a\beta + \alpha d(a)\beta + \alpha a k(\beta))y = xk(\alpha a\beta)y$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$x(k(\alpha)a\beta + \alpha d(a)\beta + \alpha a k(\beta) - k(\alpha a\beta))y = 0$$

olur. Tanım 2.2.1 (N3) özelliği kullanılarak,

$$k(\alpha)a\beta + \alpha d(a)\beta + \alpha a k(\beta) - k(\alpha a\beta) = 0$$

bulunur. Böylece,

$$k(\alpha a\beta) = k(\alpha)a\beta + \alpha d(a)\beta + \alpha a k(\beta)$$

elde edilmiş olur. $\square$

Lemma 3.0.2. *M, Nobusawa anlamında bir Γ-halka olsun. d, M Γ-halkasının hem k_1-türevi hem de k_2-türevi ise $k_1 = k_2$ dir.*

İspat: Her $a, b \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için d, k_1-türev olduğundan

$$d(a\beta b) = d(a)\beta b + ak_1(\beta)b + a\beta d(b)$$

olur. Aynı zamanda d, k_2-türev de olduğundan

$$d(a\beta b) = d(a)\beta b + ak_2(\beta)b + a\beta d(b)$$

olur. Bu durumda sağ tarafların eşit olması kullanılarak,

$$d(a)\beta b + ak_1(\beta)b + a\beta d(b) = d(a)\beta b + ak_2(\beta)b + a\beta d(b)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$ak_1(\beta)b = ak_2(\beta)b$$

olduğu görülür. Bu eşitlikten

$$a(k_1(\beta) - k_2(\beta))b = 0$$

bulunur. Burada Tanım 2.2.1 (N3) özelliği kulllanılırsa, her $\beta \in \Gamma$ için

$$k_1(\beta) - k_2(\beta) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$k_1 = k_2$$

olur. $\square$

Teorem 3.0.3. *R karakteristiği ikiden farklı olan ve Tanım 2.2.1 (N3) koşulunu sağlayan bir halka ve d, $R\,\Gamma(=R)$-halkasının bir k-türevi olsun. d nin R halkasında herhangi bir türev olması için gerek ve yeter koşul $d=k$ olmasıdır.*

İspat: $CharR \neq 2$ olsun ve R halkasında Tanım 2.2.1 (N3) koşulu sağlansın.

d, R $\Gamma(=R)$-halkasının bir k-türevi olsun. d, R halkasının herhangi bir türevi olduğundan her $a,b,\beta \in R$ için

$$d(a\beta b) = d(a\beta)b + a\beta d(b) = d(a)\beta b + ad(\beta)b + a\beta d(b)$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan d, $R\,\Gamma(=R)$-halkasının bir k-türevi olduğu için

$$d(a\beta b) = d(a)\beta b + ak(\beta)b + a\beta d(b)$$

olduğu biliniyor. Yukarıdaki eşitliklerin sağ tarafları eşit olduğundan,

$$d(a)\beta b + ad(\beta)b + a\beta d(b) = d(a)\beta b + ak(\beta)b + a\beta d(b)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise,

$$a(d(\beta) - k(\beta))b = 0$$

olmasını gerektirir. Burada Tanım 2.2.1 (N3) koşulu kullanılırsa her $\beta \in \Gamma(=R)$ için

$$d(\beta) - k(\beta) = 0$$

olur. Sonuç olarak

$$d = k$$

elde edilir.

Şimdi teoremin diğer tarafını ispatlayalım. d, $d=k$ olacak şekilde R Γ(=R)-halkasının bir türevi olsun. $d : R \to R$ toplamsal dönüşüm olduğundan her $x,y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ olduğunu göstermek gerekir. Hipotezden, her $x,y,t \in R$ için

$$d(xyt) = d(x)yt + xd(y)t + xyd(t)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte $z,n \in R$ için y yerine yz, t yerine tn yazılırsa, $d(x(yz)(tn)) = d(xy(ztn))$ eşitliği kullanılarak,

$$d(x)(yz)(tn) + xd(yz)(tn) + x(yz)d(tn) = d(x)y(ztn) + xd(y)(ztn) + xyd(ztn)$$

bulunur. Buradan

$$xd(yz)(tn) + xyzd(tn) = xd(y)ztn + xyd(z)tn + xyzd(t)n + xyztd(n)$$

olduğu görülür. Böylece her $m \in R$ için

$$x(d(yz)(tn) + yzd(tn) - d(y)ztn - yd(z)tn - yzd(t)n - yztd(n))m = 0$$

elde edilir. Burada Tanım 2.2.1 (N3) özelliği kullanılarak, her $y,z,t,n \in R$ için,

$$d(yz)(tn) + yzd(tn) - d(y)ztn - yd(z)tn - yzd(t)n - yztd(n) = 0 \tag{3.0.1}$$

bulunur.

Ayrıca d((yz)tn)=d(yz(tn)) olduğundan, d dönüşümünün R $(R =)\Gamma$-halkasında d-türev olduğu kullanılırsa

$$d(yz)tn - yzd(tn) - d(y)ztn - yd(z)tn + yzd(t)n + yztd(n) = 0 \tag{3.0.2}$$

bulunur.

3.0.1 ve 3.0.2 eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$2d(yz)tn - 2d(y)ztn - 2yd(z)tn = 0$$

eşitliği elde edilir. R halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan son eşitlikten

$$d(yz)tn - d(y)ztn - yd(z)tn = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanı sol taraftan $s \in R$ ile çarpılırsa,

$$s(d(yz)t - d(y)zt - yd(z)t)n = 0$$

olduğu görülür. (N3) özelliği kullanılırsa son eşitlikten

$$d(yz)t - d(y)zt - yd(z)t = 0$$

elde edilir. Her $r \in R$ için son eşitlik sol taraftan r ile çarpılırsa

$$r(d(yz) - d(y)z - yd(z))t = 0$$

olur. Burada (N3) özelliği kullanılarak

$$d(yz) - d(y)z - yd(z) = 0$$

elde edilir. Bu ise her $y, z \in R$ için

$$d(yz) = d(y)z + yd(z)$$

olmasını gerektirir. Böylece d dönüşümünün R halkasının bir türevi olduğu kanıtlanmış olur. □

Uyarı 3.0.4. *M, Barnes anlamında Γ-halka ve d,M Γ-halkasının bir k-türevi ise k teklikle belirli olmak zorunda değildir. M, Nobusawa anlamında Γ-halka d, M Γ-halkasının bir k-türevi ise k teklikle bellidir. Özel olarak R, (N3) özelliğini sağlıyor ise (R yarıasal veya, R birimli veya sıfırdan farklı sıfır böleni yok) R, Nobusawa anlamında Γ-halkadır. Bu durumda CharR $\neq 2$ olacak şekilde d, R nin k-türevi ise d, bu halkanın herhangi bir türevi olması için gerek ve yeter koşul $d = k$ olmasıdır.*

Aksi söylenmedikçe bundan sonra M, Nobusawa anlamında Γ-halka olarak alınacak ve $a, b \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$[a,b]_\alpha = a\alpha b - b\alpha a$$

$$[\alpha,\beta]_a = \alpha a\beta - \beta a\alpha$$

gösterimleri kullanılacaktır.

Lemma 3.0.5. *M bir Γ-halka ve d, M Γ-halkasında bir k-türev olsun. O zaman $a,b,c,x \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(i) $[a,b]_\beta = -[b,a]_\beta$, $[\alpha,\beta]_a = -[\beta,\alpha]_a$

(ii) $[a+b,c]_\beta = [a,c]_\beta + [b,c]_\beta$, $[\alpha+\beta,\gamma]_a = [\alpha,\gamma]_a + [\beta,\gamma]_a$

(iii) $[a\alpha b,x]_\beta = [a,x]_\beta \alpha b + a[\alpha,\beta]_x b + a\alpha[b,x]_\beta$

(iv) $[\alpha b\beta,\gamma]_a = [\alpha,\gamma]_a b\beta + \alpha[b,a]_\gamma\beta + \alpha b[\beta,\gamma]_a$

(v) $[[\alpha,\beta]_a,\gamma]_a + [[\gamma,\alpha]_a,\beta]_a + [[\beta,\gamma]_a,\alpha]_a = 0$

(vi) $[[a,b]_\beta,c]_\beta + [[c,a]_\beta,b]_\beta + [[b,c]_\beta,a]_\beta = 0$

(vii) $d([a,b]_\beta) = [d(a),b]_\beta + [a,b]_{k(\beta)} + [a,d(b)]_\beta$

(viii) $k([\alpha,\beta]_a) = [k(\alpha),\beta]_a + [\alpha,\beta]_{d(a)} + [\alpha,k(\beta)]_a$

İspat: $a,b,c \in M$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ olmak üzere

(i) $[a,b]_\beta = -[b,a]_\beta$ olduğunu gösterelim.

$$[a,b]_\beta = a\beta b - b\beta a = -(b\beta a - a\beta b) = -[b,a]_\beta$$

olur. Benzer şekilde,

$$[\alpha,\beta]_a = -[\beta,\alpha]_a$$

eşitliğinin varlığı da ispatlanabilir.

(ii) Şimdi $[a+b,c]_\beta = [a,c]_\beta + [b,c]_\beta$ olduğunu gösterelim. Her $a,b,c \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için

$$[a+b,c]_\beta = (a+b)\beta c - c\beta(a+b) = a\beta c + b\beta c - c\beta a - c\beta b$$

$$= a\beta c - c\beta a + b\beta c - c\beta b = [a,c]_\beta + [b,c]_\beta$$

eşitlikleri sağlandığından

$$[a+b,c]_\beta = [a,c]_\beta + [b,c]_\beta$$

olur. Benzer şekilde

$$[\alpha+\beta,\gamma]_a = [\alpha,\gamma]_a + [\beta,\gamma]_a$$

olduğu ispatlanabilir.

(iii) Şimdi $[a\alpha b,x]_\beta = [a,x]_\beta \alpha b + a[\alpha,\beta]_x b + a\alpha[b,x]_\beta$ olduğunu gösterelim. Her $a,b,x \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için

$$[a,x]_\beta \alpha b + a[\alpha,\beta]_x b + a\alpha[b,x]_\beta$$

$$= (a\beta x)\alpha b - (x\beta a)\alpha b + a(\alpha x\beta)b - a(\beta x\alpha)b + a\alpha(b\beta x) - a\alpha(x\beta b)$$

$$= a\alpha b\beta x - x\beta a\alpha b = [a\alpha b,x]_\beta$$

eşitlikleri sağlandığından $[a\alpha b,x]_\beta = [a,x]_\beta \alpha b + a[\alpha,\beta]_x b + a\alpha[b,x]_\beta$ olur.

(iv) İspat (iii) şıkkına benzer şekilde yapılabilir.

(v) $[[\alpha,\beta]_a,\gamma]_a + [[\gamma,\alpha]_a,\beta]_a + [[\beta,\gamma]_a,\alpha]_a = 0$ olduğunu gösterelim. Her $\alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ ve $a \in M$ için

$$[[\alpha,\beta]_a,\gamma]_a + [[\gamma,\alpha]_a,\beta]_a + [[\beta,\gamma]_a,\alpha]_a$$

$$= [\alpha a\beta - \beta a\alpha,\gamma]_a + [\gamma a\alpha - \alpha a\gamma,\beta]_a + [\beta a\gamma - \gamma a\beta,\alpha]_a$$

$$= \alpha a\beta a\gamma - \gamma a\alpha a\beta - \beta a\alpha a\gamma + \gamma a\beta a\alpha + \gamma a\alpha a\beta - \beta a\gamma a\alpha$$

$$-\alpha a\gamma a\beta + \beta a\alpha a\gamma + \beta a\gamma a\alpha - \alpha a\beta a\gamma + \gamma a\alpha a\beta = 0$$

eşitlikleri sağlandığından

$$[[\alpha,\beta]_a,\gamma]_a + [[\gamma,\alpha]_a,\beta]_a + [[\beta,\gamma]_a,\alpha]_a = 0$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

(vi) İspat (v) şıkkına benzer şekilde yapılabilir.

(vii) $d([a,b]_\beta) = [d(a),b]_\beta + [a,b]_{k(\beta)} + [a,d(b)]_\beta$ olduğunu gösterelim. Her $a,b \in M$, $\beta \in \Gamma$ için türev tanımı kullanılırsa

$$d([a,b]_\beta) = d(a\beta b - b\beta a)$$

$$= d(a\beta b) - d(b\beta a) = d(a)\beta b + ak(\beta)b + a\beta d(b) - d(b)\beta a - bk(\beta)a - b\beta d(a)$$

$$= d(a)\beta b - b\beta d(a) + ak(\beta)b - bk(\beta)a + a\beta d(b) - d(b)\beta a$$

$$= [d(a),b]_\beta + [a,b]_{k(\beta)} + [a,d(b)]_\beta$$

eşitlikleri sağlandığından ispat biter.

(viii)İspat (vii) şıkkına benzer şekilde yapılabilir. □

Lemma 3.0.6. *M asal Γ-halkası, U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve Ω, Γ M-halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. O zaman $a,b \in M$ ve $\alpha,\beta \in \Gamma$ için aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $a\Omega b = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$

(ii) $\alpha U\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ veya $\beta = 0$

(iii) $a\Gamma U\Gamma b = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$

(iv) $\alpha M\Omega M\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ veya $\beta = 0$

(v) Her $u,v \in U$ için $u\alpha v = 0$ ise o zaman $\alpha = 0$ olur.

(vi) $C_\Gamma = 0 \Leftrightarrow C_M = 0$

(vii) $C_\Gamma \neq 0$ veya $C_M \neq 0 \Rightarrow M$ değişmeli bir Γ-halkadır.

(viii) $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için $U \subseteq C_\gamma$ ise M değişmeli bir Γ-halkadır.

(ix) $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve her $u,v \in U$ için $[u,v]_\gamma = 0$ ise M değişmeli bir Γ-halkadır. [7]

İspat: (i) $a\Omega b = 0$ olsun. Ω, ideal olduğundan $\Omega M\Gamma \subseteq \Omega$ ve $\Gamma M\Omega \subseteq \Omega$ olur. Buradan $a\Gamma M\Omega M\Gamma b = 0$ elde edilir. M asal Γ-halka olduğundan son eşitlik $a\Gamma M\Omega M = 0$ veya $b = 0$ olmasını gerektirir. Buradan $a = 0$ veya $b = 0$ veya $M\Omega M = 0$ olduğu görülür. Burada $M\Omega M = 0$ ise $\Omega = 0$ olacağından bu durum $\Omega \neq 0$ oluşuyla çelişir. Böylece $a\Omega b = 0$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ sonucuna ulaşılır.

(ii) $\alpha U\beta = 0$ olsun. Burada (i) şıkkı ve Önerme 2.2.7 kullanılarak $\alpha = 0$ veya $\beta = 0$ olduğu görülür.

(iii) $a\Gamma U\Gamma b = 0$ olsun. U,M Γ-halkasının ideali olduğu için $a\Gamma M\Gamma U\Gamma M\Gamma b \subseteq a\Gamma U\Gamma b = 0$ olur. Burada arka arkaya M Γ halkasının asal olduğu kullanılarak $a = 0$ veya $b = 0$ sonucuna ulaşılır.

(iv) Önerme 2.2.7 için Γ asal M-halka olması kullanılarak, (iii) şıkkına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(v) Her $u,v \in U$ için $u\alpha v = 0$ olsun. U, M nin sıfırdan farklı bir ideali olduğundan

$U \subset M$ olduğu görülür. O halde her $u, v \in U$ $M\alpha M = 0$ elde edilir. Böylece (N3) kuralı kullanılarak $\alpha = 0$ bulunur.

(vi)$C_M = 0$ olsun. $C_\Gamma \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman C_Γ nın sıfırdan farklı bir a elemanı vardır. Buradan her $\gamma \in \Gamma$ ve her $x \in M$ için $a\gamma x - x\gamma a = 0$ bulunur. Bu eşitlikte γ yerine her $\delta \in \Gamma$ ve $y \in M$ için $\gamma y \delta$ yazılıp $a \in C_\Gamma$ olması kullanılarak

$$0 = a\gamma y\delta x - x\gamma y\delta a = a\gamma y\delta x - x\gamma a\delta y = a\gamma y\delta x - a\gamma x\delta y = a\gamma(y\delta x - x\delta y)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak her $\gamma, \delta \in \Gamma$ ve $x, y \in M$ için

$$a\gamma(y\delta x - x\delta y) = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Her $\gamma \in \Gamma$ için bu eşitliğin geçerli olduğu göz önüne alınırsa,

$$a\Gamma(y\delta x - x\delta y) = 0$$

olur. Böylece M asal Γ-halkası ve $a \neq 0$ olması kullanılırsa son eşitlik, her $x, y \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ için

$$x\delta y - y\delta x = 0$$

olmasını gerektirir. Bu durum her $\delta \in \Gamma$ için $\delta \in C_M$ olduğunu gösterir fakat ispatın başında $C_M = 0$ alındığı için çelişki ortaya çıkar. O halde $C_\Gamma = 0$ olmalıdır. $C_\Gamma = 0$ iken $C_M = 0$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

(vii) $C_\Gamma \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman C_Γ nın sıfırdan farklı bir a elemanı vardır. Bu durumda, her $\gamma \in \Gamma$ ve $x \in M$ için $x\gamma a = a\gamma x$ olur. Böylece

$$a\delta(x\gamma y - y\gamma x) = a\delta x\gamma y - a\delta y\gamma x = y(\delta x\gamma)a - a\delta(y\gamma x) = y\delta(x\gamma a) - a\delta(y\gamma x)$$

$$= y\delta(a\gamma x) - a\delta(y\gamma x) = (y\delta a)\gamma x - a\delta(y\gamma x) = (a\delta y)\gamma x - (a\delta y)\gamma x = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $a\delta(x\gamma y - y\gamma x) = 0$ olur. Buradan her $x, y \in M$, $\gamma \in \Gamma$ için

$$a\Gamma(x\gamma y - y\gamma x) = 0$$

elde edilir. M asal olduğundan son eşitlik $x\gamma y - y\gamma x = 0$ olmasını gerektirir. O halde M değişmeli Γ-halkadır. □

Teorem 3.0.7. *M, karakteristiği ikiden farklı olan sıfırdan farklı bir asal Γ-halka ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. Her $x \in M$ için $[[x,a]_\gamma, a]_\gamma = 0$ olacak şekilde bir $a \in M$ var ise o zaman $a\gamma a = 0$ veya $a \in C_\gamma$ olur.*

İspat: $\gamma \neq 0$ olsun.($\gamma = 0$ olursa $a\gamma a = 0$ olur.) Hipotezden, her $x, y \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $[[x\beta y, a]_\gamma, a]_\gamma = 0$ olur. Önerme 3.0.5(iii) kullanılırsa,

$$[[x,a]_\gamma \beta y + x[\beta,\gamma]_a y + x\beta[y,a]_\gamma, a]_\gamma = 0$$

elde edilir. Buradan

$$[[x,a]_\gamma \beta y, a]_\gamma + [x[\beta,\gamma]_a y, a]_\gamma + [x\beta[y,a], a]_\gamma = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte Önerme 3.0.5(iii) göz önüne alındığında

$$[[x,a]_\gamma, a]_\gamma \beta y + [x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a y + [x,a]_\gamma \beta [y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma [\beta,\gamma]_a y$$

$$+x[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a y + x[\beta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma \beta[y,a]_\gamma + x[\beta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + x\beta[[y,a]_\gamma, a]_\gamma = 0$$

elde edilir. Burada hipotez kullanılırsa,

$$2[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a y + 2[x,a]_\gamma \beta[y,a]_\gamma + 2x[\beta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + x[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a y = 0 \quad (3.0.3)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte x yerine $[x,a]_\gamma$, y yerine $[y,a]_\gamma$ yazılırsa her $x, y \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için

$$[x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0 \quad (3.0.4)$$

eşitliği elde edilir.

Diğer yandan her $z \in M$ ve her $\beta, \delta \in \Gamma$ için, Önerme 3.0.5(iv) kullanılırsa

$$[\beta[z,a]_\gamma \delta, \gamma]_a = [\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma \delta + \beta[[z,a]_\gamma, a]_\gamma \delta + \beta[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a$$

olduğu görülür ve burada hipotezden $[[z,a]_\gamma, a]_\gamma = 0$ olduğu için

$$[\beta[z,a]_\gamma \delta, \gamma]_a = [\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma \delta + \beta[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a \quad (3.0.5)$$

elde edilir.

Şimdi 3.0.4 eşitliğinde β yerine $z \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ olmak üzere $\beta[z,a]_\gamma\delta$ yazılırsa,

$$[x,a]_\gamma[[\beta[z,a]_\gamma\delta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0$$

eşitliği bulunur. Böylece hipotez ve 3.0.4 eşitliği kullanılırsa son eşitlikten,

$0 = [x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma\delta + \beta[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma$

$= [x,a]_\gamma([[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a[z,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma + [\beta,\gamma]_a[[z,a]_\gamma,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma$

$+ [\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + [\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma$

$+ \beta[[z,a]_\gamma,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + \beta[[z,a]_\gamma,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma)$

$= 2[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a[z,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Buradan

$$2[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a[z,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada yine 3.0.4 eşitliği ve karakteristiğin ikiden farklı olması kullanılarak,

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0 \tag{3.0.6}$$

olduğu görülür.

Şimdi 3.0.6 eşitliğinde β yerine, $m \in M$ ve $\sigma \in \Gamma$ olmak üzere $\beta[m,a]_\gamma\sigma$ yazılırsa her $x,y,z,m \in M$ ve her $\beta,\delta,\sigma \in \Gamma$ için,

$$[x,a]_\gamma[\beta[m,a]_\gamma\sigma,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0$$

olur. Burada Önerme 3.0.5(iv) kullanılırsa,

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[m,a]_\gamma\sigma[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma\beta[[m,a]_\gamma,a]_\gamma\sigma[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma +$$

$$[x,a]_\gamma\beta[m,a]_\gamma[\sigma,\gamma]_a[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0$$

elde edilir. Böylece 3.0.6 eşitliği ve hipotez kullanılarak her $\sigma \in \Gamma$ için

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[m,a]_\gamma\sigma[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0$$

olduğu görülür. Bu eşitlik her $\sigma \in \Gamma$ için geçerli olduğundan

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[m,a]_\gamma\Gamma[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0$$

olur ve M asal Γ-halka olduğu için son eşitlik
$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[m,a]_\gamma = 0$ veya $[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0$
olmasını gerektirir.
Böylece her $x,m \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[m,a]_\gamma = 0 \tag{3.0.7}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Şimdi 3.0.3 eşitliğinde x yerine $[x,a]_\gamma$ yazılırsa,

$$2[[x,a]_\gamma,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a y + 2[[x,a]_\gamma,a]_\gamma\beta[y,a]_\gamma + 2[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[y,a]_\gamma$$

$$+[x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a y = 0$$

olur. Burada 3.0.7 eşitliği ve hipotez kullanılırsa her $x,y \in M$,$\beta \in \Gamma$ için,

$$[x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a y = 0 \tag{3.0.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde 3.0.3 eşitliğinde y yerine $[y,a]_\gamma$ yazılırsa her $x,y \in M$, her $\beta \in \Gamma$ için

$$x[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma = 0 \tag{3.0.9}$$

elde edilir. 3.0.8 eşitliğinde y yerine $[y,a]_\gamma$ ve β yerine $z \in M$, $\delta \in \Gamma$ olmak üzere $\beta z\delta$ yazılırsa,

$$0 = [x,a]_\gamma[[\beta z\delta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma$$

$$= [x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a z\delta + \beta[z,a]_\gamma\delta + \beta z[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma$$

$$= [x,a]_\gamma[[\beta,\gamma]_a,\gamma]_a z\delta[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma$$

$$+[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a[z,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma$$

$$+[x,a]_\gamma\beta[[z,a]_\gamma,a]_\gamma\delta[y,a]_\gamma + [x,a]_\gamma\beta[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma$$

$$+[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma+[x,a]_\gamma[z,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma$$

$$+[x,a]_\gamma\beta z[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a[y,a]_\gamma$$

eşitliği elde edilir. Burada 3.0.7, 3.0.8, 3.0.9 eşitlikleri, hipotez ve karakteristiğin ikiden farklı olduğu kullanılırsa, her $x,y,z\in M$ ve $\beta,\delta\in\Gamma$ için

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma=0$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.
Son eşitlikte z yerine her $n\in M$ ve her $\sigma\in\Gamma$ için $z\sigma n$ yazılırsa,

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z\sigma n[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma=0$$

olur. Bu eşitlik her $\sigma\in\Gamma$ için geçerli olduğundan

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z\Gamma n[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma=0$$

elde edilir. Sonuç olarak M asal Γ-halka olduğu için son eşitlik

$$[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z=0 \; veya \; n[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma=0$$

olmasını gerektirir.
Öncelikle $[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z=0$ olduğu durumunu inceleyelim.
Burada β yerine $\beta y[\delta,\gamma]_a$ yazılırsa,

$$0=[x,a]_\gamma[\beta y[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a z$$

$$=[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a y[\delta,\gamma]_a z+[x,a]_\gamma\beta[y,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a z+[x,a]_\gamma\beta y[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a z$$

eşitlikleri sağlanır. Burada her $x,z\in M$ ve $\beta,\gamma\in\Gamma$ için $[x,a]_\gamma[\beta,\gamma]_a z=0$ ve $[y,a]_\gamma[\delta,\gamma]_a z=0$ olduğu kullanılırsa

$$[x,a]_\gamma\beta y[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a z=0$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik her $\beta\in\Gamma$ için geçerli olduğundan

$$[x,a]_\gamma\Gamma y[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a z=0$$

olur. Buradan M Γ-halkasının asal olduğu göz önüne alınırsa her $x \in M$ için $[x,a]_\gamma = 0$ veya her $y,z \in M$, $\delta \in \Gamma$ için $y[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a z = 0$ olduğu görülür.

O halde her $x \in M$ için $[x,a]_\gamma = 0$ ise $a \in C_\gamma$ olur.

Diğer yandan $y[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a z = 0$ ise (N3) özelliğinden

$$[[\delta,\gamma]_a,\gamma]_a = 0 \tag{3.0.10}$$

olur.

3.0.3 eşitliğinde karakteristiğin ikiden farklı olması ve 3.0.10 eşitliği kullanılırsa, her $x,y \in M$, $\beta \in \Gamma$ için

$$[x,a]_\gamma \beta [y,a]_\gamma + x[\beta,\gamma]_a [y,a]_\gamma = 0 \tag{3.0.11}$$

eşitliği elde edilir.

3.0.11 eşitliğinde x yerine $z \in M$, $\delta \in \Gamma$ olmak üzere $x\delta z$ yazılıp 3.0.11 eşitliği kullanılırsa

$[x\delta z,a]_\gamma \beta [y,a]_\gamma + x\delta z[\beta,\gamma]_a [y,a]_\gamma = 0$

$\Rightarrow [x,a]_\gamma \delta z \beta [y,a]_\gamma + x[\delta,\gamma]_a z\beta [y,a]_\gamma + x\delta [z,a]_\gamma \beta [y,a]_\gamma + x\delta z[\beta,\gamma]_a [y,a]_\gamma = 0$

$\Rightarrow ([x,a]_\gamma \delta + x[\delta,\gamma]_a) z\beta [y,a]_\gamma = 0$

$\Rightarrow ([x,a]_\gamma \delta + x[\delta,\gamma]_a) z\Gamma [y,a]_\gamma = 0$

gerektirmeleri sağlanır. Buradan M asal Γ-halka olduğu için

$[x,a]_\gamma \delta z + x[\delta,\gamma]_a z = 0$ veya $[y,a]_\gamma = 0$ olur.

$[y,a]_\gamma = 0$ ise $a \in C_\gamma$ olur.

$[x,a]_\gamma \delta z + x[\delta,\gamma]_a z = 0$ olsun. Her $x,z \in M$, $\delta \in \Gamma$ için Önerme 3.0.5 den,

$$[x\delta z,a]_\gamma = [x,a]_\gamma \delta z + x[\delta,\gamma]_a z + x\delta [z,a]_\gamma$$

olur. Diğer taraftan $[x,a]_\gamma [\beta,\gamma]_a z = 0$ olduğundan,

$$[x\delta z,a]_\gamma = x\delta [z,a]_\gamma \tag{3.0.12}$$

olur. Buradan Önerme 3.0.5(ii) ve 3.0.12 eşitliği kullanılarak,

$$0 = [[x,a]_\gamma,a]_\gamma = [x\gamma a - a\gamma x,a]_\gamma$$

$$= [x\gamma a, a]_\gamma - [a\gamma x, a]_\gamma = x\gamma[a,a]_\gamma - a\gamma[x,a]_\gamma = -a\gamma[x,a]_\gamma$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece

$$-a\gamma[x,a]_\gamma = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten her $x \in M$ için

$$a\gamma x\gamma a = a\gamma a\gamma x \tag{3.0.13}$$

olduğu görülür.

Ayrıca hipotezden $a\gamma[x,a]_\gamma = [x,a]_\gamma\gamma a$ eşitliği de sağlanmaktadır. 3.0.13 eşitliğinden bu eşitliğin sol tarafı sıfırdır. O halde bu eşitlik kullanılarak,

$$a\gamma x\gamma a = x\gamma a\gamma a \tag{3.0.14}$$

eşitliğine ulaşılır. Şimdi 3.0.13 ve 3.0.14 eşitliklerinin sol tarafları birbirine eşit olduğundan,

$$x\gamma a\gamma a = a\gamma a\gamma x$$

elde edilir. Böylece $a\gamma a \in C_\gamma$ sonucuna ulaşılmış olur.

Diğer yandan 3.0.12 eşitliği kullanılarak

$$a\beta a\gamma a - a\gamma a\beta a = [a\beta a, a]_\gamma = a\beta[a,a]_\gamma = a\beta(a\gamma a - a\gamma a) = 0$$

olarak bulunur. Buradan

$$a\beta a\gamma a - a\gamma a\beta a = 0$$

olduğu görülür. O halde son eşitlik ve $a\gamma a \in C_\gamma$ olması kullanılarak, her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$a\gamma a\beta[x,a]_\gamma = 0$$

olur. Buradan

$$a\gamma a\Gamma[x,a]_\gamma = 0$$

yazılabilir ve M asal Γ-halka olduğu için

$$a\gamma a=0 \text{ veya } [x,a]_\gamma=0$$

olur. Yani

$$a\gamma a=0 \text{ veya } a\in C_\gamma$$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

$n[\delta,\gamma]_a[y,a]_\gamma=0$ olduğunda benzer şekilde ispat yapılarak $a\gamma a=0$ veya $a\in C_\gamma$ olduğu görülebilir. $\square$

$I_{a\gamma}:M\to M$, $I_{a\gamma}(x)=[a,x]_\gamma$ ve $I_{\gamma a}:\Gamma\to\Gamma$, $I_{\gamma a}(\beta)=[\gamma,\beta]_a$ olmak üzere $I_{a\gamma}$, $I_{\gamma a}$-türev olduğu göz önüne alınırsa yukarıda verilen teorem,

"M karakeristiği ikiden farklı Γ-halka, $0\neq\gamma\in\Gamma$ ve $a\gamma a\neq 0$ olsun. $I^2_{\gamma a}(M)=0$ ise $a\in C_\gamma$ olur."

olarak ifade edilebilir.

Önerme 3.0.8. *M asal Γ-halka, γ ve a sırasıyla Γ ve C_γ nın sıfırdan farklı elemanları olsun. Her $x,y\in M$ ve $\beta\in\Gamma$ için aşağıdaki durumlar sağlanır.*

(i) $[\gamma,\beta]_a=0$

(ii) $[a\gamma x,y]_\beta=a\gamma[x,y]_\beta$ *ve* $[x\gamma a,y]_\beta=[x,y]_\beta\gamma a$

(iii) $[a\beta x,y]_\gamma=[a,y]_\beta\gamma x+a\beta[x,y]_\gamma$

(iv) $b\in C_\gamma$ ise $[a\gamma b,x]_\beta=[a\beta b,x]_\gamma=a\gamma[b,x]_\beta=a[\beta,\gamma]_x b$ *olur.*

(v) $b\in C_\gamma$ ve $a\Gamma b\subseteq C_\gamma$ ise $b=0$ veya M, değişmeli bir Γ-halkadır.

İspat: (i) $a\in C_\gamma$ olduğundan her $x,y\in M$, $\beta\in\Gamma$ için

$$x[\gamma,\beta]_a y=x\gamma a\beta y-x\beta a\gamma y=a\gamma x\beta y-x\beta y\gamma a=a\gamma x\beta y-a\gamma x\beta y=0$$

eşitliği sağlanır. Yani her $x,y\in M$ için

$$x[\gamma,\beta]_a y=0$$

olur. Buradan (N3) özelliği kullanılarak $[\gamma,\beta]_a = 0$ bulunur.

(ii) Her $x,y \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için $a \in C_\gamma$ olduğu kullanılırsa

$$[a\gamma x,y]_\beta = a\gamma x\beta y - y\beta(a\gamma x) = a\gamma x\beta y - (y\beta x)\gamma a$$

$$= a\gamma x\beta y - a\gamma y\beta x = a\gamma[x,y]_\beta$$

ve

$$[x\gamma a,y]_\beta = (x\gamma a)\beta y - y\beta x\gamma a = a\gamma(x\beta y) - y\beta x\gamma a$$

$$= x\beta y\gamma a - y\beta x\gamma a = [x,y]_\beta\gamma a$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Böylece $[a\gamma x,y]_\beta = a\gamma[x,y]_\beta$ ve $[x\gamma a,y]_\beta = [x,y]_\beta\gamma a$ eşitliklerinin var olduğu gösterilmiş olur.

(iii) $a \in C_\gamma$ olduğu göz önüne alınırsa, her $x,y \in M$, $\beta \in \Gamma$ için

$$[a\beta x,y]_\gamma = a\beta x\gamma y - (y\gamma a)\beta x = a\beta x\gamma y - a\gamma(y\beta x)$$

$$= a\beta x\gamma y - y\beta x\gamma a = a\beta x\gamma y - y\beta a\gamma x$$

ve

$$[a,y]_\beta\gamma x + a\beta[x,y]_\gamma = a\beta y\gamma x - y\beta a\gamma x + a\beta x\gamma y - a\beta y\gamma x = a\beta x\gamma y - y\beta a\gamma x$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$[a\beta x,y]_\gamma = [a,y]_\beta\gamma x + a\beta[x,y]_\gamma$$

olduğu görülür.

(iv) Her $x \in M$, $\beta \in \Gamma$ için $[a\gamma b,x]_\beta = a\gamma bx\beta - x\beta a\gamma b$ eşitliğinin sağ yanında $a,b \in C_\gamma$ olduğu kullanılırsa

$$[a\gamma b,x]_\beta = b\gamma a\beta x - x\beta b\gamma a$$

elde edilir. Son eşitlikte $a,b \in \Gamma$ olduğu kullanılırsa

$$[a\gamma b,x]_\beta = a\beta x\gamma b - a\gamma x\beta b$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Yine $a,b \in C_\gamma$ olduğu kullanılırsa son eşitlik

$$[a\gamma b,x]_\beta = a\beta b\gamma x - x\gamma a\beta b$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$[a\gamma b,x]_\beta = [a\beta b,x]_\gamma$$

olduğu görülür.

Şimdi $[a\beta b,x]_\gamma = a\gamma[b,x]_\beta$ olduğunu gösterelim. $a \in C_\gamma$ olduğu kullanılırsa

$$[a\beta b,x]_\gamma = a\beta b\gamma x - x\gamma a\beta b = a\beta x\gamma b - a\gamma x\beta b$$

$$= b\gamma a\beta x - a\gamma x\beta b = a\gamma b\beta x - a\gamma x\beta b = a\gamma[b,x]_\beta$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $[a\beta b,x]_\gamma = a\gamma[b,x]_\beta$ elde edilir.

Son olarak $a\gamma[b,x]_\beta = a[\beta,\gamma]_x b$ olduğunu gösterelim. Burada $a \in C_\gamma$ olmak üzere

$$a\gamma[b,x]_\beta = a\gamma b\beta x - a\gamma x\beta b = b\gamma a\beta x - a\gamma x\beta b$$

$$= a\beta x\gamma b - a\gamma x\beta b = a[\beta,\gamma]_x b$$

elde edilir. Böylece

$$[a\gamma b,x]_\beta = [a\beta b,x]_\gamma = a\gamma[b,x]_\beta = a[\beta,\gamma]_x b$$

eşitliklerinin var olduğu ispatlanmış olur.

(v) $a\Gamma b = 0$ ise M asal Γ-halka olduğu için $a = 0$ veya $b = 0$ olmalıdır. Hipotezden $a \neq 0$ olduğu için $b = 0$ elde edilir.

$a\Gamma b \neq 0$ olsun. O halde $a\Gamma b\Gamma M$,C_γ tarafından kapsanır ve ayrıca M Γ-halkasının da idealidir. Burada Önerme 3.0.6 (viii) kullanılırsa (Γ, M) halkasının değişmeli olduğu görülür. □

Önerme 3.0.9. *[8] M asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı sol (sağ) ideali ve Ω, Γ M-halkasının sıfırdan farklı bir sol (sağ) ideali olsun. Her $a \in M$ ve*

$\gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) $\gamma U\Gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ ($\Gamma U\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$)

(ii) $a\Omega M = 0 \Rightarrow a = 0$ ($M\Omega a = 0 \Rightarrow a = 0$)

Önerme 3.0.10. *M asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve $\gamma \in \Gamma$ sıfırdan farklı bir eleman olsun. $U \subseteq C_\gamma$ ise M Γ-halkası değişmelidir.*

İspat: Hipotezden $u \in U$ ve $x \in M$ için $u\gamma x = x\gamma u \in U$ olur. Böylece $M\gamma U \subseteq U$ olur. Şimdi $M\gamma U \neq 0$ olduğunu gösterelim.

$M\gamma U = 0$ olursa $\Gamma M\gamma U\Gamma = 0$ olur. M asal Γ-halka iken Γ asal M-halka olduğundan $\Gamma = 0$ veya $\gamma U\Gamma = 0$ olur. Böylece Önerme 3.0.9 (i) den $\gamma = 0$ olur. Bu durum $\gamma \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $M\gamma U \neq 0$ olur. Diğer taraftan $u\gamma x \in U \subset C_\gamma$ olduğundan Önerme 3.0.8 (i) ve (ii) şıkları ve $u \in C_\gamma$ olması kullanılarak her $m, x, y \in M$, $u \in U$, $\beta \in \Gamma$ için

$$m\gamma u\beta[x,y]_\gamma = m\beta u\gamma[x,y]_\gamma = m\beta[u\gamma x, y]_\gamma = 0$$

elde edilir. Her $u \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $m\gamma u\beta[x,y]_\gamma = 0$ olduğundan her $x, y \in M$ için $M\gamma U\Gamma[x,y]_\gamma = 0$ olduğu görülür. M asal Γ-halka ve $M\gamma U \neq 0$ olduğundan son eşitlik her $x, y \in M$ için $[x,y]_\gamma = 0$ olmasını gerektirir.

Sonuç olarak Önerme 3.0.6 (ix) şıkkından M değişmeli Γ-halka olur.

U, M halkasının sıfırdan farklı sağ ideali olduğu durumda da benzer şekilde ispat yapılabilir. □

Önerme 3.0.11. *M asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, $\gamma \in \Gamma$ sıfırdan farklı bir eleman ve $d(M) \subseteq C_\gamma$ olsun. O zaman $a \in C_\gamma$ ise $a \in C_{k(\gamma)}$ olur.*

İspat: Önerme 3.0.5(vii) şıkkından her $a, b \in M$ için $d([a,b]_\gamma) = [d(a),b]_\gamma + [a,b]_{k(\gamma)} + [a,d(b)]_\gamma$ eşitliği sağlanır.

$a \in C_\gamma$ ve $d(M) \subseteq C_\gamma$ olduğundan her $b \in M$ için, $[a,b]_{k(\gamma)} = 0$ olur. Böylece $a \in C_{k(\gamma)}$ olduğu görülür. □

Önerme 3.0.12. *M asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi, $\gamma \in \Gamma$ sıfırdan farklı bir eleman ve $d(M) \subseteq C_\gamma$ olsun. Eğer her $x, y \in M$ için $d(x)\gamma d(y) = 0$ ise $d(M)$, M halkasının sol ideali veya sağ idealidir.*

İspat: $d(x)\gamma d(y) = 0$ eşitliğinde x yerine $\beta \in \Gamma$ ve $z \in M$ için $x\beta z$ yazalım.

$$d(x\beta z)\gamma d(y) = d(x)\beta z\gamma d(y) + xk(\beta)z\gamma d(y) + x\beta d(z)\gamma d(y) = 0$$

olur ve buradan

$$d(x)\beta z\gamma d(y) + xk(\beta)z\gamma d(y) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte β yerine $\delta \in \Gamma$ ve $m \in M$ olmak üzere $\beta m\delta$ yazılıp bu eşitlik kullanılırsa,

$$d(x)\beta m\delta z\gamma d(y) + xk(\beta m\delta)z\gamma d(y) = 0$$

$$\Rightarrow d(x)\beta m\delta z\gamma d(y) + xk(\beta)m\delta z\gamma d(y) + x\beta d(m)\delta z\gamma d(y) + x\beta mk(\delta)z\gamma d(y) = 0$$

$$\Rightarrow d(x)\beta m\delta z\gamma d(y) + xk(\beta)m\delta z\gamma d(y) = 0$$

$$\Rightarrow \forall\delta \in \Gamma\ (d(x)\beta m + xk(\beta)m)\delta z\gamma d(y) = 0$$

$$\Rightarrow (d(x)\beta m + xk(\beta)m)\Gamma z\gamma d(y) = 0$$

gerektirmeleri elde edilir. Burada M, asal Γ-halka olduğu için her $x, m, y, z \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ için

$$d(x)\beta m + xk(\beta)m = 0 \text{ veya } z\gamma d(y) = 0$$

olduğu görülür.

Önce her $x, m \in M$ için $d(x)\beta m + xk(\beta)m = 0$ olması durumunu inceleyelim.

Bu durumda $d(x\beta m) = x\beta d(m)$ olur. Burada sol taraf $d(M)$ kümesinin elemanı olduğundan $x\beta d(m) \in d(M)$ olur. Böylece $M\Gamma d(M) \subseteq d(M)$ olduğu görülür. Diğer taraftan $d(M)$ toplamsal değişmeli grup olduğundan $d(M)$, M halkasının sol idealidir.

Şimdi her $z, y \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $z\gamma d(y) = 0$ durumunu inceleyelim.

Bu eşitlikte y yerine $m \in M$ ve $\beta \in \Gamma$ olmak üzere $y\beta m$ yazılıp var olan eşitlik de kullanılırsa,

$0 = z\gamma d(y\beta m) = z\gamma d(y)\beta m + z\gamma y k(\beta)m + z\gamma y\beta d(m) = z\gamma y k(\beta)m + z\gamma y\beta d(m)$

eşitliğine ulaşılır ve buradan

$$z\gamma y k(\beta)m + z\gamma y\beta d(m) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte β yerine $n \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ için $\beta n\delta$ yazılırsa

$$z\gamma y k(\beta n\delta)m + z\gamma y\beta n\delta d(m) = 0$$

$$\Rightarrow z\gamma y k(\beta)n\delta m + z\gamma y\beta d(n)\delta m + z\gamma y\beta n k(\delta)m + z\gamma y\beta n\delta d(m) = 0, \forall\delta \in \Gamma$$

$$\Rightarrow z\gamma y\beta(nk(\delta)m + n\delta d(m)) = 0$$

gerektirmeleri elde edilir. Eşitlik her $\beta \in \Gamma$ için geçerli olduğundan

$$z\gamma y\Gamma(nk(\delta)m + n\delta d(m)) = 0$$

olur. Buradan M halkasının asal Γ-halkası olması kullanılırsa,

$$z\gamma y = 0 \ veya \ nk(\delta)m + n\delta d(m) = 0$$

elde edilir.

Eğer $z\gamma y = 0$ olursa (N3) özelliğinden $\gamma = 0$ olması gerekir. Fakat hipotezden $\gamma \neq 0$ olduğu bilindiği için

$$nk(\delta)m + n\delta d(m) = 0$$

eşitliği sağlanır.

O halde $d(n\delta m) = d(n)\delta m$ olur. Sol taraf $d(M)$ türevinin elemanı olduğundan $d(n)\delta m \in d(M)$ olur. Böylece $d(M)\Gamma M \subseteq d(M)$ olduğu görülür. Diğer taraftan $d(M)$ toplamsal grup olduğundan $d(M)$, M halkasının sağ ideali olur. □

Teorem 3.0.13. *M karakteristiği ikiden farklı olan bir asal Γ-halka, d, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir k-türevi ve $k(\gamma)$ sıfırdan farklı olsun. $d(M) \subseteq C_\gamma$ ise M Γ-halka değişmelidir.*

İspat: $\gamma \in \Gamma$ olmak üzere $k(\gamma) \neq 0$ ve $d(M) \subseteq C_\gamma$ olsun. Önerme 3.0.5 (vii)den

$$d([m,n]_\gamma) = [d(m),n]_\gamma + [m,n]_{k(\gamma)} + [m,d(n)]_\gamma = [m,n]_{k(\gamma)}$$

olur. Böylece her $m,n \in M$ için

$$d([m,n]_\gamma) = [m,n]_{k(\gamma)} \in C_\gamma$$

olduğu görülür. Burada m yerine $d(x)\beta d(y)$, n yerine z yazılırsa, Önerme 3.0.8(iv) eşitliğinden

$$d([d(x)\beta d(y),z]_\gamma) = [d(x)\beta d(y),z]_{k(\gamma)} = d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(y) \in C_\gamma$$

elde edilir. Sonuç olarak her $x,y,z \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(y) \in C_\gamma$$

olur. Burada $d(M) \subseteq C_\gamma$ olduğundan Önerme 3.0.11 kullanılırsa,

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(y) \in C_{k(\gamma)}$$

elde edilir. Böylece

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(y) = d([d(x)\beta d(y),z]_\gamma) \in C_{k(\gamma)}$$

olur. O halde $d(M) \subseteq C_{k(\gamma)}$ sonucuna ulaşılır.
Buradan her $z \in M$ için $[d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(y),z]_{k(\gamma)} = 0$ olduğu görülür.
Önerme 3.0.5(iii) ve $d(M) \subseteq C_{k(\gamma)}$ oluşu kullanılarak,

$$[d(x),z]_{k(\gamma)}[\beta,k(\gamma)]_z d(y) + d(x)[[\beta,k(\gamma)]_z,k(\gamma)]_z d(y)$$

$$+d(x)[\beta,k(\gamma)]_z[d(y),z]_{k(\gamma)} = 0$$

elde edilir. Bu ise $d(x)[[\beta,k(\gamma)]_z,k(\gamma)]_z d(y) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi burada β yerine $\beta d(s)\delta$ yazılırsa

$$d(x)[[\beta d(s)\delta,k(\gamma)]_z,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

olur. Bu eşitlikte $d(M) \subseteq C_{k(\gamma)}$ ve eşitliğin kendisi kullanılırsa her $x,y,z \in M$ ve $\beta,\delta \in \Gamma$ için,

$$d(x)[[\beta,k(\gamma)]_z d(s)\delta + \beta[d(s),z]_{k(\gamma)}\delta + \beta d(s)[\delta,k(\gamma)]_z, k(\gamma)]_z = 0$$

$$\Rightarrow d(x)[[\beta,k(\gamma)]_z d(s)\delta + \beta d(s)[\delta,k(\gamma)]_z, k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

$$\Rightarrow d(x)[[\beta,k(\gamma)]_z, k(\gamma)]_z d(s)\delta d(y) + d(x)[\beta,k(\gamma)]_z[d(s),z]_{k(\gamma)}\delta d(y)$$

$$+d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) + d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y)$$

$$+d(x)\beta[d(s),z]_{k(\gamma)}[\delta,k(\gamma)]_z d(y) + \beta d(s)[[\delta,k(\gamma)]_z, k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

$$\Rightarrow 2d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

gerektirmelerinin sağlandığı görülür. Burada karakteristik ikiden farklı olduğu için,

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

elde edilir. Şimdi eşitlikte β yerine $\beta d(n)\sigma$ yazılırsa

$$d(x)[\beta d(n)\sigma,k(\gamma)]_z d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(n)\sigma d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) + \beta[d(n),z]_{k(\gamma)}\sigma d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y)$$

$$+\beta d(n)[\sigma,k(\gamma)]_z d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

eşitliği bulunur. Burada tekrar $d(M) \subseteq C_{k(\gamma)}$ olduğu ve önceki eşitlik kullanılırsa, her $\sigma \in \Gamma$ için

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(n)\sigma d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

bulunur. O halde

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(n)\Gamma d(s)[\delta,k(\gamma)]_z d(y) = 0$$

olarak yazılabilir. Burada M, asal Γ-halkası olduğundan

$$d(x)[\beta,k(\gamma)]_z d(n) = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.0.8(iv) eşitliğinden,

$$0 = d(x)[\beta, k(\gamma)]_z d(n) = [d(x)\beta d(n), z]_{k(\gamma)} = [d(x)k(\gamma)d(n), z]_\beta$$

olur. Burada her $\beta \in \Gamma$ için $d(x)k(\gamma)d(n) \in C_\beta$ olduğu için Önerme 3.0.11 den

$$d(x)k(\gamma)d(n) \in C_\Gamma$$

olur. $d(x)k(\gamma)d(n) \neq 0$ olacak şekilde $x, n \in M$ var ise Önerme 3.0.6(vii) şıkkından, M değişmeli Γ-halkadır.

Her $x, n \in M$ için $d(x)k(\gamma)d(n) = 0$ ise Önerme 3.0.12 dan

$$d(M) <_r M \; veya \; d(M) <_l M$$

olur. Hipotezden, $0 \neq d(M) \subseteq C_\gamma$ olduğundan Önerme 3.0.10 dan M değişmeli Γ-halkadır.

$\square$

4. Asal Gamma Halkalarının Değişmeliliği

Bu bölümde M Γ-halkasının türevleri ile M Γ-halkasının sağ ve sol operatör halkalarının türevleri arasında bir ilişkinin olup olmadığı sorusuna yanıt aranacaktır. Bu araştırma yapılırken H.Kandamar'ın "Asal Gamma Halkalarının Değişmeliliği" makalesi ele alınmış ve bazı teoremlerde verilen hipotezlerin bir kısmının kaldırılıp kaldırılamayacağı incelenmiştir.

M Γ-halka ve d, M Γ-halkasının bir k-türevi olsun. Bu türev (k,d) notasyonu ile gösterilecektir. Şimdi H. Kandamar'ın bu türevden yararlanarak L sol operatör halkası ve R sağ operatör halkası üzerinde türevi nasıl tanımladığını inceleyelim.

$(k,d)_L^+ : L \to L$

$(k,d)_L^+(\sum_i [x_i,\gamma_i]) = \sum_i([d(x_i),\gamma_i] + [x_i,k(\gamma_i)])$ ve

$(k,d)_R^* : R \to R$

$(k,d)_R^*(\sum_i [\gamma_i,x_i]) = \sum_i([k(\gamma_i,x_i] + [\gamma_i,d(x_i)])$ olarak tanımlansın.

Önerme 4.0.1. *(k,d), M Γ-halkasının bir türevi ise $(k,d)_L^+$ ve $(k,d)_R^*$, sırasıyla $L = [M,\Gamma]$ ve $R = [\Gamma,M]$ operatör halkalarının türevleridir.*

İspat: (k,d), M Γ-halkasının bir türevi olsun. $(k,d)_L^+$ dönüşümünün L operatör halkasının bir türevi olduğunu gösterelim. $(k,d)_L^+$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Her $l_1,l_2 \in L$ için

$(k,d)_L^+(l_1+l_2) = (k,d)_L^+(l_1) + (k,d)_L^+(l_2)$

olduğu görülebilir.

Ayrıca her $\sum_i [x_i,\gamma_i], \sum_j [y_j,\beta_j] \in L$ için $(k,d)_L^+$ fonksiyonu göz önüne alınırsa

$(k,d)_L^+(\sum_i [x_i,\gamma_i].\sum_j [y_j,\beta_j]) = (k,d)_L^+(\sum_{i,j}[x_i\gamma_i y_j,\beta j]$

$= \sum_{i,j}([d(x_i\gamma_i y_j),\beta_j] + [x_i\gamma_i y_j,k(\beta_j)])$

$= \sum_{i,j}([d(x_i)\gamma_i y_j,\beta_j] + [x_i k(\gamma_i)y_j,\beta_j] + [x_i\gamma_i d(y_j),\beta j] + [x_i\gamma_i y_j,k(\beta_j)])$

$= \sum_{i,j}([d(x_i),\gamma_i].[y_j,\beta_j] + [x_i,k(\gamma_i)].[y_j,\beta_j] + [x_i,\gamma_i].[d(y_j),\beta_j] + [x_i,\gamma_i].[y_j,k(\beta_j)])$

$= \sum_i([d(x_i),\gamma_i] + [x_i,k(\gamma_i)]).\sum_j [y_j,\beta_j] + \sum_i [x_i,\gamma_i].\sum_j([d(y_j),\beta_j] + [y_j,k(\beta_j)])$

$= (k,d)_L^+(\sum_i [x_i,\gamma_i]).\sum_j [y_{j,\beta_j}] + \sum_i [x_i,\gamma_i].(k,d)_L^+(\sum_j [y_j,\beta_j])$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Yani

$$(k,d)_L^+(\sum_i[x_i,\gamma_i].\sum_j[y_j,\beta_j]) = (k,d)_L^+(\sum_i[x_i,\gamma_i]).\sum_j[y_{j,\beta_j}]+\sum_i[x_i,\gamma_i].(k,d)_L^+(\sum_j[y_j,\beta_j])$$

olur. Böylece $(k,d)_L^+$, L sol operatör halkasının bir türevi olur.

Aynı şekilde $(k,d)_R^*$ fonksiyonunun R sağ operatör halkasının bir türevi olduğu gösterilebilir. □

Önerme 4.0.2. *$a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})$, M Γ-halkasının bir iç türevi olsun. $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+$ ve $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_R^*$ sırasıyla L ve R operatör halkalarının , $[a,\gamma]$ ve $[\gamma,a]$ ile üretilen iç türevidir.*

İspat: Her $y \in M$ ve her $\sum_i[x_i,\beta_i] \in L$ için $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+$ fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa;

$(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+(\sum_i[x_i,\beta_i])(y) = \sum_i([I_{a\gamma}(x_i),\beta_i]+[x_i,I_{\gamma a}(\beta_i)])(y)$

$= \sum_i([a\gamma x_i - x_i\gamma a,\beta_i]+[x_i,\gamma a\beta_i - \beta_i a\gamma])(y)$

$= \sum_i([a\gamma x_i,\beta_i]-[x_i\gamma a,\beta_i]+[x_i,\gamma a\beta_i]-[x_i,\beta_i a\gamma])(y)$

$= (\sum_i[a\gamma x_i,\beta_i]-\sum_i[x_i\gamma a,\beta_i]+\sum_i[x_i,\gamma a\beta_i]-\sum_i[x_i,\beta_i a\gamma])(y)$

$= \sum_i[a\gamma x_i,\beta_i](y)-\sum_i[x_i\gamma a,\beta_i](y)+\sum_i[x_i,\gamma a\beta_i](y)-\sum_i[x_i,\beta_i a\gamma](y)$

$= \sum_i a\gamma x_i\beta_i y-\sum_i x_i\gamma a\beta_i y+\sum_i x_i\gamma a\beta_i y-\sum_i x_i\beta_i a\gamma y$

$= \sum_i(a\gamma x_i\beta_i y - x_i\beta_i a\gamma y)$

$= \sum_i([a,\gamma][x_i,\beta_i]-[x_i,\beta_i][a,\gamma])(y)$

$= ([a,\gamma]\sum_i[x_i,\beta_i]-\sum_i[x_i,\beta_i][a,\gamma])(y)$

$= I_{[a,\gamma]}(\sum_i[x_i,\beta_i])(y)$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Buradan her $y \in M$ için $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+(\sum_i[x_i,\beta_i])$ endomorfizması ile $I_{[a,\gamma]}(\sum_i[x_i,\beta_i])$ endomorfizması aynı değeri aldığından

$$(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+(\sum_i[x_i,\beta_i]) = I_{[a,\gamma]}(\sum_i[x_i,\beta_i])$$

bulunur. $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+$ ile $I_{[a,\gamma]}$ L halkasının her elemanını aynı elemana götürdüğünden $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_L^+ = I_{[a,\gamma]}$ olur.

Benzer şekilde $(I_{\gamma a}, I_{a\gamma})_R^* = I_{[\gamma,a]}$ olduğu da görülebilir. □

Önerme 4.0.3. *M asal Γ-halka, a, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir elemanı ve γ, Γ grubunun sıfırdan farklı bir elemanı olsun. $I_{a\gamma}=0$ olması için gerek ve yeter koşul $[\gamma,a]\in CenR$ ve $[a,\gamma]\in CenL$ olmasıdır.*

İspat: $I_{a\gamma}=0$ olsun.

Her $x\in M$ için $I_{a\gamma}(x)=0$ olur. Burada (N3) göz önüne alınırsa;

$a\gamma x - x\gamma a = 0$

$\Rightarrow a\gamma x = x\gamma a$

$\Rightarrow y\beta a\gamma x = y\beta x\gamma a,\ \forall y\in M \text{ and } \forall\beta\in\Gamma$

$\Rightarrow y\beta a\gamma x = a\gamma y\beta x,\ \forall y\in M \text{ and } \forall\beta\in\Gamma$

$\Rightarrow y\beta a\gamma x = y\gamma a\beta x,\ \forall y\in M \text{ and } \forall\beta\in\Gamma$

$\Rightarrow y(\beta a\gamma - \gamma a\beta)x = 0,\ \forall y\in M \text{ and } \forall\beta\in\Gamma$

$\Rightarrow \beta a\gamma - \gamma a\beta = 0,\ \forall\beta\in\Gamma$

$\Rightarrow I_{\gamma a}(\beta) = 0,\ \forall\beta\in\Gamma$

$\Rightarrow I_{\gamma a} = 0$

gerektirmelerinin sağlandığı görülür.

Sonuç olarak $I_{a\gamma}=0$ ve $I_{\gamma a}=0$ olduğu görülür. Böylece Önerme 4.0.2 kullanılarak; $0=(I_{\gamma a},I_{a\gamma})_L^{+}=I_{[a,\gamma]}=0$ ve $0=(I_{\gamma a},I_{a\gamma})_R^{*}=I_{[\gamma,a]}=0$ elde edilir. Bu durumda $[a,\gamma]\in CenL$ ve $[\gamma,a]\in CenR$ olur.

Şimdi $[a,\gamma]\in CenL$ ve $[\gamma,a]\in CenR$ olsun. Buradan

$$I_{[a,\gamma]}=0 \ ve \ I_{[\gamma,a]}=0$$

olduğu görülür. Önerme 4.0.2 kullanılarak

$$(I_{\gamma a},I_{a\gamma})_R^{*}=0 \ ve \ (I_{\gamma a},I_{a\gamma})_L^{+}=0$$

bulunur. Böylece her $[x,\beta]\in L$ ve her $[\beta,x]\in R$ için sırasıyla

$$(I_{\gamma a},I_{a\gamma})_L^{+}([x,\beta])=0 \ ve \ (I_{\gamma a},I_{a\gamma})_R^{*}([\beta,x])=0$$

elde edilir. Burada $(I_{\gamma a},I_{a\gamma})_L^{+}$ ve $(I_{\gamma a},I_{a\gamma})_R^{*}$ iç türev oldukları kullanılırsa

$$([I_{a\gamma}(x),\beta]+[x,I_{\gamma a}(\beta)])=0 \ ve \ ([I_{\gamma a}(\beta),x]+[\beta,I_{a\gamma}(x)])=0$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada her $n,m,x \in M$ için birinci eşitlik sağdan n ile, ikinci eşitlik soldan m ile çarpılırsa, her $\beta \in \Gamma$ için

$$I_{a\gamma}(x)\beta n + xI_{\gamma a}(\beta)n = 0 \textit{ ve } mI_{a\gamma}x + m\beta I_{a\gamma}(x) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak

$$I_{a\gamma}(x\beta n) = I_{a\gamma}(x)\beta n + xI_{\gamma a}(\beta)n + x\beta I_{a\gamma}(n) = x\beta I_{a\gamma}(n) \tag{4.0.1}$$

ve

$$I_{a\gamma}(m\beta x) = I_{a\gamma}(m)\beta x + mI_{\gamma a}(\beta)x + m\beta I_{a\gamma}(x) = I_{a\gamma}(m)\beta x \tag{4.0.2}$$

bulunur.

4.0.1 ve 4.0.2 eşitliklleri kullanılırsa

$$I_{a\gamma}(m\beta x) = m\beta I_{a\gamma}(x) = I_{a\gamma}(m)\beta x$$

olduğu görülür.

Son eşitlikte $a \in M$ olmak üzere x yerine a yazılırsa her $\beta \in \Gamma, m \in M$ için

$$0 = m\beta I_{a\gamma}(a) = I_{a\gamma}(m)\beta a$$

olur. Her $\beta \in \Gamma$ için bu eşitlik geçerli olduğundan

$$I_{a\gamma}(m)\Gamma a = 0$$

olduğu görülür. M asal Γ-halka ve $a \neq 0$ olması kullanılırsa her $m \in M$ için

$$I_{a\gamma}(m) = 0$$

elde edilir. Her $m \in M$ için $I_{a\gamma}$ fonksiyonu sıfıra eşit olduğundan

$$I_{a\gamma} = 0$$

olur. $\square$

Teorem 4.0.4. *M asal Γ-halkası olsun. M Γ-halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul L ve R operatör halkalarının değişmeli olmasıdır.*

İspat: M Γ-halkası değişmeli olsun. O zaman her $a,x \in M$ ve her $\gamma,\beta \in \Gamma$ için

$$I_{a\gamma}(x) = a\gamma x - x\gamma a \text{ ve } I_{\gamma a}(\beta) = \gamma a\beta - \beta a\gamma$$

olur. Burada M Γ halkası değişmeli ve benzer şekilde Γ M-halkası da değişmeli olduğundan her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $I_{a\gamma} = 0$ ve $I_{\gamma a} = 0$ olur. Böylece Önerme 4.0.3 kullanılarak $a \in M$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$[\gamma, a] \in CenR \text{ ve } [a,\gamma] \in CenL$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $R = [\Gamma, M]$ ve $L = [M,\Gamma]$ sağ ve sol operatör halkalarının değişmeli olduğu görülür. □

Önerme 4.0.5. *γ, M asal Γ-halkasının sıfırdan farklı bir elemanı ve U, $U\gamma U \neq 0$ olacak şekilde M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. Her $v \in U$ için $I_{v\gamma}(U) = 0$ ise her $\beta \in \Gamma$ için $I_{v\beta}(U) = 0$ olur.*

İspat: Her $v \in U$ için $I_{v\gamma}(U) = 0$ olsun. O zaman her $u, v \in U$ için $[v,u]_\gamma = 0$ olur. $U <_l M$ olduğundan her $x \in M$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $[u,v]_{\gamma x\beta} = 0$ olur. Böylece

$$v\gamma x\beta u - u\gamma x\beta v = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte x yerine $w \in U$ ve $\delta \in \Gamma$ olmak üzere $x\delta w$ yazılırsa

$$u\gamma x\delta w\beta u - u\gamma x\delta w\beta v = w\gamma x\delta v\beta u - w\gamma x\delta u\beta v = w\gamma x\delta [v,u]_\beta = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik her $\delta \in \Gamma$ için geçerli olduğu için

$$w\gamma x\Gamma[v,u]_\beta = 0$$

yazılabilir. M Γ-halkası asal olduğundan son ifade

$$w\gamma x = 0 \text{ veya } [v,u]_\beta = 0$$

olmasını gerektirir. Diğer yandan $U\gamma U \neq 0$ olduğundan her $v,u \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için

$$[u,v]_\beta = 0$$

elde edilir. O halde her $v \in U$ için $I_{v\beta}(U) = 0$ olur. □

Önerme 4.0.6. *M asal Γ-halka ve U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. Her $v \in U$, $\beta \in \Gamma$ için $I_{v\beta}(U) = 0$ ise L sol operatör halkası değişmelidir.*

İspat: Her $u,v \in U$ ve her $\beta \in \Gamma$ için $I_{v\beta}(u) = 0$ olsun. Burada $\delta \in \Gamma$ ve $x \in M$ için u yerine $x\delta u$ yazılırsa,

$$0 = I_{v\beta}(x\delta u) = I_{v\beta}(x)\delta u + xI_{\beta v}(\delta)u + x\delta I_{v\beta}(u) = I_{v\beta}(x)\delta u + xI_{\beta v}(\delta)u$$

olduğu görülür ve

$$I_{v\beta}(x)\delta u + xI_{\beta v}(\delta)u = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte u yerine $\alpha \in \Gamma$ ve $y \in M$ olmak üzere $y\alpha u$ yazılırsa,

$$I_{v\beta}(x)\delta y\alpha u + xI_{\beta v}(\delta)y\alpha u = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada her $\alpha \in \Gamma$ ve her $u \in U$ için

$$(I_{v\beta}(x)\delta y + xI_{\beta v}(\delta)y)\alpha u = 0$$

olduğu görülür. Böylece eşitlik her $\alpha \in \Gamma$ için doğru olduğundan

$$(I_{v\beta}(x)\delta y + xI_{\beta v}(\delta)y)\Gamma U = 0$$

elde edilir. M Γ-halkasının asal olması ve $U \neq 0$ hipotezi kullanılarak

$$I_{v\beta}(x)\delta y + xI_{\beta v}(\delta)y = 0$$

bulunur. Yani

$$((I_{\beta v}, I_{v\beta})_L^+[x,\delta])(y) = 0$$

olur. Bu durumda L sol operatör halkası olmak üzere her $\beta \in \Gamma$, $v \in U$ için

$$(I_{\beta v}, I_{v\beta})_L^+ = 0$$

olduğu görülür. Burada Önerme 4.0.2 kullanılırsa son ifade her $v \in U$ ve $\beta \in \Gamma$ için $I_{[v,\beta]} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece

$$[U,\Gamma] \subseteq CenL$$

olur. Halka teorisinde, merkezinde sıfırdan farklı tek yanlı bir ideale sahip olan her asal halka değişmelidir. Yani burada L asal halka, $[U,\Gamma]$, $L = [M,\Gamma]$ operatör halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali ve $[U,\Gamma]$, L operatör halkasının merkezinde olduğu için L halkası değişmeli olur.

□

Önerme 4.0.7. *M asal Γ-halka,$0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve U, $U\gamma U \neq 0$ olacak şekilde M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Her $v \in U$ için $I_{v\gamma}(U) = 0$ ise her $\beta \in \Gamma$ için $I_{v\beta}(U) = 0$ olur.*

İspat: İspat Önerme 4.0.5 ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Önerme 4.0.8. *M asal Γ-halka ve U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Her $v \in U, \beta \in \Gamma$ için $I_{v\beta}(U) = 0$ ise R sağ operatör halkası değişmelidir.*

İspat: İspat Önerme 4.0.6 ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 4.0.9. *M asal Γ-halka, γ, Γ grubunun sıfırdan farklı bir elemanı ve U, $U\gamma U \neq 0$ olacak şekilde M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol(veya sağ) ideali olsun. Her $v \in U$ için $I_{v\gamma}(U) = 0$ ise L(veya R) değişmelidir.*

İspat: U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. $I_{v\gamma}(U) = 0$ olduğu için Önerme 4.0.5 ten her $\beta \in \Gamma$ için $I_{v\beta}(U) = 0$ olur. Burada Önerme 4.0.6 (Önerme 4.0.7) kullanılırsa son ifade $L(R)$ operatör halkasının değişmeli olmasını gerektirir.

□

Sonuç 4.0.10. *M asal Γ-halka,γ, Γ grubunun sıfırdan farklı bir elemanı ve A, M Γ-halkasının sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali olsun. Her $a \in A$ için $I_{a\gamma}(A) = 0$ ise M Γ-halka değişmelidir.*

İspat: $A \neq 0$ ise $A\gamma A \neq 0$ olur. Çünkü $A\gamma A = 0$ olursa $\gamma = 0$ olması gerekir ve bu durum $\gamma \neq 0$ oluşuyla çelişir. A, M Γ-halkasının sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali olduğu için, Teorem 4.0.9 dan L ve R operatör halkaları değişmelidir. Böylece Önerme 4.0.4 ten M Γ-halkası değişmeli olur. □

Önerme 4.0.11. *M asal Γ-halka ve A, M Γ-halkasının bir ideali olsun. Her $a \in A$ için $a\gamma a = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\gamma \in \Gamma$ var ise $A = 0$ olur.*

İspat: Her $a \in A$ için $a\gamma a = 0$ ve $A \neq 0$ olsun. $\beta \in \Gamma$ ve $x \in M$ için $a + x\beta a \in A$ olduğundan,

$$(a + x\beta a)\gamma(a + x\beta a) = 0$$

olduğu görülür. Buradan

$$a\gamma a + a\gamma x\beta a + x\beta a\gamma a + x\beta a\gamma x\beta a = 0$$

eşitliğine ulaşılır ve bu eşitlikte $a\gamma a = 0$ ve her $x \in M$, $\beta \in \Gamma$, $a \in A$ olmak üzere $x\beta a \in A$ olduğundan $x\beta a\gamma x\beta a = 0$ olması kullanılırsa

$$a\gamma x\beta a = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece her $\beta \in \Gamma$, $a \in A$ ve $x \in M$ için

$$(a\gamma x\beta a)\gamma x = (a\gamma x)\beta(a\gamma x) = 0$$

olur ve bu eşitlik her $\beta \in \Gamma$ için geçerli olduğundan

$$(a\gamma x)\Gamma(a\gamma x) = 0$$

elde edilir. M Γ-halka asal olduğundan her $a \in A$ ve her $x \in M$ için

$$a\gamma x = 0$$

olduğu görülür. Bu eşitlik her $a \in A$ ve her $x \in M$ için doğru olduğundan

$$A\gamma M = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$A\Gamma M\gamma M \subseteq A\gamma M = 0$$

olur. Tekrar M Γ-halkanın asal olması ve $A \neq 0$ olması kullanılarak

$$M\gamma M = 0$$

elde edilir ve Tanım 2.2.1 (N3) özelliğinden $\gamma = 0$ olur. Bu durum $\gamma \neq 0$ oluşuyla çelişir. O zaman $A \neq 0$ kabulü yanlıştır ve $A = 0$ sonucuna ulaşılır. □

Önerme 4.0.12. *[6] M Nobusawa anlamında asal Γ-halka, U, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir sol (ya da sağ) ideali ve γ, Γ grubunun sıfırdan farklı bir elemanı olsun. $U \subseteq C_\gamma$ ise M Γ-halkası değişmelidir.*

Teorem 4.0.13. *M karakteristiği ikiden farklı olan Nobusawa anlamında asal Γ halka ve A, M Γ-halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Her $a \in A$ için $I_{a\gamma}^2 = 0$ olacak şekilde Γ grubunun sıfırdan farklı bir γ elemanı varsa M Γ-halka değişmelidir.*

İspat: Her $a \in A$ için $I_{a\gamma}^2 = 0$ olsun. Yani her $x \in M$ ve her $a \in A$ için $[[x,a]_\gamma, a]_\gamma = 0$ olsun. Bu durumda

$$a\gamma a = 0 \text{ veya } a \in C_\gamma \tag{4.0.3}$$

olur. Şimdi $N = \{a \in A : a\gamma a = 0\}$ kümesinin A asal Γ-halkasının ideali olduğunu gösterelim.

Önce N kümesinin A grubunun alt grubu olduğunu gösterelim. a ve b, N kümesinin sıfırdan farklı elemanları olsun. O zaman

$$a\gamma a = 0 \text{ ve } b\gamma b = 0$$

olur. $a+b \notin N$ olsun. Yani $(a+b)\gamma(a+b) \neq 0$ olsun. Burada $0 \neq a+b \in A$ olduğu için $a+b \in C_\gamma$ olur. Böylece

$$(a+b)\gamma(a+b) = a\gamma a + a\gamma b + b\gamma a + b\gamma b \in C_\gamma \tag{4.0.4}$$

olduğu görülür. Buradan

$$a\gamma b + b\gamma a \in C_\gamma$$

elde edilir. Burada $a\gamma b \neq 0$ olur. Çünkü $a\gamma b = 0$ olursa

$$b\gamma a = b\gamma(a+b) = (a+b)\gamma b = a\gamma b = 0$$

olur ve bu durum $(a+b)\gamma(a+b) = a\gamma b + b\gamma a \neq 0$ oluşuyla çelişir. Bu durumda $a\gamma b \neq 0$ ve $a\gamma b \in A$ olduğundan 4.0.3 eşitliği kullanılırsa

$$(a\gamma b)\gamma(a\gamma b) = 0 \; veya \; a\gamma b \in C_\gamma$$

olduğu görülür. Eğer $(a\gamma b)\gamma(a\gamma b) = 0$ ise $(b\gamma a)\gamma(b\gamma a) = 0$ olur. Böylece

$$(a+b)\gamma(a+b)\gamma(a+b)\gamma(a+b)$$

$$= a\gamma a\gamma a + a\gamma a\gamma b + a\gamma b\gamma a + a\gamma b\gamma b + b\gamma a\gamma a + b\gamma a\gamma b + b\gamma b\gamma a + b\gamma b\gamma b = 0$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer yandan $a\gamma b \in C_\gamma$ ise $b\gamma a \in C_\gamma$ olur. Buradan,

$$(a+b)\gamma(a+b)\gamma(a+b)\gamma(a+b) = 0$$

elde edilir. Burada $(a+b) \in C_\gamma$ ve $M\,\Gamma$ halkasının asal oluşu kullanılarak

$$M\gamma(a+b) = 0$$

olduğu görülür. Böylece her $x \in M$ için $x\gamma(a+b) = 0$ olduğundan özel olarak $a+b \in M$ için de

$$(a+b)\gamma(a+b) = 0$$

olur. Bu durum $(a+b)\gamma(a+b) \neq 0$ oluşuyla çelişir. O halde $a+b \in N$ dir.

Son olarak N altgrubunun A Nobusawa anlamında Γ halkasının bir ideali olduğunu gösterelim. Önce N, A asal Γ-halkasının bir sağ ideali olduğunu gösterelim.

$N <_r A$ olmasın. Sağ ideal tanımından $n_0\beta_0 s_0 \notin N$ olacak şekilde en az bir n_0, β_0, s_0 vardır. N kümesinin tanımından

$$n_0\beta_0 s_0 \gamma n_0 \beta_0 s_0 \neq 0$$

olur. $n_0 \in N$ olduğu kullanılırsa $n_0\beta_0 s_0 \in C_\gamma$ olduğu görülür. Bu durumda

$$n_0\beta_0 s_0 \gamma n_0 = n_0 \gamma n_0 \beta_0 s_0 = 0$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece

$$n_0\beta_0 s_0 \gamma n_0 \beta_0 s_0 = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu da başta aldığımız $n_0\beta_0 s_0 \gamma n_0 \beta_0 s_0 \neq 0$ kabulü ile çelişir.

O halde $N <_r A$ olmalıdır.

Benzer şekilde $N <_l A$ olduğu gösterilir.

Sonuç olarak N, A Nobusawa anlamında Γ halkasının ideali olur ve Önerme 4.0.11 den $N = 0$ olur. O halde her $0 \neq a \in A$ için $a\gamma a \neq 0$ elde edilir. Böylece her $a \in A$ için $a \in C_\gamma$ olduğundan $A \subseteq C_\gamma$ olur. Bu durumda M Γ-halkası değişmelidir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Barnes, W. E. 1966. On the Γ-rings of Nobusawa, **Pacific J. Math.** 18(3): 411-422.

[2] Bresar, M. and Vukman, J. 1988. Jordan Derivations on Prime Rings, **Bull. Austral. Math. Soc.** Vol. 37: 321-322

[3] Coppage, W. E. and Luh, J. 1971. Radicals of gamma rings, **J. Math. Soc. Japan** 23: 40-52.

[4] Herstein, I. N. 1969. Topics in Ring Theory, The Univ. of Chicago Press, Chicago.

[5] Kandamar, H. 1997. Gamma Halkalarında Türev, **Sarımsaklı Matematik Günleri, Balıkesir.**

[6] Kandamar, H. 2001. On Commutativity Of Prime Gamma Rings, **Journal of Faculty of Science Ege University** Vol.24 ,1

[7] Kandamar, H. 1993. On The Commutativity of the Gamma-Rings, **VI. National Mathematics Symposium. Kıbrıs**

[8] Kandamar, H. 2000. The k-derivation of a Gamma-Ring. **Turk. J. Math.** 23(3): 221-229.

[9] Kyuno, S. 1991. Gamma Rings, Hadronic Press, Palm Habor.

[10] Nobusawa, N. 1964. On a generalization of the ring theory. **Osaka J. Math.** 1: 81-89.

[11] Posner, E. C. 1957. Derivations in prime rings. **Proc. Amer. Math. Soc.** 8: 1093-1100.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Emel KORKMAZ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Selçuklu, 08.09.1992

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce