

**T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-050**

**TOR YÜZEYLERİ ÜZERİNDE DÜZGÜN
FİGÜRLER**

Merve YEMEN

**Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU**

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi *Merve YEMEN* tarafından hazırlanan *Tor Yüzeyleri Üzerinde Düzgün Figürler* başlıklı tez, 21/09/2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan : Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Aydın ADÜ	
Üye : Doç. Dr. Bekir TANAY	Muğla Sıtkı Koçman Üniv.	
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER	Aydın ADÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans Tezi, Enstitü Yönetim KurulununSayılı kararıyla tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

21/09/2018

Merve YEMEN

ÖZET

TOR YÜZEYLERİ ÜZERİNDE DÜZGÜN FİGÜRLER

Merve YEMEN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

2018, 33 sayfa

Bu çalışmanın amacı tor yüzeyleri üzerindeki düzgün figürleri tanıtmak ve bunların bazı geometrik, topolojik ve cebirsel özelliklerini incelemektir.

Birinci bölümde kısaca tezin özeti verilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışması için gerekli olan temel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tor yüzeyi üzerindeki düzgün figürler tiplerine göre sınıflandırılmış ve bunların bazı geometrik, topolojik ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise tor yüzeyleri üzerindeki düzgün figürlerin yansımaları tarafından sabit tutulan eğriler tanıtılmış ve desenlerine göre bu eğrilerin sayıları belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Figür, Düzgün figür, Tor yüzeyi, Sabit eğri, Desen

ABSTRACT

REGULAR MAPS ON TORI

Merve YEMEN

Ph. D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU
2018, 33 pages

The aim of this study is to introduce the regular maps on tori and investigate some of their geometric, topological and algebraic properties.

In the first chapter the thesis is summarized briefly.

The second chapter is devoted to basic concepts which are required in the subsequent chapters.

In the third chapter, the regular maps on tori have been classified according to their types and some of their geometric, topological and algebraic properties have been investigated.

In the last chapter, the curves that are fixed by the reflections of regular maps on tori have been introduced and the number of these curves have been determined according to their patterns.

Key Words: Map, Regular map, Torus, Fixed curve, Pattern

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmam boyunca yardımını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) sonsuz teşekkür ederim.

Merve YEMEN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ.....	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	2
2.1. Çizgeler (Graflar).....	2
2.2. Grup Etkisi	5
2.3. Temel Bölge.....	6
2.4. Bölüm Uzayı	6
2.5. Tor Yüzeyi	7
2.6. Üçgensel Grup.....	8
2.7. Düzgün Figürler	9
3. TOR YÜZEYLERİ ÜZERİNDEKİ DÜZGÜN FİGÜRLER.....	12
3.1. $\{4,4\}$ Tipindeki Düzgün Figürler.....	12
3.2. $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ Tipindeki Düzgün Figürler	15
4. TOR YÜZEYLERİ VE YANSIMALI DÜZGÜN FİGÜRLER	21
4.1. Sabit Eğriler	21
4.1.1. Sabit Eğrilerin Desenleri	21
4.1.2. Sabit Eğrilerin Sayıları	23
4.1.3. Sabit Eğrilerin Uzunlukları	25

4.2. Tor Yüzeyleri Üzerindeki Sabit Eğriler.....	26
4.2.1. Tipi {4,4} Olan Düzgün Figürler	27
4.2.2. Tipi {3,6} veya {6,3} Olan Düzgün Figürler	27
5. SONUÇ	29
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

- $\overset{\circ}{A}$: A kümesinin içi
 \mathbb{C} : Karmaşık sayılar kümesi
 $\Gamma(l, m, n)$: Genişletilmiş Öklid üçgensel grubu
 $\Gamma[l, m, n]$: Öklid üçgensel grubu
 $Aut^{\pm}X$: X yüzeyinin tüm otomorfizmalarının grubu
 $Aut^{+}X$: X yüzeyinin konform otomorfizmalarının grubu
 $Aut^{\pm}\mathcal{M}$: \mathcal{M} figürünün tüm otomorfizmalarının grubu
 $Aut^{+}\mathcal{M}$: \mathcal{M} figürünün konform otomorfizmalarının grubu
 $\{m, n\}$: Figürün tipi
 G_x : x noktasının yörüngesi
 S_x : x noktasının sabitleyeni

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Dört noktalı çizge.....	2
Şekil 2.2. Bağlantılı ve bağlantılı olmayan çizgeler.....	3
Şekil 2.3. Yol çizgeler.....	4
Şekil 2.4. Döngü çizgeler.....	4
Şekil 2.5. Tam çizgeler.....	4
Şekil 2.6. $\langle z \rightarrow z + i \rangle$ grubu için bir temel bölge.....	6
Şekil 2.7. İki öteleme tarafından üretilen bir grubun bölüm uzayı.....	8
Şekil 2.8. Bir (l, m, n) –üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar.....	9
Şekil 2.9. Bir $(2, m, n)$ –üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar.....	11
Şekil 3.1. $\{4,4\}_{4,0}$ figürü.....	14
Şekil 3.2. $\{4,4\}_{3,3}$ figürü.....	14
Şekil 3.3. $\{4,4\}_{2,3}$ figürü.....	15
Şekil 3.4. $\{3,6\}_{4,0}$ figürü.....	17
Şekil 3.5. $\{6,3\}_{4,0}$ figürü.....	18
Şekil 3.6. $\{3,6\}_{2,2}$ figürü.....	18
Şekil 3.7. $\{6,3\}_{2,2}$ figürü.....	19
Şekil 3.8. $\{3,6\}_{2,3}$ figürü.....	19
Şekil 3.9. $\{6,3\}_{2,3}$ figürü.....	20
Şekil 4.1. Tor yüzeyi üzerindeki sabit eğriler.....	21
Şekil 4.2. Düzgün Onikiyüzlü (Dodecahedron).....	22
Şekil 4.3. Figürün yüz merkezinden geçen ve deseni $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ olan sabit eğriler.....	23
Şekil 4.4. Tipi $\{4,4\}$ olan figürün deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$ olan sabit eğrileri.....	24
Şekil 4.5. Kenar uzunlukları a, b ve c birim olan $(2, m, n)$ – üçgeni.....	25

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Küre üzerindeki düzgün figürler ve desenleri	22
Çizelge 4.2. Sabit eğrilerin uzunlukları.....	27
Çizelge 4.3. {4,4} figürüne karşılık gelen sabit eğriler	27
Çizelge 4.4. {3,6} figürüne karşılık gelen sabit eğriler	28



1. GİRİŞ

\mathcal{G} sonlu ve bağlantılı bir çizge ve X kompakt bir yüzey olmak üzere, \mathcal{G} çizgesinin X yüzeyine gömülmesine X üzerinde bir figür denir. X üzerinde \mathcal{G} çizgesinin tümleyeni bir açık disk ailesi oluşturur. Bu disklerden her birine figürün bir yüzü denir. Eğer bu figürün yüzleri düzgün ve özdeş çokgenler ise düzgün figür olarak adlandırılır. Eğer bir düzgün figürün her bir yüzü m kenarlı bir düzgün çokgen ve her bir köşede bunlardan n tanesi bir araya geliyorsa bu figürün tipi $\{m, n\}$ dir denir. Bu düzgün figürün her bir yüzünün merkezi, kenarların orta noktalarına ve köşelerine geodezik doğru parçalarıyla birleştirildiğinde söz konusu yüz iç açıları $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olan üçgenlere bölünmüş olur. Bu üçgenler $(2, m, n)$ – üçgenleri olarak adlandırılır. Bu işlem figürün diğer yüzlerine uygulandığında X yüzeyi $(2, m, n)$ – üçgenlerine ayrılmış olur.

X yüzeyi üzerindeki $(2, m, n)$ – üçgenlerinin kenarları üzerindeki yansımalar düzgün figürün ve X yüzeyinin mertebesi 2 olan otomorfizmalardır. Bu tür otomorfizmaların sabit noktaları, yüzey üzerinde geodezik eğriler oluşturur. Bu eğriler söz konusu otomorfizmaların sabit eğrileri olarak adlandırılır. Herhangi bir sabit eğri düzgün figürün geometrik noktalar olarak adlandırılan özel noktalarından geçer öyle ki bu noktalar sabit eğri üzerinde sonlu ve periyodik bir dizi oluşturur. Buna sabit eğrinin deseni denir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, daha sonraki bölümler için gerekli olan, çizgeler, grup etkisi, temel bölge, bölüm uzayı, tor yüzeyi, üçgensel grup ve düzgün figür kavramlarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde cinsi 1 olan yani tor yüzeyleri üzerindeki düzgün figürler tanıtılmıştır. Bu tür figürler $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ tipindedir. Bu bölümde ayrıca cinsi 1 olan yansımali ve yansımali olmayan düzgün figürler, tiplerine göre sınıflandırılarak cebirsel ve geometrik olarak detaylıca incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise tor yüzeyleri üzerindeki yansımali düzgün figürlere karşılık gelen sabit eğrilerin desenleri ve sayıları hesaplanmış ve sonuçlar, figürlerin tiplerine göre ayrılarak çizelgeler halinde verilmiştir.

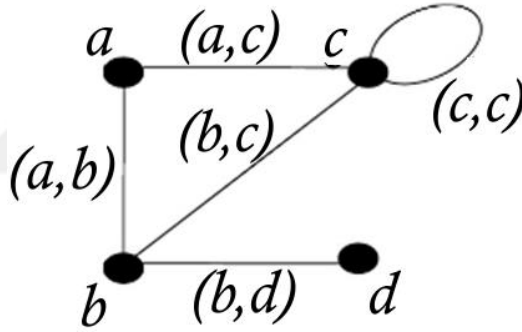
2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, bu çalışma için gerekli temel bilgiler ve tanımlar yer almaktadır.

2.1. Çizgeler (Graflar)

Tanım 2.1.1. $V \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve $E \subseteq V \times V$ olmak üzere, $\mathcal{G} = (V, E)$ ikilisine bir çizge (graf) denir. Burada V kümesi \mathcal{G} çizgesinin köşelerinin kümesini, E kümesi de \mathcal{G} çizgesinin kenarlarının kümesini belirtmektedir.

Örnek 2.1.2. $V = \{a, b, c, d\}$ ve $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, c)\}$ olmak üzere, $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesi aşağıdaki Şekil 2.1 deki gibi çizilir:



Şekil 2.1. Dört noktalı çizge

Tanım 2.1.3. Köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir \mathcal{G} çizgesine sonlu çizge denir.

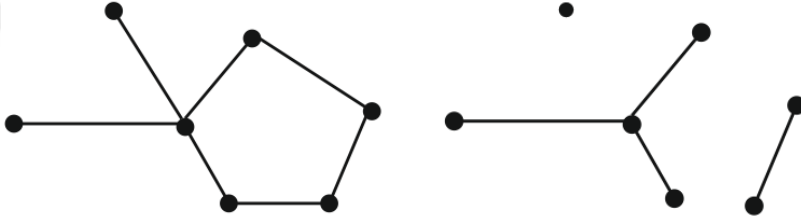
Tanım 2.1.4. Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesinde bir köşeyi kendine bağlayan kenara döngü (loop), aynı iki köşeyi birbirine birden fazla kenar ile bağlayan kenarlara ise çoğul kenar denir. Çoğul kenar ve döngüsü olmayan çizgelere basit çizge denir.

Tanım 2.1.5. Bir \mathcal{G} çizgesinde u ve v köşelerini birleştiren bir $e = (u, v) = uv$ kenarı varsa u ve v köşelerine komşu köşeler, e kenarına da u ve v köşeleri ile bitişiktir denir.

Tanım 2.1.6. Bir \mathcal{G} çizgesinde m tane kenarın uv, vy, yx, \dots, wz şeklindeki dizilimine m uzunluklu bir yol denir. Bu şekildeki bir yol $uvyx \dots wz$ ile gösterilir. Ayrıca bu yol u ve z köşeleri arasındaki bir yol olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.7. Bir \mathcal{G} çizgesinde x ve y köşeleri arasındaki bir yol $xuvyztwtzy$ şeklinde ise bu yol 10 uzunluğunda bir yoldur ve zt kenarını iki kez bulundurur.

Tanım 2.1.8. Bir \mathcal{G} çizgesinin farklı iki köşesi arasında bir yol varsa bu iki köşe bağlantılıdır denir. \mathcal{G} çizgesinin tüm köşeleri bağlantılı ise bu çizgeye bağlantılı çizge denir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Bağlantılı ve bağlantılı olmayan çizgeler

Tanım 2.1.9. Bir \mathcal{G} çizgesinde bir yolun tüm kenarları farklı ise bu yola iz denir. Bir iz üzerindeki tüm köşeler de farklı ise bu izle patika denir.

Örnek 2.1.10. Bir \mathcal{G} çizgesinde $uyzttwy$ yolu bir iz, $xuvyzt$ yolu ise bir patikadır.

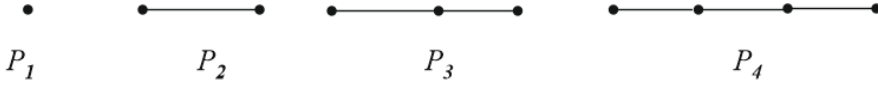
Tanım 2.1.11. Bir \mathcal{G} çizgesinde bir yolun başlangıç ve bitiş köşeleri aynı ise kapalı bir yoldur. Yani, $uvyz \dots xu$ şeklindeki bir yola kapalı yol denir. Burada kenarların hepsi farklı ise bu yola kapalı iz, bu kapalı izin de her köşesi farklı ise bu izle devir denir.

Örnek 2.1.12. Bir \mathcal{G} çizgesinde $uyzttwyu$ yolu bir kapalı iz, uu ve $uyztwu$ yollarının her biri birer devirdir.

Tanım 2.1.13. Bir \mathcal{G} çizgesinde $N_{\mathcal{G}}(v) = \{u \in V | uv \in E\}$ kümesine v köşesinin \mathcal{G} 'deki komşuluğu denir ve kısaca $N(v)$ ile gösterilir. Ayrıca v köşesi için $|N(v)|$ sayısına v köşesinin derecesi denir ve $d_{\mathcal{G}}(v)$ (veya kısaca $d(v)$) ile gösterilir.

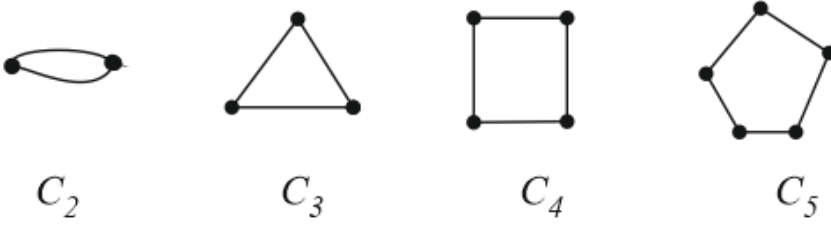
Tanım 2.1.14. Bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesinde, $\delta_{\mathcal{G}} = \min\{d(v) | v \in V\}$ ve $\Delta_{\mathcal{G}} = \max\{d(v) | v \in V\}$ şeklinde tanımlanan δ ve Δ değerlerine sırasıyla \mathcal{G} çizgesinin minimum ve maksimum derecesi denir. Ayrıca, \mathcal{G} çizgesinde tüm köşelerinin derecesi k olan yani $\delta = \Delta = k$ ise bu çizgeye k -regüler çizge denir.

Tanım 2.1.16. $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, \mathcal{G} çizgesinin köşelerinin kümesi olsun. $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ olan bir $\mathcal{G} = (V, E)$ çizgesine v_1, v_n -yol çizgesi denir ve P_n ile gösterilir. n köşeli bir P_n yol çizgesinin kenar sayısı $(n - 1)$ 'dir (Şekil 2.3).



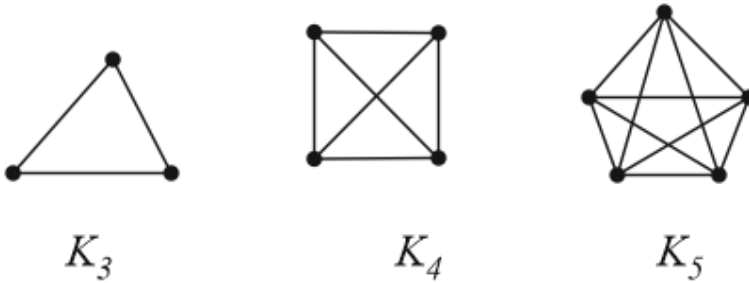
Şekil 2.3. Yol çizgeleri

Tanım 2.1.17. Tüm köşelerinin derecesi 2 olan çizgeye n -döngü çizge denir ve C_n ile gösterilir. Ayrıca, C_n çizgesi 2-regüler çizgedir ve bu çizgenin kenar sayısı n olur (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Döngü çizgeleri

Tanım 2.1.18. Bir çizgede herhangi iki köşe arasında mutlaka bir kenar var ise bu çizgeye tam çizge denir. n köşeli bir tam çizge K_n ile gösterilir. Tam çizgede her bir köşenin derecesi $(n - 1)$ 'dir. Dolayısıyla, K_n çizgesi $(n - 1)$ -regüler çizgedir. Ayrıca, bu çizgenin kenar sayısı $\frac{n(n-1)}{2}$ olur (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. Tam çizgeleri

2.2. Grup Etkisi

G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer $\rho: G \times X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme G grubunun X kümesine bir etkisi denir:

- i. $\forall x \in X$ ve $e \in G$ için $\rho(e, x) = x$,
- ii. $\forall x \in X$ ve $g_1, g_2 \in G$ için $\rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x))$.

Burada e , G grubunun birim elemanını temsil etmektedir.

Örnek 2.2.1. G bir grup ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\forall x \in X$ ve $\forall g \in G$ için,

$$\rho: G \times X \rightarrow X, \rho(g, x) = x$$

şeklinde tanımlanan ρ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisidir. Buna aşikâr etki denir.

Örnek 2.2.2. X bir topolojik uzay ve $G = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. G kümesi fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu durumda, her $x \in X$ ve her $g \in G$ için $\rho(g, x) = g(x)$ şeklinde tanımlanan ρ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisidir. Çünkü her $x \in X$ ve $e \in G$ için,

$$\rho(e, x) = e(x) = x$$

ve $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$ için,

$$\rho(g_1 g_2, x) = g_1 g_2(x) = g_1 \rho(g_2, x) = \rho(g_1, \rho(g_2, x))$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla ρ dönüşümü G grubunun X kümesi üzerine bir etkisidir.

Tanım 2.2.3. G bir grup, $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\varphi: G \times X \rightarrow X$ dönüşümü, G grubunun X kümesi üzerinde bir etkisi olsun. $x \in X$ için $G_x = \{\varphi(g, x) \mid g \in G\}$ kümesine x noktasının yörüngesi denir. $S_x = \{g \in G \mid \varphi(g, x) = x\}$ kümesine de x noktasının sabitleyeni denir.

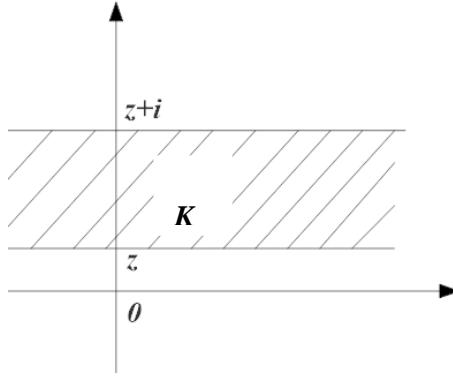
2.3. Temel Bölge

X bir topolojik uzay ve $G = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve her $g \in G$ için $\rho(g, x) = g(x)$ olarak tanımlanan $\rho: G \times X \rightarrow X$ dönüşümünün de G grubunun X kümesine bir etkisi olduğu biliniyor. Bu durumda, X topolojik uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı bir A alt kümesine G grubu için bir temel bölgedir denir:

- i. $\bigcup_{g \in G} g(A) = X$,
- ii. $\forall g \in G - \{e\}$ için $\overset{\circ}{A} \cap g(\overset{\circ}{A}) = \emptyset$.

Burada, $\overset{\circ}{A}$ notasyonu ile A kümesinin içi ifade edilmektedir.

Örnek 2.3.1. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(z) = z + i$ olarak tanımlanan f fonksiyonu sonsuz devirli bir G grubu üretir. Şekil 2.6 da verilen K kümesi G grubu için temel bölgedir.



Şekil 2.6. $\langle z \rightarrow z + i \rangle$ grubu için bir temel bölge

2.4. Bölüm Uzayı

Tanım 2.4.1. X bir topolojik uzay ve $G = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ bir homeomorfizma}\}$ olsun. X üzerinde,

$$"x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ öyle ki } g(x) = y"$$

olarak tanımlanan " \sim " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik bağıntısına göre bir x elemanın denklik sınıfı, x elemanın yörüngesidir ve denklik sınıflarının oluşturduğu $X/\sim = \{G_x | x \in X\}$ ailesi de bölüm kümesidir. $\gamma: X \rightarrow X/\sim$ olmak üzere $\gamma(x) = G_x$ olarak tanımlanan γ fonksiyonu da bölüm fonksiyonudur. Bu durumda,

$$\tau = \{A \subset X/\sim \mid \gamma^{-1}(A), X \text{ uzayında açıktır}\}$$

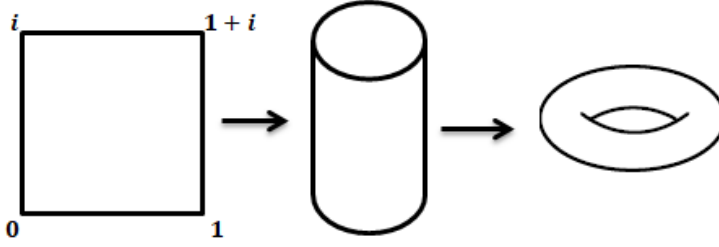
olarak tanımlanan τ ailesi X/\sim kümesi üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojiye bölüm topolojisi denir. X/\sim kümesi bu topolojiyle birlikte düşünüldüğünde bir topolojik uzaydır ve X/\sim topolojik uzayına bölüm uzayı denir.

Burada X/\sim bölüm uzayının elemanları G grubuna göre yörüngeler olduğundan, X/\sim yerine X/G notasyonu kullanacağız. Ayrıca, bu bölüm uzayı geometrik olarak şu şekilde elde edilir: $K \subset X$ kapalı alt kümesi G grubu için bir temel bölge olsun. K kümesinin içindeki herhangi iki nokta aynı denklik sınıfında bulunamaz. Ancak K 'nın sınırındaki iki farklı nokta aynı denklik sınıfında bulunabilir. K temel bölgesinin sınırları üzerindeki aynı denklik sınıfında bulunan noktalar birleştirilirse X/G bölüm uzayı elde edilir.

2.5. Tor Yüzeyi

Ω , kompleks düzlemde lineer bağımsız iki öteleme tarafından üretilen bir grup olsun. Herhangi iki kenarı bu ötelemeleri temsil eden bir paralelkenar bu Ω grubu için bir temel bölgedir. \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı da bir tor yüzeyidir.

Örnek 2.5.1. Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 1$ ve $g(z) = z + i$ biçiminde tanımlanan iki ötelemenin ürettiği grup G olsun. Bu durumda, köşeleri $0, 1, i, 1 + i$ olan kare G grubu için bir temel bölgedir. Bu temel bölge üzerinde aynı denklik sınıfında olan noktalar birleştirilirse bölüm uzayının tor yüzeyi olduğu görülür (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. İki öteleme tarafından üretilen bir grubun bölüm uzayı

Ω , karmaşık düzlemde iki lineer bağımsız ötelemenin ürettiği grup ve Ω^* sıfırın yörüngesi olsun. $a, b \in \mathbb{C}$ ve $a\Omega^* = \Omega^*$ olmak üzere, \mathbb{C}/Ω tor yüzeyinin tüm otomorfizmaları, $f([z]_{\Omega}) = [az + b]_{\Omega}$ ile verilen $f: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ dönüşümlerinden oluşur.

2.6. Üçgensel Grup

T , Öklid düzleminde iç açılarının ölçüleri $\pi/l, \pi/m, \pi/n$ olan bir üçgen olsun. Burada, l, m, n 1'den büyük tamsayılar ve

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

eşitliğini sağlar. Böyle bir üçgene (l, m, n) –üçgeni denir. T üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar, P, Q, R olsun (Şekil 2.8). Bu yansımalar,

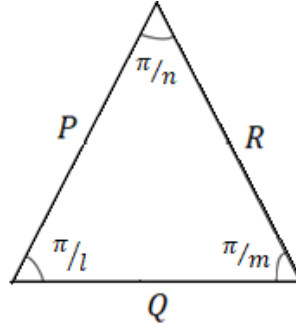
$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^l = (QR)^m = (RP)^n = 1 \quad (2.6.1)$$

bağıntılarını sağlar. Dolayısıyla, bu yansımalar sonsuz bir grup üretir. Bu gruba genişletilmiş Öklid üçgensel grubu denir ve $\Gamma(l, m, n)$ notasyonu ile gösterilir.

$A = PQ, B = QR, C = RP$ dönüşümleri T üçgeninin köşelerini sabit tutan döndürmelerdir. Bu döndürmeler, 2.6.1 deki bağıntıdan dolayı,

$$A^l = B^m = C^n = ABC = 1$$

bağıntılarını sağlar ve bir sonsuz grup üretir. Bu gruba Öklid üçgensel grubu denir ve $\Gamma[l, m, n]$ notasyonu ile gösterilir. $\Gamma[l, m, n]$ grubu, $\Gamma(l, m, n)$ grubunun indeksi 2 olan bir alt grubudur.



Şekil 2.8. Bir (l, m, n) -üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar

T üçgeni Öklid düzleminde olduğu için $\pi/l + \pi/m + \pi/n = \pi$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu kısıtlama altında l, m ve n 'nin alabileceği değerler 2, 3, 4 ve 6'dır. Dolayısıyla T ; $(2,4,4)$, $(2,3,6)$ veya $(3,3,3)$ - üçgenlerinden biridir.

2.7. Düzgün Figürler

Tanım 2.7.1. Sonlu, bağlantılı bir \mathcal{G} çizgesinin, kompakt, bağlantılı bir X yüzeyine gömülmesine X üzerinde bir figür denir. $X \setminus \mathcal{G}$ açık disklerden oluşur ve bu disklerden her birine figürün bir yüzü (face) denir. \mathcal{G} çizgesinin kenar ve köşelerine de sırasıyla figürün kenarı ve köşeleri denir.

Bu çalışma boyunca, figürler \mathcal{M} notasyonu ile gösterilecektir.

X bir yüzey ve \mathcal{M} , X üzerinde bir figür olmak üzere, \mathcal{M} figürünün cinsi X yüzeyinin cinsi olarak tanımlanır.

Tanım 2.7.2. Bir X yüzeyi üzerinde bir \mathcal{M} figürünü ele alalım. X yüzeyinin, $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ bağıntısını sağlayan bir f otomorfizmasına \mathcal{M} figürünün otomorfizması denir. Dolayısıyla, f otomorfizması \mathcal{M} figürünün köşelerini köşelere, kenarlarını kenarlara ve yüzlerini yüzlere götürür.

Bir \mathcal{M} figürünün tüm otomorfizmaları bileşke işlemine göre bir grup üretir ve bu grup $Aut^\pm \mathcal{M}$ notasyonu ile gösterilir. \mathcal{M} figürünün tüm konform otomorfizmalarının grubu da bileşke işlemine bir grup oluşturur ve $Aut^+ \mathcal{M}$ notasyonu ile gösterilir. $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu, $Aut^\pm \mathcal{M}$ grubunun indeksi 2 olan bir alt grubudur.

Tanım 2.7.3. Bir figürde, herhangi bir köşe ve bu köşeye doğru yönlendirilmiş bir köşe-kenar ikilisine bir dart veya yönlü kenar denir.

Tanım 2.7.4. \mathcal{M} , bir X yüzeyi üzerinde bir figür olsun. Eğer $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu dartlar üzerinde geçişli ise \mathcal{M} bir düzgün figürdür denir.

Tanım 2.7.5. Bir \mathcal{M} düzgün figürünün her bir yüzünün kenar sayısı m ve her bir köşesinin derecesi n ise \mathcal{M} figürünün tipi $\{m, n\}$ 'dir.

Tanım 2.7.6. Bir düzgün figürün köşe, kenar orta nokta ve yüz merkezlerine bu düzgün figürün geometrik noktaları denir. Bu geometrik noktalar sırasıyla **0**, **1** ve **2** notasyonuyla gösterilir.

Tanım 2.7.7. \mathcal{M} bir düzgün figür ve $f \in Aut^\pm \mathcal{M}$ olsun. Eğer f otomorfizması \mathcal{M} figürünün bir kenarına ait olan iki dartını birbirine götürür ve bu kenara komşu olan iki yüzünü sabit tutarsa f otomorfizmasına \mathcal{M} figürünün bir yansıması ve en az bir yansıması olan bir düzgün figüre de yansımalıdır denir.

Tanım 2.7.8. \mathcal{M} , bir X yüzeyi üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir figür olsun. Aynı yüzey üzerinde bulunan ancak \mathcal{M} figürünün köşelerini yüz merkezi, yüz merkezlerini köşe kabul eden yeni bir figür mevcuttur. Bu figüre \mathcal{M} figürünün duali denir ve \mathcal{M}^* ile gösterilir. Ayrıca, \mathcal{M}^* figürünün tipinin $\{n, m\}$ olduğu açıktır.

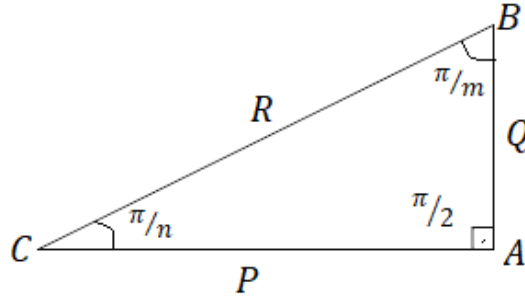
\mathcal{M} , cinsi g ve tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür ise dartlarının sayısı $|Aut^+ \mathcal{M}|$ 'ye eşittir. Ayrıca, \mathcal{M} figürü $|Aut^+ \mathcal{M}|/2$ kenar, $|Aut^+ \mathcal{M}|/m$ yüz ve $|Aut^+ \mathcal{M}|/n$ köşeye sahiptir. Dolayısıyla, Euler-Poincaré formülü olarak bilinen

$$|Aut^+ \mathcal{M}| \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) = 2 - 2g$$

eşitliği sağlanır.

\mathcal{M} bir X yüzeyi üzerinde $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür ve F , \mathcal{M} figürünün bir yüzü olsun. F yüzünün merkezi, kendisine komşu olan kenarların orta noktalarına ve köşelerine geodezik doğru parçalarıyla birleştirilsin. Böylece F yüzü $2m$ tane üçgene bölünmüş olur. Bu işlem \mathcal{M} figürünün her bir yüzü için tekrarlanırsa X yüzeyi $|Aut^\pm \mathcal{M}|$ tane üçgene bölünmüş olur. Bu üçgenlerin her birinin iç açıları $\pi/2$, π/m ve π/n radyandır. Dolayısıyla, X yüzeyi $(2, m, n)$ –üçgenlerine

bölünmüş olur. Bu üçgenlerden biri T olsun. T üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar P, Q ve R olsun (Şekil 2.9).



Şekil 2.9. Bir $(2, m, n)$ -üçgeninin kenarları üzerindeki yansımalar

Böylece, bu üç yansıma $Aut^{\pm}\mathcal{M}$ grubunu üretir ve bu grup

$$\langle P, Q, R | P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^m = (RP)^n = \dots = 1 \rangle$$

biçimindedir. $A = PQ, B = QR, C = RP$ elemanları, $Aut^{\pm}\mathcal{M}$ grubunun indeksi 2 olan bir alt grubunu üretir. Bu grup ise $Aut^+\mathcal{M}$ grubudur ve

$$\langle A, B, C | A^2 = B^m = C^n = ABC = \dots = 1 \rangle$$

biçimindedir.

3. TOR YÜZEYLERİ ÜZERİNDEKİ DÜZGÜN FİGÜRLER

Bu çalışmada tipi $\{m, n\}$ ve cinsi 1 olan düzgün figürleri inceleyeceğimiz için $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ eşitliği sağlanmalıdır. Dolayısıyla tipleri $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ olan düzgün figürleri ele alacağız.

3.1. $\{4,4\}$ Tipindeki Düzgün Figürler

T , karmaşık düzlemde köşeleri $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ olan $(2,4,4)$ -üçgeni olsun. Bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar $P(z) = \bar{z}$, $Q(z) = -\bar{z} + 1$ ve $R(z) = i\bar{z}$ olur. Bu yansımalar,

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (PR)^4 = 1$$

bağıntılarını sağlar. Böylece, $(2,4,4)$ genişletilmiş üçgensel grubuna izomorf olan bir grup üretir. Bu grubu $\Gamma(2,4,4)$ ile göstereyim. $\Gamma(2,4,4)$ grubunun, $z \rightarrow z + 1$ ve $z \rightarrow z + i$ ötelemeleri tarafından üretilmiş Λ normal alt grubunu ele alalım. Köşeleri $0, 1, i, 1 + i$ olan kare, Λ grubu için bir temel bölgedir. b ve c tamsayı olmak üzere, $f(z) = z + b + ci$, $g(z) = z - c + bi$ dik ötelemelerinin ürettiği Ω grubu, Λ grubu için bir alt gruptur. Köşeleri $0, b + ci, -c + bi, (b - c) + (b + c)i$, alanı $b^2 + c^2$ olan kare, Ω grubu için bir temel bölgedir. Ω grubu da $\Gamma(2,4,4)$ grubunun bir normal alt grubudur ve \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir.

Bu tor yüzeyinde, $n = b^2 + c^2$ olmak üzere, n köşe, $2n$ kenar ve n yüze sahip bir düzgün figür vardır. Bu figürü $\{4,4\}_{b,c}$ notasyonu ile göstereceğiz.

$\{4,4\}_{b,c}$ düzgün figürünün yansımaları için gerek ve yeter şart

$$bc(b - c) = 0$$

olmasıdır. Burada $b \neq c$ iken $b > c$ kabul edebiliriz (Coxeter ve Moser, 1980). Dolayısıyla \mathbb{C}/Ω yüzeyi üzerinde $\{4,4\}_{b,0}$ ve $\{4,4\}_{b,b}$ olmak üzere iki tür yansımaları düzgün figür bulunur.

\mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 sırasıyla $\{4,4\}_{b,0}$ ve $\{4,4\}_{b,b}$ figürleri olsun. Bu figürlerin, $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ grupları sırasıyla,

$$\langle P, Q, R | P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (RP)^4 = (PRQR)^b = 1 \rangle$$

ve

$$\langle P, Q, R | P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^4 = (RP)^4 = (QRP)^{2b} = 1 \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu grupların mertebeleri sırasıyla $8b^2$ ve $16b^2$ dir.

$Aut^+ \mathcal{M}_1$ ve $Aut^+ \mathcal{M}_2$ grupları ise,

$$\langle A, B, C | A^2 = B^4 = C^4 = ABC = (C^{-1}B)^b = 1 \rangle$$

ve

$$\langle A, B, C | A^2 = B^4 = C^4 = ABC = (BAC)^b = 1 \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca bu grupların mertebeleri sırasıyla $4b^2$ ve $8b^2$ dir.

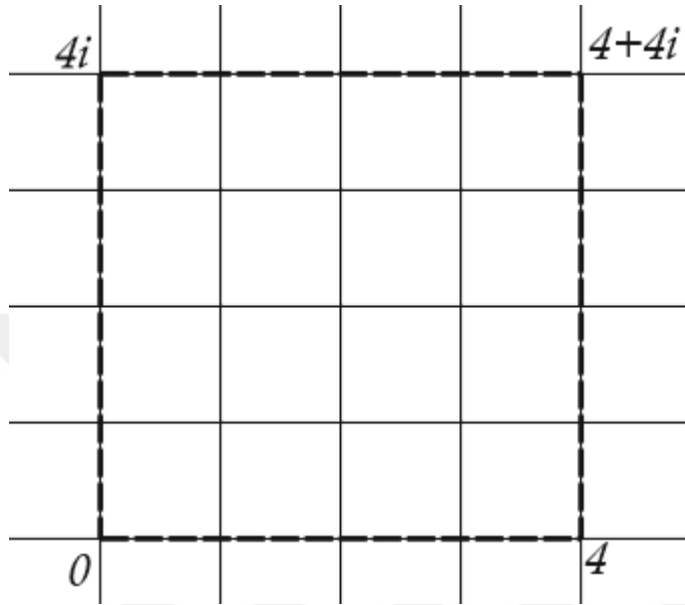
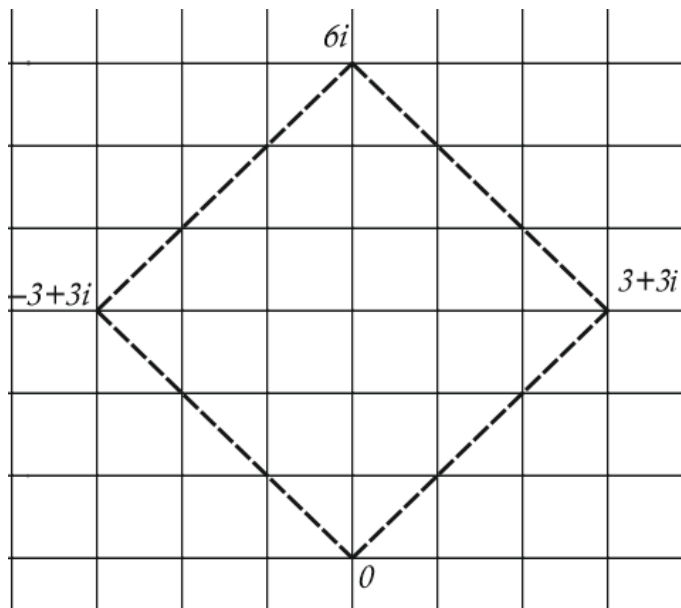
Örnek 3.1.1. Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 4$ ve $g(z) = z + 4i$ dik ötelemelerini ele alalım. Bu ötelemeler bir Ω grubu üretir. Köşeleri $0, 4, 4i, 4 + 4i$ olan kare, Ω grubu için bir temel bölgedir ve \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Yukarıda açıklandığı gibi bu tor yüzeyi üzerinde, 16 köşesi, 32 kenarı ve 16 yüzü bulunan bir düzgün figür vardır ve bu figür $\{4,4\}_{4,0}$ notasyonu ile gösterilir. Şekil 3.1 deki kenar uzunlukları 1 birim olan karelerin her biri $\{4,4\}_{4,0}$ figürü için bir yüzdür.

Örnek 3.1.2. Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 3 + 3i$ ve $g(z) = z - 3 + 3i$ dik ötelemelerini alalım. Bu ötelemelerin ürettiği Ω grubu için, alanı 18 birimkare, köşeleri $0, -3 + 3i, 3 + 3i, 6i$ olan kare bir temel bölgedir. \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyi oluşturur. Bu tor yüzeyi üzerinde, 18 köşesi, 36 kenarı ve 18 yüzü olan bir $\{4,4\}_{3,3}$ notasyonu ile gösterilen düzgün figür vardır. Şekil 3.2 de de görüldüğü gibi, kenar uzunlukları 1 birim olan karelerden her biri $\{4,4\}_{3,3}$ figürü için bir yüz teşkil eder.

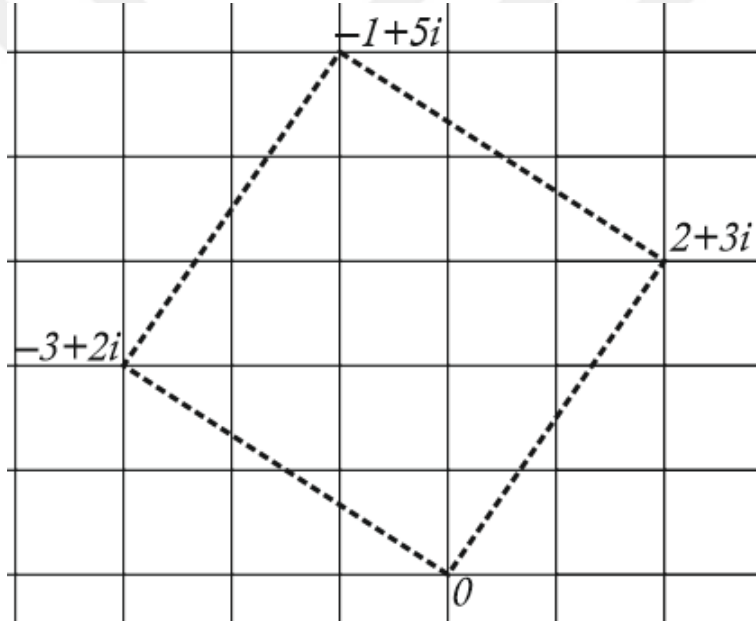
$\mathcal{M}, \{4,4\}_{b,c}$ düzgün figürü olsun. Eğer \mathcal{M} yansımali değil ise $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu

$$\langle A, B, C | A^2 = B^4 = C^4 = ABC = (BAB)^b (B^2A)^c = 1 \rangle$$

biçimindedir. Bu grubun mertebesi, $|Aut^+ \mathcal{M}| = 4(b^2 + c^2)$ dir.

Şekil 3.1. $\{4,4\}_{4,0}$ figürüŞekil 3.2. $\{4,4\}_{3,3}$ figürü

Örnek 3.1.3. Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 2 + 3i$ ve $g(z) = z - 3 + 2i$ ötelemelerini ele alalım. Bu ötelemelerin ürettiği grup Ω olsun. Köşeleri 0 , $2 + 3i$, $-3 + 2i$, $-1 + 5i$ olan kare Ω grubu için bir temel bölgedir ve \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyi oluşturur. Bu tor yüzeyi, 13 köşesi, 26 kenarı ve 13 yüzü olan bir düzgün figüre sahiptir ve bu figür $\{4,4\}_{2,3}$ notasyonu ile gösterilir. Şekil 3.3 deki kenar uzunlukları 1 birim olan her bir kare $\{4,4\}_{2,3}$ düzgün figür için bir yüz oluşturur.



Şekil 3.3. $\{4,4\}_{2,3}$ figürü

3.2. $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ Tipindeki Düzgün Figürler

T , köşeleri karmaşık düzlemde köşeleri $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ olan $(2,3,6)$ – üçgeni olsun. Bu üçgenin kenarları üzerindeki yansımalar, $a = e^{\frac{\pi}{3}i}$ olmak üzere $P(z) = \bar{z}, Q(z) = -\bar{z} + 1$ ve $R(z) = a\bar{z}$ olur. Bu yansımalar,

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (RP)^6 = 1$$

bağıntılarını sağlar. Böylece, $(2,3,6)$ –genişletilmiş üçgensel grubuna izomorf olan bir grup üretir ve bu grubu $\Gamma(2,3,6)$ ile gösterelim. $\Gamma(2,3,6)$ grubunun, $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ olmak üzere $z \rightarrow z + 1$ ve $z \rightarrow z + w$ ötelemeleri tarafından üretilmiş Λ normal alt grubunu ele alalım. Köşeleri $0, 1, w$ ve $1 + w$ olan paralelkenar, Λ

grubu için bir temel bölgedir. b ve c tamsayı olmak üzere, $f(z) = z - c + bw$ ve $g(z) = z + b + c + cw$ ötelemelerinin ürettiği Ω grubu, Λ grubu için bir alt gruptur. Köşeleri $0, -c + bw, b + c + cw, b + (b + c)w$, alanı $b^2 + bc + c^2$ olan paralelkenar, Ω grubu için bir temel bölgedir. Ω grubu da $\Gamma(2,3,6)$ grubunun bir normal alt grubudur ve \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir.

Bu tor yüzeyi üzerinde, $t = b^2 + bc + c^2$ olmak üzere, t köşe, $3t$ kenar ve $2t$ üçgensel yüze sahip bir düzgün figür vardır. Bu figürü $\{3,6\}_{b,c}$ notasyonu ile göstereceğiz. Ayrıca $\{6,3\}_{b,c}$ figürü, $\{3,6\}_{b,c}$ figürünün duali olduğundan benzer özelliklere sahiptir. Dolayısıyla tor yüzeyi üzerinde $\{6,3\}_{b,c}$ figürü, $2t$ köşe, $3t$ kenar ve t altıgen yüze sahiptir.

$\{3,6\}_{b,c}$ düzgün figürünün yansımali olması için gerek ve yeter şart

$$bc(b - c) = 0$$

olmasıdır. Burada $b \neq c$ iken $b > c > 0$ kabul edebiliriz (Coxeter ve Moser, 1980). Dolayısıyla \mathbb{C}/Ω yüzeyi üzerinde $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ olmak üzere iki tür yansımali düzgün figür bulunur.

\mathcal{M}_1 ve \mathcal{M}_2 sırasıyla $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ figürleri olsun. Bu figürlerin, $Aut^\pm \mathcal{M}_1$ ve $Aut^\pm \mathcal{M}_2$ gruplarının üreteçleri sırasıyla,

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (RP)^6 = (QRPRPR)^b = 1$$

ve

$$P^2 = Q^2 = R^2 = (PQ)^2 = (QR)^3 = (RP)^6 = (QRPRP)^{2b} = 1$$

bağıntılarını sağlar. Ayrıca bu grupların mertebeleri, sırasıyla $12b^2$ ve $36b^2$ dir.

$Aut^+ \mathcal{M}_1$ ve $Aut^+ \mathcal{M}_2$ grupları ise,

$$\langle A, B, C | A^2 = B^3 = C^6 = ABC = (BC^{-2})^b = 1 \rangle$$

ve

$$\langle A, B, C | A^2 = B^3 = C^6 = ABC = (BC^{-1}AC^2)^b = 1 \rangle$$

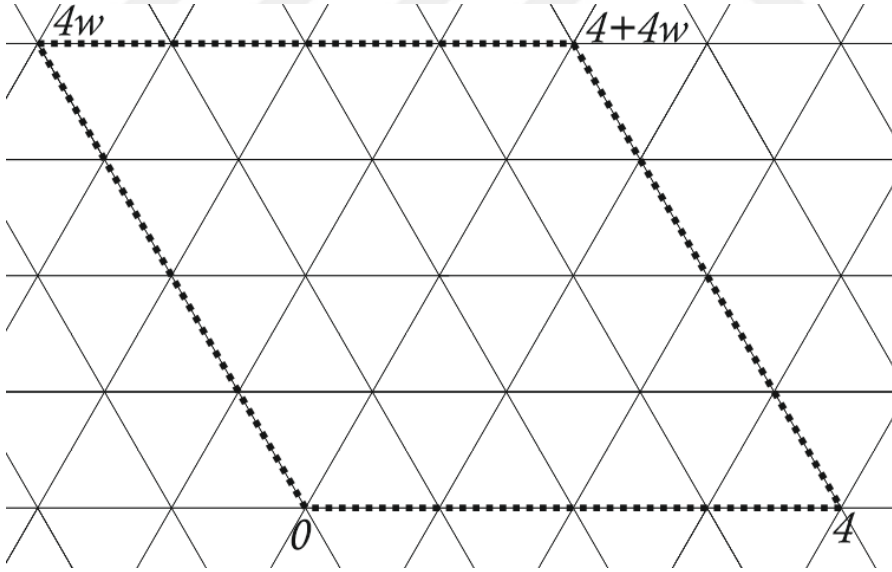
biçimindedir. Ayrıca bu grupların mertebeleri, sırasıyla $6b^2$ ve $18b^2$ dir.

$b > c > 0$ ve \mathcal{M} , $\{3,6\}_{b,c}$ düzgün figürü olsun. Bu durumda, \mathcal{M} yansımali değildir ve $Aut^+ \mathcal{M}$ grubu,

$$\langle A, B, C \mid A^2 = B^3 = C^6 = ABC = (CBA)^b (BAC)^c = 1 \rangle$$

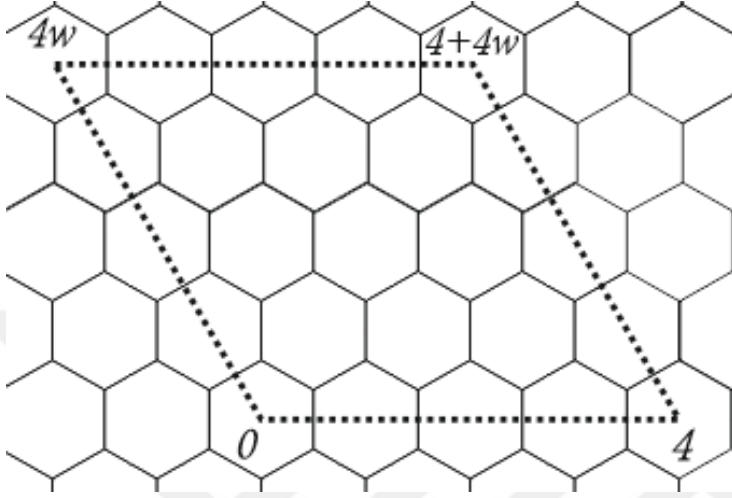
biçimindedir. Bu grubun mertebesi, $|Aut^+ \mathcal{M}| = 6(b^2 + bc + c^2)$ dir (Coxeter ve Moser, 1980).

Örnek 3.2.1. Karmaşık düzlemde $f(z) = z + 4w$ ve $g(z) = z + 4$ ötelemelerini ele alalım. Bu ötelemeler bir Ω grubunu üretir. Köşeleri $0, 4w, 4, 4 + 4w$ olan paralelkenar, Ω grubu için bir temel bölgedir ve \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Yukarıda açıklandığı gibi bu tor yüzeyi üzerinde 16 köşesi, 48 kenarı ve 32 üçgensel yüzü bulunan bir düzgün figür vardır ve bu figür $\{3,6\}_{4,0}$ notasyonu ile gösterilir. Şekil 3.4 deki kenar uzunlukları 1 birim olan eşkenar üçgenlerden her biri $\{3,6\}_{4,0}$ figürü için bir yüz teşkil eder.

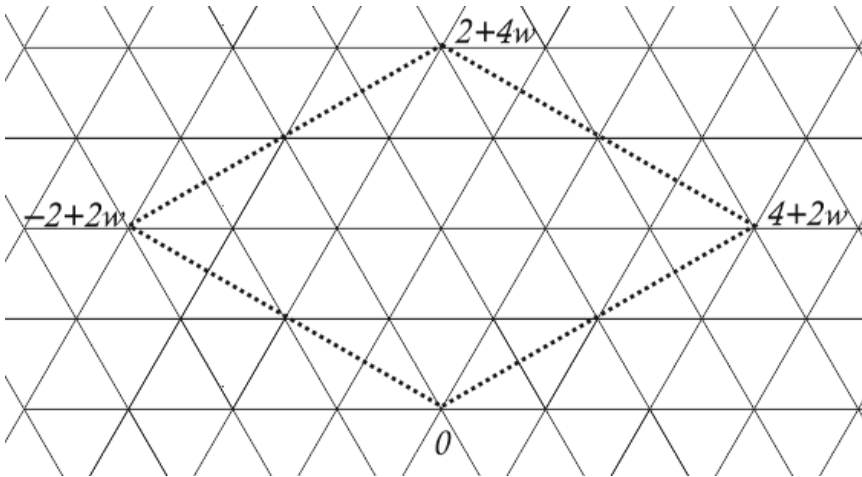


Şekil 3.4. $\{3,6\}_{4,0}$ figürü

Ayrıca, bu tor yüzeyi üzerinde, 32 köşesi, 48 kenarı ve 16 altıgen yüzü bulunan bir düzgün figür vardır ve bu figür $\{6,3\}_{4,0}$ notasyonu ile gösterilir. Şekil 3.5 de gösterilen altıgenlerden her biri $\{6,3\}_{4,0}$ figürü için bir yüz teşkil eder. Hesaplama yapıldığında, her bir altıgenin kenar uzunluğunun $\frac{1}{\sqrt{3}}$ birim olduğu görülür.

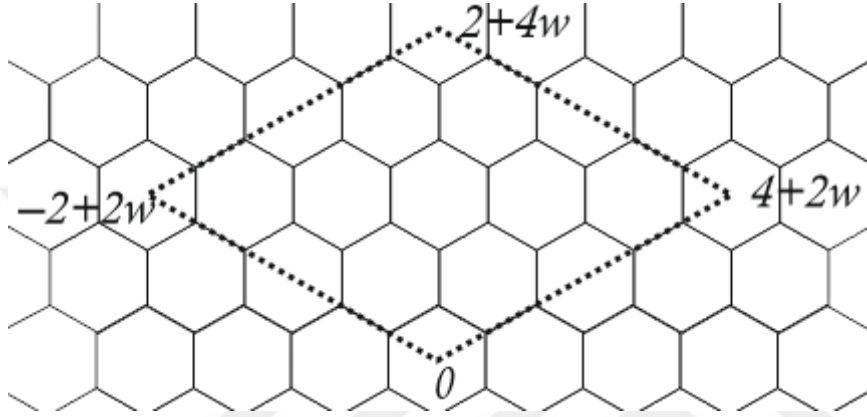
Şekil 3.5. $\{6,3\}_{4,0}$ figürü

Örnek 3.2.2. Karmaşık düzlemde $f(z) = z - 2 + 2w$ ve $g(z) = z + 4 + 2w$ ötelemelerini ele alalım. Bu ötelemelerin ürettiği Ω grubu için, köşeleri 0 , $-2 + 2w$, $4 + 2w$ ve $2 + 4w$ olan paralelkenar bir temel bölgedir. \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyi oluşturur. Bu tor yüzeyi üzerinde, 12 köşe, 36 kenar ve 24 üçgenel yüzü olan bir düzgün figür vardır. Bu figürün $\{3,6\}_{2,2}$ olduğu açıktır (Şekil 3.6). Kenar uzunlukları 1 birim olan eşkenar üçgenlerden her biri $\{3,6\}_{2,2}$ figürü için bir yüzdür.

Şekil 3.6. $\{3,6\}_{2,2}$ figürü

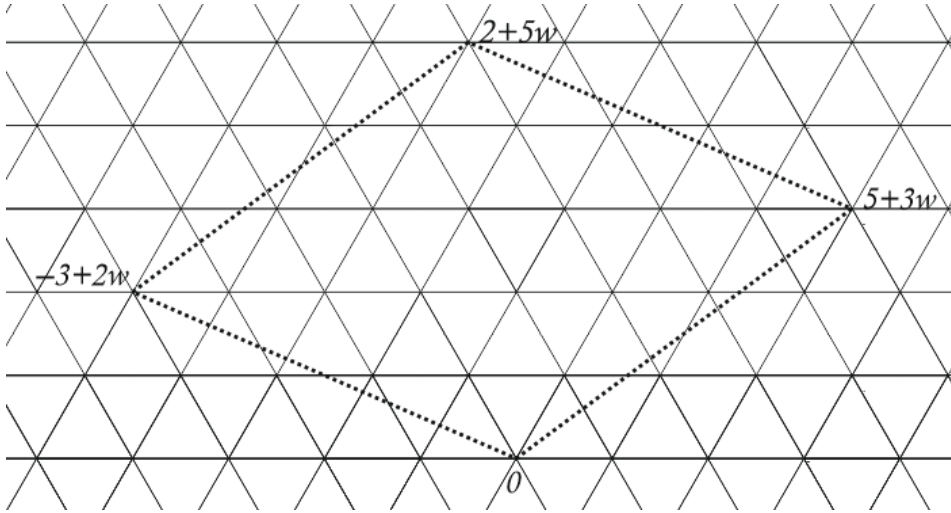
Bu tor yüzeyi üzerinde, 24 köşesi, 36 kenarı ve 12 altıgen yüzü bulunan bir düzgün figür vardır. Bu figür $\{3,6\}_{2,2}$ figürünün duali olan $\{6,3\}_{2,2}$ düzgün

figürüdür. Şekil 3.7 de görüldüğü gibi kenar uzunlukları $\frac{1}{\sqrt{3}}$ birim olan altgenlerden her biri $\{6,3\}_{2,2}$ figürü için bir yüz teşkil eder.



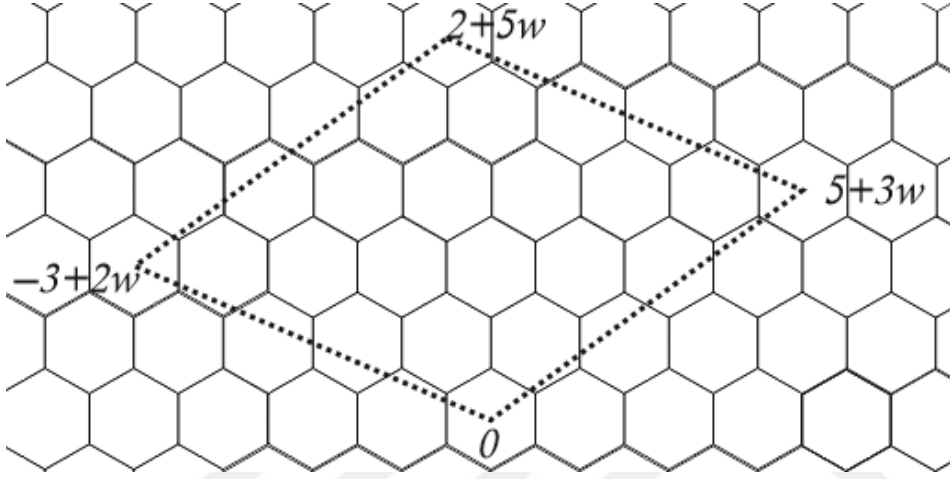
Şekil 3.7. $\{6,3\}_{2,2}$ figürü

Örnek 3.2.3. Karmaşık düzlemde $f(z) = z - 3 + 2w$ ve $g(z) = z + 5 + 3w$ ötelemelerini ele alalım. Bu ötelemeler bir Ω grubunu üretir. Köşeleri $0, -3 + 2w, 5 + 3w$ ve $2 + 5w$ olan paralelkenar, Ω grubu için bir temel bölgedir ve \mathbb{C}/Ω bölüm uzayı bir tor yüzeyidir. Bu tor yüzeyi, 19 köşesi, 57 kenarı ve 38 üçgensel yüzü olan bir düzgün figüre sahiptir ve bu figür $\{3,6\}_{2,3}$ notasyonu ile gösterilir. Şekil 3.8 deki kenar uzunlukları 1 birim olan her bir eşkenar üçgen bu düzgün figür için bir yüz belirtir.



Şekil 3.8. $\{3,6\}_{2,3}$ figürü

Ayrıca, bu tor yüzeyi üzerinde $\{3,6\}_{2,3}$ figürünün duali olan $\{6,3\}_{2,3}$ düzgün figürü bulunur. Bu figür 38 köşe, 57 kenar ve 19 yüze sahiptir. Kenar uzunlukları $\frac{1}{\sqrt{3}}$ birim olan altıgenlerden her biri $\{6,3\}_{2,3}$ figürü için bir yüz teşkil eder (Şekil 3.9).



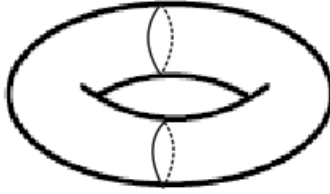
Şekil 3.9. $\{6,3\}_{2,3}$ figürü

4. TOR YÜZEYLERİ VE YANSIMALI DÜZGÜN FİĞÜRLER

4.1. Sabit Eğriler

X , cinsi g olan kompakt bir yüzey ve \mathcal{M} , X üzerinde bir düzgün figür olsun. Eğer \mathcal{M} yansımali ise $\sigma: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ biçiminde mertebesi 2 olan bir otomorfizmaya sahiptir. Bu otomorfizmanın X üzerinde sabit tuttuğu noktalar k tane basit kapalı eğri oluşturur. Harnack teoremi gereğince $k \leq g + 1$ olduğu bilinmektedir. Bu eğrilere σ otomorfizmasının sabit eğrileri denir.

Örnek 4.1.1. Şekil 4.1 deki tor yüzeyi, iki eğriyi sabit tutan bir otomorfizmaya sahiptir.



Şekil 4.1. Tor yüzeyi üzerindeki sabit eğriler

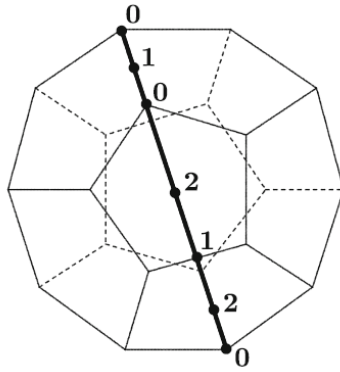
4.1.1. Sabit Eğrilerin Desenleri

X yüzeyi üzerinde bir \mathcal{M} sabit eğrisini ele alalım. Bu sabit eğri \mathcal{M} düzgün figürünün bazı geometrik noktalarından geçer ve bu geometrik noktalar

$$\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}_1 \underbrace{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}_2 \dots \underbrace{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}_N \quad (4.1.1)$$

şeklinde sonlu bir periyodik dizi oluşturur. Bu diziyeye \mathcal{M} sabit eğrisinin deseni denir. Burada $a_i \in \{0, 1, 2\}$, $1 \leq i \leq k$ dir. Bu dizideki tekrarlanan her bir $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$ parçası desenin bir halkası olarak adlandırılır. 4.1.1 deki desen kısaca $(a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k)^N$ olarak gösterilecektir.

Örnek 4.1.2. Küre üzerinde düzgünonikiyüzlüye (dodecahedron) karşılık gelen ve tipi $\{5,3\}$ olan bir \mathcal{M} düzgün figürü vardır. Bu figürün her bir yansıması küre üzerinde bir tane eğriyi sabit tutar. Bu eğrilere her birinin deseni **010212010212** = **(010212)**² biçimindedir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Düzgün Onikiyüzlü (Dodecahedron)

Benzer şekilde, diğer düzgün çokyüzlülere karşılık gelen düzgün figürler ve ilgili desenler kolayca elde edilebilir ve Çizelge 4.1 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Küre üzerindeki düzgün figürler ve desenleri

Düzgün Çokyüzlü	Figür Tipi	Sabit Eğri Sayısı	Deseni
Düzgün Dörtüzlü (Tetrahedron)	{3,3}	6	010212
Düzgün Sekizyüzlü (Octahedron)	{3,4}	3	(01) ⁴
Düzgün Sekizyüzlü (Octahedron)	{3,4}	6	(0212) ²
Küp (Cube)	{4,3}	3	(12) ⁴
Küp (Cube)	{4,3}	6	(0102) ²
Düzgün Yirmiyüzlü (Icosahedron)	{3,5}	15	(010212) ²
Düzgün Onikiyüzlü (Dodecahedron)	{5,3}	15	(010212) ²

Bir sabit eğrinin deseninin her zaman **01**, **02**, **12**, **0102**, **0212**, **010212** halkalarından birinin tekrarlanması sonucu elde edildiği ve bir yüzey üzerinde farklı desenlere sahip en fazla üç sabit eğri sınıfının bulunabileceği, Melekoğlu ve Singerman (2016) tarafından ispatlanmıştır. Bu bilgiler aşağıdaki teoremden özetlenmiştir:

Teorem 4.1.3. *X* kompakt bir yüzey, \mathcal{M} , *X* üzerinde tipi $\{m,n\}$ olan yansımali bir düzgün figür ve M , \mathcal{M} figürünün bir yansıması tarafından sabit tutulan bir eğri olsun. Bu durumda M nin deseni;

i) m ve n tek ise, **(010212)** ^{ℓ} ,

ii) m çift ve n tek ise, **(0102)** ^{ℓ_1} veya **(12)** ^{ℓ_2} ,

iii) m tek ve n çift ise, $(\mathbf{0212})^{\ell_1}$ veya $(\mathbf{01})^{\ell_2}$,

iv) m ve n çift ise, $(\mathbf{01})^{\ell_1}$, $(\mathbf{02})^{\ell_2}$ veya $(\mathbf{12})^{\ell_3}$,

biçimindedir. Burada ℓ, ℓ_1, ℓ_2 ve ℓ_3 pozitif tamsayıdır ve ilgili desenin mertebesidir. Ayrıca, farklı satırdaki ℓ_i sayıları eşit olmak zorunda değildir.

4.1.2. Sabit Eğrilerin Sayıları

\mathcal{M} bir düzgün figür olmak üzere, \mathcal{M} figürünün tüm yansımaları tarafından sabit tutulan eğrilerin sayısı bu çalışma boyunca $\|\mathcal{M}\|$ notasyonu ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.4. X kompakt bir yüzey, \mathcal{M} , X üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan yansımalı bir düzgün figür ve ℓ, ℓ_1, ℓ_2 ve ℓ_3 Teorem 4.1.3 deki gibi olsun. Bu durumda;

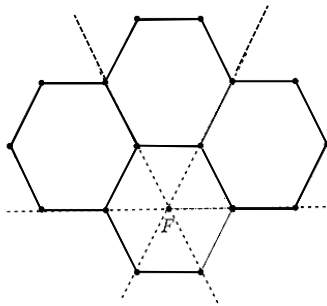
i) m ve n tek ise, $\|\mathcal{M}\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2\ell}$ dir,

ii) m ve n sayılarının biri tek diğeri çift ise, $\|\mathcal{M}\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right)$ dir,

iii) m ve n çift ise, $\|\mathcal{M}\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3} \right)$ dir.

İspat.

i) Teorem 4.1.3 gereğince, \mathcal{M} nin herhangi bir yansıması tarafından sabit tutulan bir eğrinin deseni $(\mathbf{010212})^\ell$ biçimindedir. Bu eğrilerin her birinin \mathcal{M} nin ℓ tane kenarından geçtiği açıktır. \mathcal{M} nin kenar sayısı $\frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2}$ olduğundan $\|\mathcal{M}\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2\ell}$ olduğu kolayca görülür.



Şekil 4.3. Figürün yüz merkezinden geçen ve deseni $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ olan sabit eğiler

ii) m çift ve n tek olsun. Teorem 4.1.3 den dolayı, \mathcal{M} nin herhangi bir yansıması tarafından sabit tutulan bir eğrinin deseni $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ veya $(\mathbf{12})^{\ell_2}$ biçimindedir. \mathcal{M} nin $\frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{m}$ tane yüzü olduğu ve $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ deseni bir eğrinin ℓ_1 tane yüzün merkezinden geçtiği biliniyor. Ayrıca \mathcal{M} nin bir F yüzünün merkezinden geçen ve deseni $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ olan sabit eğrilerin sayısı $\frac{m}{2}$ dir. Örneğin, $m = 6$ ve $n = 3$ için bir yüz merkezinden geçen ve deseni $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ olan sabit eğrilerin sayısının 3 olduğu Şekil 4.3 de gösterilmiştir. Dolayısıyla, deseni $(\mathbf{0102})^{\ell_1}$ olan eğrilerin sayısı

$$\frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{m} \frac{1}{\ell_1} \frac{m}{2} = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2\ell_1}$$

dir. Benzer şekilde, deseni $(\mathbf{12})^{\ell_2}$ olan eğrilerin sayısının

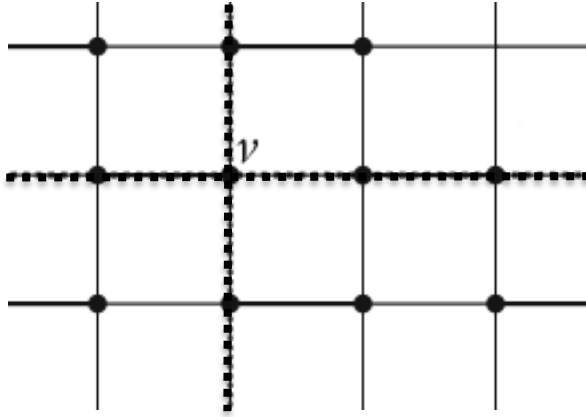
$$\frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{m} \frac{1}{\ell_2} \frac{m}{2} = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2\ell_2}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$\|\mathcal{M}\| = \frac{|Aut^+ \mathcal{M}|}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right)$$

bulunur.

m tek ve n çift olduğu durumda da aynı formülün geçerli olduğu benzer şekilde ispatlanabilir.



Şekil 4.4. Tipi $\{4,4\}$ olan figürün deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$ olan sabit eğrileri

iii) m ve n çift olması durumunda, Teorem 4.1.3 gereğince, \mathcal{M} nin herhangi bir yansıması tarafından sabit tutulan bir eğrinin deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$, $(\mathbf{02})^{\ell_2}$ veya $(\mathbf{12})^{\ell_3}$ biçimindedir. \mathcal{M} nin $\frac{|Aut^+\mathcal{M}|}{n}$ tane köşesi olduğu biliniyor. Ayrıca \mathcal{M} nin bir köşesinden geçen ve deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$ olan sabit eğrilerin sayısı $\frac{n}{2}$ dir. Örneğin, $m = n = 4$ için bir köşeden geçen ve deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$ olan sabit eğrilerin sayısının 2 olduğu Şekil 4.4 de gösterilmiştir. Böylece deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$ olan sabit eğrilerin sayısı

$$\frac{|Aut^+\mathcal{M}|}{n} \cdot \frac{1}{\ell_1} \cdot \frac{n}{2} = \frac{|Aut^+\mathcal{M}|}{2\ell_1}$$

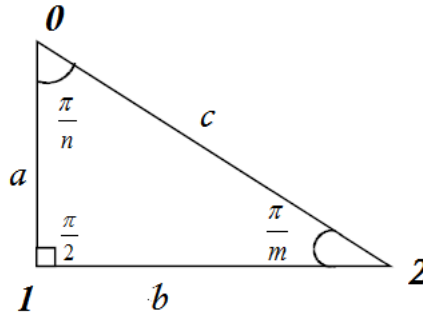
olur. Benzer şekilde, deseni $(\mathbf{02})^{\ell_2}$ olan sabit eğrilerin sayısının $\frac{|Aut^+\mathcal{M}|}{2\ell_2}$ ve $(\mathbf{12})^{\ell_3}$ desenli sabit eğrilerin sayısının $\frac{|Aut^+\mathcal{M}|}{2\ell_3}$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak,

$$\|\mathcal{M}\| = \frac{|Aut^+\mathcal{M}|}{2} \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} + \frac{1}{\ell_3} \right)$$

elde edilir.

4.1.3. Sabit Eğrilerin Uzunlukları

X bir yüzey, \mathcal{M} , X üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür ve M figürün bir yansıması tarafından sabit tutulan bir eğri olsun. X üzerindeki bütün sabit eğriler, yüzeyi $|Aut^\pm\mathcal{M}|$ tane $(2, m, n)$ – üçgenine böler ve M eğrisi $(2, m, n)$ – üçgenlerinin kenarlarının birleşiminden oluşur. Bir $(2, m, n)$ – üçgeninin kenar uzunlukları Şekil 4.5 de gösterildiği gibi a, b ve c birim olsun.



Şekil 4.5. Kenar uzunlukları a, b ve c birim olan $(2, m, n)$ – üçgeni

m ve n tek olsun. Bu durumda M eğrisinin deseni $(\mathbf{010212})^\ell$ biçiminde olacaktır. Bu desenin her bir halkası M eğrisinin bir parçasına karşılık gelir ve bu parçanın uzunluğu $2(a + b + c)$ birimdir. M eğrisi ℓ parçadan oluştuğu için uzunluğu $2\ell(a + b + c)$ birim olur.

m ve n tek iken \mathcal{M} figürünün tüm yansımaları tarafından sabit tutulan eğrilerin desen ve uzunluklarının aynı olduğu Melekoğlu ve Singerman(2016) tarafından ispatlanmıştır.

Eğer m ve n nin biri tek diğeri çift ise Teorem 4.1.3 gereğince X üzerindeki sabit eğriler iki sınıfa ayrılır ve her bir sınıftaki eğrilerin desenleri aynıdır. Örneğin, m çift ve n tek ise her bir sınıftaki eğrilerin deseni $(\mathbf{12})^{\ell_1}$ veya $(\mathbf{0102})^{\ell_2}$ biçimindedir. $(\mathbf{12})^{\ell_1}$ deseninin her bir halkası ilgili sabit eğrinin bir parçasına karşılık gelir ve bu parçanın uzunluğu $2b$ birimdir. Aynı sabit eğri ℓ_1 parçadan oluştuğu için sabit eğrinin uzunluğu $2\ell_1 b$ olur. Benzer şekilde $(\mathbf{0102})^{\ell_2}$ desenli eğrilerin uzunluğunun $2\ell_2(a + c)$ olduğu gösterilebilir. m tek ve n çift olduğu durumda sabit eğrilerin uzunluğu benzer şekilde hesaplanabilir.

m ve n çift ise X üzerindeki sabit eğrilerin üç sınıfa ayrıldığı ve her bir sınıftaki eğrilerin desenlerinin aynı olduğu Melekoğlu ve Singerman(2016) tarafından ispatlanmıştır. Her bir sınıftaki eğrilerin deseni $(\mathbf{01})^{\ell_1}$, $(\mathbf{02})^{\ell_2}$ veya $(\mathbf{12})^{\ell_3}$ biçiminde olduğundan bu eğrilerin uzunluklarının $2\ell_1 a$, $2\ell_2 c$ veya $2\ell_3 b$ olduğu önceki durumlara benzer şekilde hesaplanabilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 4.1.5. *X bir yüzey, \mathcal{M} , X üzerinde tipi $\{m, n\}$ olan bir düzgün figür ve \mathcal{M} figürünün yansımaları tarafından sabit tutulan eğrilerin belirlediği $(2, m, n)$ – üçgenlerinin uzunlukları Şekil 4.5 de gösterildiği gibi a, b ve c birim olsun. Bu durumda X üzerindeki sabit eğrilerin uzunlukları Çizelge 4.2 de verilmiştir.*

4.2. Tor Yüzeyleri Üzerindeki Sabit Eğriler

Herhangi bir tor yüzeyi üzerindeki bir düzgün figürün tipinin $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ olduğu biliniyor. Bu kısımda, bu düzgün figürlere karşılık gelen sabit eğrilerin desenleri incelenecektir.

Çizelge 4.2. Sabit eğrilerin uzunlukları

m ve n nin durumları	Desen	Sabit Eğri Uzunluğu
m ve n tek	$(010212)^\ell$	$2\ell(a + b + c)$
m tek ve n çift	$(01)^\ell$	$2\ell_1 a$
	$(0212)^\ell$	$2\ell_2(b + c)$
m çift ve n tek	$(12)^\ell$	$2\ell_1 b$
	$(0102)^\ell$	$2\ell_2(a + c)$
m ve n çift	$(01)^\ell$	$2\ell_1 a$
	$(02)^\ell$	$2\ell_2 c$
	$(12)^\ell$	$2\ell_3 b$

4.2.1. Tipi $\{4, 4\}$ Olan Düzgün Figürler

X bir tor yüzeyi ve \mathcal{M} , X üzerinde tipi $\{4,4\}$ olan bir düzgün figür olsun. \mathcal{M} yansımali olduğundan $\{4,4\}_{b,0}$ veya $\{4,4\}_{b,b}$ figürüdür. Çizelge 4.3 de tipi $\{4,4\}_{b,0}$ veya $\{4,4\}_{b,b}$ olan düzgün figürlerin yansımaları tarafından sabit tutulan eğrilerin sayıları ve desenleri verilmiştir.

Çizelge 4.3. $\{4,4\}$ figürüne karşılık gelen sabit eğriler

Düzgün Figür	Yansıma	Sabit Eğri Sayısı	Deseni
$\{4,4\}_{b,0}$	P	$2b$	$(01)^b$
	Q	$2b$	$(12)^b$
	R	$2b$	$(02)^b$
$\{4,4\}_{b,b}$	P	$2b$	$(01)^{2b}$
	Q	$2b$	$(12)^{2b}$
	R	$4b$	$(02)^b$

4.2.2. Tipi $\{3, 6\}$ veya $\{6, 3\}$ Olan Düzgün Figürler

X bir tor yüzeyi ve \mathcal{M} , X üzerinde tipi $\{3,6\}$ olan bir düzgün figür olsun. \mathcal{M} yansımali olduğundan $\{3,6\}_{b,0}$ veya $\{3,6\}_{b,b}$ figürüdür. Çizelge 4.4 de tipi $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ olan düzgün figürlerin yansımaları tarafından sabit tutulan eğrilerin sayıları ve desenleri verilmiştir.

Ayrıca $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ düzgün figürlerinin duali olan $\{6,3\}_{b,0}$ ve $\{6,3\}_{b,b}$ figürleri ile benzer özellikleri sağlar. $\{6,3\}_{b,0}$ ve $\{6,3\}_{b,b}$ figürlerinin sabit eğri sayıları $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ figürlerinin sabit eğri sayılarına eşittir. Ancak bu iki figürün desenlerini bulmak için $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,b}$ figürlerinin desenlerinde **0** yerine **2**, **2** yerine **0** yazmak yeterli olacaktır.

Çizelge 4.4. $\{3,6\}$ figürüne karşılık gelen sabit eğriler

Düzgün Figür	Yansıma	Sabit Eğri Sayısı	Deseni
$\{3,6\}_{b,0}$	P	$3b$	$(01)^b$
	Q, R	$3b$	$(0212)^b$
$\{3,6\}_{b,b}$	P	$3b$	$(01)^{3b}$
	Q, R	$9b$	$(0212)^b$



5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk olarak çizge, figür ve düzgün figür kavramları tanıtıldı ve düzgün figürlerin otomorfizma grupları incelendi. Ayrıca tor yüzeyi üzerindeki yansımali ve yansımali olmayan düzgün figürler tiplerine göre sınıflandırılıp örneklerle açıklandı. Son olarak, sabit eğriler ve bunların desenleri tanıtıldı. Ayrıca sabit eğrilerin sayılarını ve uzunluklarını hesaplamada kullanılan teoremler ispatlandı. Bu teoremler kullanılarak yansımali tor yüzeyleri üzerindeki sabit eğrilerin desenleri ve sayıları çizelgeler halinde verildi.

KAYNAKLAR

- [1] Coxeter, H.S.M. 1973. Regular polytopes. Dover Publications, New York.
- [2] Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J. 1980. Generators and relations for discrete groups. ix+161 pp., Springer-Verlag, New York, Berlin.
- [3] Jones, G.A., Singerman, D. 1978. Theory of maps on orientable surfaces. **Proc. Lond. Math. Soc.** 37(3): 273-307
- [4] Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex functions. Cambridge University Press, xiv+342 pp., Cambridge
- [5] Melekoğlu, A., 2018. Mirrors of reflections of regular maps. **Ars Math. Contemp.** 15(2): 347-354
- [6] Melekoğlu, A., Singerman, D. 2016. The structure of mirrors on Platonic surfaces. **Geom. Dedicata** 181: 239-256
- [7] Melekoğlu, A., Uluşan, S. 2018. Petrie lengths of regular maps. **Acta Math. Hungar.** 154(2): 302-314

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Merve YEMEN

Doğum Yeri ve Tarihi : 11/12/1992

EGİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Böl.

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Böl.

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Makaleler

-SCI

-Diğer

b) Bildiriler

-Uluslararası

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl :

İLETİŞİM

E-posta Adresi : merveyemen.09@gmail.com

Tarih : 21/09/2018