T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-041

ESNEK FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Harun KIZILTAŞ

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Harun KIZILTAŞ tarafından hazırlanan Esnek Fuzzy Topolojik Uzaylar Üzerine başlıklı tez, 06.09.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER	Aydın ADÜ	
Üye :	Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU	Aydın ADÜ	
Üye :	Doç. Dr. Mehmet Ali BALCI	MSKÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .../.../2018 tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

06.09.2018

Harun KIZILTAŞ

ÖZET

Esnek Fuzzy Topolojik Uzaylar Üzerine

Harun KIZILTAŞ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman GÜLER
2018, 41 sayfa

Bu tez esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde tezin konusu hakkında genel bilgiler verilmiştir.
İkinci bölümde esnek küme tanımı ve esnek küme ile ilgili teorem ve örneklere yer verilmiştir.Ayrıca bu bölümde esnek küme tanımı kullanılarak esnek topoloji tanımına yer verilmiştir. Esnek topoloji ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.
Tezin bu bölümde fuzzy küme tanımı kullanılarak tanımlanan fuzzy esnek küme tanımı verilmiştir. Ayrıca bölümünde esnek fuzzy topolojik uzay tanımı verilerek çeşitli fuzzy esnek bağlantılı küme tanımları verilerek bu tanımların özellikleri üzerinde durulmuştur ve aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler:
Esnek Küme, Esnek Topoloji, Fuzzy Esnek Küme, Esnek Fuzzy Topolojik Uzaylar, Fuzzy Esnek Bağlantılılık.

ABSTRACT

On Soft Fuzzy Topological Spaces

Harun KIZILTAŞ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Süleyman GÜLER
2018, 41 pages

The thesis basically consist of three chapters.
In the first chapter, general information about the subject of the paper was given.
In the second chapter, the definition of soft set was introduced and theorems and examples about soft set were included. Also the definition of soft topology was given and theorems and examples about soft topology were included.
In the third chapter, topological space definition was given.Soft topology definition was given by being used topological space definition and soft set definition.In addition, definitions, theorems and examples about soft topology were included.
In the last chapter of the thesis, definition of fuzzy soft set was given by using the definition of fuzzy set. Moreover, soft fuzzy topology and fuzzy soft connected notions were introduced and properties and relations of those concepts were investigated.

Key Words:
Soft Set, Soft Topology, Fuzzy Soft Set, Soft Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Soft Connected

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Dr. Öğretim Üyesi Süleyman GÜLER'e; tezin yazımında ve biçimlenmesinde emeği geçen değerli bölüm hocalarıma ve tüm bölüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte tanışıp hayatımı birleştirdiğim ve desteğini yanımda hissettiğim sevgili eşim Çiçek hanıma göstermiş olduğu sabır ve anlayışı için yürekten teşekkür ederim.

Harun KIZILTAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Evrensel niceleyici, her
$\exists$	Varlıksal niceleyici, en az bir
$\in$	Eleman
X_A	A klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\varphi, \phi, \mu, \ldots$	Fonksiyonlar
$\mathscr{P}(X)$	X'in kuvvet kümesi
E	Parametrelerin kümesi
(F,E)	Esnek küme
$\tilde{\subset}$	Esnek alt küme
$\urcorner E$	E kümesinin değili
$(F,A)^c = (F^c, \urcorner A)$	(F,A)'nın tümleyeni
$\tilde{\emptyset}$	Boş esnek küme
$\tilde{A}$	Evrensel esnek küme
x_α, x_β	Fuzzy nokta
x^α, x^β	Fuzzy esnek nokta
$M(L(X))$	Fuzzy noktalar kümesi
$S(U)$	U evreni üzerindeki tüm esnek kümelerin ailesi
$f_A, g_B, \ldots$	Fuzzy esnek kümeler
$FSS(X)$	X üzerindeki fuzzy esnek kümelerin ailesi
$PF(X,E)$	X üzerindeki tüm fuzzy esnek noktaların ailesi
I^U	U evreni üzerindeki fuzzy kümelerin ailesi
$\tilde{\Phi}$	Boş fuzzy esnek küme
$\tilde{E}$	Mutlak fuzzy esnek küme

1. GİRİŞ

Klasik yöntemler, sosyal bilimler, ekonomi, mühendislik, tıp ve çevre bilimlerindeki karmaşık problemleri çözmek için yeterli olmaz. Bu tür problemlerin çözümleri belirsizliğe dayalı matematiksel prensipleri kullanmayı gerektirdiğinden, klasik küme teorisi belirsizliğin bu tür problemlerini ele almak için tam olarak uygun olmayabilir. Belirsizlikleri giderebilmek için geliştirilmiş birçok teori vardır.

Belirsizlik ile ilgili problemlerde şimdiye kadar en kullanışlı yöntemlerden biri olan fuzzy (bulanık) kümeler teorisi Zadeh [5] (1965) tarafından verilmiştir. Bir fuzzy küme, klasik bir kümedeki her elemanı $[0,1]$ aralığında bir sayıya götüren bir dönüşümdür ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Fuzzy küme ve fuzzy mantık günlük yaşamdaki birçok probleme uygulanmıştır. Esnek kümeler teorisi ise Molodtsov [2] tarafından 1999 yılında belirsiz tipteki problemlerin çözümü için matematiksel bir araç olarak, ortaya atıldı. Molodtsov ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Rieman integrali, Perrron integrali ve ölçü teorisi gibi bir çok alana başarıyla uyguladı. Daha sonraları ise, Maji, Roy ve Biswas [7] 2003 yılında esnek kümeleri, fuzzy kümelere taşıyarak fuzzy esnek uzaylarda bir çok yeni çalışma yaptılar. 2011 yılında M.Shabir ve M.Naz [6] bir başlangıç evreni ve sabit bir parametre üzerinde esnek topolojik uzay tanımını vererek bu uzaydaki ayırma aksiyomlarını tanımladılar. 2011 yılından sonra bu alandaki çalışmalar hız kazanarak bir çok yeni çalışmaya imza atılmaktadır.

Esnek küme teorisinde üyelik fonksiyonunu kurma gibi bir problem olmadığı için bu küme teorisi çeşitli alanlara uygulanmıştır. Esnek kümeler ve uygulamaları ile ilgili çalışmalar çeşitli alanlarda hızla ilerlemektedir. Biz bu çalışmada esnek fuzzy topolojik uzaylar üzerinde esnek fuzzy kümeler ve esnek fuzzy bağlantılı kavramlar üzerinde araştırmalar yapmayı hedeflemekteyiz.

2. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

2.1. Esnek Kümeler ve Özellikleri

Bu bölümde esnek kümelerle ilgili temel tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir.

Tanım 2.1 *[2] U evrensel küme ve A parametrelerin bir ailesi olsun. Bir (F,A) ikilisi U içerisinde bir esnek küme olması için;*

$$F : A \to P(U)$$

olmalıdır.

Diğer bir deyişle, F, A'dan U'nun tüm altkümelerinin kümesine bir dönüşümüdür. U içesindeki bir esnek küme U evreninin alt kümelerinin bir parametrik ailesidir. $e \in A$ için (F,A) esnek kümesinin yaklaşık elemanları $F(e)$ kabul edebiliriz.
U üzerinde bir (f_T,A) esnek kümesi, sıralı ikililerin kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(f_T,A) = \{(a, f_T(a)) : a \in A, f_T(a) \in P(U)\},$$

Burada, $f_T : A \to P(U)$ ve $a \notin T$ için $f_T(a) = \emptyset$ olarak tanımlanır. Burada f_T yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. $a \in A$ parametreleri ile ilgili nesneleri kapsayan $f_T(a)$ kümesi, a-yaklaşım değer kümesi veya a-yaklaşım kümesi olarak adlandırılır.
Esnek küme tanımı göz önüne alınırsa, bir (f_T,A) esnek kümesi biçimsel olarak onun üyelik fonksiyonu olan f_T'ye eşittir. Herhangi bir esnek küme onun üyelik fonksiyonunu belirler ve bu iki kavramı birbiri ile yer değiştirmesinde bir sakınca yoktur.

Burada (f_T, A) notasyonu yerine F_T kullanabiliriz. f_T notasyonunda ki T alt indisi, f_T'nın F_T esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu olduğunu belirtir.
Eğer $(a, f_T(a))$, F_T esnek kümesine aitse $(a, f_T(a)) \in F_T$ aksi durumda $(a, f_T(a)) \notin F_T$ şeklinde gösterilir. Başka bir ifade ile, herbir $(a, f_T(a))$ elemanı için sadece bir ihtimal bulunur. $(a, f_T(a))$ ya F_T kümesine dahildir yada değildir.
Esnek küme teorisindeki esas kavram yaklaşımdır. $a_1, a_2 \in A$ için $f_T(a_1) \subset f_T(a_2)$ ise a_2 parametresinin yaklaşım değeri a_1 parametresinin yaklaşım değerinden daha büyüktür. Yani a_2, U'da a_1'den daha fazla elemanla ilişkili demektir.
Esnek kümeleri listeleme yoluyla ifade edebiliriz.

Örnek 2.2 *$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ nesnelerin kümesi, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ parametrelerin kümesi ve $T = \{a_2, a_3, a_5, a_6\}$, A'nın alt kümesi olsun. Kabul edelim ki $F_T(a_2) = \{u_2, u_4\}$, $F_T(a_3) = \varnothing$, $F_T(a_5) = \{u_1, u_2\}$ ve $F_T(a_6) = \{u_2, u_3, u_5\}$ şeklinde belirtilsin. O zaman F_T esnek kümesi,*

$$F_T = \{(a_2, \{u_2, u_4\}), (a_5, \{u_1, u_2\}), (a_6, \{u_2, u_3, u_5\})\}$$

şeklinde yazılır. Listelenmiş olan elemanların sırası önemli değildir.

$$\{(a_2, \{u_2, u_4\}), (a_5, \{u_1, u_2\})\} = \{(a_5, \{u_1, u_2\}), (a_2, \{u_2, u_4\})\}$$

eşitliği doğrudur. Burada bir eleman sadece bir defa yazılır.

$\{(a_2, \{u_2, u_4\}), (a_5, \{u_1, u_2\}), (a_2, \{u_2, u_4\})\}$ *yerine* $\{(a_2, \{u_2, u_4\}), (a_5, \{u_1, u_2\})\}$

şeklinde yazılır.

Esnek küme ve elemanları bir ya da daha fazla özelliğe sahip ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$F_T = \{(a, f_T(a)) : f_T(a) = \emptyset, a \in A\}.$$

Örnek 2.3 *U evrensel kümesi araçlardan oluşsun. A parametreler kümesi olsun.*

A=\{*pahalı,konforlu,sıfır model,ucuz,otomatik vites,dizel,bakımlı,bakımsız*\}

Burada gelir düzeyine göre bir esnek küme şu şekilde tanımlayabiliriz. Pahalı araç, konforlu araç, sıfır model araç vb. (F,A) *esnek kümesini Ahmet beyin gidip satın alacağı cazip bir araç olarak tanımlayalım. Aşağıdaki örneği detaylandırıp inceleyelim. U evreninde satın alınacak 7 araç var olsun.*

$U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_7\}$ *ve* $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$

Farzedelim ki,

a_1=*pahalı* $F(a_1)=\{u_2,u_4\}$,
a_2=*konforlu* $F(a_2)=\{u_1,u_3\}$,
a_3=*sıfır model* $F(a_3)=\{u_3,u_4,u_5\}$,
a_4=*ucuz* $F(a_4)=\{u_1,u_7\}$,
a_5=*dizel* $F(a_5)=\{u_1\}$

Esnek küme (F,A), *U kümesinin alt kümelerinin bir parametreler ailesidir.* $\{F(a_i), i = 1,2,3,...8\}$ *ve bize bir nesnenin yaklaşık tanımını verir.* $a \in A$ *bir parametresi tarafindan doldurulan araçları F ile eşleştirsin. Bu nedenle* $F(a_1)$ *pahalı araçlar olup işlev değeri* $\{u_2,u_4\}$ *tür. Böylece aşağıdaki yaklaşımlar topluluğu gibi* (F,A) *esnek kümesini gösterebiliriz.*

$$(F,A)=\{(a_1,\{u_2,u_4\}),(a_2,\{u_1,u_3\}),(a_3,\{u_3,u_4,u_5\}),(a_4,\{u_1,u_7\}),(a_5,\{u_1\})\}$$

Tanım 2.4 *[7]* (F,A) *ve* (G,B) *bir U evreni içinde iki esnek küme olsun.* (F,A) *nın* (G,B) *nin bir alt kümesi olması için,*

i) $A \subset B$
ii) Her $e \in A$ *için* $F(e) \cong G(e)$

dir. $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.5 $T = \{a_1,a_3,a_5\} \subset A$, $K = \{a_1,a_2,a_3,a_5\} \subset A$ *olsun.* $T \subset K$ *olduğu açıktır.* (F,T) *ve* (G,K) *aynı* $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$ *evreni üzerinde iki esnek küme olsun. Öyle ki,*

$G(a_1) = \{u_2,u_4\}$, $G(a_2) = \{u_1,u_3\}$, $G(a_3) = \{u_3,u_4,u_5\}$, $G(a_5) = \{u_1\}$ *ve*

$F(a_1) = \{u_2,u_4\}$, $F(a_3) = \{u_3,u_4,u_5\}$, $F(a_5) = \{u_1\}$

olsun. O halde $(F,T)\tilde{\subseteq}(G,K)$ *dir.*

Tanım 2.6 *[7] Bir ortak* U *evreni içinde* (F,A) *ve* (G,B) *iki esnek küme olsun. Eğer* (F,A), (G,B) *nin bir esnek alt kümesi ve* (G,B), (F,A) *nın bir esnek alt kümesi ise* (F,A) *ve* (G,B) *eşit esnek kümedir denir.*

Tanım 2.7 *[7]* $E = \{e_1,e_2,...,e_n\}$ *bir parametreler kümesi olsun.* E *kümesinin değili* $\rceil E$ *şeklinde gösterilir.* $\rceil E = \{\rceil e_1, \rceil e_2, ..., \rceil e_n\}$ *olarak yazılır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. $\rceil(\rceil A) = A$
2. $\rceil(A \cup B) = (\rceil A \cup \rceil B)$
3. $\rceil(A \cap B) = (\rceil A \cap \rceil B)$

Örnek 2.8 *Örnek 2.3 ü göz önünne alarak çözelim. O zaman A kümesinin değili* $\rceil$*A={pahalı olmayan,konforlu olmayan,ucuz olmayan,dizel olmayan} şeklinde olur.*

Tanım 2.9 *[7] Bir* (F,A) *esnek kümesinin tümleyeni* $(F,A)^c$ *şeklinde gösterilir ve* $(F,A)^c = (F^c, \rceil A)$ *yoluyla tanımlanır.*

$$F^c : \rceil A \rightarrow P(U)$$

dır. Dolayısıyla $F^c(a) = U - F(\rceil U)$, $\forall a \in \rceil A$ *dır.* F *esnek kümesinin tümleyenini* F^c *ile gösterelim.* $((F^c)^c) = F$ *olduğu açıktır. Buradan* $((F,A)^c)^c = (F,A)$ *olur.*

Örnek 2.10 *Örnek 2.3 ü göz önüne alırsak,* (F,A) *esnek kümesinin tümeleyeni* $(F,A)^c = \{$*pahalı olmayan=*$\{u_1,u_3,u_5,u_6,u_7\}$*,*
konforlu olmayan=$\{u_2,u_4,u_5,u_6,u_7\}$*,*
sıfır model olmayan=$\{u_1,u_2,u_6,u_7\}$*, ucuz olmayan=*$\{u_2,u_3,u_4,u_6\}$*,*
dizel olmayan=$\{u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}\}$ *şeklinde olur.*

Tanım 2.11 *[7] Bir U evreni içindeki* (F,A) *esnek kümesi için, her* $e \in A$ *iken* $F(e)$*=*$\varnothing$ *ise* (F,A) *ya boş esnek küme denir ve* $\tilde{\varnothing}$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.12 *U dizel araçların kümesi ve A parametreler kümesi olmak üzere U evreni 5 araçtan oluşsun.* $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ *ve A={Benzin,LPG} için* (F,A) *Esnek kümesi "Yakıt türüne göre araçlar" olmak üzere* (F,A) *esnek kümesini tanımlayalım.*

F(Benzin)	*Benzinle çalışan araçlar*
F(LPG)	*LPG ile çalışan araçlar.*

(F,A) *Esnek kümesinin koleksiyonu yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir.*
(F,A)={Benzinle çalışan araçlar=$\varnothing$*, LPG ile çalışan araçlar=*$\varnothing$*}. Burada* (F,A) *esnek kümesi boş esnek kümedir.*

Tanım 2.13 *[7] U evreni üzerinde bir (F,A) esnek kümesinin sonsuz esnek küme olması için;* $\forall e \in A$ *için* $F(e) = U$ *olmalıdır. Sonsuz esnek küme* $\tilde{A}$ *ile gösterilir.* $\tilde{A}^c$*=*$\tilde{\varnothing}$ *ve* $\tilde{\varnothing}^c$*=*$\tilde{A}$ *olduğu açıktır.*

Örnek 2.14 *Varsayalım ki; U dizel ile çalışan araçların kümesi ve A parametreler kümesi olsun. U evreninde dört araç var olsun.*
$U = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ *ve A={LPG'siz, Benzinsiz, Elektriksiz}. (F,A) Esnek kümesi "Araçlar" olsun. (F,A) esnek kümesini tanımlayalım.*

F(LPG'siz) *LPG ile çalışmayan araçlar*

F(Benzinsiz) *Benzin ile çalışmayan araçlar*

F(Elektrisiz) *Elektrik ile çalışmayan araçlar*

(F,A) Esnek kümesinin koleksiyonu yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir. (F,A)={LPG ile çalışmayan araçlar=$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$*, Benzin ile çalışmayan araçlar=*$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$*, Elektrik ile çalışmayan araçlar=*$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$*}. Buradan* (F,A) *esnek kümesi sonsuz esnek bir kümedir.*

Tanım 2.15 *[7]* (F,A) *ve* (G,B) *iki esnek küme olsun. O zaman* $H(\alpha,\beta) = G(\alpha) \cap G(\beta)$ *ve* $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ *şeklinde tanımlı H kümesi* $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.16 $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}\}$ *araçlar evreninde tanımlı* (F,T) *esnek kümesi "Maliyetli Araçlar" ve* (G,K) *esnek kümesi de "Cazip Araçlar" olmak üzere A, T parametreler kümesinin ve B de K parametreler kümesinin alt kümeleri olsun.*

A={çok pahalı,pahalı,ucuz}, *B={bakımlı,konforlu,bakımsız} olmak üzere*

F(çok pahalı)=$\{u_2,u_4,u_7,u_8\}$*,* *F(pahalı)=*$\{u_1,u_3,u_5\}$*,*

F(ucuz)=$\{u_6,u_9,u_{10}\}$*,* *G(bakımlı)=*$\{u_2,u_3,u_7\}$*,*

G(konforlu)=$\{u_5,u_6,u_8\}$*,* *G(bakımsız)=*$\{u_6,u_9,u_{10}\}$ *olarak tanımlayalım. Şimdi* $(F,T) \wedge (G,K) = (H, T \times K)$ *yi bulalım.*

H(çok pahalı,bakımlı)=$\{u_2,u_7\}$*,* *H(çok pahalı,konforlu)=*$\{u_8\}$*,*

H(çok pahalı,bakımsız)=$\varnothing$*,* *H(pahalı,bakımlı)=*$\{u_3\}$*,*

H(pahalı,konforlu)=$\{u_5\}$*,* *H(pahalı,bakımsız)=*$\varnothing$*,*

H(ucuz,bakımlı)=$\varnothing$*,* *H(ucuz,konforlu)=*$\varnothing$*,*

H(ucuz,bakımsız)=$\{u_6,u_9,u_{10}\}$

olarak elde edilir.

Tanım 2.17 *[7] (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. O zaman $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ ve $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ şeklinde tanımlı H kümesi $(F,A) \vee (G,B) = (H,A \times B)$ ile gösterilir.*

Örnek 2.18 *Örnek 2.16 yı göz önüne alalım. $(F,T) \vee (G,K) = (H,T \times K)$ olduğunu gösterelim.*
H(çok pahalı,bakımlı)=$\{u_2,u_3,u_4,u_7,u_8\}$, H(çok pahalı,konforlu)=$\{u_2,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8\}$,
H(çok pahalı,bakımsız)=$\{u_2,u_4,u_6,u_7,u_8,u_9,u_{10}\}$, H(pahalı,bakımlı)=$\{u_1,u_2,u_3,u_5,u_7\}$,
H(pahalı,konforlu)=$\{u_1,u_3,u_5,u_6,u_8\}$, H(pahalı,bakımsız)=$\{u_1,u_3,u_5,u_6,u_9,u_{10}\}$,
H(ucuz,bakımlı)=$\{u_2,u_3,u_6,u_7,u_9,u_{10}\}$, H(ucuz,konforlu)=$\{u_5,u_6,u_8,u_9,u_{10}\}$,
H(ucuz,bakımsız)=$\{u_6,u_9,u_{10}\}$ şeklinde olur.

Teorem 2.19 *[7] U evreni üzerinde tanımlı (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri verilsin. O zaman;*

i)$((F,A) \vee (G,B))^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$
ii)$((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$ dır.

İspat.
i) Farzedelim ki; $(F,A) \vee (G,B) = (O,A \times B)$ olsun.
O halde $((F,A) \vee (G,B))^c = (O^c, \rceil(A \times B))$ dır. Şimdi $J(x,y) = F^c(x) \times G^c(y)$ alalım.
$(F,A)^c \wedge (G,B)^c = (F^c, \rceil A) \wedge (G^c, \rceil B) = (J, \rceil A \times \rceil B) = (J, \rceil(A \times B))$ dır.
Şimdi $(\rceil\alpha, \rceil\beta) \in \rceil(A \times B)$ alalım. O zaman $O^c(\rceil\alpha, \rceil\beta) = U - O(\alpha,\beta) = U - (F(\alpha) \cup G(\beta)) = (U - F(\alpha)) \bigcap (U - G(\beta)) = F^c(\rceil\alpha) \cap G^c(\rceil\beta) = J(\rceil\alpha, \rceil\beta)$
O^c ve J nin aynı olduğu elde edilir.

ii) Kabul edelim ki $(F,A) \wedge (G,B) = (H,A \times B)$ olsun.
O halde $((F,A) \wedge (G,B))^c = (H,A \times B)^c = (H^c, \rceil(A \times B))$
Şimdi $K(x,y) = F^c(x) \times G^c(y)$ alalım.

$(F,A)^c \vee (G,B)^c = (F^c, \rceil A) \vee (G^c, \rceil B) = (K, \rceil A \times \rceil B) = (K, \rceil(A \times B))$ dır.

Şimdi $(\rceil\alpha, \rceil\beta) \in \rceil(A \times B)$ alalım. O halde,

$$H^c(\rceil\alpha, \rceil\beta) = U - H(\alpha,\beta) = U - (F(\alpha) \cap G(\beta)) = (U - F(\alpha))(U - G(\beta)) = F^c(\rceil\alpha) \cup G^c(\rceil B) = K(\rceil\alpha, \rceil\beta)$$

Dolayısıyla H^c ve K esnek kümelerinin aynı olduğu elde edilir. □

Tanım 2.20 *[7] U evrensel kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek kümesinin kesişimi $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için $H(e) = F(e)$ ya da $H(e) = G(e)$ olmak üzere (H,C) esnek kümesidir. $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ dir.*

Örnek 2.21 *Örnek 2.16 yı göz önünde bulunduralım. (F,T) ve (G,K) esnek kümelerinin kesişimi (H,C) olsun. Burada, $C = \{ucuz\}$ olsun. O zaman $H(ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ olur.*

Teorem 2.22 *[7] (F,A), U evreni üzerinde bir esnek küme olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır:*

i)$(F,A)\tilde{\cup}(F,A) = (F,A)$

ii)$(F,A)\tilde{\cap}(F,A) = (F,A)$

iii)$(F,A)\tilde{\cup}\tilde{\varnothing} = (F,A)$

iv)$(F,A)\tilde{\cap}\tilde{\varnothing} = \tilde{\varnothing}$

v)$(F,A)\tilde{\cup}\tilde{U} = \tilde{U}$

vi)$(F,A)\tilde{\cap}\tilde{U} = (F,A)$

Teorem 2.23 *[7] (F,A) ve (G,B) U evreni üzerinde iki esnek küme olsun. O zaman;*

i)$((F,A)\tilde{\cup}(G,B))^c = (F,A)^c\tilde{\cup}(G,B)^c$

ii)$((F,A)\tilde{\cap}(G,B))^c = (F,A)^c\tilde{\cap}(G,B)^c$

dır.

İspat.

(**i**)Kabul edelim ki, $(F,A)\tilde{\cup}(G,B) = (H,A\cup B)$ olsun.

$$H(a) = \begin{cases} F(a), & a \in A - B \\ G(a), & a \in B - A \\ F(a) \cup G(a), & a \in A \cap B \end{cases}$$

dır. $((F,A)\tilde{\cup}(G,B))^c = (H,(A\cup B))^c = (H^c, \rceil A \cup \rceil B)$ dir.

Şimdi, $H^c(\rceil a) = U - H(a)$ ve $\forall a \in (\rceil A \cup \rceil B)$ için,

$$H^c(\rceil a) = \begin{cases} F^c(\rceil a), & \rceil(a \in \rceil A - \rceil B \\ G^c(\rceil a), & \rceil a \in (\rceil B - \rceil A) \\ F^c(\rceil a) \cup G^c(\rceil a), & \rceil a \in (\rceil A \cup \rceil A) \end{cases}$$

olur. Şimdi de $(F,A)^c\tilde{\cup}(G,B)^c = (F^c, \rceil A)\tilde{\cup}(G^c, \rceil B) = (K, (\rceil A \cup \rceil B))$ alarak

$$K(\rceil a) = \begin{cases} F^c(\rceil a), & \rceil a \in (\rceil A - \rceil B) \\ G^c(\rceil a), & \rceil a \in (\rceil B - \rceil A) \\ F^c(\rceil a) \cup G^c(\rceil a), & \rceil a \in (\rceil A \cup \rceil A) \end{cases}$$

Dolayısıyla H^c ve K esnek kümelerinin aynı küme olduğu elde edilir.

(**ii**) Kabul edelim ki, $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,(A\cap B))$ olsun.

Buradan $((F,A)\tilde{\cap}(G,B))^c = (H,(A\cap B))^c = (H^c, (\rceil A \cap \rceil B))$ olur.

Şimdi, $(F,A)^c\tilde{\cap}(G,B)^c = (F^c, \rceil A)\tilde{\cap}(G^c, \rceil B)$ olduğundan

Dolayısıyla $\forall \rceil a \in (\rceil A \cap \rceil B)$ için,

$$K(\rceil a) = F^c(\rceil a) = F(a) = H(a) = H^c(a) \text{ ya da}$$

$$K(\rceil a) = G^c(\rceil a) = G(a) = H(a) = H^c(a) \text{ dır.}$$

Buradan K ve H^c esnek kümelerinin aynı küme olduğu elde edilir. □

Teorem 2.24 *[7] U evreni üzerinde (F,A),(G,B) ve (H,C) üç tane esnek küme olsun.*

(**i**) $(F,A)\tilde{\cup}((G,B)\tilde{\cup}(H,C)) = ((F,A)\tilde{\cup}(G,B))\tilde{\cup}(H,C)$

(**ii**) $(F,A)\tilde{\cap}((G,B)\tilde{\cap}(H,C)) = ((F,A)\tilde{\cap}(G,B))\tilde{\cap}(H,C)$

(**iii**) $(F,A)\tilde{\cup}((G,B)\tilde{\cap}(H,C)) = ((F,A)\tilde{\cup}(G,B))\tilde{\cap}((F,A)\tilde{\cup}(H,C))$

(**iv**) $(F,A)\tilde{\cap}((G,B)\tilde{\cup}(H,C)) = ((F,A)\tilde{\cap}(G,B))\tilde{\cup}((F,A)\tilde{\cap}(H,C))$

Teorem 2.25 *[7] U evreni üzerinde (F,A),(G,B) ve (H,C) üç tane esnek küme olsun.*

(**i**) $(F,A)\vee((G,B)\vee(H,C)) = ((F,A)\vee(G,B))\vee(H,C)$

(**ii**) $(F,A)\wedge((G,B)\wedge(H,C)) = ((F,A)\wedge(G,B))\wedge(H,C)$

(**iii**) $(F,A)\vee((G,B)\wedge(H,C)) = ((F,A)\vee(G,B))\wedge((F,A)\vee(H,C))$

(**iv**) $(F,A)\wedge((G,B)\vee(H,C)) = ((F,A)\wedge(G,B))\vee((F,A)\wedge(H,C))$

Örnek 2.26 *$U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$ evrensel küme ve $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ tüm parametreler kümesi olsun. Kabul edelim ki $T = \{a_1,a_2\}$ ve $K = \{a_2,a_3,a_4\}$, gibi A'nin iki alt kümesi için $(F,T) = \{(a_1,\{u_2,u_4\}),(a_2,\{u_1,u_3\})\}$ ve $(F,K) = \{(a_2,\{u_1,u_2\}),(a_3,\{u_1,u_4\}),(a_4,U)\}$ şeklinde yazılsın. O halde biz bu kümeleri aşağıdaki gibi yazabiliriz:*

$(F,T)^c = \{(a_1,\{u_1,u_3,u_5,u_6\}),(a_2,\{u_2,u_4,u_5,u_6\})\}$

$(F,T)\widetilde{\cup}(F,K) = \{(a_1,\{u_2,u_4\}),(a_2,\{u_1,u_2,u_3\}),(a_3,\{u_1,u_4\}),(a_4,U)\}$

$(F,T)\widetilde{\cap}(F,K) = \{(a_2,\{u_1\})\}$

$((F,T)\widetilde{\cup}(F,K))^c = \{(a_1,\{u_1,u_3,u_5,u_6\}),(a_2,\{u_4,u_5,u_6\}),(a_3,\{u_2,u_3,u_5,u_6\})\}$

$((F,T)\widetilde{\cap}(F,K))^c = \{(a_1,U),(a_2,\{u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}),(a_3,U),(a_4,U)\}$

2.2. Esnek Topoloji

Bu bölümde Esnek Topolojinin tanımını ve Esnek Topoloji ile ilgili özellikler verilecektir.

Tanım 2.27 [1] *U evrensel kümesi üzerinde (F,A) esnek kümesi sıralı çiftler kümesi ve $A\tilde{\subseteq}E$ olsun.*

$(F,A) = \{(x, f_A(x)) : x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$

$f_A : E \to P(U)$ *öyle ki* $f_A(x) = \varnothing$ *ise* $x \notin A$

Bu bölüm boyunca U üzerinde tanımlanan tüm esnek kümelerin ailesini S(U) ile göstereceğiz.

Tanım 2.28 [1] $(F,A) \in S(U)$ *olsun.* (F,A) *esnek kümesinin kuvvet kümesi* $\tilde{P}(F_A)$=$\{F_{A_i} : F_{A_i} \tilde{\subseteq} F_A, i \in I \subseteq N\}$ *şeklinde gösterelim.*

Ve kardinalitesi $|\tilde{P}(F_A)| = 2^{\Sigma|f_A(x)|}$ *ile gösterilir.* $|f_A(x)|$, $f_A(x)$ *in kardinalitesidir.*

Örnek 2.29 [1] $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{x_1, x_2\} \tilde{\subseteq} E$ *ve* $(F,A) = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ *olsun.* *Şimdi* (F,A) *esnek kümesinin tüm alt kümelerini yazalım:*

$(F,A_1) = \{(x_1, \{u_1\})\}$,
$(F,A_2) = \{(x_1, \{u_2\})\}$,
$(F,A_3) = \{(x_1, \{u_1, u_2\})\}$,
$(F,A_4) = \{(x_2, \{u_2\})\}$,
$(F,A_5) = \{(x_2, \{u_3\})\}$,
$(F,A_6) = \{(x_2, \{u_2, u_3\})\}$,
$(F,A_7) = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2\})\}$,
$(F,A_8) = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_3\})\}$,
$(F,A_9) = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$,
$(F,A_{10}) = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2\})\}$,
$(F,A_{11}) = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_3\})\}$,
$(F,A_{12}) = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$,
$(F,A_{13}) = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_2\})\}$,
$(F,A_{14}) = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_3\})\}$,
$(F,A_{15}) = (F,A)$,
$(F,A_{16}) = \varnothing$

(F,A) *esnek kümesinin tüm alt kümeleri sayısı* $|\tilde{P}(F_A)| = 2^4 = 16$ *dır.*

Tanım 2.30 [1] $(F,A) \in S(U)$ *olmak üzere* $\tilde{\tau}$, (F,A) *esnek alt kümelerinin bir sınıfı olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın.*

i)$(F,A),(F,\varnothing) \in \tilde{\tau}$

ii)$\{(F_i,A)\tilde{\subseteq}(F,A) : i \in I \subseteq N\} \subseteq \tilde{\tau} \Rightarrow \tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A) \in \tilde{\tau}$

iii)$\{(F_i,A)\tilde{\subseteq}(F,A) : 1 \leq i \leq n, n \in N\} \subseteq \tilde{\tau} \Rightarrow \tilde{\bigcap}_{i=1}^{n}(F_i,A) \in \tilde{\tau}$

Bu durumda $\tilde{\tau}$ *ya* (F,A) *üzerinde esnek topoloji ve* $(F,A,\tilde{\tau})$ *üçlüsüne de esnek topolojik uzay denir.*

Örnek 2.31 (F,A) *esnek kümesinin alt kümelerini Örnek 2.29 daki gibi seçelim.*

$\tilde{\tau}_1 = \{(F,A),(F,\varnothing)\}$,

$\tilde{\tau}_2 = \tilde{P}(F,A)$ *ve*

$\tilde{\tau}_3 = \{(F,\varnothing),(F,A),(F,A_2),(F,A_{11}),(F,A_{13})\}$

esnek küme aileleri (F,A) *üzerinde birer esnek topolojidirler.*

Tanım 2.32 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *bir esnek topolojik uzay olsun.* $\tilde{\tau}$ *nun her elemanına esnek açık küme denir.* (F,A) *ve* $(F,\varnothing)$ *esnek açık kümedirler.*

Tanım 2.33 [1] $(F,A,\tilde{\tau}_1)$ *ve* $(F,A,\tilde{\tau}_2)$ *iki esnek topolojik uzay olsunlar. Eğer;*

$\tilde{\tau}_2 \supseteq \tilde{\tau}_1$ *ise* $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_1$ *den esnek incedir*

$\tilde{\tau}_2 \supset \tilde{\tau}_1$ *ise* $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_1$ *den kesinlikle esnek incedir*

denir ve eğer; $\tilde{\tau}_2 \supseteq \tilde{\tau}_1$ *ve* $\tilde{\tau}_2 \subseteq \tilde{\tau}_1$ *ise* $\tilde{\tau}_1$ *ve* $\tilde{\tau}_2$ *karşılaştırılabilir denir.*

Örnek 2.34 *Örnek 2.31 de* (F,A) *üzerindeki esnek topolojileri ele alalım.* $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_1$ *ve* $\tilde{\tau}_3$ *den esnek ince ve* $\tilde{\tau}_3$, $\tilde{\tau}_1$ *den esnek incedir. Bu yüzden* $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ *ve* $\tilde{\tau}_3$ *karşılaştırılabilir esnek topolojilerdir.*

Tanım 2.35 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *bir esnek topolojik uzay ve* $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun.*

$$\tilde{\tau}_{(F,B)} = \{(F,A_i)\tilde{\cap}(F,B) : (F,A_i) \in \tilde{\tau}, i \in I \subseteq N\}$$

sınıfına (F,B) üzerinde esnek alt uzay topolojisi denir ve $(F,B,\tilde{\tau}_{(F,B)})$, $(F,A,\tilde{\tau})$ nun bir esnek alt uzay topolojisi olarak tanımlanır.

Teorem 2.36 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman (F,B) üzerindeki esnek altuzay topolojisi bir esnek topolojidir.*

İspat. $(F,\varnothing),(F,A) \in \tilde{\tau}$ olduğundan

$$(F,\varnothing)\tilde{\cap}(F,B) = (F,\varnothing) \text{ ve } (F,B)\tilde{\cap}(F,A) = (F,B) \text{ dir.}$$

$\tilde{\tau} = \{(F,A_i) : (F,A_i)\tilde{\subseteq}(F,A), i \in I\}$ esnek topoloji olduğundan herhangi sayıda esnek kümelerin birleşimi ve sonlu sayıda esnek kümenin kesişimi altında kapalıdır. Bu yüzden

i)$\tilde{\bigcap}((F,A_i)\tilde{\cap}(F,B)) = (\tilde{\bigcap}(F,A_i))\tilde{\cap}(F,B)$
ii)$\tilde{\bigcup}((F,A_i)\tilde{\cap}(F,B)) = (\tilde{\bigcup}(F,A_i))\tilde{\cap}(F,B)$

dır. Buradan (F,B)bir esnek topolojidir. □

Örnek 2.37 *Örnek 2.31 de (F,A) üzerinde τ_3 esnek topolojisini alalım. Eğer $(F,B) = (F,A_9)$ ise $\tau_{\tilde{(F,B)}} = \{F,\varnothing),(F,A_5),(F,A_7),(F,A_9)\}$ dır. $(F,B,\tilde{\tau}_{(F,B)})$, $(F,A,\tilde{\tau}_3)$ ün bir esnek alt topolojık uzayı olur.*

Teorem 2.38 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay , $(F,B,\tilde{\tau}_{F_B})$ esnek altuzay topolojisi ve $(F,C)\tilde{\subseteq}(F,B)$ olsun. Eğer (F,C), (F,B) de esnek açık ise (F,C) , (F,A) da esnek açık olur.*

İspat. İspatı esnek topolojik altuzay tanımından açıktır. □

Tanım 2.39 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O halde $(F,B)^{\tilde{c}}$ esnek kümesi esnek açık ise (F,B) esnek kapalı kümedir denir.*

Teorem 2.40 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır:*

i)$(F,\tilde{E})$ evrensel esnek kümesi ve $(F,A)^{\tilde{c}}$ esnek kümesi esnek kapalı kümedir.

ii)Herhangi sayıda esnek kapalı kümelerin kesişimleri de esnek kapalıdır.

iii)Sonlu sayıda esnek kapalı kümelerin birleşimleri esnek kapalıdır.

İspat.

(**i**) $(F,E)^{\tilde{c}} = (F,\varnothing)$ ve $((F,A)^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = (F,A)$ esnek açık kümelerdir.

(**ii**) Eğer $\{(F,A_i) : (F,A_i)^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}, i \in I \subseteq N\}$ esnek kapalı kümelerin bir ailesi ise $(\tilde{\bigcap}_{i\in I}(F,A_i))^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcup}_{i\in I}(F,A_i)^{\tilde{c}}$ esnek açıktır.

Bu nedenle $\tilde{\cap}_{i\in I}(F,A_i)$ esnek kapalı kümedir.

(**iii**) Benzer şekilde, $i = 1,2,...n$ için (F,A_i) esnek kapalı ise, $(\tilde{\bigcup}_{i=1}(F,A_i)) = \tilde{\bigcap}_{i=1}(F,A_i)^{\tilde{c}}$ esnek açıktır. Dolayısıyla, $\tilde{\bigcup}_{i=1}(F,A_i)$ esnek kapalı bir kümedir. □

Tanım 2.41 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun.*

(F,B) nin esnek içi $(F,B)^{\circ}$ şeklinde ifade edilir. $(F,B)^{\circ}$, (F,B) nin tüm esnek açık alt kümelerinin esnek birleşimi olarak tanımlanır. Başka bir deyişle $(F,B)^{\circ}$, (F,B) tarafından kapsanan en büyük esnek açık kümedir.

Örnek 2.42 *Örnek 2.31 de $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojisini göz önüne alalım. Eğer;*

$(F,B) = (F,A_{12}) = \{(x_1,\{u_2\}),(x_2,\{u_2,u_3\})\}$ ise $(F,B)^{\circ} = (F,\varnothing)\tilde{\cup}(F,A_2)\tilde{\cup}(F,A_{11}) = (F,A_{11})$ dır.

Teorem 2.43 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. (F,B) esnek açık bir küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,B) = (F,B)^{\circ}$ olmasıdır.*

İspat. (F,B) esnek açık bir küme ise, (F,B) tarafından kapsanan en büyük açık esnek küme (F,B) ye denktir. Böylece $(F,B) = (F,B)^{\circ}$ elde edilir. Tersine; $(F,B)^{\circ}$ nün esnek açık küme olduğunu biliyoruz. Eğer $(F,B) = (F,B)^{\circ}$ ise (F,B) esnek açık kümedir. □

Teorem 2.44 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik bir uzay ve* $(F,B),(F,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun. O halde;*

(**i**) $((F,B)^{\circ})^{\circ}=(F,B)^{\circ}$

(**ii**) $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,C)\Rightarrow(F,B)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,C)^{\circ}$

(**iii**) $(F,B)^{\circ}\tilde{\cap}(F,C)^{\circ}=((F,B)\tilde{\cap}(F,C))^{\circ}$

(**iv**) $(F,B)^{\circ}\tilde{\cup}(F,C)^{\circ}\subseteq((F,B)\tilde{\cup}(F,C))^{\circ}$ *dır.*

İspat.

(**i**) $(F,B)^{\circ}=(F,D)$ olsun. $(F,D)\in\tilde{\tau}$ olması için gerek ve yeter koşul $(F,D)=(F,D)^{\circ}$ dır. O halde $((F,B)^{\circ})^{\circ}=(F,B)^{\circ}$ elde edilir.

(**ii**) Esnek iç tanımından $(F,B)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,B)$ ve $(F,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,C)$ dir. $(F,C)^{\circ}$, (F,C) tarafından kapsanan en büyük açık esnek küme olduğundan
$(F,B)\tilde{\subseteq}(F,C)$ ise $(F,B)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,C)^{\circ}$ olur.

(**iii**) Esnek iç tanımından $(F,B)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,B)$ ve $(F,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,C)$ dir. O zaman $((F,B)^{\circ}\tilde{\cap}(F,C)^{\circ})\tilde{\subseteq}((F,B)\tilde{\cap}(F,C))$ dır. $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))^{\circ}$, $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))$ tarafından kapsanan en büyük esnek açık kümedir.
Böylece; $((F,B)^{\circ}\tilde{\cap}(F,C)^{\circ})\tilde{\subseteq}((F,B)\tilde{\cap}(F,C))^{\circ}$ elde edilir.
Tersine $(F,B)\tilde{\cap}(F,C)\tilde{\subseteq}(F,C)$ ve $(F,B)\tilde{\cap}(F,C)\tilde{\subseteq}(F,C)$ olduğundan $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,B)^{\circ}$ ve $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,C)^{\circ}$ dır. Yani $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,B)^{\circ}\tilde{\cap}(F,C)^{\circ}$ dır.

(**iv**) $(F,B)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,B)$ ve $(F,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,C)$ dir. O zaman $(F,B)^{\circ}\tilde{\cup}(F,C)^{\circ}\tilde{\subseteq}(F,B)\tilde{\cup}(F,C)$ elde edilir. $((F,B)\tilde{\cup}(F,C))^{\circ}$, $((F,B)\tilde{\cup}(F,C))$ tarafından kapsanan en büyük açık esnek küme olduğundan $(F,B)^{\circ}\tilde{\cup}(F,C)^{\circ}\subseteq((F,B)\tilde{\cup}(F,C))^{\circ}$ dır. □

Tanım 2.45 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay ve* $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun.* (F,B) *nin esnek kapanışını* $\overline{(F,B)}$ *ile ifade edilir.* $\overline{(F,B)}$*,* (F,B) *nin tüm esnek kapalı üst kümelerinin esnek kesişimi olarak tanımlanır. Başka bir deyişle* $\overline{(F,B)}$*,* (F,B) *yi kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir.*

Teorem 2.46 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. (F,B) esnek kapalı bir küme ise $(F,B) = \overline{(F,B)}$ olmalıdır.*

Teorem 2.47 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman $(F,B)^\circ\tilde{\subseteq}F_B\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$ dir.*

İspat. $(F,B)^\circ = \bigcup\{(F,B_i) : (F,B_i) \in \tilde{\tau}, (F,B_i)\tilde{\subseteq}(F,B), i \in I \subseteq N\}$ dir. O zaman, $\forall x \in E$ için $f_{B_i}(x) \subseteq f_B(x)$ ve $\cup_{i=1} f_{B_i}(x) \subseteq f_B(x)$ dir. Bu yüzden $(F,B)^\circ\tilde{\subseteq}(F,B)$ dir. $\overline{(F,B)} = \bigcap\{(F,A_i) : (F,A_i)^c \in \tilde{\tau}, (F,B)\tilde{\subseteq}(F,A_i), i \in j \subseteq N\}$ dir. O zaman $\forall x \in E$ için $f_B(x)\tilde{\subseteq}f_{A_i}(x)$ ve $f_B(x)\tilde{\subseteq}\cap_{i\in j} f_{A_i}(x)$ dir. Dolayısıyla $(F,B)\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$ dir. Sonuç olarak $(F,B)^\circ\tilde{\subseteq}(F,B)\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$ dir. □

Teorem 2.48 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B),(F,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman*

i) $\overline{(\overline{(F,B)}} = \overline{(F,B)}$

ii) $(\overline{(F,B)})^{\tilde{c}} = ((F,B)^{\tilde{c}})^\circ$

iii)$(F,C)\tilde{\subseteq}(F,B) \Rightarrow \overline{(F,C)}\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$

iv) $\overline{(F,B)}\tilde{\cap}\overline{(F,C)}\tilde{\subseteq}\overline{((F,B)\tilde{\cap}(F,C))}$

v) $(\overline{(F,B)}\tilde{\cup}\overline{(F,C)}) = \overline{((F,B)\tilde{\cup}(F,C))}$

dır.

İspat.

(**i**) $\bar{F}_B = F_D$ ise F_D burada esnek kapalı küme olur. Sonuç olarak F_D ve $\bar{F}_D$ birbirine denktir. Dolayısıyla $\overline{(\bar{F}_B)} = \bar{F}_B$ olur.

(**ii**) Esnek kapanış ve esnek iç tanımları göz önüne alınırsa;

$(\bar{F}_B) = (\tilde{\bigcap}_{F_{A_i}\tilde{\supseteq}F_B, F_{A_i}\in\tilde{\tau}} F_{A_i})^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcup} F_{A_i}^{\tilde{c}} = (F_B^{\tilde{c}})^\circ$ elde ederiz.

(**iii**) $F_C\tilde{\subseteq}F_B$ ise kapanışım tanımından $F_B\tilde{\subseteq}\bar{F}_B$ ve $F_C\tilde{\subseteq}\bar{F}_C$ olur. $\bar{F}_C$, F_C yi kapsayan en küçük kapalı esnek kümedir.Buradan $\bar{F}_C\tilde{\subseteq}\bar{F}_B$ olur.

(**iv**) $\bar{F}_B$ ve $\bar{F}_C$kapalı esnek kümelerdir. Bu yüzden $\bar{F}_B\tilde{\cap}\bar{F}_C$ kapalı esnek kümedir.

$F_B\tilde{\cap}F_C\tilde{\subseteq}\bar{F}_B\tilde{\cap}\bar{F}_B$ ve $\overline{(F_B\tilde{\cap}F_C)}$, $F_B\tilde{\cap}F_C$ yi kapsayan en küçük kapalı esnek küme olduğundan $\bar{F}_B\tilde{\cap}\bar{F}_C\tilde{\subseteq}\overline{(F_B\tilde{\cap}F_C)}$ olur.

(**v**) $F_B\tilde{\subseteq}\bar{F}_B$ ve $F_C\tilde{\subseteq}\bar{F}_C$ dir. Buradan $F_B\tilde{\cup}F_C\tilde{\subseteq}\bar{F}_B\tilde{\cup}\bar{F}_C$ dir.$\overline{(F_B\tilde{\cup}F_C)}$, $(F_B\tilde{\cup}F_C)$ yi kapsayan en küçük kapalı esnek küme olduğundan $\overline{(F_B\tilde{\cup}F_C)}\tilde{\subseteq}(\bar{F}_B\tilde{\cup}\bar{F}_C)$ dir. Aksine $F_C\tilde{\subseteq}\bar{F}_C\tilde{\subseteq}\overline{(F_B\tilde{\subseteq}F_C)}$ ve $F_B\tilde{\subseteq}\bar{F}_B\tilde{\subseteq}\overline{(F_B\tilde{\subseteq}F_C)}$ dir.

Bu nedenle $(\bar{F}_B\tilde{\cup}\bar{F}_C)\tilde{\subseteq}\overline{(F_B\tilde{\cup}F_C)}$ olduğundan $(\bar{F}_B\tilde{\cup}\bar{F}_C) = \overline{(F_B\tilde{\cup}F_C)}$ our. □

Teorem 2.49 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay ve* $(F,B),(F,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:*

i) $\alpha \in \overline{(F,B)}$ *ancak ve ancak* α *yı içeren her esnek açık* (F,C) *kümesi ile* (F,B) *nin esnek kesişimi vardır.*

ii)(F,A) *nın esnek topolojisinin bazlarla verildiğini varsayarsak o zaman* $\alpha \in \overline{(F,B)}$ *ancak ve ancak* α *yı içeren her esnek baz elemanı* (F,D)*,* (F,B) *ile esnek kesişir.*

İspat.

(**i**) Kabul edelim ki $\alpha \notin \overline{(F,B)}$ olsun. O halde α yı içeren esnek açık kümenin esnek (F,B) kümesi ile kesişimi boş olacak şekilde bir (F,C) esnek açık kümesi vardır. Eğer $\alpha \notin \overline{(F,B)}$ ise α yı içeren esnek açık $(F,C) = (\overline{(F,B)})^{\tilde{c}}$ kümesi ile esnek (F,B) kümesinin kesişimi yoktur. Aksine, eğer α yı içeren esnek açık (F,B) kümesi ile esnek F_B kümesinin kesişimi yoksa, o zaman $(F,C)^{\tilde{c}}$, (F,B) yi içeren esnek kapalı bir kümedir. Esnek kapanışın tanımından esnek $(F,C)^{\tilde{c}}$ kümesi $\overline{(F,B)}$ yi içermek zorundadır. Bu nedenle α, $\overline{(F,B)}$ içinde olamaz.

(**ii**) Eğer $\alpha \in \overline{(F,B)}$ ise o zaman α yı içeren her esnek açık (F,C) kümesi esnek (F,B) kümesi ile kesişimi vardır. O halde α yı içeren her esnek baz kümesi (F,D) ile esnek (F,B) kümesinin kesişimi vardır. Tersine α yı içeren her esnek baz kümesi (F,D) ile esnek (F,B) kümesinin kesişimi boştan farklı ise o zaman α yı içeren esnek açık (F,C) kümesi ile esnek (F,B) kümesinin kesişimi de boştan farklıdır. Yani, $\alpha \in \overline{(F,B)}$ dir. □

Tanım 2.50 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay ve* $\alpha \in (F,A)$ *olsun. Eğer* (F,B) *esnek açık bir küme ve* $\alpha \in (F,B)$ *ise o zaman* (F,B)*,* α *nın esnek açık komşuluğu (esnek komşuluğu)dur denir.* α *nın tüm esnek komşuluklarının kümesi* $\tilde{\upsilon}(\alpha)$ *olarak ifade edilir. Yani,*

$$\tilde{\upsilon}(\alpha) = \{F_B : F_B \in \tilde{\tau}, \alpha \in F_B\}$$

dır.

Örnek 2.51 *Örnek 2.31 de* $(F,A,\tilde{\tau}_3)$ *topolojik uzayını göz önüne alırsak* $\alpha = (x_1,\{u_1,u_2\}) \in F_A$ *için* $\tilde{\upsilon}(\alpha) = \{(F,A),(F,A_{13})\}$ *olur.*

Tanım 2.52 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay,* $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *ve* $\alpha \in (F,A)$ *olsun. Eğer* α *nın her komşuluğu kendinden başka diğer bazı noktalarda esnek* (F,B) *kümesi ile kesişirse o zaman* α*,* (F,B) *nin esnek limit noktası olarak adlandırılır.* (F,B) *nin tüm limit noktalarının kümesi* $(F,B)'$ *olarak ifade edilir.*
Diğer bir deyişle; $(F,A,\tilde{\tau})$ *bir esnek topolojik uzay,* $(F,B),(F,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *ve* $\alpha \in (F,A)$ *olsun.*

$$O \text{ zaman } \alpha \in (F,B)' \Leftrightarrow \forall (F,C) \in \tilde{\upsilon}(\alpha) \text{ için } (F,C)\tilde{\cap}((F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}) \neq (F,\emptyset)$$

dir.

Örnek 2.53 *Örnek 2.31 göz önüne alalım. Eğer* $(F,B) = (F,A_{13})$ *ve* $\alpha = (x_1,\{u_1,u_2\}) \in (F,A)$ *ise o zaman* $\alpha \in (F,B)'$ *dir. Çünkü* $(F,A)\tilde{\cap}((F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}) \neq (F,\emptyset)$ *ve* $(F,A_{13})\tilde{\cap}((F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\} \neq (F,\emptyset)$ *dır.*

Teorem 2.54 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay,* $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun. O zaman,* $(F,B)\tilde{\cup}(F,B)' = \overline{(F,B)}$ *dir.*

İspat. Eğer $\alpha \in (F,B)\tilde{\cup}(F,B)'$ ise o zaman $\alpha \in (F,B)$ ya da $\alpha \in (F,B)'$ dür. Bu durumda eğer $\alpha \in (F,B)$ ise o zaman $\alpha \in (F,B)'$ olur. Eğer $\alpha \in (F,B)'$ ise o zaman $\forall (F,C) \in \tilde{\upsilon}(\alpha)$ için $(F,C)\tilde{\cap}((F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}) \neq (F,\varnothing)$ yazılır. Bu yüzden $\forall (F,C) \in \tilde{\upsilon}(\alpha)$ için $(F,C)\tilde{\cap}(F,B) \neq \varnothing$ dir. Böylece $\alpha \in \overline{(F,B)}$ elde edilir. Tersine; $\alpha \in \overline{(F,B)}$ ise o zaman $\alpha \in (F,B)$ ya da $\alpha \notin (F,B)$ dir. Bu durumda eğer $\alpha \in (F,B)$ ise $\alpha \in (F,B)\tilde{\cup}(F,B)'$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha \notin (F,B)$ ise $\forall (F,C) \in \tilde{\upsilon}(\alpha)$ için $(F,C)\tilde{\cap}((F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}) \neq (F,\varnothing)$ dir. Dolayısıyla $\alpha \in (F,B)'$ elde edilir. Buradan $\alpha \in (F,B)\tilde{\cup}(F,B)'$ olur.
O halde, $(F,B)\tilde{\cup}(F,B)' = \overline{(F,B)}$ dir. □

Teorem 2.55 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay, $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman (F,B) nin esnek kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,B)'\tilde{\subseteq}(F,B)$ olmasıdır.*

İspat. $\overline{(F,B)} = (F,B) \Leftrightarrow (F,B)\tilde{\cup}(F,B)' = (F,B) \Leftrightarrow (F,B)'\tilde{\subseteq}(F,B)$ olur. □

Teorem 2.56 [1] *$(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B),(F,C)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:*

i) $(F,B)'\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$
ii) $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,C) \Rightarrow (F,B)'\tilde{\subseteq}(F,C)'$ *dir.*
iii) $((F,B)\tilde{\cup}(F,C))'\tilde{\subseteq}(F,B)'\tilde{\cap}(F,C)'$
iv) $((F,B)\tilde{\cup}(F,C))' = (F,B)'\tilde{\cup}(F,C)'$
v) (F,B) *esnek kapalı bir kümedir* $\Leftrightarrow (F,B)'\tilde{\subseteq}(F,B)$

İspat.
(**i**) Esnek kapanış tanımından $(F,B)'\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$ olduğu açıktır.
(**ii**) $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,C)$ olsun. Böylece $(F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}\tilde{\subseteq}(F,C)\tilde{\setminus}\{\alpha\}$, $\overline{(F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}}\tilde{\subseteq}\overline{(F,C)\tilde{\setminus}\{\alpha\}}$ dır. Buradan $(F,B)'\tilde{\subseteq}(F,C)'$ elde edelir.
(**iii**) $(F,B)\tilde{\cap}(F,C)\tilde{\subseteq}(F,B)$ ve $(F,B)\tilde{\cap}(F,C)\tilde{\subseteq}(F,C)$ dir. O zaman $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))'\tilde{\subseteq}(F,B)'$ ve $((F,B)\tilde{\cap}(F,C))'\tilde{\subseteq}(F,C)'$ dir.

Buradan da $((F,B)\tilde{\cup}(F,C))'\tilde{\subseteq}(F,B)'\tilde{\cap}(F,C)'$ elde edilir.

(**iv**) $\alpha \in (F,B)\tilde{\cup}(F,C)' \Leftrightarrow \alpha \in \overline{((F,B)\tilde{\cup}(F,C))\tilde{\setminus}\{\alpha\}}$ dır. Ayrıca $\overline{((F,B)\tilde{\cup}(F,C))\tilde{\setminus}\{\alpha\}} = \overline{((F,B)\tilde{\cup}(F,C))\tilde{\cap}\{\alpha\}^{\tilde{c}}} = \overline{((F,B)\tilde{\cap}\{\alpha\}^{\tilde{c}})\tilde{\cup}((F,C)\tilde{\cap}\{\alpha\}^{\tilde{c}})} = \overline{((F,B)\tilde{\cap}\{\alpha\}^{\tilde{c}})}\tilde{\cup}\overline{((F,C)\tilde{\cap}\{\alpha\}^{\tilde{c}})} = \overline{(F,B)\tilde{\setminus}\{\alpha\}}\tilde{\cup}\overline{(F,C)\tilde{\setminus}\{\alpha\}}$dır. O halde $\alpha \in (F,B)'\tilde{\cup}(F,C)'$. Böylece $((F,B)\tilde{\cup}(F,C))' = (F,B)'\tilde{\cup}(F,C)'$ olduğu sonucuna ulaşılır.

(**v**) (F,B) esnek kapalı $\Leftrightarrow (F,B) = \overline{(F,B)} \Leftrightarrow (F,B) = (F,B)\tilde{\cup}(F,B)' \Leftrightarrow (F,B)'\tilde{\subseteq}(F,B)$ dir. $\square$

Tanım 2.57 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay ve* $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun. O zaman* (F,B) *nin sınırı* $(F,B)^b = \overline{(F,B)}\tilde{\cap}\overline{(F,B)^{\tilde{c}}}$ *şeklinde tanımlanır ve* $(F,B)^b$ *ile ifade edilir.*

Örnek 2.58 *Örnek 2.42 yi göz önüne alırsak* (F,B) *için* $\overline{(F,B)} = (F,A_2)^{\tilde{c}}$ *ve* $\overline{(F,B)^{\tilde{c}}} = (F,\tilde{E})$ *dir. O zaman* $(F,B)^b = \overline{(F,B)}\tilde{\cap}\overline{(F,B)^{\tilde{c}}} = (F,A_2)^{\tilde{c}}$ *olur.*

Teorem 2.59 [1] $(F,A,\tilde{\tau})$ *esnek topolojik uzay ve* $(F,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ *olsun. O zaman*

i)$(F,B)^b\tilde{\subseteq}\overline{(F,B)}$

ii)$(F,B)^b = ((F,B)^{\tilde{c}})^b$

iii)$(F,B)^b = \overline{(F,B)}\tilde{\setminus}(F,B)^{\circ}$

3. ESNEK FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

3.1. Esnek Fuzzy Kümeler

Bu bölümde fuzzy esnek küme tanımı verilerek ve fuzzy esnek kümelerle ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir.

Tanım 3.1 [3] *A fuzzy kümesi ve X boş olmayan bir küme olsun. X in herbir noktasının ailesi bir μ_A üyelik fonksiyonunu $[0,1]$ arasındaki reel sayılar ile niteler. A da x'in "üyelik fonksiyon derecesi" X'in $\mu_A(x)$ değeri ile temsil edilir.*
$\varnothing = \{(x,0)|x \in X\}$, $X = \{(x,1)|x \in X\}$ *Fuzzy küme,* $A = \{(x,\mu_A(x))|x \in X\}$ *olarak düşünülürse* $A \subset X \times [0,1]$ *olup aslında fuzzy küme üyelik fonksiyonu ile özdeşleştirilebilir.*

Örnek 3.2 *A fuzzy küme olsun.*
$X = \{1,5,10,15,20,50\}$ *Ahmet beyin almış olduğu aracın yıllara göre motor performansını göstersin. "X=Yıllara göre motor performansı" olarak tanımlansın. Şimdi fuzzy kümeyi tanımlayalım.*
$\mu_A(x) : X \to [0,1]$,
$\mu_A(1) = 1$, $\mu_A(5) = 0.9$, $\mu_A(10) = 0.8$, $\mu_A(20) = 0.5$, $\mu_A(50) = 0$
O halde; $A = \{(1,1),(5,0.9),(10,0.8),(20,0.5),(50,0)\}$ *olur.*

Tanım 3.3 [3] *A ve B birbirine denk iki fuzzy kümesi yani $A = B$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ olmasıdır.*

Tanım 3.4 [3] *Bir B fuzzy kümesinin A fuzzy kümesini kapsaması için gerek ve yeter şart $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olmasıdır.*

Tanım 3.5 [3] *Üyelik fonksiyonları μ_A ve μ_B olan ayrı ayrı A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi bir C fuzzy kümesidir. $C = A \cup B$ nin yazılışı A ve B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonlarıyla ilişkili olup;*

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_C(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

dir.

Tanım 3.6 [3] *Üyelik fonksiyonları $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olan ayrı ayrı A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi bir C kümesi olsun. $C = A \cap B$ nin yazılışı A ve B fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonlarıyla ilişkili olup;*

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_C(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

dir.

Tanım 3.7 [3] *A bir fuzzy küme olsun. A fuzzy kümesinin tümleyeni μ_A^c ile gösterilir ve $\mu_A^c = 1 - \mu_A(x)$ dir.*

Örnek 3.8 *$X = \{a, b, c\}$ üzerinde iki tane fuzzy küme tanımlayalım.*
$\mu_A(x) : X \to [0,1]$ ve $\mu_B(x) : X \to [0,1]$ olsun.
$\mu_A(a) = 0.3$, $\mu_A(b) = 0.4$, $\mu_A(c) = 0.9$
$\mu_B(a) = 0.4$, $\mu_B(b) = 0.7$, $\mu_B(c) = 0.1$ *şeklinde verilsin.*
$A = \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.9)\}$ ve $B = \{(a, 0.4), (b, 0.7), (c, 0.1)\}$ olarak yazabiliriz. O zaman yukarıda verdiğimiz tanımları tek tek irdeleyelim.
$A \subset B$ midir? Öyleyse $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olmalıdır.
$\mu_A(a) \leq \mu_B(b)$ ve $\mu_A(b) \leq \mu_B(b)$ fakat $\mu_A(c) \nleq \mu_B(c)$ olduğundan A, B'nin alt kümesi değildir.
Şimdi $C = A \cap B$ kümesini bulalım.
$C = A \cap B = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.1)\}$ dir.

O zaman $\mu_A^c = 1 - \mu_A(x)$ *tanımından* $C^c = \{(a,0.7),(b,0.6),(c,0.9)\}$ *olur.*
Şimdi de $D = A \cup B$*'yi bulalım.*
$D = A \cup B = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{(a,0.4),(b,0.7),(c,0.9)\}$ *şeklinde bulunur.*
Her klasik küme bir fuzzy kümedir fakat her fuzzy küme klasik küme değildir. Örneğin klasik kümelerde $A \cap A^c = \emptyset$ *iken fuzzy kümelerde* $A \cap A^c \neq \emptyset$ *olabilir. Yukarıdaki örnekte* $A^c = \{(a,0.7),(b,0.6),(c,0.1)\}$ *dir. Burada* $A \cap A^c = \{(a,0.3),(b,0.4),(c,0.1)\}$ *olup bu kesişim boştan farklıdır.*
Ayrıca klasik kümelerde $A \cup A^c = X$ *olup fuzzy kümede bu eşitlik her zaman sağlanmayabilir. Yukarıdaki örnekten açıkca görülmektedir ki* $A \cup A^c = \{(a,0.3),(b,0.4),(c,0.9)\}$ *olup X kümesinden farklıdır.*

Tanım 3.9 [3] *U başlangıç evreni kümesi ve E parametreler kümesi olsun. U'nun tüm fuzzy alt kümelerinin ailesini* I^U *ile gösterelim ve* $A \subseteq E$ *olsun. Eğer* $f : A \to I^U$ *olacak şekilde bir dönüşüm ise* (f,A) *ikilisi U üzerinde fuzzy esnek kümesi olarak tanımlanır.* $\forall \alpha \in A$ *için* $f(\alpha)$*, U'da bir fuzzy kümedir.*

Örnek 3.10 *U araçların kümesi olmak üzere A parametreler kümesi araçların özellikleri olsun.*

$$A = \{\textit{pahalı,modern,bakımlı,bakımsız}\}$$

alalım. Bu durumda U üzerindeki bir esnek kümeyi pahalı araç, modern araç, bakımlı araç ve bakımsız araç şeklinde ifade edebiliriz. (F,T) *esnek kümesi ve* (f,T) *fuzzy esnek kümesi Ahmet beyin satın alacağı araçların cazipliğini belirler. Şimdi örneğimizi daha detaylı irdeleyelim:*
U evreni beş araçtan oluşsun. $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ *ve* $T = \{a_1,a_2,a_3\} \subset A$ *parametreler kümesi olarak verilsin.*

$$a_1 = \textit{pahalı},\ a_2 = \textit{modern},\ a_3 = \textit{bakımlı}$$

olsun. O zaman, $(F,T) = \{(a_1,\{u_1,u_2\}),(a_2,\{u_1,u_3\}),(a_3,\{u_1,u_4,u_5\})\}$ U *üzerinde bir esnek küme belirtir. Benzer şekilde,*
$(f,T) = \{(a_1,\{u_1^{0.9},u_2^{0.4}\}),(a_2,\{u_1^{0.9},u_3^{0.7}\}),(a_3,\{u_1^{0.9},u_4^{0.6},u_5^{0.8}\})\}$ U *üzerinde fuzzy esnek küme olarak ifade edilir.*

Tanım 3.11 [3] U *üzerindeki fuzzy esnek kümesi* (f,A) *olsun. Eğer* $\forall e \in E$ *için* $f(e) = \tilde{0}$, *U'nun boş fuzzy esnek kümesi* $\bar{0}$*'dır.*

Yani, $\forall x \in U$ *için* $\tilde{0}(x) = \bar{0}$ *ise* (f,A) *ya* U *üzerinde null(boş) fuzzy esnek küme denir ve* $\tilde{\Phi}$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.12 [3] U *üzerinde fuzzy esnek kümesi* (f,A) *mutlak fuzzy esnek kümesi olsun.* $\forall e \in E$ *için* $f(e) = \tilde{1}$, *U'nun fuzzy esnek kümesi* $\bar{1}$ *dir. Yani,* $\forall x \in U$ *için* $\tilde{1}(x) = \bar{1}$ *ise* (f,A) *ya* U *üzerinde mutlak fuzzy esnek küme denir ve* $\tilde{E}$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.13 [3] *Eğer* $\forall e \in A$ *için* $A \subseteq B$ *olduğunda* $f(e) \subseteq g(e)$ *oluyorsa* U *ortak evreni üzerinde* (f,A) *fuzzy esnek kümesi* (g,B) *fuzzy esnek kümesinin bir alt kümesidir denir.*
i) $A \subset B$
ii) $\forall a \in A$ *için* $f_a(x) \leq g_a(x)$, $\forall x \in U$

Tanım 3.14 [3] *Eğer* (f,A) *fuzzy esnek kümesi* (g,B) *fuzzy esnek kümesinin bir alt kümesi iken* (g,B) *fuzzy esnek kümesi de* (f,A) *fuzzy esnek kümesinin alt kümesi oluyor ise* U *ortak evreni üzerinde* (f,A) *ve* (g,B) *fuzzy esnek kümelerine eşit fuzzy esnek küme denir*

Tanım 3.15 [3] U *ortak evreni üzerinde* (f,A) *ve* (g,B) *fuzzy esnek kümelerinin birleşimleri* $\forall e \in E$ *için* $C = A \cup B$ *olmak üzere*

$$h(e) = \begin{cases} f(e), & e \in A \backslash B \\ g(e), & e \in B \backslash A \\ f(e) \cup g(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(h,C) = (f,A) \sqcup (g,B)$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.16 [3] (f,A) *ve* (g,B)*, U ortak evreni üzerinde iki fuzzy esnek küme olsun.* (f,A) *ve* (g,B) *fuzzy esnek kümelerinin kesişimi* $\forall c \in C$ *için* $h(c) = f(c) \cap g(c)$ *olacak şekilde tanımlanır ve* $(h,C) = (f,A) \sqcap (g,B)$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.17 [3] (f,E)*, U evreni üzerinde bir fuzzy esnek kümesi olsun. Eğer her* $e \in E$ *için* $(f,E) = \overline{\lambda}$ *oluyorsa o zaman* (f,E) *kümesine* $\lambda-$*sonsuz fuzzy esnek kümesi denir ve* $\widetilde{E}^{\lambda}$ *ile gösterilir.*
Tanımdan $(\widetilde{E}^{\lambda})^c = \widetilde{E}^{1-\lambda}$ *olduğu açıktır.*

Önerme *[3] U* evreni üzerinde (f,A), (g,B) ve (h,C) üç fuzzy esnek kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

(1) $f_A \sqcap f_A = f_A$, $f_A \sqcup f_A = f_A$.

(2) $f_A \sqcap g_B = g_B \sqcap f_A$, $f_A \sqcup g_B = g_B \sqcup f_A$.

(3) $f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C) = (f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C$,

$f_A \sqcap (g_B \sqcap h_C) = (f_A \sqcap g_B) \sqcap h_C$.

(4) $f_A = f_A \sqcup (f_A \sqcap g_B)$, $f_A = f_A \sqcap (f_A \sqcup g_B)$.

(5) $\tilde{\Phi} \sqsubseteq f_A \sqsubseteq \tilde{E}$.

(6) $(f_A^c)^c = f_A$.

(7) Eğer $f_A \sqsubseteq g_B$ ise o zaman $g_B^c \sqsubseteq f_A^c$.

3.2. Esnek Fuzzy Topolojik Uzaylar

Bu bölüm boyunca X başlangıç evreni ve E, X üzerindeki objelerin parametreler kümesi anlamına gelir. Bu bölümde fuzzy esnek kümelerin tanımı ve bazı özellikleri kullanılarak fuzzy esnek topolojik uzay tanımlanacaktır.

Tanım 3.18 [4] *$FSS(X)$, X evreni üzerindeki fuzzy esnek kümelerinin koleksiyonu ve E sabit parametreler kümesi olsun. Eğer $\tau \subset FSS(X)_E$ aşağıdaki koşulları sağlarsa X üzerindeki fuzzy esnek topoloji olarak adlandırılır:*

1. $\tilde{\Phi}, \tilde{E} \in \tau$, *($\tilde{0}_E(e) = \bar{0}$ ve $\tilde{1}_E(e) = \bar{1}$ $\forall e \in E$).*

2. *τ'nun elemanlarının herhangi sayıda birleşimi τ'ya aittir.*

3. *τ'nun elemanlarının sonlu sayıda kesişimi τ'ya aittir.*

O zaman (X, τ, E) üçlüsü X üzerinde fuzzy esnek topolojik uzay olur. Ayrıca τ'nun herbir elemanı (X, τ, E) üzerinde fuzzy esnek açık küme olarak adlandırılır.

Tanım 3.19 [4] *(X, τ, E) fuzzy esnek topolojik uzay olsun. Eğer f_A^c, X üzerinde fuzzy esnek açık küme ise f_A, X üzerinde fuzzy esnek kapalı küme olarak adlandırılır.*

Örnek 3.20 *$X = \{x, y, z, t, k\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ burada*

$F_1(e_1) = \{x\}$; $\quad F_1(e_2) = \{x, z\}$

$F_2(e_1) = \{x, z\}$; $\quad F_2(e_2) = \{x, y, z\}$;

$F_3(e_1) = \{x, y, z, t\}$; $\quad F_3(e_2) = \{x, y, z, t, k\}$ şeklinde tanımlansınlar. (F, E, τ) bir esnek topolojik uzaydır.

Burada esnek kümemizi;

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x\}), (e_2, \{x, z\})\}$,

$(F_2, E) = \{(e_1, \{x, z\}), (e_2, \{x, y, z\})\}$

$(F_3, E) = \{(e_1, \{x, y, z, t\}), (e_2, \{x, y, z, t, k\})\}$ şeklinde yazabiliriz. Şimdi (F, E, τ)'nun esnek topolojik bir uzay olduğunu gösterelim.

1. $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$

2. $(F_1, E) \cap (F_2, E) = (F_1, E) \in \tau$

$(F_1, E) \cap (F_3, E) = (F_1, E) \in \tau$

$(F_2, E) \cap (F_3, E) = (F_2, E) \in \tau$

3. $(F_1,E)\cup(F_2,E)=(F_2,E)\in\tau$
   $(F_1,E)\cup(F_3,E)=(F_3,E)\in\tau$
   $(F_2,E)\cup(F_3,E)=(F_3,E)\in\tau$
   $(F_1,E)\cup(F_2,E)\cup(F_3,E)=(F_1,E)\in\tau$

Şimdi de bir fuzzy küme ile yukarıdaki örneği ilişkilendirelim.

Örnek 3.21 *$X=\{x,y,z,t,k\}$ başlangıç kümesi araçlar evreninden oluşsun. $E=\{e_1,e_2\}$ parametreler kümesi satın alacağımız cazip araçların kümesinden oluşsun. Burada biz parametreleri "$e_1=$ modern ve $e_2=$bakımlı" olarak belirleyelim. O zaman (f,E) fuzzy esnek kümesini;*
$(f,E)=\{(e_1,\{x^1,y^{0.8},z^{0.4},t^{0.7},k^{0.1}\}),(e_2,\{x^{0.9},y^{0.8},z^{0.5},t^{0.6},k^{0.4}\})\}$ şeklinde yazabiliriz.
Şimdi de (f,E) fuzzy esnek kümesi üzerinde bir δ topolojisini yazalım.
$\delta=\{\tilde{\Phi},\tilde{E},\{(e_1,\{x^0,y^0,z^0,t^0,k^0\})\},\{(e_1,\{x^1,y^{0.8},z^{0.4},t^{0.7},k^{0.1}\})\},$
$\{(e_1,\{x^1,y^{0.8},z^{0.4},t^{0.7},k^{0.1}\}),(e_2,\{x^{0.9},y^{0.8},z^{0.5},t^{0.6},k^{0.4}\})\}\}$
Burada δ, X evreni üzerinde tanımlanan (f,E) fuzzy esnek kümesinin bir topolojisidir. Yani (X,δ,E) bir fuzzy esnek topolojik uzay olur.

Tanım 3.22 [4] *(X,τ,E) fuzzy esnek topolojik uzay ve $f_A\in FSS(X)_E$ olsun. f_A fuzzy esnek kümesinin kapanışı $Fcl(f_A)$ ile gösterilip f_A yı kapsayan tüm fuzzy esnek kapalı kümelerinin kesişimidir. Yani, $Fcl(f_A)=\sqcap\{h_c;h_c\in\tau^c$ ve $f_A\widetilde{\subseteq}h_c\}$ dır. Buradan $Fcl(f_A)$ X üzerinde f_A'yı kapsayan en küçük fuzzy kapalı kümedir. Ayrıca $Fcl(f_A)$ fuzzy esnek kapalı kümedir.*

Tanım 3.23 [4] *Fuzzy esnek küme olan $f_A\in FSS(X)_E$'nin fuzzy esnek nokta olarak adlandırabilmemiz için $x\in X$ ve $e\in E$ vardır öyle ki $\mu^e_{f_A}(x)=a$; $(0\leq a\leq 1)$ ve $\mu^e_{f_A}(y)=0$ $\forall y\in X-\{x\}$ olmalıdır. Fuzzy esnek nokta x^e_a ya da f_e ile gösterilir. X'in tüm fuzzy esnek noktalarının sınıfı $FSP(X)_E$ ile gösterilir.*

Tanım 3.24 [4] *Fuzzy esnek nokta x_a^e, $e \in A$ için $a < \mu_{f_A}^e(x)$ ise f_A fuzzy esnek kümesine ait olduğu söylenir. $x_a^e \tilde{\in} f_A$ ile gösterilir. Eğer x_a^e, f_A'ya ait değilse $x_a^e \tilde{\notin} f_A$ yazılır ve $a > \mu_{f_A}^e(x)$ anlamına gelir.*

Tanım 3.25 [4] *$FSS(X)_E$ ve $FSS(Y)_K$ sırasıyla X ve Y üzerinde fuzzy esnek kümeler ailesi olsun. $u : X \to Y$ ve $p : E \to K$ birer dönüşüm olsun. O zaman*

$f_{pu} : FSS(X)_E \to FSS(Y)_K$ dönüşümüne fuzzy esnek dönüşüm denir öyle ki

1. Eğer $g_B \in FSS(X)_E$ ise f_{pu} fuzzy esnek dönüşümünün altında g_B'nin görüntüsü $f_{pu}(g_B)$ tanımdan Y üzerinde fuzzy esnek kümedir. Burada $\forall k \in p(E)$, $y \in Y$ dir.

$$f_{pu}(g_B)(k)(y) = \begin{cases} \bigvee_{u(x)=y}[\bigvee_{p(e)=k}(g_B(e))](x), & x \in u^{-1}(y) \\ 0, & x \notin u^{-1}(y) \end{cases}$$

2. Eğer $h_C \in FSS(Y)_K$ ise o zaman f_{pu} esnek fuzzy dönüşümünün altında g_C'nin öngörüntüsü $f_{pu}^{-1}(h_C)$ tanımdan X üzerinde bir fuzzy esnek kümedir. Burada $\forall e \in p^{-1}(K)$ için $\forall x \in X$,

$$f_{pu}^{-1}(h_C)(e)(x) = h_C(p(e))(u(x))$$

dir.

Örnek 3.26 *$U_1 = \{k,m,n\}$, $U_2 = \{t,p,s\}$ başlangıç evrenleri $\lambda = \{(k,t),(m,p),(n,s)\} : U_1 \to U_2$ fonksiyonu, $E_1 = \{2,3,4,5\}$, $E_2 = \{7,8,9,10,11\}$ parametreler kümesi ve $\delta = \{(2,7),(3,8),(4,11),(5,11)\} : E_1 \to E_2$ fonksiyonu verilsin.*

$C = \{2,5\} \subseteq E_1$ olmak üzere $(f,C) = \{2 = \{k^{0.2}, m^{0.5}, n^{0.1}\}, 5 = \{k^0, m^0, n^1\}\} \in FS(U_1,E_1)$'nın (λ,δ) altındaki görüntüsü $(\lambda,\delta)(f,C) = (\lambda f, \delta(C))$'yı bulmak için aşağıdaki aşamaları takip edersek;

$\lambda^{-1}(t) = \{k,m\}$, $\lambda^{-1}(p) = \emptyset$, $\lambda^{-1}(s) = \{n\}$,

$\delta^{-1}(7) = \{2\}$, $\delta^{-1}(8) = \{3\}$, $\delta^{-1}(9) = \emptyset$, $\delta^{-1}(10) = \emptyset$, $\delta^{-1}(11) = \{4,5\}$

$a \in \delta(C)$ için $(\lambda f)_a$ üyelik fonksiyonu altındaki U_2'nin elemanlarının üyelik dereceleri aşağıda gösterildiği şekildedir.

$(\lambda f)_7(t) = \bigvee_{b\in\lambda^{-1}(t)}(\bigvee_{\alpha\in\delta^{-1}(7)\cap C} f_\alpha(b)) = \bigvee_{b\in\{k,m\}}(f_2(b)) = f_2(k)\bigvee f_2(m) = (0.2)\bigvee(0.5) = 0.5,$

$(\lambda f)_7(p) = \bigvee_{b\in\lambda^{-1}(p)}(\bigvee_{\alpha\in\delta^{-1}(7)\cap C} f_\alpha(b)) = \bigvee_{b\in\{n\}}(f_2(b)) = f_2(n) = 0.1,$

$(\lambda f)_8(t) = 0,\ (\lambda f)_8(p) = 0,\ (\lambda f)_8(s) = 0,$

$(\lambda f)_9(t) = 0,\ (\lambda f)_9(p) = 0,\ (\lambda f)_9(s) = 0,$

$(\lambda f)_{10}(k) = \bigvee_{b\in\lambda^{-1}(t)}(\bigvee_{\alpha\in\delta^{-1}(11)\cap C} f_\alpha(b)) = \bigvee_{b\in\{k,m\}}(f_5(b)) = f_5(k)\bigvee f_5(m) = 0, \quad (\lambda f)_{10}(p) = 0,$

$(\lambda f)_{10}(s) = \bigvee_{b\in\lambda^{-1}(s)}(\bigvee_{\alpha\in\delta^{-1}(10)\cap C} f_\alpha(b)) = \bigvee_{b\in\{n\}}(f_5(b)) = f_5(n) = 1,$

Böylece $(\lambda,\delta)(f,C) = \{7 = \{t^{0.5}, s^{0.1}\}, 11 = \{s^1\}\}$ *elde edilir.*

$D = \{5,10,11\} \subset E_2$ *için,*

$(g,D) = \{5 = \{t^1, p^1, s^{0.1}\}, 10 = \{t^{0.7}, p^{0.1}, s^{0.3}\}, 11 = \{t^{0.1}, p^{0.2}, s^{0.8}\} \in FS(U_2,E_2)$*'nin* (λ,δ) *altındaki öngörüntüsü;*

$(\lambda,\delta)^{-1} = (\lambda^{-1}g, \delta^{-1}f(D)),\ \delta^{-1}(D) = \{2,4,5\}$ *olmak üzere aşağıdaki şekilde elde edilir.*

$(\lambda^{-1}g)_2(k) = g_{\delta(2)}(\lambda(k)) = g_7(t) = 1,$

$(\lambda^{-1}g)_2(m) = g_{\delta(2)}(\lambda(m)) = g_7(t) = 1,$

$(\lambda^{-1}g)_2(n) = g_{\delta(2)}(\lambda(n)) = g_7(s) = 0.1,$

$(\lambda^{-1}g)_3(k) = g_{\delta(3)}(\lambda(k)) = g_8(t) = 0,$

$(\lambda^{-1}g)_3(m) = 0,$

$(\lambda^{-1}g)_3(n) = 0,$

$(\lambda^{-1}g)_4(k) = g_{\delta(4)}(\lambda(k)) = g_{11}(t) = 0.1,$

$(\lambda^{-1}g)_4(m) = g_{\delta(4)}(\lambda(m)) = g_{11}(t) = 0.1,$

$(\lambda^{-1}g)_4(n) = g_{\delta(4)}(\lambda(n)) = g_{11}(s) = 0.8,$

$(\lambda^{-1}g)_5(k) = g_{\delta(5)}(\lambda(k)) = g_{11}(t) = 0.1,$

$(\lambda^{-1}g)_5(m) = g_{\delta(5)}(\lambda(m)) = g_{11}(t) = 0.1,$

$(\lambda^{-1}g)_5(n) = g_{\delta(5)}(\lambda(n)) = g_{11}(s) = 0.8,$

Böylece (g,D) *nin ön görüntüsü,*

$(\lambda^{-1}g,\delta^{-1}(B)) = \{2 = \{k^1,m^1,n^{0.1}\},4 = \{k^{0.1},m^{0.1},n^{0.8}\},5 = \{k^{0.1},m^{0.1},n^{0.8}\}$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.27 [4] (X,τ_1,E) *ve* (Y,τ_2,K) *iki fuzzy esnek topolojik uzay olsun ve* f_{pu} : $FSS(X)_E \to FSS(Y)_K$ *fuzzy esnek dönüşüm olsun. O zaman*

1. Eğer $\forall h_c \in \tau_2$ *ve* $f_{pu}^{-1}(h_c) \in \tau_1$ *ise* f_{pu} *ya fuzzy esnek süreklidir denir.*

2. $\forall g_B \in \tau_1$ *ve* $f_{pu}(g_B) \in \tau_2$ *ise* f_{pu} *ya fuzzy esnek açıktır denir.*

3.3. Esnek Fuzzy Bağlantılı Kümeler

Tanım 3.28 [4] (X,τ,E) *fuzzy esnek topolojik uzay üzerindeki bir* f_E *fuzzy esnek kümesi;*

1. Eğer X üzerinde $f_E \tilde{\subseteq} h_E \sqcup s_E$, $h_E \sqcap s_E \tilde{\subseteq} f_E^c$, $f_E \sqcap h_E \neq \tilde{0}_E$ *ve* $f_E \sqcap s_E \neq \tilde{0}_E$ *olacak şekilde boştan farklı* h_E *ve* s_E *fuzzy esnek açık kümeleri yoksa* FSC_1*-bağlantılı fuzzy esnek küme olarak adlandırılır.*

2. Eğer X üzerinde $f_E \tilde{\subseteq} h_E \sqcup s_E$, $f_E \sqcap h_E \sqcap s_E = \tilde{0}_E$, $f_E \sqcap h_E \neq \tilde{0}_E$ *ve* $f_E \sqcap s_E \neq \tilde{0}_E$ *olacak şekilde boştan farklı* h_E *ve* s_E *fuzzy esnek açık kümeleri yoksa* FSC_2*-bağlantılı fuzzy esnek küme olarak adlandırılır.*

3. Eğer X üzerinde $f_E \tilde{\subseteq} h_E \sqcup s_E$, $h_E \sqcap s_E \tilde{\subseteq} f_E^c$, $h_E \tilde{\nsubseteq} f_E^c$, $s_E \tilde{\nsubseteq} f_E^c$ *olacak şekilde boştan farklı* h_E *ve* s_E *fuzzy esnek açık kümeleri yoksa* FSC_3*-bağlantılı fuzzy esnek küme olarak adlandırılır.*

4. Eğer X üzerinde $f_E \tilde{\subseteq} h_E \sqcup s_E$, $f_E \sqcap h_E \sqcap s_E = \tilde{0}_E$, $h_E \tilde{\nsubseteq} f_E^c$, $s_E \tilde{\nsubseteq} f_E^c$ *olacak şekilde boştan farklı* h_E *ve* s_E *fuzzy esnek açık kümeleri yoksa* FSC_4*-bağlantılı fuzzy esnek küme olarak adlandırılır. Aksi halde,* f_E, $i = 1,2,3,4$ *için* FSC_i*-bağlantısız fuzzy esnek küme olarak adlandırılır.*

Yukarıdaki tanımda f_E *yerine* $\tilde{1}_E$ *alırsak o zaman* (X,τ,E) *esnek fuzyy topolojik uzayı* FSC_i*-bağlantılı uzay* $(i = 1,2,3,4)$ *olarak adlandırılır.*

Not *[4]* FSC_i-bağlantılılık $(i = 1,2,3,4)$ arasındaki ilişki aşağıdaki diyagramla ifade edilebilir.

$$\begin{array}{ccc} FSC_1 & \Rightarrow & FSC_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ FSC_3 & \Rightarrow & FSC_4 \end{array}$$

Tanım 3.29 [4] *f_E ve g_E boş olmayan iki fuzzy esnek küme olsun.*

1. Eğer $Fcl(f_E)\bar{q}g_E$ ve $f_E\bar{q}Fcl(g_E)$ ise (X,τ,E) topolojik uzayı üzerinde fuzzy esnek zayıf ayrılmış kümedir denir.

2. $f_E\tilde{\subseteq}h_E$, $g_E\tilde{\subseteq}s_E$ ve $f_E\sqcap g_E = g_E\sqcap h_E = \tilde{0}_E$ özelliğini sağlayan boş olmayan h_E ve s_E fuzzy esnek açık kümeleri var ise (X,τ,E) topolojik uzayı fuzzy esnek ayrılmıştır denir.

Tanım 3.30 [4] *$f_E \in FSS(X)_E$ olsun. $f_E(e)$'nin destek kümesi $S(f_E(e))$ ile gösterilip;*

$$S(f_E(e)) = \{x \in X; f_E(e)(x) > 0\}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 3.31 [4] *f_E ve g_E iki fuzzy esnek kümesi için eğer herbir $x \in S(f_E(e))$ için $\mu^e_{f_E}(x) + \mu^e_{g_E}(x) > 1$ ise f_E'ye göre yarı çakışıkımsı denir.*

Tanım 3.32 [4] *f_E ve g_E boş olmayan iki esnek kümesi için;*

Eğer f_E, h_E için f_E yarı-çakışıkımsı fuzzy esnek ve g_E,s_E için g_E yarı-çakışıkımsı fuzzy esnek olacak şekilde $f_E\tilde{\subseteq}h_E$, $g_E\tilde{\subseteq}s_E$,$f_E\sqcap s_E = g_E\sqcap h_E = \tilde{0}_E$ sağlayan $h_E, s_E \in \tau$ var ise f_E ve g_E, (X,τ,E) fuzzy esnek topolojik uzayı üzerinde fuzzy esnek kuvvetli ayrılmış olarak adlandırılır.

Tanım 3.33 [4] (X,τ,E) *esnek fuzzy topolojik uzayı üzerindeki bir* f_E *esnek fuzzy kümesi;*

1. h_E *ve* s_E*,* X *üzerinde boş olmayan iki esnek fuzzy* Q*-ayrılmış kümesi öyle ki;*
$f_E = h_E \sqcup s_E$ *ise* FSC_M*-bağlantısız kümedir. Aksi taktirde* f_E*,* FSC_M*-bağlantılı küme olarak adlandırılır.*

2. h_E *ve* s_E*,* X *üzerinde boş olmayan iki fuzzy esnek zayıf ayrılmış kümesi öyle ki;*
$f_E = h_E \sqcup s_E$ *ise* FSC_S*- bağlantısız kümedir. Aksi taktirde* f_E*,* FSC_S*-bağlantılı küme olarak adlandırılır.*

3. h_E *ve* s_E*,* X *üzerinde boş olmayan iki ayrılmış fuzzy esnek kümesi öyle ki;*
$f_E = h_E \sqcup s_E$ *ise* FSO*-bağlantısız olarak ifade edilir.*
Aksi taktirde f_E*,* FSO*-bağlantılı küme olarak ifade edilir.*

Tanımlar üzerinden eğer f_E *yerine* $\tilde{1}_E$ *alırsak o zaman* (X,τ,E) *fuzzy esnek topolojik uzayı* FSC_M*-bağlantılı uzay olarak adlandırılır.*

Not *[4]* (X,τ,E) fuzzy esnek topolojik uzay üzerinde fuzzy esnek ayrılmış kümelerinin farklı notasyonları arasındaki ilişki aşağıdaki diyagram ile gösterilebilir.

$$\begin{array}{c}
\text{fuzzy esnek kuvvetli ayrılmış} \\
\Downarrow \\
\text{fuzzy esnek ayrılmış} \\
\Downarrow \\
\text{fuzzy esnek } Q\text{-ayrılmış} \Rightarrow \text{fuzzy esnek zayıf ayrılmış}
\end{array}$$

Not *[4]* (X,τ,E) fuzzy esnek topolojik uzay üzerinde FSO-bağlantılı sınıfları FSO_q-bağlantılı;

$i = 1,2,3,4,S,M$ için FSC_i-bağlantılı kümeleri aşağıdaki diyagramla ifade edilebilir.

$$\begin{tikzcd}
 & FSC_1 \arrow[d] & \\
 & FSC_S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
FSC_3 \arrow[d] \arrow[dr] & & FSC_2 \leftrightarrow FSO \arrow[dl] \\
FSC_M & FSC_4 \arrow[d] & \\
 & FSO_q &
\end{tikzcd}$$

Teorem 3.34 [4] *Bir fuzzy esnek ayrık topolojik uzayının üzerinde sadece tek değerli fuzzy esnek noktalar FSC_1-bağlantılı kümelerdir.*

İspat. (X,τ,E) fuzzy esnek ayrık topolojik uzayı üzerinde x_1^e bir fuzzy esnek nokta olsun. h_C ve s_D, $x_1^e \tilde{\in} h_C \sqcup s_D$, $h_C \sqcup s_D \tilde{\subseteq} (x_1^e)^c$ olacak şekilde X üzerinde açık esnek fuzzy noktalar olsun. O halde $(\mu_{h_C}^e(x) = 1$ ve $\mu_{s_D}^e(x) = 0)$ ya da $(\mu_{h_C}^e(x) = 0$ ve $\mu_{s_D}^e(x) = 1)$ olur. Bundan dolayı, $x_1^e \sqcap h_C = \tilde{0}_E$ ya da $x_1^e \sqcap s_D = \tilde{0}_E$ dir. Bu yüzden x_1^e bir FSC_1-bağlantılıdır.

Her bir x_α^e $(0 < \alpha < 1)$ fuzzy esnek noktasını göstermek için X de u_N ve j_L iki fuzzy esnek açık kümesinin $x_\alpha^e \tilde{\in} u_N \sqcup j_L$, $u_N \sqcap j_L \tilde{\subseteq} (x_\alpha^e)^c$ ve $x_\alpha^e \sqcap u_N \neq \tilde{0}_E \neq x_\alpha^e \sqcap j_L$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi X üzerinde u_N ve j_L fuzzy esnek kümeleri alalım öyle ki;

$\mu_{u_N}^e(x) = max\{\alpha, 1-\alpha\}$ ve $\mu_{j_L}^e(x) = min\{\alpha, 1-\alpha\}$ olsun. O zaman u_N ve j_L, x_α^e nin FSC_1-bağlantısızıdır.

Son olarak, X üzerinde bir fuzzy esnek küme için FSC_1-bağlantısız (esnek fuzzy noktaya sahip olmayan) yapı olsun. f_A fuzzy esnek kümesi alalım. f_A, X üzerinde sıfırdan farklı en az y ve z noktası olan bir fuzzy esnek küme olsun. Kabul edelim ki,

$\mu^{\alpha}_{f_A}(y) = \alpha$ ve $\mu^{\alpha}_{f_A}(z) = \beta$ olsun. O zaman tanımda h_C ve s_D fuzzy esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$\mu^e_{h_C}(y) = \alpha,\;\; \mu^e_{h_C}(z) = 0$ ve $\mu^e_{h_C}(x) = \mu^e_{f_A}(x) \quad \forall x \in X - \{y,z\}$

$\mu^e_{s_D}(y) = 0,\;\; \mu^e_{s_D}(z) = \beta$ ve $\mu^e_{s_D}(x) = 1 - \mu^e_{f_A}(x) \quad \forall x \in X - \{y,z\}$

Açıktır ki; h_C ve s_D, f_A'nın FSC_1-bağlantısızıdır. □

Teorem 3.35 [4] *Fuzzy esnek ayrık topolojik uzay üzerindeki fuzzy esnek noktalar yalnızca FSC_2-bağlantılı kümedir.*

İspat. Fuzzy esnek ayrık topolojik uzay üzerinde x^e_α fuzzy esnek nokta olsun. X üzerinde h_C ve s_D esnek açık kümeler öyle ki, $x^e_\alpha \tilde{\in} h_C \sqcup s_D$, $\;x^e_\alpha \sqcap h_C \sqcup s_D = \tilde{0}_E$ olsun. O halde $(\mu^e_{h_C}(x) \geq \alpha,\; \mu^e_{s_D}(x) = 0)$ ya da $(\mu^e_{h_C}(x) = 0,\; \mu^e_{s_D}(x) \geq \alpha)$ dır. Buradan $x^e_\alpha \sqcap h_C = \tilde{0}_E$ ya da $x^e_\alpha \sqcap s_D = \tilde{0}_E$ olur. Böylece x^e_α FSC_2-bağlantılıdır.

Daha sonra X üzerinde bir fuzzy esnek için FSC_2-bağlantısız (fuzzy esnek noktaya sahip olmayan) yapı olsun. f_A fuzzy esnek kümesi alalım. Şüphesiz ki f_A, X üzerinde sıfırdan farklı enaz iki y ve z noktasına sahiptir. Farzedelim ki, $\mu^e_{f_A}(y) = \beta$ ve $\mu^e_{f_A}(z) = \gamma$ olsun. Şimdi tanımdan h_C ve s_D esnek fuzzy kümeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$\mu^e_{h_C}(y) = \beta,\;\; \mu^e_{h_C}(z) = 0$ ve $\mu^e_{h_C}(x) = \mu^e_{f_A}(x) \quad \forall x \in X - \{y,z\}$

$\mu^e_{s_D}(y) = 0,\;\; \mu^e_{s_D}(z) = \gamma$ ve $\mu^e_{s_D}(x) = 0 \quad \forall x \in X - \{y,z\}$

Açıktır ki; h_C ve s_D, f_A'nın FSC_2-bağlantısızıdır. □

Sonuç *[4]* Fuzzy esnek ayrık topolojik uzay üzerinde C_1-bileşenlerinin fuzzy esnek noktalarının değeri 1'dir.

$\beta_{\frac{1}{2}}$, (X,τ,E) fuzzy esnek topolojik uzay üzerindeki tüm fuzzy esnek noktalarının kümesi olsun. Tüm fuzzy esnek noktalarının kümesinin değeri $\frac{1}{2}$'den büyüktür.

Tanım 3.36 [4] *f_A, (X,τ,E) esnek fuzzy topolojik uzayı üzerinde bir fuzzy esnek küme olsun. f_A'yı kapsayan maksimum FSC_5-bağlantılı kümeye f_A'nın C_5-bileşeni denir.*

Not *[4]* Bir fuzzy esnek kümesinin C_5-bileşeni olmayabilir. Aşağıdaki örnek ile bunu görelim.

Örnek 3.37 [4] *$X = \{a,b\}$ ve $E = \{e_1,e_2\}$ olsun. Fuzzy esnek topolojik uzay tanımından X üzerinde,*
$\tau = \{\tilde{1}_E,\tilde{0}_E,\{(e_1,\{a^{\frac{1}{2}}\}),(e_2,\{b^{\frac{1}{2}}\})\},\{(e_1,\{b^{\frac{1}{2}}\}),(e_2,\{a^{\frac{1}{2}}\})\},$
$\{(e_1,\{a^{\frac{1}{2}},b^{\frac{1}{2}}\}),(e_2,\{a^{\frac{1}{2}},b^{\frac{1}{2}}\})\}\}$ *alınabilir.* $f_A = \{(e_1,\{b^{0.7}\})\}$ *olsun.* $\{(e_1,\{b^{\frac{1}{2}}\})\}$*, f_A üzerinde boş olmayan uygun bir fuzzy esnek kümedir. Burada f_A, FSC_5-bağlantılı küme değildir. Ayrıca f_A'yı kapsayan hiçbir FSC_5-bağlantılı küme yoktur. Dolayısıyla f_A, C_5-bileşene sahip değildir.*

Teorem 3.38 [4] *(X,τ,E) bir fuzzy esnek topolojik uzay ve $x^e_\alpha \tilde{\in} FSP(X)_E$ olsun. Burada eğer; $0 \neq \beta < \alpha$ ve $f_A, g_B \in \tau$ var öyle ki $\mu^e_{f_A}(x) = \beta$ var ise x^e_α, FSC_5-bağlantılı değildir.*

İspat. x^e_α, FSC_5-bağlantılı olmasın. Burada x^e_α'yı kapsayan boş olmayan uygun bir x^e_β fuzzy esnek kümesi olsun. Dolayısıyla $f_A \sqcap x^e_\alpha = g_B \sqcap x^e_\alpha = x^e_\beta$ öyle ki $f_A \in \tau$, $g_B \in \tau^c$ olacak şekilde fuzzy esnek kümeleri vardır. $g_B \in \tau^c$ olduğundan burada $g_B \in \tau^c$ olduğundan $g^c_B \in \tau$ ve $\mu^e_{g^c_B}(x) = 1-\beta$ dır.

Aksine, $0 \neq \beta < \alpha$ öyle ki $f_A, g_B \in \tau$ var olması yeterlidir. $\mu^e_{f_A}(x) = \beta$ ve $\mu^e_{g_B}(x) = 1-\beta$'dır. Burada $g^c_B \in \tau^c$ ve $\mu^e_{g^c_B}(x) = \beta$'dır. Ayrıca, $f_A \sqcap x^e_\alpha = g^c_B \sqcap x^e_\alpha = x^e_\beta$ ve bu yüzden x^e_β, x^e_α üzerinde boş olmayan uygun bir fuzzy esnek kümedir. Dolayısıyla x^e_α, FSC_5-bağlantılı değildir. □

Not *[4]* (X,τ,E)'nin sadece C_5-bileşeni burada FSC_5-bağlantılı kümesi $\tilde{1}_E$ ise E_5 bir eşdeğer bağlantıdır.

Not *[4]* Eğer bir fuzzy esnek kümesinin C_5-bileşeni var ise o zaman fuzzy esnek kapalı olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.39 [4] *Bir önceki örnekte (X,τ,E) fuzzy esnek topolojik uzayını göz önünde bulundurulursa,*

$f_E = \{(e_1, \{a^{\frac{1}{2}}\}), (e_2, \{b^{\frac{1}{2}}\})\}$ *bir* FSC_5*-bağlantılı olduğunu gösterelim.* g_E*, f_E'yi kapsayan X'in bir fuzzy esnek alt kümesi olsun. Burada;*

$f_E \tilde{\subseteq} g_E = \{(e_1, \{a^{\alpha}, b^{\beta}\}), (e_2, \{a^{\gamma}, b^{\delta}\})\}$ *o zaman* $\alpha, \delta \geq \frac{1}{2}$ *ve* $\gamma, \beta \geq 0$ *dır.*

O zaman; $\gamma, \beta < \frac{1}{2}$ *ya da* $\gamma, \beta \geq \frac{1}{2}$*'ye göre* $\{(e_1, \{a^{\frac{1}{2}}, b^{\beta}\}), (e_2, \{a^{\gamma}, b^{\frac{1}{2}}\})$ *ya da* $\{(e_1, \{a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}\}), (e_2, \{a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}\})$, g_E *üzerinde boş olmayan uygun fuzzy esnek kümedir. Bu yüzden* g_E*,* FSC_5*-bağlantılı değildir. Dolayısıyla* f_E*'nin* C_5*-bileşeni fuzzy esnek kapalı değildir.*

KAYNAKLAR

[1] Çağman, N., Karataş, S., Enginoglu, S., 2011. Soft topology. **Comput. Math. Appl.,** 62: 351-358.

[2] Molodtsov, 1999. D. Soft set theory first results. **Comput. Math. Appl.,** 37: 19-31.

[3] Sanjoy Roy, T.K.Samanta, 2011.A note on fuzzy soft topolocigal spaces.**Ann.Fuzzy Math.Inform.,** 3:305-311.

[4] A.Kandil, O.A.El-Tantawy, S.A.El-Sheikh, Sawsan S.S.El-Sayed, 2017. Fuzzy soft connected sets in fuzzy soft topological spaces II. Pages 171-177.

[5] L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control 8 (1965) 338-353.

[6] M.Shabir, M.Naz, On soft topological spaces, Computers and Mathematics with Applications 61 (2001) 1786-1799.

[7] P.K.Maji, R.Biswas, A.R.Roy, Soft set theory, Comput. Math.Appl.45(2003) 555-562.

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Harun KIZILTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	AYDIN, 03.08.1989

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Dumlupınar Üniversitesi Fen Fak., Matematik Böl.
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl.

İŞ DENEYİMİ

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	hrnkzlts@gmail.com
Tarih	:	