T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-033

TÜREVLİ HALKALARIN DEĞİŞMELİLİĞİ ÜZERİNE

Gökşin GÜRBÜZ

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Hatice KANDAMAR

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Gökşin GÜRBÜZ tarafından hazırlanan "Türevli Halkaların Değişmeliliği Üzerine" başlıklı tez, 10.08.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

		Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan	:	Prof. Dr. Hatice KANDAMAR	AADÜ Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Prof. Dr.Nurcan ARGAÇ	EGEÜNV Fen-Ed. Fak.	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN	AADÜ Fen-Ed. Fak.	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim Kurulunun .... sayılı kararıyla .... tarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

10.08.2018

Gökşin GÜRBÜZ

ÖZET

TÜREVLİ HALKALARIN DEĞİŞMELİLİĞİ ÜZERİNE

Gökşin GÜRBÜZ

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hatice KANDAMAR
2018, 89 sayfa

Bu çalışmada, karakteristiği ikiden farklı olan asal halkalarda, Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal ve $(\sigma,\tau)-$ Jordan ideal içeren değişmelilik koşullarının bazılarına yer verilmiştir. Çalışma temel olarak 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu konuyla igili yapılan çalışmalar anlatılmıştır. İkinci bölümde, bu tezi anlamada ve okumada kolaylık sağlayacak bazı genel bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca çalışmada kullanılan kavram ve önemli sonuçlar yine bu bölümde yer almaktadır. Üçüncü bölümde türev ve $(\sigma,\tau)-$türevli halkalarda [3], [4] ve [5] çalışmaları incelenerek Lie ideal ve $(\sigma,\tau)-$Lie ideal içeren değişmelilik koşullarının bazıları incelenmiştir. Dördüncü bölümde türevli halkalarda $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideal içeren [11] ve [12] çalışmaları incelenerek değişmelilik koşullarına değinilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Asal halka, Türev, $(\sigma,\tau)-$ türev, Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Jordan ideal.

ABSTRACT

ON COMMUTATIVITY OF RINGS WITH DERIVATION

Gökşin GÜRBÜZ

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Hatice KANDAMAR
2018, 89 pages

In this study, Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal and $(\sigma,\tau)-$ Jordan ideal are given some commutativity conditions of the characteristic two of different prime rings. This study consists of 4 chapters. In the first chapter, information about the corresponding subject has been reviewed. In the second chapter, the general background which may help to make the understanding and the reading of this thesis easier is fixed. Further, the basic notions and the frequently used important results from the references take places in this chapter. In the third chapter, [3], [4] ve [5] studies by examining derivation and $(\sigma,\tau)-$ derivations with rings the conditions of commutativity of the rings. In the fourth chapter, derivations with rings $(\sigma,\tau)-$ right Jordan ideal including [11] ve [12] stduies by examining the conditions of commutativity of the rings.

Key Words: Prime ring ,Derivation, $(\sigma,\tau)-$Derivation, Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Jordan ideal.

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca, değerli bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, sabır ve sevgisini eksik etmeyen hocam Prof. Dr. Hatice KANDAMAR'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, zorlandığım dönemlerde benden desteğini esirgemeyen, hocam Dr. Öğr. Üyesi Okan ARSLAN'a (Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü) teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Yaşamım boyunca aldığım tüm kararlarda desteklerini esirgemeyen aileme, en çok da annem Suzan GÜRBÜZ'e bana olan güveni ve sabırı için ayrıca teşekkür ederim.

Gökşin GÜRBÜZ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

R	Asal halka
Z	Halka merkezi
$C_{\sigma,\tau}$	Halkanın (σ, τ) merkezi
$\in$	Eleman
$\notin$	Elemanı değil
$\varnothing$	Boş küme
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$\Rightarrow$	İse
$\forall$	Her
$\subset$	Kapsar
$\not\subset$	Kapsamaz
$\cup$	Birleşim
$ker f$	Halka çekirdeği
$<$	İdeal
$CharR$	R halkasının karakteritiği

1. GİRİŞ

Asal halkalarda türev tanımını ilk kez 1957 yılında E.C. Posner ortaya koymuştur. Posner (1957) bu çalışmasında, türevli asal halkaların türev içeren bazı koşullar altında değişmeliliğini incelemiştir. Günümüze kadar türev konusuyla ilgili pek çok çaılşmalar yapılmıştır. Bu konudaki ilk çalışmalar Herstein (1979); Giambruno ve Herstein (1981); P. H. Lee ve T. K. Lee (1981) tarafından yapılmıştır. [8], [16]
1957 yılında E. C. Posner, karakteristiği ikiden farklı olan bir R asal halkasında tanımlı d_1, d_2 türevleri için $d_1 d_2 = 0$ türev ise bu takdirde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu göstermiştir. [17]
I. N. Herstein 1978 yılında , R asal halkasındaki sıfırdan farklı d türevi için $d(R) \subset Z$ koşulu sağlandığı takdirde R halkasının değişmeli bir halka olduğunu ispatlamştır. Ayrıca R asal halkasında her $x, y \in R$ için $[d(x), d(y)] = 0$ ise, halkanın değişmeli olduğunu göstermiştir. [8]
P. H. Lee ve T. K. Lee 1981 yılında, R asal halkasında d_1, d_2 türevleri için hem $d_1 d_2(R) \subset Z$ iken hem de $[d(R), d(R)] \subset Z$ olduğu takdirde R halkasının değişmeli olduğunu ispatlamışlardır. [15]
1981 yılında J. Bergen, I.N Herstein ve J.W.Kerr tarafından, yukarıda verilen koşulları genelleştirmişlerdir. Yani d_1, d_2 R halkasının türevleri olmak üzere $d_1 d_2(U) = 0$ iken U idealinin merkez tafarından kapsandığı gösterilmiştir [6].
Yine I. N. Herstein'ın, 1979 yılında R asal halkasındaki bir a elemanı için $[d(R), a] = 0$, $([a, d(R)] = 0)$ koşulu sağlandığında, bu a elemanının R halkasının merkezine ait olduğunu göstermesinin ardından P.H.Lee ve T.K.Lee 1981 yılında, R asal halkasında $[a, d(R)] \subset Z$, $([d(R), a] \subset Z)$ ise $a \in Z$ olduğunu ispatlamışlardır. [8], [15] Aynı yıl, J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr, R halkasının merkezinde kapsanılmayan bir U Lie ideali için, $[a, d(U)] = 0$ iken bu sonucu genelleştirmişler. Ayrıca $[a, d(U)] \subset Z$ iken $a \in Z$ olduğu H. Lee ve T. K. Lee tarafından gösterilmiştir [6].

Daha sonra aynı yılda J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından, bu koşuldaki R yerine, R halkasının bir U ideali alınarak, U idealinin halkanın merkezine ait olduğu gösterildi. [6]

1991 yılında N. Aydın U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olmak üzere $[d(U),d(U)] \subset Z$ ise, $U \subset Z$ olduğunu göstermiştir.

2002 de M. Ashraf ve N.Rehman, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, d, R üzerinde bir (σ,τ)-türev ve $d\sigma = \sigma d$, $d\tau = \tau d$ iken, her $x,y \in U$ için $[d(x),d(y)] = 0$ iken halkanın değişmeli olduğunu ispatlamışlardır. [1]

Bu çalışmada, karakteristiği ikiden farklı olan asal halkalarda, Lie ideal, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal ve $(\sigma,\tau)-$ Jordan ideal içeren değişmelilik koşullarının bazılarına yer verilmiştir. Çalışma temel olarak 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu konuyla igili yapılan çalışmalar anlatılmıştır. İkinci bölümde, bu tezi anlamada ve okumada kolaylık sağlayacak bazı genel bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca çalışmada kullanılan kavram ve önemli sonuçlar yine bu bölümde yer almaktadır. Üçüncü bölümde 1992 yılında N. Aydın ve K Kaya, d_1 bir (σ,τ)-türev, d_2 bir türev olmak üzere, $d_1d_2(R) = 0$ iken $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olduğunu, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve d, R üzerinde bir (σ,τ)-türev iken

i) $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau} = 0$

ii)$[d(R),d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$

koşulları altında R halkasının değişmeli bir halka olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca R asal halkasında tanımlı bir d (σ,τ)-türevi için, $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ olduğu sonucunu buldu. 1995 yılında N. Aydın ve M. Soytürk, bu sonucu (σ,τ)-Lie ideal için ispatladı. [4], [5]

1993 yılında H. Kandamar ve K.Kaya hem $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ iken hem de $d(U) \subset Z$ iken R halkasının değişmeli olduğunu ispatlamışlardır. [11]

Dördüncü bölümde 1993 yılında K. Kaya, H. Kandamar ve N. Aydın, (σ,τ)-Jordan ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere U değişmeli ise R halkasının değişmeli olduğu, $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ iken R halkası değişmeli olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $U \not\subset Z$ ise U, R halkasının $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $(M,R)_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir M idealini kapsadığı ve $U \not\subset Z$ ise U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsadığı gösterilmiştir. [12]

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, bu çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılan temel tanım, teorem ve önermeler ayrıntıları ile verilecektir.

Tanım 2.0.1. [2] R boş olmayan bir küme ve "+" , "." R kümesi üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. Eğer R kümesi için

i) (R,+) değişmeli grup

ii) Her $a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$

iii) Her $a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab+bc$ ve $(b+c)a = ba+ca$

koşulları sağlanıyorsa R kümesine bu ikili işlemlere göre bir **halka** denir.

Tanım 2.0.2. [2] R bir halka ve S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. R halkasındaki işlemlere göre S kümesi bir halka ise bu kümeye R halkasının bir **alt halkası** denir.

Tanım 2.0.3. [2] (0) ve R, R halkasının alt halkalarıdır. Bunlara R halkasının **aşikar althalkaları** denir. Aşikar olmayan althalkalara R halkasının **özalt halkaları** denir.

Tanım 2.0.4. [2] R bir halka ve H, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer

i) Her $a,b \in H$ için $a-b \in H$

ii) Her $a \in H$, $r \in R$ için $ra \in H$ $(ar \in H)$

koşulları sağlanıyorsa H kümesine R halkasının bir **sol (sağ) ideali** denir. H, R halkasının hem sağ ideali , hem de sol ideali ise H kümesine R halkasının **iki yanlı ideali** denir.

Tanım 2.0.5. [2] R bir halka, P R halkasının kendisinden farklı ideali olsun. R halkasının her A,B ideali için $AB \subset P$ iken $A \subset P$ veya $B \subset P$ oluyorsa P idealine R halkasının **asal ideali** denir.

Tanım 2.0.6. [2] R bir halka, her $a,b \in R$ için $aRb = 0$ oluyorsa R halkasına **asal halka** denir.

Önerme 2.0.7. *R bir halka olsun. Bir G toplamsal grubu iki özalt grubun birleşimi olarak yazılamaz.*

İspat: A ve B, G toplamsal alt grubunun iki öz altgrubu olsun. $G = A \cup B$ olsun. $G = A$ veya $G = B$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım $G \neq A$ olsun. O zaman G=B olduğunu göstermeliyiz. $G \neq A$ olduğundan $x \in G$ ve $x \notin A$ olacak şekilde en az bir x elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $x \in B$ dir. B, G toplamsal grubunun alt grubu olduğundan $B \subset G$ olduğu açıktır. Acaba $G \subset B$ midir? $G \not\subset B$ olduğunu kabul edelim. O zaman G grubunun B alt grubunda olmayan bir y elemanı vardır. $G = A \cup B$ olduğundan $y \in A$ olur. Buradan $x + y \in B$ olur. Çünkü $x + y \notin B$ olsaydı $x + y \in A$ ve A toplamsal alt grup olduğundan $x \in A$ olurdu. Ancak $x \notin A$ olduğundan çelişki olur. Dolayısıyla $x \in B$ ve B toplamsal alt grup olduğundan $y \in B$ olur. Bu durum $y \notin B$ olmasıyla çelişir. O halde $G \not\subset B$ olmaz. Yani $G \subset B$ olur. Buradan $G \subset B$ ve $B \subset G$ olduğundan $G = B$ dir. Benzer şekilde $G \neq B$ iken $G = A$ olduğu görülür.

□

Önerme 2.0.8. *[2] R halka olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.*

i) *R asal halkadır.*

ii) *$a,b \in R$ için $aRb = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.*

iii) *R halkasının sıfırdan farklı her sağ idealinin sağ sıfırlayanı sıfırdır.*

iv) *R halkasının sıfırdan farklı her sol idealinin sol sıfırlayanı sıfırdır.*

Tanım 2.0.9. [4] R bir halka ve $d : R \to R$ dönüşüm olsun. Her $x,y \in R$ için

i) $d(x+y) = d(x) + d(y)$

ii) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanıyorsa d dönüşümüne R halkasının **türevi** denir.

Tanım 2.0.10. [2] R bir halka, her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde $n \in Z^+$ tam sayılarının en küçüğüne R halkasının **karakteristiği** denir. $CharR = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir pozitif tam sayı yoksa halkanın karekteristiği sıfırdır denir.

Tanım 2.0.11. [2] R bir halka olsun.

$$Z = \{ c \in R \mid cx = xc \quad \forall x \in R\}$$

kümesine R halkasının **merkezi** denir.

Tanım 2.0.12. [9] R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için

$$[x, y] = xy - yx$$

eşitliği ile gösterilen ifadeye **Lie komutatörü**,

$$(x, y) = xy + yx$$

eşitliği ile gösterilen ifadeye de **Jordan komütatörü** denir.

Tanım 2.0.13. [17] R bir halka ve $a \in R$ olsun. $I_a : R \to R$ her $x \in R$ için $I_a(x) = [a, x]$ ile tanımlanan I_a dönüşümüne R halkasının a elemanı tarafından üretilen **iç türevi** denir.

Tanım 2.0.14. [9] R bir halka ve U, R halkasının toplamsal alt grubu olsun. Her $r \in R$ ve $u \in U$ için

$$[u, r] \in U$$

ise U toplamsal alt grubuna R halkasının **Lie ideali** denir.

Tanım 2.0.15. [10], [12] R bir halka, σ ve τ R halkasının üzerinde tanımlı iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$[x, y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$$

eşitliğine (σ,τ)-**Lie komütatörü**,

$$(x,y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y)+\tau(y)x$$

eşitliğine de (σ,τ)-**Jordan komütatörü** denir.

Tanım 2.0.16. [12] R bir halka, U, R halkasının toplamsal bir alt grubu ve $\sigma,\tau : R \to R$ iki otomorfizma olsun.

i) $[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U toplamsal alt grubuna $(\sigma,\tau)-$**sağ Lie ideal** denir.

ii) $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U toplamsal alt grubuna $(\sigma,\tau)-$**sol Lie ideal** denir.

iii) U toplamsal alt grubu hem $(\sigma,\tau)-$ sağ Lie ideal ve hem de (σ,τ)-sol Lie ideal ise U toplamsal alt grubuna $(\sigma,\tau)-$**Lie ideal** denir.

Tanım 2.0.17. [12] R bir halka , U, R halkasının toplamsal bir alt grubu ve $\sigma,\tau : R \to R$ iki otomorfizma olsun.

i) $(U,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U toplamsal alt grubuna $(\sigma,\tau)-$**sağ Jordan ideal** denir.

ii) $(R,U)_{\sigma,\tau} \subset U$ ise U toplamsal alt grubuna $(\sigma,\tau)-$**sol Jordan ideal** denir.

iii) U toplamsal alt grubu hem $(\sigma,\tau)-$ sağ jordan ideal ve hem de (σ,τ)-sol Jordan ideal ise U toplamsal alt grubuna $(\sigma,\tau)-$**Jordan ideal** denir.

Tanım 2.0.18. [12] R bir halka olsun. $\{\, c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c \ \ \forall x \in R\}$ kümesine R halkasının $C_{\sigma,\tau}$ **merkezi** denir.

Tanım 2.0.19. [2] R ve S iki halka olsun. $f : R \to S$ bir dönüşüm olsun. Her $a,b \in R$ için

i) *f(a+b)=f(a)+f(b)*

ii) *f(ab)=f(a)f(b)*

koşulları sağlanıyorsa f dönüşümüne **halka homomorfizması** denir.

Eğer f halka homorfizması 1-1 ve örten ise f dönüşümüne **halka izomorfizması** denir.

$f : R \to R$ halka izomorfizmasına R halkasının **halka otomorfizması** denir.

Tanım 2.0.20. [2] R ve H iki halka ve $f : R \to H$ bir halka homomorfizması olsun.

$$ker f = \{\ a \in G \mid f(a) = e_h\}$$

eşitliği ile tanımlanan kümeye f halka homomorfizmasının **çekirdeği** denir.

Tanım 2.0.21. [12] R bir halka ve $d : R \to R$ toplamsal dönüşüm ve σ, τ R halkasının iki dönüşümü olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)\sigma(y) + \tau(x)d(y)$$

koşulu sağlanıyorsa d dönüşümüne $(\sigma, \tau)-$ **türev** denir.

Önerme 2.0.22. *R karekteristiği ikiden farklı bir asal halka olsun.*

$$b, ab \in Z \text{ ise } a \in Z \text{ veya } b = 0.$$

İspat: $b, ab \in Z$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $(ab)x = x(ab)$ eşitliği sağlanır. $b \in Z$ olduğundan son ifade

$$(ax)b = (xa)b$$

olmasını gerektirir. Buradan $(ax - xa)b = 0$ olduğu görülür. Bu $[a, x]b = 0$ olmasını gerektirir. Böylece her $r \in R$ için $[a, x]br = 0$ olur. Her $r \in R$ için $b \in Z$ olduğundan son eşitlikten $[a, x]rb = 0$ olur. Buradan $[a, x]Rb = 0$ elde edilir. R asal halka olduğundan son ifade

$$[a, x] = 0 \text{ veya } b = 0$$

olmasını gerektirir. O halde

$$a \in Z \text{ veya } b = 0$$

olur. □

Önerme 2.0.23. *[10] R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve d, $(\sigma, \tau)-$ türev olsun. O halde $d(U) = (0)$ ise $U \subset Z$ olur.*

Önerme 2.0.24. *[10] R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve* $(\sigma,\tau)-$ *türev olsun.* $U \not\subset Z$ *ve* $t \in R$ *olsun. O halde* $td(U) = (0)$ *veya* $(d(U)t = 0)$ *ise* $t = 0$ *ifadesi sağlanır.*

Önerme 2.0.25. *[10] R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve d,* $(\sigma,\tau)-$ *türev olsun. Bu durumda* $d(U) \subset Z$ *ise* $U \subset Z$ *olur.*

Önerme 2.0.26. *[10] R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve d ,* $(\sigma,\tau)-$ *türev* $a \in R$ *olsun. O zaman* $U \not\subset Z$ *ve* $[U,a] \subset Z$ *ise* $a \in Z$ *olur.*

Teorem 2.0.27. *[10] R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve d,* $(\sigma,\tau)-$ *türev olsun. O zaman* $[U,d(U)] \subset Z$ *ise* $U \subset Z$ *dır.*

Teorem 2.0.28. *[10] R asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve d,* $(\sigma,\tau)-$ *türev olsun.* $\sigma d = d\sigma$ $\tau d = d\tau$ *ve U,* $d(U) \subset U$ *olacak şekilde R halkasının lie ideali olsun. O halde* $d^2(U) = (0)$ *ise* $U \subset Z$ *olur.*

Önerme 2.0.29. *[12] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı* $(\sigma,\tau)-$ *Jordan ideali,* $d_1 : R \to R$, (σ,τ)*-türev ve* $d_2 : R \to R$, (α,α)*- türev,* $d_2\alpha = \alpha d_2$ *ve* $d_1\alpha = \alpha d_1$, $\alpha : R \to R$ *otomorfizma olsun. Eğer* $d_1 d_2(U) = 0$ *ve* $d_2(U) = 0$ *olacak şekilde R halkasının sıfırdan farklı U ideali varsa* $d_1 = 0$ *veya* $d_2 = 0$ *olur.*

Önerme 2.0.30. *R bir asal halka olsun. Her* $x,y,z \in R$ *için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

i) $[xy,z] = [x,z]y + x[y,z]$

ii) $[x,yz] = [x,y]z + y[x,z]$

iii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *Jacobi özdeşliği*

iv) $[x,y] = -[y,x]$

v) $[x,y+z] = [x,y] + [x,z]$

Önerme 2.0.31. *[4], [5], [10], [11], [12], R bir asal halka,* $\sigma,\tau : R \to R$ *halkasında iki dönüşüm olsun. Her* $x,y,z \in R$ *için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

i) $[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$

ii) $[x,yz]_{\sigma,\tau} = \tau(y)[x,z]_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

iii) $[xy,z]_{\sigma,\tau} = x[y,z]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(z)]y = x[y,\sigma(z)] + [x,z]_{\sigma,\tau}y$

iv) $[[x,y]_{\sigma,\tau},z] = [[x,z]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} + [x,[y,z]]_{\sigma,\tau}$

v) $[x-y,z]_{\sigma,\tau} = [x,z]_{\sigma,\tau} - [y,z]_{\sigma,\tau}$

vi) $d[x,y]_{\sigma,\tau} = [d(x),y]_{\sigma,\tau} + [x,d(y)]_{\sigma,\tau}$

vii) $(x,yz)_{\sigma,\tau} = \tau(y)(x,z)_{\sigma,\tau} + [x,y]_{\sigma,\tau}\sigma(z)$

viii) $(xy,z)_{\sigma,\tau} = x(y,z)_{\sigma,\tau} - [x,\tau(z)]y$

Önerme 2.0.32. *[3] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ Lie ideali, $d_1 \neq 0$ (σ,τ)-türev ve $d_2 \neq 0$ türev olsun. $d_1d_2(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ve $d_2(U) \subset U$ olacak şekilde R halksının sıfırdan farklı U ideali varsa R değişmelidir.*

Önerme 2.0.33. *[7] R yarı asal halka olsun. Her $x,y \in R$ ve $a \in R$ için $[a,[x,y]] = 0$ koşulu sağlanıyorsa $a \in Z$ olur.*

Sonuç 2.0.34. *[12] R asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)- Jordan ideali olsun. O halde $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset Z$ ise R halkası değişmelidir.*

Önerme 2.0.35. *[7] R bir yarı-asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı sağ ideali olsun. O zaman $Z(U) \subset Z(R)$ olur.*

Teorem 2.0.36. *[16] R bir asal halka, d R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun.$[d(U),d(U)] \subset Z$ ise $U \subset Z$ olur.*

Önerme 2.0.37. *[6] R bir asal halka, U, R halkasının Lie ideali ve d sıfırdan farklı bir türev olsun. O zaman $d(U) \subset Z$ ise $U \subset Z$ olur.*

Önerme 2.0.38. *[7] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı ideali ve $a \in R$ olsun. O halde $[U,a] = 0$ ise $a \in Z$ ifadesi sağlanır.*

Teorem 2.0.39. *[7] R bir asal halka d, sıfırdan farklı türev olmak üzere $d(R) \subset Z$ ise R halkası değişmelidir.*

Teorem 2.0.40. *R bir asal halka, d, R halkasının türevi olsun. O halde* $d_1d_2 = 0$ *ise* $d_1 = 0$ *veya* $d_2 = 0$ *ifadesi sağlanır.*

3. (σ,τ)-LİE İDEALLER VE BAZI DEĞİŞMELİLİK KOŞULARI

Bu bölümde H. Kandamar, N. Aydın, K. Kaya ve M. Soytürk'ün bazı çalışmaları incelenmiş ve bu çalışmalar kullanılarak, R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı ideali, d sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ türev olmak üzere,

i) $a \in R$ için $[d(U),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$

ii) $[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkasının değişmeli

iii) $[d(R),d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkasının değişmeli olduğu,

J, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$Lie ideali d, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ) türevi olmak üzere $J \not\subset Z$ ve $J \not\subset C_{\sigma,\tau}$ iken R halkasının $C_{\sigma,\tau}$ tarafından kapsanmayan fakat J içinde olan bir M idealinin var olduğu

I, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$lie ideali d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere,

vi) $d(I) \subset C_{\sigma,\tau}$ iken $I \subset Z$

v) $d^2(I) = 0$ iken $I \subset Z$ olduğu gösterilmiştir.

3.1. İdealler Ve (σ,τ)- Türevler

Bu kısımda aksi söylenmedikçe σ,τ R halkasının otomorfizması olarak alınacaktır.

Önerme 3.1.1. *[4] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı sağ ideali ve d, sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ türev olsun.*

$$d(U) = 0 \text{ } ise \text{ } d = 0.$$

İspat: $d(U) = 0$ olsun. Bu durumda U, R halkasının sağ ideali olduğundan her $u \in U$ ve $x \in R$ için $ux \in U$ olur. Bu durumda $d(ux) = 0$ olur. Burada Tanım 2.0.20 kullanılırsa

$0 = d(ux) = d(u)\sigma(x) + \tau(u)d(x)$

eşitlikleri sağlanır. Burada $d(u)=0$ olduğundan her $x\in R$ için

$$\tau(u)d(x)=0$$

olur. Böylece U sağ ideal olduğundan her $z\in R$ için $uz\in U$ olur. Buradan u yerine uz yazarak $\tau(uz)d(x)=\tau(u)\tau(z)d(x)=0$ eşitlikleri sağlanır. Buradan τ otomorfizma olduğundan $\tau(U)\tau(R)d(x)=0$ olur. $\tau(R)=R$, $\tau(U)\neq 0$ ve R halkasının asal olduğu kullanılırsa her $x\in R$ için $d(x)=0$ olduğu görülür. Bu ise $d=0$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.1.2. *[4] R bir asal halka d, sıfırdan farklı (σ,τ)- türev ve U, R halkasının sağ ideali olsun.*

$d(U)\subset Z$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: $d(U)\subset Z$ olsun. $U<_r R$ olduğundan her $u,v\in U$ ve $x\in R$ için $[x,d(uv)]=0$ olur. Burada türev Tanımını ve Önerme 2.0.30 *v* ve *ii* eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}0&=[x,d(uv)]\\&=[x,d(u)\sigma(v)+\tau(u)d(v)]\\&=[x,d(u)\sigma(v)]+[x,\tau(u)d(v)]\\&=[x,d(u)]\sigma(v)+d(u)[x,\sigma(v)]+[x,\tau(u)]d(v)+\tau(u)[x,d(v)].\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $d(u),d(v)\in Z$ olduğundan $[x,d(u)]\sigma(v)=0$ ve $\tau(u)[x,d(v)]=0$ olur. Böylece her $u,v\in U$ ve $x\in R$ için $d(u)[x,\sigma(v)]+[x,\tau(u)]d(v)=0$ elde edilir. $d(v)\in Z$ olduğundan

$$d(u)[x,\sigma(v)]+d(v)[x,\tau(u)]=0\ \forall u,v\in U ve\ x\in R \tag{3.1.1}$$

elde edilir. Son eşitlikte x yerine her $v\in U$ olmak üzere $x\sigma(v)$ yazılırsa ve Önerme 2.0.30 (i) kullanılırsa

$$0=d(u)[x\sigma(v),\sigma(v)]+d(v)[x\sigma(v),\tau(u)]$$

$$= d(u)([x,\sigma(v)]\sigma(v)+x[\sigma(v),\sigma(v)])+d(v)([x,\tau(u)]\sigma(v)+x[\sigma(v),\tau(u)])$$
$$= d(u)[x,\sigma(v)]\sigma(v)+d(v)[x,\tau(u)]\sigma(v)+d(v)x[\sigma(v),\tau(u)]$$

eşitlikleri elde edilir. Burada 3.1.1 eşitliği kullanılırsa her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$-d(v)[x,\tau(u)]\sigma(v)+d(v)[x,\tau(u)]\sigma(v)+d(v)x[\sigma(v),\tau(u)] = 0$$

olur. Buradan her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$d(v)x[\sigma(v),\tau(u)] = 0$$

elde edilir. Böylece

$$d(v)R[\sigma(v),\tau(u)] = 0$$

olduğu görülür. Son ifadeden R asal halka olduğundan her $u,v \in R$ için

$$d(v) = 0 \text{ veya } [\sigma(v),\tau(u)] = 0$$

elde edilir.

Şimdi $K = \{\ v \in U \mid d(v) = 0\ \}$ ve $L = \{\ v \in U \mid [\sigma(v),\tau(u)] = 0 \quad \forall u \in U\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L, U toplamsal grubunun altgruplarıdır ve $U = K \cup L$ olur. Bu, Önerme 2.0.7 den $K = U$ veya $L = U$ olmasını gerektirir. $U = K$ olamaz. Çünkü $U = K$ olursa $d = 0$ çelişki elde edilir. O zaman $U = L$ dir. Yani her $u,v \in U$ için

$$[\sigma(v),\tau(u)] = 0 \tag{3.1.2}$$

olur. Bu eşitlikte v yerine $w \in U$ olmak üzere $v\sigma^{-1}(\tau(w))$ yazılır ve Önerme 2.0.30 (i) kullanılırsa

$$0 = [\sigma(v\sigma^{-1}(\tau(w))),\tau(u)]$$
$$= [\sigma(v)\tau(w),\tau(u)]$$
$$= [\sigma(v),\tau(u)]\tau(w)+\sigma(v)[\tau(w),\tau(u)]$$

elde edilir. Burada 3.1.2 eşitliği göz önüne alınırsa son eşitlikten her $u,v,w \in U$ için

$$\sigma(v)[\tau(w),\tau(u)] = \sigma(v)\tau[w,u] = 0$$

elde edilir. U, R halkasının sağ ideali olduğundan her $z \in R$ için $vz \in U$ olur. Burada v yerine vz yazılırsa her $v \in U, z \in R$ için

$$\sigma(vz)\tau[w,u] = 0$$

elde edilir. Buradan σ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $v \in U, z \in R$ için $\sigma(v)\sigma(z)\tau[w,u] = 0$ elde edilir. Böylece $\sigma(R) = R$ olduğu kullanılırsa

$$\sigma(U)R\tau[w,u] = 0$$

olur. $\sigma(U) \neq 0$ ve R asal halka olduğundan her w,u$\in U$ için

$$\tau[w,u] = 0$$

olur. τ otomorfizma olduğundan

$$[w,u] = 0$$

olur. Böylece U değişmeli olur. Burada Önerme 2.0.35 kullanılırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür. □

Önerme 3.1.3. *[4] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, d sıfırdan farklı (σ,τ)- türev ve $a \in R$ olsun.*

$$ad(U) = 0 \ (d(U)a = 0) \ \textit{ise } a = 0 \textit{ veya } d = 0 \textit{ dır.}$$

İspat: $d \neq 0$, $a \in R$ ve $U < R$ olmak üzere $ad(U) = 0$ olsun. Bu durumda $U < R$ olduğu göz önüne alınırsa her u $\in U$ ve $x \in R$ için $ad(ux) = 0$ olur. d dönüşümünün σ,τ türev olduğu kullanılırsa son eşitlikten $a(d(u)\sigma(x)+\tau(u)d(x)) = ad(u)\sigma(x)+ a\tau(u)d(x) = 0$ olduğu görülür. Buradan $ad(u) = 0$ olduğundan her $u \in U$ için

$$a\tau(u)d(x) = 0$$

elde edilir. Buradan U sağ ideal olduğunda her $z \in R$ için $uz \in U$ olur. Burada u yerine uz yazarak

$$a\tau(uz)d(x) = 0$$

elde edilir. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $x, z \in R, u \in U$ için $a\tau(u)\tau(z)d(x) = 0$ olur. Böylece $a\tau(U)\tau(R)d(x) = 0$ elde edilir. Böylece $\tau(R) = R$ olması kullanılırsa $a\tau(U)Rd(x) = 0$ elde edilir. R halkasının asal olması ve $\tau(U) \neq 0$ olduğu kullanılırsa $a = 0$ veya her $x \in R$ için $d(x) = 0$ bulunur. Bu ise $a = 0$ veya $d = 0$ olmasını gerektirir. □

Önerme 3.1.4. *[4] R asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı ideali $d_1 : R \to R$ (σ, τ)-türev ve $d_2 : R \to R$ türev olsun. $d_1 d_2(R) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ ifadesi sağlanır.*

İspat: d_1, (σ, τ)- türevinin sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Türev tanımı ve (σ, τ) türev tanımı kullanılırsa her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= d_1 d_2(xy) \\
&= d_1(d_2(x)y + xd_2(y)) \\
&= d_1(d_2(x)y) + d_1(xd_2(y)) \\
&= d_1(d_2(x))\sigma(y) + \tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) + \tau(x)d_1 d_2(y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $d_1 d_2(x) = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in R$ için

$$\tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) = 0$$

olur. Böylece

$$\tau(d_2(x))d_1(y) = -d_1(x)\sigma(d_2(y)) \tag{3.1.3}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte x yerine $d_2(x)$ yazılırsa

$$\tau(d_2(d_2(x)))d_1(y) = -d_1(d_2(x))\sigma(d_2(y))$$

eşitliği elde edilir. Böylece her $x \in R$ için

$$\tau(d_2^2(x))d_1(y) = 0$$

olur. Önerme 3.1.3 den

$$\tau(d_2^2(x)) = 0 \text{ veya } d_1(y) = 0$$

olur. $d_1 \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ için

$$\tau(d_2^2(x)) = 0$$

olur. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $x \in R$ için

$$d_2^2(x) = 0 \tag{3.1.4}$$

elde edilir. $\tau(d_2(x))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(y)) = 0$ eşitliğinde x yerine $z \in R$ olmak üzere $xd_2(z)$ yazılırsa ve 3.1.3, 3.1.4 eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(d_2(xd_2(z)))d_1(y) + d_1(xd_2(z))\sigma(d_2(y)) \\
&= \tau(d_2(x)d_2(z) + xd_2^2(z))d_1(y) + (d_1(x)\sigma(d_2(z)) + \tau(x)d_1d_2(z))\sigma(d_2(y)) \\
&= \tau(d_2(x)d_2(z))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) \\
&= \tau(d_2(x))\tau(d_2(z))d_1(y) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) \\
&= -\tau(d_2(x))d_1(z)\sigma(d_2(y)) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) \\
&= d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) + d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y))
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan her $x, y, z \in R$ için

$$2d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$$

olur. Buradan R halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğu kullanırsa her $x, y, z \in R$ için

$$d_1(x)\sigma(d_2(z))\sigma(d_2(y)) = 0$$

elde edilir. Burada σ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $x, y, z \in R$ için

$$d_1(x)\sigma(d_2(z)d_2(y)) = 0$$

olur. Önerme 3.1.3 den ve $d_1 \neq 0$ olduğu kullanılırsa

$$\sigma(d_2(z)d_2(y)) = 0$$

elde edilir. σ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $z, y \in R$ için

$$d_2(z)d_2(y) = 0 \tag{3.1.5}$$

olduğu görülür. Bu ise her $z \in Z$ için

$$d_2(z)d_2(R) = 0$$

olmasını gerektirir. O halde her $z \in R$ için

$$d_2(z) = 0 \text{ veya } d_2(R) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $d_2 = 0$ olur. □

Teorem 3.1.5. *[4] R bir asal halka, d, sıfırdan farklı (σ, τ)-türev, U, R halkasının ideali ve $a \in R$ olsun.*

$$[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0 \textit{ ise } a \in Z$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $d \neq 0$, $U < R$ olmak üzere $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. Bu durumda her $u, v \in U$ için $[d(uv), a]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Buradan Önerme 2.0.31 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= [d(uv), a]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v), a]_{\sigma,\tau} \\
&= (d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v))\sigma(a) - \tau(a)(d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v)) \\
&= d(u)\sigma(v)\sigma(a) + \tau(u)d(v)\sigma(a) - \tau(a)d(u)\sigma(v) - \tau(a)\tau(u)d(v)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $u \in U$ için $d(u)\sigma(a) = \tau(a)d(u)$ olduğundan her $u, v \in U$ için

$$d(u)\sigma(v)\sigma(a) - d(u)\sigma(a)\sigma(v) + \tau(u)\tau(a)d(v) - \tau(a)\tau(u)d(v) = 0$$

olur. Böylece her $u, v \in U$ için

$$d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v) = 0 \qquad (3.1.6)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte $a \in U$ için v yerine va yazılırsa, Önerme 2.0.30 (i) ve 3.1.6 eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= d(u)\sigma([va,a]) + \tau([u,a])d(va) \\ &= d(u)\sigma([v,a]a + v[a,a]) + \tau([u,a])(d(v)\sigma(a) + \tau(v)d(a)) \\ &= d(u)\sigma([v,a])\sigma(a) + \tau([u,a])d(v)\sigma(a) + \tau([u,a])\tau(v)d(a) \\ &= d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v)\sigma(a) + \tau([u,a])\tau(v)d(a) \\ &= \tau([u,a])\tau(v)d(a) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan her $u, v \in U$ için

$$\tau([u,a])\tau(v)d(a) = 0$$

olur. Burada v yerine $y \in R$ olmak üzere vy alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau([u,a])\tau(vy)d(a) \\ &= \tau([u,a])\tau(v)\tau(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\tau([u,a])\tau(v)\tau(R)d(a) = 0$$

olur. $\tau(R) = R$ ve R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$\tau([u,a])\tau(v) = 0 \text{ veya } d(a) = 0$$

olur. Buradan U ideal olduğundan her $z \in R$ için zv yazılırsa $\tau([u,a])\tau(zv) = \tau([u,a])\tau(z)\tau(v) = 0$ elde edilir. Böylece $\tau([u,a])\tau(R)\tau(v) = 0$ elde edilir. Buradan $\tau(R) = R$, $\tau(U) \neq 0$ ve R halkasının asal halka olduğu kullanılırsa

$$\tau([u,a]) = 0 \text{ veya } d(a) = 0$$

olur. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $u \in U$ için

$$[u,a] = 0 \text{ veya } d(a) = 0$$

olur. Böylece

$$[U,a] = 0 \text{ veya } d(a) = 0$$

olur. Eğer $[U,a] = 0$ ise Önerme 2.0.38 den $a \in Z$ dır. $d(a) = 0$ ise her $u \in U$ için

$$\begin{aligned}
\text{d([u,a])} &= d(ua - au) \\
&= d(ua) - d(au) \\
&= d(u)\sigma(a) + \tau(u)d(a) - d(a)\sigma(u) - \tau(a)d(u) \\
&= d(u)\sigma(a) - \tau(a)d(u) - (d(a)\sigma(u) - \tau(u)d(a)) \\
&= [d(u),a]_{\sigma,\tau} - [d(a),u]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[d(u),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ve $d(a) = 0$ olduğundan her $u \in U$ için

$$d([u,a]) = 0$$

olduğu görülür. Bu ise

$$d([U,a]) = 0 \tag{3.1.7}$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan 3.1.6 eşitliğinde v yerine $w \in U$ olmak üzere vw yazılır ve Önerme 2.0.30 (i) ve 3.1.6 eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d(u)\sigma([vw,a]) + \tau([u,a])d(vw) \\
&= d(u)\sigma([v,a]w + v[w,a]) + \tau([u,a])(d(v)\sigma(w) + \tau(v)d(w)) \\
&= d(u)\sigma([v,a]w) + d(u)\sigma(v[w,a]) + \tau([u,a])d(v)\sigma(w) + \tau([u,a])\tau(v)d(w) \\
&= d(u)\sigma([v,a])\sigma(w) + d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])d(v)\sigma(w) + \tau([u,a])\tau(v)d(w) \\
&= d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w) + (d(u)\sigma([v,a]) + \tau([u,a])d(v))\sigma(w) \\
&= d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece her $u,v,w \in U$ için

$$d(u)\sigma(v)\sigma([w,a]) + \tau([u,a])\tau(v)d(w) = 0 \qquad (3.1.8)$$

olur. Son eşitlikte w yerine *[w,a]* yazılırsa

$$d(u)\sigma(v)\sigma[[w,a],a] + \tau([u,a])\tau(v)d([w,a]) = 0$$

elde edilir. Buradan son eşitlikte 3.1.7 eşitliği kullanılırsa her $u,v,w \in U$ için

$$d(u)\sigma(v)\sigma([[w,a],a]) = 0$$

elde edilir. Burada U ideal olduğundan her $z \in R$ için $vz \in U$ olur. Buradan v yerine her $z \in R$ olmak üzere vz yazılırsa her $u,v,w \in U$ için $d(u)\sigma(vz)\sigma([[w,a],a]) = d(u)\sigma(v)\sigma(z)\sigma([[w,a],a]) = 0$ elde edilir. Buradan $d(u)\sigma(U)\sigma(R)\sigma([[w,a],a]) = 0$ olur. Böylece $\sigma(R) = R$, $\sigma(U) \neq 0$ ve R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$d(u) = 0 \text{ veya } \sigma([[w,a],a]) = 0$$

olduğu görülür. σ dönüşümü otomorfizma olduğundan

$$d(u) = 0 \text{ veya } [[w,a],a] = 0$$

olur. $d(u) \neq 0$ olduğundan

$$[[w,a],a] = [a,[a,w]] = 0$$

olur. Buradan her $w \in U$ için

$$[a,[a,w]] = 0$$

elde edilir. Böylece

$$I_a I_a(U) = I_a^2(U) = 0$$

olduğu görülür. Önerme 3.1.4 kullanılırsa $I_a = 0$ olur. Önerme 2.0.38 den $a \in Z$ olur. $\square$

Teorem 3.1.6. *[4] R bir asal halka, d sıfırdan farklı, (σ,τ)-türev ve U, R halkasının ideali olsun.*

$$[d(U),d(U)]_{\sigma,\tau} = 0 \text{ ise } R \text{ halkası değişmelidir.}$$

İspat: Teorem 3.1.5 den a yerine *d(U)* alınırsa $d(U) \subset Z$ olur. Burada Önerme 3.1.2 kullanırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür. $\square$

Önerme 3.1.7. *[4] R bir asal halka, d sıfırdan farklı (σ,τ)-türev, U, R halkasının ideali ve $a \in R$ olsun.*

$$ad(U) \subset C_{\sigma,\tau} \text{ ise } a = 0 \text{ veya } R \text{ halkası değişmelidir.}$$

İspat: $a \in R$, $d \neq 0$ (σ,τ)-türev, $U < R$ ve $ad(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Şimdi $a \in Z$ olduğunu göstereceğiz. $a \neq 0$ ve $a \notin Z$ olduğunu varsayalım. τ otomorfizma olduğundan $b = \tau^{-1}(a)$ $(a = \tau(b))$ olacak şekilde en az $b \in R$ vardır. $U < R$ olduğundan $ub \in U$ ve hipotezden $ad(ub) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu durumda $\tau(b) = a$, Önerme 2.0.31 (iii), Tanım 2.0.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= [ad(ub),b]_{\sigma,\tau} \\
&= a[d(ub),b]_{\sigma,\tau} + [a,\tau(b)]d(ub) \\
&= a[d(ub),b]_{\sigma,\tau} \\
&= a(d(ub)\sigma(b) - \tau(b)d(ub)) \\
&= a(d(u)\sigma(b) + \tau(u)d(b))\sigma(b) - \tau(b)(d(u)\sigma(b) - \tau(u)d(b)) \\
&= ad(u)\sigma(b)\sigma(b) + a\tau(u)d(b)\sigma(b) - aad(u)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(u)d(b)
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Son eşitlikte $ad(u) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $b \in R$ için $ad(u)\sigma(b) = \tau(b)ad(u)$ olduğu kullanılırsa

$$0 = aad(u)\sigma(b) + a\tau(u)d(b)\sigma(b) - aad(u)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(u)d(b)$$

$$= a\tau(u)d(b)\sigma(b) - a\tau(b)\tau(u)d(b)$$
$$= [a\tau(u)d(b), b]_{\sigma,\tau}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece her $u \in U$ için

$$[a\tau(u)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.1.9}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte her $v \in U$ için u yerine $\tau^{-1}(d(v))u$ yazılısa

$$[a\tau(\tau^{-1}(d(v))u)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği düzenlediğimizde her $u, v \in U$ için

$$[ad(v)\tau(u)d(b), b]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.1.10}$$

olduğu görülür. 3.1.9 eşitliğinde u yerine her $w \in U$ olmak üzere $u\tau^{-1}(ad(v))w$ yazılır ve 3.1.10 eşitliği ile Önerme 2.0.31 (iii) kullanılırsa

$$0 = [a\tau(u\tau^{-1}(ad(v))w)d(b), b]_{\sigma,\tau}$$
$$= [a\tau(u)ad(v)\tau(w)d(b), b]_{\sigma,\tau}$$
$$= a\tau(u)[ad(v)\tau(w)d(b), b]_{\sigma,\tau} + [a\tau(u), \tau(b)]ad(v)\tau(w)d(b)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece her $u, v, w \in U$ için

$$[a\tau(u), a]ad(v)\tau(w)d(b) = 0$$

olduğu görülür. Burada U,R halkasının sıfırdan farklı ideali olduğundan her $z \in R$ için $zw \in U$ olur. Yani her $u, v, w \in U, z \in R$ için $[a\tau(u), a]ad(v)\tau(zw)d(b) = [a\tau(u), a]ad(v)\tau(z)\tau(w)d(b) = 0$ olur. Böylece

$$[a\tau(u), a]ad(v)\tau(R)\tau(U)d(b) = 0$$

Buradan $\tau(R) = R$, $\sigma(U) \neq 0$ ve R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$[a\tau(u), a]ad(v) = 0 \text{ veya } d(b) = 0$$

olduğu görülür. Hipotezden her $x \in R$ için $ad(v)\sigma(x) = \tau(x)ad(v)$ olduğunu biliyoruz. Son eşitlik her $x \in R$ için $\sigma(x)$ ile çarpılırsa her $u, v \in U$ için

$$[a\tau(u), a]ad(v)\sigma(x) = 0 \text{ veya } d(b) = 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan her $x \in R$ için

$$[a\tau(u), a]\tau(x)ad(v) = 0 \text{ veya } d(b) = 0$$

olur. Buradan

$$[a\tau(u), a]\tau(R)ad(v) = 0 \text{ veya } d(b) = 0$$

elde edilir. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan son ifade

$$[a\tau(u), a]Rad(v) = 0 \text{ veya } d(b) = 0$$

olmasını gerektirir. Burada R halkasının asal olması kullanılırsa

$$[a\tau(u), a] = 0 \text{ veya } ad(v) = 0 \text{ veya } d(b) = 0$$

elde edilir. Eğer her $u \in U$ için $[a\tau(u), a] = 0$ ise u yerine her $v \in U$ olmak üzere uv yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [a\tau(u)\tau(v), a] \\ &= [a\tau(u), a]\tau(v) + a\tau(u)[\tau(v), a] \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $[a\tau(u), a] = 0$ olduğundan her $v \in U$ için

$$a\tau(u)[\tau(v), a] = 0$$

olduğu görülür. Buradan U, R halkasının sıfırdan farklı ideali olduğundan her $t \in R$ için $ut \in U$ olur. Buradan u yerine ut yazılırsa her $u, v \in U$ ve $t \in R$

için $a\tau(ut)[\tau(v),a] = a\tau(u)\tau(t)[\tau(v),a] = 0$ olur. Böylece $a\tau(U)\tau(R)[\tau(v),a] = 0$ olmasını gerektirir. Buradan $\tau(R) = R$, $\tau(U) \neq 0$ ve R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$a = 0 \text{ veya } [\tau(v),a] = 0$$

olur. Kabulumuzden $a \neq 0$ olduğundan

$$[\tau(U),a] = 0$$

olur. Önerme 2.0.38 den $a \in Z$ olur. Bu durum $a \notin Z$ olması ile çelişir.
Eğer her $v \in U$ için $ad(v) = 0$ ise Önerme 3.1.3 kullanılırsa

$$a = 0 \text{ veya } d = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durum $a \neq 0$ ve $d \neq 0$ olması ile çelişir. Eğer $d(b) = 0$ ise bu durumda $\tau(b) = a$ ve $d(b) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa ve tanım 2.0.20 kullanılırsa her $u \in U$ için

$$\begin{aligned} d(bu) &= d(b)\sigma(u) + \tau(b)d(u) \\ &= ad(u) \in C_\sigma, \tau \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan her $u \in U$ için

$$d(bu) \in C_{\sigma,\tau}$$

olur. Diğer yandan hipotezden her $u \in U$ için $ad(bu) \in C_{\sigma,\tau}$ idi. Önerme 3.3.1 den

$$a \in Z \text{ veya } d(bu) = 0$$

olur. Bu durum $a \notin Z$ olduğundan $d(bu) = ad(u) = 0$ olmasını gerektirir. Burada Önerme 3.1.3 kullanılırsa $a = 0$ veya $d = 0$ olur. Bu da $a \neq 0$ve $d \neq 0$ olması ile çelişir. Bu yüzden kabulümüz yanlıştır. $a \in Z$ dır.
Şimdi $a \in Z$ ile birlikte $ad(u) \in C_{\sigma,\tau}$ düşünelim. Her $x \in R$ ve $u \in U$ için

$$ad(u)\sigma(x) = \tau(x)ad(u)$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$a[d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. Son eşitlik her $y \in R$ olmak üzere y ile çarpılırsa

$$ya[d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. $a \in Z$ olduğundan her $y \in R$ olmak üzere

$$ay[d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. Böylece

$$aR[d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. R asal halka olduğundan son eşitlik her $x \in R$, $u \in U$ için

$$a = 0 \text{ veya } [d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$$

olmasını gerektirir. $a \neq 0$ olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[d(u),x]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Teorem.3.1.5 kullanılırsa $x \in Z$ elde edilir. Böylece ispat biter.

□

Önerme 3.1.8. *[4] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, d sıfırdan farklı (σ,τ)-türev ve $a \in R$ olsun. O zaman $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ olur.*

İspat: $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. $a \notin Z$ olduğunu varsayalım. Hipotezden $[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ dır. Bu durumda Önerme 2.0.31 (i), Tanım 2.0.20 ve Önerme 2.0.31 (ii) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
[d(a^2),a]_{\sigma,\tau} &= d(a^2)\sigma(a) - \tau(a)d(a^2) \\
&= (d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a))\sigma(a) - \tau(a)(d(a)\sigma(a) + \tau(a)d(a))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d(a)\sigma(a)\sigma(a)+\tau(a)d(a)\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma(a)-\tau(a)\tau(a)d(a)\\
&= [d(a),a^2]_{\sigma,\tau}\\
&= \tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}+[d(a),a]_{\sigma,\tau}\tau(a)\\
&= 2\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$2\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$$

olduğu görülür. Karakteristik 2 den farklı olduğundan

$$\tau(a)[d(a),a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$$

olur. Önerme 3.3.1 kullanılırsa

$$\tau(a)\in Z \text{ veya } [d(a),a]_{\sigma,\tau}=0$$

olduğu görülür. Böylece $a\notin Z$ olduğundan

$$[d(a),a]_{\sigma,\tau}=0 \quad \forall a\in R \tag{3.1.11}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan $[d(R),a]_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $x\in R$ için $[d([a,x]),a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada Önerme 2.0.31 (i), Tanım 2.0.8 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
[d([a,x]),a]_{\sigma,\tau} &= d([a,x])\sigma(a)-\tau(a)d([a,x])\\
&= d(ax-xa)\sigma(a)-\tau(a)d(ax-xa)\\
&= (d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x)-d(x)\sigma(a)-\tau(x)d(a))\sigma(a)\\
&\text{-}\tau(a)(d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x)-d(x)\sigma(a)-\tau(x)d(a))\\
&= d(a)\sigma(x)\sigma(a)+\tau(a)d(x)\sigma(a)-d(x)\sigma(a)\sigma(a)\\
&\text{-}\tau(x)d(a)\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma(x)-\tau(a)\tau(a)d(x)\\
&+\tau(a)d(x)\sigma(a)+\tau(a)\tau(x)d(a)\\
&= (d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a))\sigma(a)-\tau(a)(d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-((d(x)\sigma(a)-\tau(a)d(x))\sigma(a)-\tau(d(x)\sigma(a)-\tau(a)d(x)))\\
&=[d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a),a]_{\sigma,\tau}-[d(x)\sigma(a)-\tau(a)d(x),a]_{\sigma,\tau}\\
&=[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}-[[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Bu eşitlik düzenlenirse her $x\in R$ için

$$[d([a,x]),a]_{\sigma,\tau}=[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}-[[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $[d([a,x]),a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau}$ ve $[[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}=0$ olduğu kullanılırsa her $x\in R$ için

$$[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}\in C_{\sigma,\tau} \tag{3.1.12}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte x yerine ax yazılır, 3.1.11 eşitliği ve Önerme 2.0.31 (ii) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
[[d(a),ax]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}&=[\tau(a)[d(a),x]_{\sigma,\tau}+[d(a),a]_{\sigma,\tau}\sigma(x),a]_{\sigma,\tau}\\
&=[\tau(a)[d(a),x],a]_{\sigma,\tau}\\
&=[\tau(a)(d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a)),a]_{\sigma,\tau}\\
&=[\tau(a)d(a)\sigma(x)-\tau(a)\tau(x)d(a),a]_{\sigma,\tau}\\
&=(\tau(a)d(a)\sigma(x)-\tau(a)\tau(x)d(a))\sigma(a)\\
&-\tau(a)(\tau(a)d(a)\sigma(x)-\tau(a)\tau(x)d(a))\\
&=\tau(a)d(a)\sigma(x)\sigma(a)-\tau(a)\tau(x)d(a)\sigma(a)\\
&-\tau(a)\tau(a)d(a)\sigma(x)+\tau(a)\tau(a)\tau(x)d(a)\\
&=\tau(a)((d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a)\sigma(a))\\
&-\tau(a)(d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a)))\\
&=\tau(a)[d(a)\sigma(x)-\tau(x)d(a),a]_{\sigma,\tau}\\
&=\tau(a)[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Buradan

$$[[d(a),ax]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}=\tau(a)[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}$$

eşitliği elde edilir. $[[d(a),ax]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan son etşitlik her $x \in R$ için

$$\tau(a)[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau} \tag{3.1.13}$$

olmasını gerektirir. Burada Önerme 3.3.1 kullanılırsa

$$\tau(a) \in Z \text{ veya } [[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. $\tau(a) \in Z$ ise $a \in Z$ olur. Ancak $a \notin Z$ kabul ettiğimizden her $x \in R$ için

$$[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.1.14}$$

olduğu görülür. Son eşitliğe Önerme 2.0.31 (iv) den

$$0 = -[[d(a),x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [d(a),[a,x]]_{\sigma,\tau} + [[d(a),a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau}$$

olur. Burada 3.1.14 ve 3.1.11 eşitlikleri kullanılırsa

$$[d(a),[a,x]]_{\sigma,\tau} = 0 \quad \forall x \in R \tag{3.1.15}$$

eşitliği elde edilir. a tarafından üretilen iç türev $I_a(x) = [a,x]$ ve *d(a)* tarafından üretilen (σ,τ)-türevin iç türev $I_{d(a)}(x) = [d(a),x]_{\sigma,\tau}$ olmak üzere 3.1.15 ten her $x \in R$ için

$$I_{d(a)}I_a(R) = 0$$

olduğu görülür. Burada Önerme 3.1.4 kullanılırsa

$$I_{d(a)} = 0 \text{ veya } I_{(a)} = 0$$

olur. Eğer $I_{d(a)} = 0$ ise her $x \in R$ için $[d(a),x]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Bu durum $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olmasını gerektirir. Eğer $I_{(a)} = 0$ ise her $x \in R$ için $[a,x] = 0$ olur. Bu da $a \in Z$ olmasını gerektirir. Bu $a \notin Z$ kabulümüzle çelişir. Buradan $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Diğer yandan $[d(R),a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ idi. Her $x \in R$ için $[d(ax),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada Tanım 2.0.20 ve Önerme 2.0.31 (i) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
[d(ax),a]_{\sigma,\tau} &= [d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x),a]_{\sigma,\tau} \\
&= (d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x))\sigma(a)-\tau(a)(d(a)\sigma(x)+\tau(a)d(x)) \\
&= d(a)\sigma(x)\sigma(a)+\tau(a)d(x)\sigma(a)-\tau(a)d(a)\sigma(x)-\tau(a)\tau(a)d(x)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Burada $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d(a)\sigma(a) = \tau(a)d(a)$ dır. Son eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
[d(ax),a]_{\sigma,\tau} &= d(a)\sigma(ax)+\tau(a)d(x)\sigma(a)-d(a)\sigma(ax)-\tau(a)\tau(a)d(x) \\
&= d(a)\sigma([x,a])+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece her $x \in R$ için

$$d(a)\sigma([x,a])+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau} \tag{3.1.16}$$

olduğu görülür. Buradan $[d(a)\sigma([x,a])+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} = 0$ elde edilir. 3.1.16 eşitliğinde $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$, $[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ ve Önerme 2.0.31 (i) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= [d(a)\sigma([x,a])+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} \\
&= (d(a)\sigma([x,a])+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau})\sigma(a) \\
&\quad -\tau(a)(d(a)\sigma([x,a])+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(a)\sigma([x,a])\sigma(a)+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) \\
&\quad -\tau(a)d(a)\sigma([x,a])-\tau(a)\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \\
&= d(a)\sigma([x,a])\sigma(a)+\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) \\
&\quad -d(a)\sigma(a)\sigma([x,a])-\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau}\sigma(a) \\
&= d(a)(\sigma([x,a])\sigma(a)-\sigma(a)\sigma([x,a])) \\
&= d(a)\sigma([x,a]a-a[x,a]) \\
&= d(a)\sigma([[x,a],a])
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece her $x \in R$ için

$$d(a)\sigma([[x,a],a]) = 0$$

olur. Her $x \in R$ için son eşitlik $\tau(x)$ ile çarpılırsa

$$\tau(x)d(a)\sigma([[x,a],a]) = 0$$

elde edilir. Burada $d(a) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu göz önüne alınırsa her $x \in R$ için

$$d(a)\sigma(x)\sigma([[x,a],a]) = 0$$

olduğu görülür. Böylece

$$d(a)\sigma(R)\sigma([[x,a],a]) = 0$$

olur. Buradan $\sigma(R) = R$ ve R halkasının asal olması kullanılırsa

$$d(a) = 0 \text{ veya } [[x,a],a] = [a,[a,x]] = 0$$

ifadesi elde edilir. Eğer $[a,[a,x]] = 0$ ise her $x \in R$ için $I_a I_a(x) = 0$ olur. Yani $I_a^2 = 0$ dır. Buradan Teorem 2.0.40 kullanılırsa her $I_a = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $a \in Z$. Bu durum kabulumuzle çelişir. Eğer $d(a) = 0$ ise 3.1.16 eşitliğinden her $x \in R$ için

$$\tau(a)[d(x),a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

olur. Burada Önerme 3.3.1 kullanılırsa

$$\tau(a) \in Z \text{ veya } [d(x),a]_{\sigma,\tau} = 0$$

olduğu görülür. Teorem 3.1.5 den $[d(x),a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ olur. Bu durum kabulumuzle çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır yani $a \in Z$ olur. □

Teorem 3.1.9. *[4] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve d sıfırdan farklı* (σ,τ)*- türevi olsun.*

$$[d(R),d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \textit{ ise R değişmelidir.}$$

İspat: Önerme 3.1.8 kullanılarak a yerine *d(R)* alınırsa $d(R) \subset Z$ olur. $d(R) \subset Z$ ise Önerme 3.1.2 den R halkası değişmelidir. □

3.2. (σ,τ)-Lie İdealler Ve (σ,τ)-Türevler

Önerme 3.2.1. *[3] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)- sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. $[U,a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.*

İspat: $[U,a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. $a \notin Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda U, (σ,τ)-Lie idealinin $C_{\sigma,\tau}$ içinde olmayan sıfırdan farklı bir u elemanı vardır. Bu durumda hipotezden $[u,a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu ise her $x \in R$ için $[[u,a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece son eşitlikte Önerme 2.0.31 (iv) kullanılırsa

$$0 = [[u,a]_{\sigma,\tau},x]_{\sigma,\tau} = [[u,x]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau} + [u,[a,x]]_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Diğer taraftan U, (σ,τ)-Lie ideal olduğundan $[u,x]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğu göz önüne alınırsa hipotezden $[[u,x],a]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. O halde eşitlikten

$$[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Bu ifade I_u, u ile üretilen $(\sigma,\tau)-$türev, I_a, a ile üretilen türev olmak üzere her $x \in R$ için

$$I_u I_a(x) = [u,[a,x]]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

olmasını gerektirir. Buradan

$$I_u I_a(R) \subset C_{\sigma,\tau}$$

olur. Burada Önerme 2.0.32 kullanılırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür. R halkası değişmeli ise $I_a = 0$ veya $I_u = 0$ olmasını gerektirir. Buradan $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Bu ise varsayımımızla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. □

Önerme 3.2.2. *[3] R bir asal halka, U, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal, $a \in R$ ve $aU = 0$ $(Ua = 0)$ olsun.*

i) *$[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise $a = 0$ veya $U \subset Z$*

ii) *$[U,R]_{\sigma,\tau} \subset U$ ise $a = 0$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$*

İspat: i) $[R,U]_{\sigma,\tau} \subset U$ olsun. Bu durumda hipotezden $aU = 0$ olduğu kullanılırsa her $x,y \in R,\ u \in U$ için $a[xy,u]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Böylece Önerme 2.0.31 (iii) den

$$0 = a[xy,u]_{\sigma,\tau} = ax[y,\sigma(u)] + a[x,u]_{\sigma,\tau}\, y$$

eşitliği elde edilir. Buradan U, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal olduğundan $[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur ve hipotezden $aU = 0$ olduğu kullanılırsa

$$a[x,u]_{\sigma,\tau} = 0$$

olduğundan her $x,y \in R,\ u \in U$ için

$$ax[y,\sigma(u)] = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$aR[y,\sigma(U)] = 0$$

olmasını gerektirir. Burada R halkasının asal olduğu kullanılırsa

$$a = 0 \text{ veya } [R,\sigma(U)] = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece σ dönüşümü otomorfizma olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } [R,U] = 0$$

olur. Buradan $U \subset Z$ olur.

ii) Benzer şekilde ispat edilir. □

Teorem 3.2.3. *[3] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ sağ Lie ideali ve $a \in R$ olsun. O halde $[U,a] = 0$ ise $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.*

İspat: $[U,a] = 0$ olsun. U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ lie ideali olduğundan her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[u,x]_{\sigma,\tau} \in U$ olmasını gerektirir. Böylece hipotezden $x \in R$ ve $u \in U$ için $[[u,x]_{\sigma,\tau}, a] = 0$ olduğu görülür. Burada Önerme 2.0.31 (i), Önerme 2.0.30 (i) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= [[u,x]_{\sigma,\tau}, a] \\
&= [u\sigma(x)-\tau(x)u, a] \\
&= (u\sigma(x)-\tau(x)u)a - a(u\sigma(x)-\tau(x)u) \\
&= u\sigma(x)a - \tau(x)ua - au\sigma(x) + a\tau(x)u \\
&= [u\sigma(x), a] - [\tau(x)u, a] \\
&= [u,x]\sigma(x) + u[\sigma(x),a] - [\tau(x),a]u - \tau(x)[u,a] \\
&= u[\sigma(x),a] - [a,\tau(x)]u
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan her $x \in R, u \in U$ için

$$u[\sigma(x),a] = [\tau(x),a]u \tag{3.2.17}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte x yerine $y \in R$ olmak üzere xy yazılır ve Önerme 2.0.30 (i) ve 3.2.17 eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= u[\sigma(xy),a] - [\tau(xy),a]u \\
&= u[\sigma(x)\sigma(y),a] - [\tau(x)\tau(y),a]u \\
&= u([\sigma(x),a]\sigma(y) + \sigma(x)[\sigma(y),a]) - ([\tau(x),a]\tau(y) + \tau(x)[\tau(y),a])u \\
&= u[\sigma(x),a]\sigma(y) + u\sigma(x)[\sigma(y),a] - [\tau(x),a]\tau(y)u - \tau(x)[\tau(y),a]u \\
&= u\sigma(x)[\sigma(y),a] - \tau(x)u[\sigma(y),a] + [\tau(x),a]u\sigma(y) - [\tau(x),a]\tau(y)u \\
&= (u\sigma(x)-\tau(x)u)[\sigma(y),a] + [\tau(x),a](u\sigma(y)-\tau(y)u)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece her $u \in U, x \in R$ için

$$[u,x]_{\sigma,\tau}[\sigma(y),a] + [\tau(x),a][u,y]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.2.18}$$

olur. Son eşitlikte y yerine $\sigma^{-1}(a)$ yazılırsa

$$[u,x]_{\sigma,\tau}[a,a] + [\tau(x),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$$

eşitliği elde edilir. Yani

$$[\tau(x),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. Son eşitlikte $y \in R$ için x yerine xy yazılır, Önerme 2.0.30 (i) ve son eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= [\tau(x)\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]\\ &= ([\tau(x),a]\tau(y)+\tau(x)[\tau(y),a])[u,\sigma^{-1}(a)]\\ &= [\tau(x),a]\tau(y)[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}+\tau(x)[\tau(y),a][u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}\\ &= [\tau(x),a]\tau(y)[u,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$[\tau(R),a]\tau(R)[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$$

olur. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan son eşitlik

$$[R,a]R[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$$

olmasını gerektirir. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$[R,a]=0 \text{ veya } [U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$$

eşitlikleri elde eldilir. Eğer $[U,\sigma^{-1}(a)]_{\sigma,\tau}=0$ ise buradan Önerme 3.2.1 göz önüne alınırsa $a \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece ispat biter. □

Sonuç 3.2.4. *[3] R bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Lie ideal olsun. U değişmeli ise $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur.*

İspat: U değişmeli olsun. U değişmeli olduğundan $[U,U]=0$ olur. Her $u \in U$ için $[U,u]=(0)$ olduğundan Teorem 3.2.3 kullanılırsa her $u \in U$ için $u \in Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ifadesi sağlanır. Böylece $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. □

R bir halka U sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ sol Lie ideal $T(U)=\{a \in R \mid [R,a]_{\sigma,\tau} \subset U\}$ olsun. $U \subset T(U)$ olduğu açıktır. T(U) kümesinin alt halka olduğunu gösterelim. $[0,a]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan $T(U) \neq \varnothing$ dır. Her $a,b \in T(U)$ ve *her* $x \in R$ için

$[x,a-b]_{\sigma,\tau} = [x,a]_{\sigma,\tau} - [x,b]_{\sigma,\tau} \in U$ olur, yani $a-b \in T(U)$ olur. Her $a,b \in T(U)$ için $[x,ab]_{\sigma,\tau} = [x\sigma(a),b]_{\sigma,\tau} + [\tau(b)x,a]_{\sigma,\tau} \in U \subset T(U)$ olduğundan $ab \in T(U)$ olur. Böylece T(U) alt halkadır. $[R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $U \subset T(U)$ olduğundan $[R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T(U)$ olur.

Önerme 3.2.5. *[3] R bir asal halka ve U sıfırdan $(\sigma,\tau)-$sol Lie ideal olsun.*

$$R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U) \text{ ve } [T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U).$$

İspat: T(U) alt halka olduğundan $u,v \in T(U)$ ve $x \in R$ için $[u,[x,v]_{\sigma,\tau}] \in T(U)$ olur. Burada Önerme 2.0.31 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned} [u,[x,v]_{\sigma,\tau}] &= [u,x\sigma(v)-\tau(v)x] \\ &= ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+\tau(v)xu \in T(U) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan her $x \in R$ ve $u,v \in T(U)$ için

$$[xu,v]_{\sigma,\tau} \in U \subset T(U)$$

olur. Burada Önerme 2.0.31 (i) ve (iii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} [u,[x,v]_{\sigma,\tau}]+[xu,v]_{\sigma,\tau} &= ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+\tau(v)xu+xu\sigma(v)-\tau(v)xu \\ &= ux\sigma(v)-u\tau(v)x-x\sigma(v)u+xu\sigma(v) \\ &= u[x,v]_{\sigma,\tau}-x[\sigma(v),u] \in T(U) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. O halde her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$[u,[x,v]_{\sigma,\tau}]+[xu,v]_{\sigma,\tau} = u[x,v]_{\sigma,\tau}-x[\sigma(v),u] \in T(U)$$

olur. Böylece her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$[u,[x,v]_{\sigma,\tau}]+[xu,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$$

elde edilir. Ayrıca $u[x,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan her $x \in R$ ve $u,v \in T(U)$ için $-x[\sigma(v),u] = x[u,\sigma(v)] \in T(U)$ olur. Böylece

$$R[T(U),\sigma(T(U))] \subset T(U)$$

olduğu görülür. Diğer yandan her $u,v \in T(U)$ ve $x \in R$ için

$$[ux,v]_{\sigma,\tau} = u[x,v]_{\sigma,\tau} + [u,\tau(v)]x \in T(U)$$

olur. Buradan $[ux,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ ve $u[x,v]_{\sigma,\tau} \in T(U)$ olduğundan her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$[u,\tau(v)]x \in T(U)$$

elde edilir. Böylece $[T(U),\tau(T(U))]R \subset T(U)$ olur. Böylece ispat biter. □

Önerme 3.2.6. *[3] R bir asal halka, U sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ Lie ideal $U \not\subset Z$, $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a,b \in R$ olsun. Bu durumda $aT(U)b = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ ifadesi sağlanır.*

İspat: $a,b \in R$ için $aT(U)b = 0$ olsun. T(U) kümesinin tanımından $u \in U$, $v \in T(U)$, $y \in R$ için $[uby,v]_{\sigma,\tau} \in U \subset T(U)$ olduğu açıktır. Böylece her $a,b \in R$ ve $u \in U$, $v \in T(U)$, $y \in R$ için $a[uby,v]_{\sigma,\tau}b = 0$ olur. Burada Önerme 2.0.31 (iii) ve $aT(U)b = 0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= a[uby,v]_{\sigma,\tau}b \\
&= a(ub[y,v]_{\sigma,\tau} + [ub,\tau(v)]y)b \\
&= aub[y,v]_{\sigma,\tau} + a[ub,\tau(v)]yb \\
&= a[ub,\tau(v)]yb \\
&= a(ub\tau(v) - \tau(v)ub)yb \\
&= aub\tau(v)yb - a\tau(v)ubyb \\
&= a\tau(v)ubyb
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece her $v \in T(u), u \in U, y \in R$ için

$$a\tau(v)ubyb = 0$$

olduğu görülür. O halde

$$a\tau(T(U))UbRb = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada R halkasının asal olması kullanılırsa

$$a\tau(T(U))Ub = 0 \text{ veya } b = 0 \qquad (3.2.19)$$

ifadesi elde edilir. $a\tau(T(U))Ub = 0$ olsun. Son eşitlik ve Önerme 2.0.31 (i) kullanılırsa her $x \in R$, $u \in U$, $v \in T(U)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= a\tau(v)[u,x]_{\sigma,\tau}b \\ &= a\tau(v)(u\sigma(x) - \tau(x)u)b \\ &= a\tau(v)u\sigma(x)b - a\tau(v)\tau(x)ub \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikte x yerine $\sigma^{-1}(bx)$ yazılır ve $a\tau(T(U))Ub = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a\tau(v)u\sigma(\sigma^{-1}(bx))b - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(bx))ub \\ &= a\tau(v)ubxb - a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub \\ &= a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece her $x \in R, u \in U$ için

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(\sigma^{-1}(x))ub = 0$$

olduğu görülür. Buradaσ ve τ dönüşümlerinin R halkasının otomorfizmları olduğu gözönüne alınırsa

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b))RUb = 0$$

elde edilir. R halkasının asal olması kullanılırsa

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \text{ veya } Ub = 0. \qquad (3.2.20)$$

ifadesi elde edilir. Önerme 3.2.2 kullanılırsa $Ub = 0$ olur. Bu ise $b = 0$ olmasını gerektirir. Şİmdi her $v \in T(U)$ için

$$a\tau(v)\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0 \qquad (3.2.21)$$

olduğu durumu inceleyelim. Diğer yandan Önerme 3.2.5 den $[U,\tau(T(U))]R \subset T(U)$ olduğundan

$$[R,[U,\tau(T(U))]R]_{\sigma,\tau} \subset [R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U \subset T(U)$$

olduğu görülür. Böylece her $x,y \in R, u \in U$ ve $v \in T(U)$ için

$$[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau} = \tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y) - \tau([u,\tau(v)]y)\tau(x) \in U \subset T(U)$$

olduğu görülür. Burada $aT(U)b = 0$ olması ve Önerme 2.0.31 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= a[\tau(x),[u,\tau(v)]y]_{\sigma,\tau} b \\
&= a(\tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y) - \tau([u,\tau(v)]y)\tau(x))b \\
&= a\tau(x)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y\tau(x))b
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte x yerine $x\sigma^{-1}(b)z$ yazılırsa

$$0 = a\tau(x\sigma^{-1}(b)z)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x\sigma^{-1}(b)z)b$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$0 = a\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)\sigma([u,\tau(v)]y)b - a\tau([u,\tau(v)]y)\tau(x)\tau(\sigma^{-1}(b))\tau(z)b \tag{3.2.22}$$

eşitliği elde edilir. $[u,\tau(v)]yx\sigma^{-1}(b)z \in T(U)$ olduğundan her $x,y \in R, u \in U, v \in T(U)$ için

$$a\tau([u,\tau(v)]yx)\tau(\sigma^{-1}(b)) \in a\tau(T(U))\tau(\sigma^{-1}(b)) = 0$$

olur. Buradan 3.2.22 eşitliği ve τ dönüşümünün otomorfizma olması kullanılırsa

$$aR\tau(\sigma^{-1}(b))R\sigma([u,\tau(v)])Rb = 0 \tag{3.2.23}$$

eşitliği elde edilir. σ,τ dönüşümleri otomorfizma olduğundan ve R asal halka olduğundan son eşitlik

$$a = 0 \text{ veya } b = 0 \text{ veya } [U, \tau(v)] = 0$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan Teorem 3.2.3 den $[U, \tau(v)] \neq 0$ olduğu açıktır. Böylece $a = 0$ veya $b = 0$ olduğu görülür. □

Teorem 3.2.7. *[3] R bir asal halka, U sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$Lie ideal, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ise $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde $M \neq (0)$ ideali vardır.*

İspat: U, R halkasının $(\sigma, \tau)-$Lie ideali, $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O zaman U, $(\sigma, \tau)-$Lie ideal olduğundan ve Önerme 3.2.5 ten

$$R[T(U), \sigma(T(U))] \subset T(U) \text{ ve } [T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$$

vardır. Diğer yandan T(U), R halkasının alt halkası olduğundan her $x, y \in R, u, v, w, z \in T(U)$ için

$$y[w, \sigma(z)][u, \tau(v)]x \in T(U)$$

olur. O halde

$$R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R \subset T(U)$$

ifadesi sağlanır. Burada $R[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))]R = 0$ ise R halkasının asal olması kullanılırsa

$$[T(U), \sigma(T(U))][T(U), \tau(T(U))] = 0$$

olur. Buradan her $u, v, w, z \in T(U)$ için

$$[u, \sigma(v)][w, \tau(z)] = 0 \qquad (3.2.24)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte w yerine $t \in T(U)$ olmak üzere wt yazılır, 3.2.24 eşitliği ve Önerme 2.0.30 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= [u,\sigma(v)][wt,\tau(z)]\\ &= [u,\sigma(v)]([w,\tau(z)]t+w[t,\tau(z)])\\ &= [u,\sigma(v)][w,\tau(z)]t+[u,\sigma(v)]w[t,\tau(z)]\\ &= [u,\sigma(v)]w[t,\tau(z)]\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece her $w \in T(U)$ için

$$[u,\sigma(v)]w[t,\tau(z)] = 0$$

olur. Bu ise her $u,v,z \in T(U)$ için

$$[u,\sigma(v)]T(U)[t,\tau(z)] = 0 \tag{3.2.25}$$

olmasını gerektirir. Burada Önerme 3.2.6 kullanılırsa

$$[T(U),\sigma(T(U))] = 0 \text{ veya } [T(U),\tau(T(U))] = 0$$

olduğu görülür. $U \subset T(U)$ olduğundan son ifade

$$[U,\sigma(U)] = 0 \text{ veya } [U,\tau(U)] = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece Teorem 3.2.3 kullanılırsa

$$U \subset Z \text{ veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Bu durum $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olması ile çelişir. O halde $R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))] \neq 0$ olur. Böylece $0 \neq M = R[T(U),\sigma(T(U))][T(U),\tau(T(U))]R$, R halkasının bir idealidir. Ayrıca $T(U)$ tarafından kapsanır. Böylece $T(U)$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Yani $M \subset T(U)$ dır. Diğer yandan $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset [R,T(U)]_{\sigma,\tau} \subset U$ olduğu açıktır. Şimdi $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. Burada R, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal olduğundan Önerme 3.2.1 kullanılırsa $M \subset Z$ veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu görülür.

Bu ise R halkası değişmeli veya $R \subset C_{\sigma,\tau}$ olmasını gerektirir. R halkası değişmeli ise $U \subset Z$ veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Bu da $U \not\subset Z$ ve $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olmasıyla çelişir. O halde $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ dır. □

Sonuç 3.2.8. *[3] R bir asal halka, U sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ Lie ideal $U \not\subset Z$, $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a,b \in R$ olsun.*

$$aUb = (0) \text{ ise } a = 0 \text{ veya } b = 0.$$

İspat: U, R halkasının $(\sigma,\tau)-$ Lie ideali, $U \not\subset Z$, $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ ve $a,b \in R$ için $aUb = (0)$ olsun. O zaman Teorem 3.2.17 kullanılırsa R halkasının $[R,M]_{\sigma,\tau} \subset U$ ve $[R,M]_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir M idealinin olduğu görülür. Buradan Önerme 3.0.31 (i) ve (ii) $aUb = 0$ eşitliği kullanılırsa her $x \in R, u \in U, m \in M$ için

$$\begin{aligned}
0 &= a[x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)m]_{\sigma,\tau} b \\
&= a(\tau(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b))[x,m]_{\sigma,\tau} + [x,\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b)]_{\sigma,\tau}\sigma(m))b \\
&= a(ub[x,m]_{\sigma,\tau} + [x,\tau^{-1}(ub)]_{\sigma,\tau}\sigma(m))b \\
&= a(ubx\sigma(m) - ub\tau(m)x + x\sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m) - ubx\sigma(m))b \\
&= aubx\sigma(m)b - aub\tau(m)xb + ax\sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m)b - aubx\sigma(m)b \\
&= ax\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b))\sigma(m)b
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece her $x \in R$ için

$$ax\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0$$

olur. Bu ise

$$aR\sigma(\tau^{-1}(u)\tau^{-1}(b))\sigma(m)b = 0 \tag{3.2.26}$$

olmasını gerektirir. R halkasının asal olması kullanırsa her $u \in U, m \in M$ için

$$a = 0 \text{ veya } \sigma(\tau^{-1}(ub))\sigma(m)b = 0$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$a = 0 \text{ veya } \sigma(\tau^{-1}(Ub))\sigma(M)b = 0$$

olur. $\sigma(\tau^{-1}(Ub))\sigma(M)b = 0$ olsun. Bu eşitliğe σ^{-1} uygulanırsa

$$0 = \tau^{-1}(Ub)M\sigma^{-1}(b)$$

eşitliği elde edilir. Buradan σ^{-1}, τ^{-1} dönüşümleri otomorfizma olduğundan son eşitlik

$$UbMb = 0$$

olmasını gerektirir. Burada R asal halka ve $M < R$ olduğu kullanılırsa

$$Ub = 0 \text{ veya } b = 0$$

ifdesi elde edilir. Burada $Ub = 0$ ise Önerme 3.2.2 den

$$b = 0 \text{ veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

olur. $U \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan son ifade $b = 0$ olmasını gerektirir. □

3.3. (σ, τ)-Lie İdealler Ve Türevler

Önerme 3.3.1. *[13] R bir asal halka, U, (σ, τ)-Lie ideal ve $a, b \in R$ olsun.*

$$ab, b \in C_{\sigma,\tau} \textit{ ise } a \in Z \textit{ veya } b = 0.$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $ab, b \in C_{\sigma,\tau}$ olsun. Her $x \in R$ için $0 = ab\sigma(x) - \tau(x)ab = a\tau(x)b - \tau(x)ab = [a, \tau(x)]b$ olur. Yani $[a, \tau(x)]b = 0$ olur. Bu eşitliğin sağ yanı $y \in R$ olmak üzere $\sigma(y)$ ile çarpılırsa $[a, \tau(x)]b\sigma(y) = 0$ olur. Buradan $b \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa son eşitlik $[a, \tau(x)]\tau(y)b = 0$ olmasını gerektirir. $[a, \tau(x)]\tau(R)b = 0$ olur. Buradan

$\tau(R) = R$ olduğundan $[a, \tau(x)]Rb$ elde edilir. R asal halka olduğundan son ifade $[a, \tau(x)] = 0$ veya $b = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda $a \in Z$ veya $b = 0$ dır. Böylece ispat biter. □

Önerme 3.3.2. *[5] R asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$sol Lie ideali olsun.*

$$U \subset C_{\sigma,\tau} \text{ ise } U \subset Z.$$

ifadesi sağlanır.

İspat: U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$sol Lie ideali olsun. O halde her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} \in U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Ayrıca Önerme 2.0.31 (iii) den

$$[\tau(u)x, u]_{\sigma,\tau} = \tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} + [\tau(u), \tau(u)]x = \tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau}$$

olduğu kullanılırsa her $x \in R$ ve $u \in U$ için

$$\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Burada Önerme 3.3.1 kullanılırsa her $x \in R$ için

$$\tau(u) \in Z \text{ veya } [x, u]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.3.27}$$

eşitliği elde edilir. Her $x \in R$ için $[x, u]_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. Bu durumda her $x, y \in R$ için $0 = [xy, u]_{\sigma,\tau} = x[y, u]_{\sigma,\tau} + [x, \tau(u)]y$ olduğu görülür. Buradan her $x \in R$ için $[x, \tau(u)]y = 0$ elde edilir. Böylece $[R, \tau(u)]R = 0$ olur. R halkasının asal olması kullanılırsa son ifade $[R, \tau(u)] = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise $\tau(u) \in Z$ olmasını gerektirir. Buradan her $r \in R$ ve $u \in U$ için $\tau(r)\tau(u) = \tau(u)\tau(r)$ elde edilir. Burada τ dönüşümünün otomorfizma olduğu da göz önüne alınırsa $\tau(ru) - \tau(ur) = \tau(ru - ur) = 0$ eşitlikleri sağlandığından $u \in Z$ elde edilir. O halde $U \subset Z$ olur. □

Teorem 3.3.3. *[5] R bir asal halka U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Lie ideal, d, $\sigma d = d\sigma$ ve $\tau d = d\tau$ eşitliklerini sağlayan sıfırdan farklı türev olsun.*

$$d(U) \subset C_{\sigma,\tau} \text{ ise R halkası değişmeli veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

ifadesi sağlanır.

İspat: U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Lie ideali ve $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O halde her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[u,x]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Bu her $y \in R$ için $[d([u,x]_{\sigma,\tau}),y]_{\sigma,\tau} = 0$ olmasını gerektirir. Buradan Önerme 2.0.31 (i),(v), Tanım 2.0.20 ve $d\sigma = \sigma d$ ve $d\tau = \tau d$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= [d([u,x]_{\sigma,\tau}),y]_{\sigma,\tau}\\
&= [d(u\sigma(x)-\tau(x)u),y]_{\sigma,\tau}\\
&= [d(u\sigma(x))-d(\tau(x))u,y]_{\sigma,\tau}\\
&= [d(u\sigma(x)),y]_{\sigma,\tau}-[d(\tau(x)u),y]_{\sigma,\tau}\\
&= [d(u)\sigma(x)+ud(\sigma(x)),y]_{\sigma,\tau}-[d(\tau(x))u+\tau(x)d(u),y]_{\sigma,\tau}\\
&= (d(u)\sigma(x)+ud((\sigma)(x))\sigma(y)-\tau(y)(d(u)\sigma(x)+ud(\sigma(x)))\\
&\quad -((d(\tau(x))u+\tau(x)d(u))\sigma(y)-\tau(y)(d(\tau(x))u+\tau(x)d(u))\\
&= d(u)\sigma(x)\sigma(y)+ud(\sigma(x))\sigma(y)-\tau(y)d(u)\sigma(x)-\tau(y)ud(\sigma(x))\\
&\quad -d(\tau(x))u\sigma(y)-\tau(x)d(u)\tau(y)+\tau(y)d(\tau(x))u+\tau(y)\tau(x)d(u)\\
&= d(u)\sigma(x)\sigma(y)+u\sigma(d(x))\sigma(y)-\tau(u)d(u)\sigma(x)-\tau(y)u\sigma(d(x))\\
&\quad -\tau(d(x))u\sigma(y)-\tau(x)d(u)\sigma(y)+\tau(y)\tau(d(x))u+\tau(y)\tau(x)d(u)\\
&= (d(u)\sigma(x)+u\sigma(d(x))-\tau(d(x))u-\tau(x)d(u))\sigma(y)-\tau(y)(d(u)\sigma(x)\\
&\quad +u\sigma(d(x))-\tau(d(x))u-\tau(x)d(u))\\
&= [d(u)\sigma(x)-\tau(x)d(u)+u\sigma(d(x))-\tau(d(x))u,y]_{\sigma,\tau}\\
&= [[d(u),x]_{\sigma,\tau}+[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Diğer taraftan $d(u) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğu kullanılırsa her $y \in R$ için

$$[u,d(x)]_{\sigma,\tau},y]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. Buradan her $x \in R, u \in U$ için

$$[u, d(x)]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Böylece

$$[U, d(R)]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$$

olur. Burada Önerme 3.3.2 kullanılırsa

$$d(R) \subset Z \text{ veya } U \subset C_{\sigma,\tau}$$

olduğu görülür. Eğer $d(R) \subset Z$ ise Teorem 2.0.39'den R halkası değişmelidir veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ dir. Böylece ispat biter. □

Sonuç 3.3.4. *[5] R bir asal halka U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$Lie ideali ve d sıfırdan farklı türev olsun.*

$$d(U) \subset C_{\sigma,\tau} \textit{ ise } U \subset Z$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. O halde Teorem 3.3.4 ten R halkası değişmelidir veya $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu görülür. Bu ise Önerme 3.3.3 ten $U \subset Z$ olmasını gerektirir. □

Önerme 3.3.5. *[5] R bir asal halka U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$Lie ideali, d bir türev ve $a \in R$ olsun.*

$$d(U)a = 0 \ (ad(U) = 0) \textit{ ise } a = 0 \textit{ veya } U \subset Z.$$

İspat: U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$Lie ideali ve $d(U)a = 0$ olsun. $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Sonuç 3.3.5 den $d(U) \not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu görülür. Bu yüzden $d(U) \neq 0$ olur. Çünkü $d(U) = 0$ olursa $0 \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ olur bu durumda kabulumuzle çelişir. U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$Lie ideal olduğundan her $x \in R, u \in U$ için $\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Burada $d(U)a = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $d(\tau(u)[x, u]_{\sigma,\tau})a = 0$ eşitliği sağlanır. Burada Tanım 2.0.20 kullanılırsa

$$0 = d(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})a = d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a + \tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau})a$$

eşitliği elde edilir. Böylece $[x,u]_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan son eşitlikten

$$d([x,u]_{\sigma,\tau})a = 0$$

elde edilir. Böylece her $u \in U$ ve $x \in R$ için

$$d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}a = 0$$

olur. Son eşitlikte $v \in U$ olmak üzere x yerine *xd(v)* yazılır Önerme 2.0.31 (iii) ve $d(U)a = 0$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u))[xd(v),u]_{\sigma,\tau}a \\
&= d(\tau(u))(x[d(v),u]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(u)]d(v))a \\
&= d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a + d(\tau(u))[x,\tau(u)]d(v)a \\
&= d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece her $x \in R$ için

$$d(\tau(u))x[d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0$$

yani

$$d(\tau(u))R[d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0$$

olur. $d\tau = \tau d$ eşitlikleri ve R halkasının asal olması kullanılırsa her $u,v \in U$ için

$$d(\tau(u)) = \tau(d(u)) = 0 \text{ veya } [d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0$$

ifadesi elde edilir. Burada τ dönüşümü otomorfizma olduğundan son ifade

$$d(u) = 0 \text{ veya } [d(v),u]_{\sigma,\tau}a = 0$$

olmasını gerektirir.

Şimdi $L = \{\ u \in U \mid d(u) = 0\ \}$ ve $K = \{\ u \in U \mid [d(v),u]_{\sigma,\tau} a = 0\ v \in U\ \}$ kümelerini tanımlayalım. Öncelikle K ve L kümesinin U (σ,τ) lie idealinin toplamsal alt grubu olduğunu gösterelim. $[d(v),0]_{\sigma,\tau} a = 0$ olduğundan $0 \in K$ dır. Böylece $K \neq \varnothing$ dır. Her $x,y \in K$ için $[d(v),x]_{\sigma,\tau} a = 0$ ve $[d(v),y]_{\sigma,\tau} a = 0$ dır. $[d(u),x-y]_{\sigma,\tau} = [d(v),x]_{\sigma,\tau} - [d(v),y]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan $x-y \in K$ dır. Böylece K, U (σ,τ)- Lie idealinin toplamsal alt grubudur. Diğer taraftan $L \neq \varnothing$ dır. $d(0) = 0$ olduğundan $0 \in L$ dir. Her $x,y \in L$ için $d(x) = 0$ ve $d(y) = 0$ dır. Böylece $d(x-y) = d(x) - d(y) = 0$ olduğundan $x-y \in L$ dir. Yani L, U (σ,τ)- Lie idealinin toplamsal alt grubudur. Böylece Önerme 2.0.7 den $U = L$ veya $U = K$ elde edilir. Diğer taraftan $d \neq 0$ olduğundan $U \neq L$ dır. O halde $U = K$ dır. Her $u,v \in U$ için $0 = [d(v),u]_{\sigma,\tau} = d(v)\sigma(u)a - \tau(u)d(v)a$ olur. Burada $d(v)a = 0$ olduğu kullanılırsa $d(v)\sigma(u)a = 0$ elde edilir. Son eşitliğin her tarafına σ^{-1} uygulanırsa her $u \in U$ için

$$\sigma^{-1}(d(v))u\sigma^{-1}(a) = 0$$

olur. Bu $\sigma^{-1}(d(v))U\sigma^{-1}(a) = 0$ olmasını gerektirir. Burada Sonuç 3.2.8 den

$$\sigma^{-1}(d(v)) = 0 \text{ veya } \sigma^{-1}(a) = 0$$

elde edilir. Burada σ dönüşümünün otomorfizma olduğu göz önüne alınırsa her $v \in U$ için $d(v) = 0$ veya $a = 0$ olur. Buradan $d(U) = 0$ veya $a = 0$ elde edilir. Kabulumuzden $d(U) \neq 0$ olduğundan $a = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.İspatın ilk kısmında $[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in U$ alarak $ad(U) = 0$ ise $a = 0$ olduğunu benzer şekilde gösterebilir. □

Şimdi varsayalım U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$Lie ideali iken $d(U)+U$ kümesinin $(\sigma,\tau)-$sağ Lie ideali olduğunu gösterelim. Önerme 2.0.31 (v),(vi) kullanılırsa ve her $u,v \in U$, $x \in R$ için

$$\begin{aligned}[d(u)+v,x]_{\sigma,\tau} &= [d(u),x]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}\\ &= [d(u),x]_{\sigma,\tau}+[u,d(x)]_{\sigma,\tau}-[u,d(x)]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}\\ &= d([u,x]_{\sigma,\tau})-[u,d(x)]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan U, $(\sigma,\tau)-$Lie ideal olduğundan $[u,x]_{\sigma,\tau}\in U$, $[u,d(x)]_{\sigma,\tau}\in U$, $[v,x]_{\sigma,\tau}\in U$ olmasını gerektirir. Böylece

$$d([u,x]_{\sigma,\tau})-[u,d(x)]_{\sigma,\tau}+[v,x]_{\sigma,\tau}\in d(U)+U$$

elde edilir. Yani $d(U)+U$, $(\sigma,\tau)-$sağ Lie idealdir.

Önerme 3.3.6. *[5] R asal halka U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$Lie ideal ve d, sıfırdan farklı bir türev olsun.*

$$d^2(U)=0 \text{ ise } d(U)\subset Z.$$

İspat: U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$Lie ideal ve d bir türev ve $d^2(U)=0$ olsun. O zaman $[x,u]_{\sigma,\tau}\in U$ olduğundan her $u\in U$, $x\in R$ için $d^2(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})=0$ olur. Burada Tanım 2.0.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= d^2(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau})\\ &= d(d(\tau(u)[x,u]_{\sigma,\tau}))\\ &= d(d(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+\tau(u)d([x,u]_{\sigma,\tau}))\\ &= d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})\\ &\quad+\tau(u)d^2([x,u]_{\sigma,\tau})\\ &= d^2(\tau(u))[x,u]_{\sigma,\tau}+2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Diğer taraftan $\tau d=d\tau$ eşitlikliği göz önüne alınırsa $d^2(\tau(u))=d(d(\tau(u)))=d(\tau(d(u)))=\tau(d(d(u)))=\tau(d^2(u))=0$ olduğundan son eşitlikten $2d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0$ elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan her $x\in R, u\in U$ için

$$d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})=0 \tag{3.3.28}$$

bulunur. Burada *u* yerine $v \in U$ olmak üzere *u+d(v)* yazılır ve Tanım 2.0.8, Önerme 2.0.31 (v), 3.3.28, $d\tau = \tau d$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u+d(v)))d([x,u+d(v)]_{\sigma,\tau})\\
&= d(\tau(u)+\tau(d(v)))(d([x,u]_{\sigma,\tau}+[x,d(v)]_{\sigma,\tau}))\\
&= d(\tau(u))+d(\tau(d(v)))(d([x,u]_{\sigma,\tau}+d[x,d(v)]_{\sigma,\tau}))\\
&= d(\tau(u))+\tau(d^2(v)))(d([x,u]_{\sigma,\tau}+d[x,d(v)]_{\sigma,\tau}))\\
&= d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})\\
&= \tau(d(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$\tau(d(u))d([x,d(v)]_{\sigma,\tau}) = 0$$

olur. Burada son eşitliğe τ^{-1} dönüşümü kullanırsa her $x \in R, u, v \in U$ için

$$d(u)\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})) = 0 \tag{3.3.29}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğe Önerme 3.3.6 uygulanırsa her $x \in R, v \in U$ için

$$\tau^{-1}(d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})) = 0 \text{ veya } U \subset Z$$

elde edilir. Burada τ^{-1} dönüşümünün otomorfizma olduğu göz önüne alınırsa son ifade her $x \in R, u \in U$ için

$$d([x,d(v)])_{\sigma,\tau} = 0 \; veya \; U \subset Z \tag{3.3.30}$$

olmasını gerektirir. Eğer $U \subset Z$ ise $d(U) \subset Z$ olur. Şimdi $d([x,d(v)]_{\sigma},\tau) = 0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda son eşitliğe Önerme 2.0.31 (vi) uygulanırsa ve $d^2(U) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d([x,d(v)]_{\sigma,\tau})\\
&= [d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}+[x,d^2(v)]_{\sigma,\tau}\\
&= [d(x),d(v)]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Böylece her $x \in R, u \in U$ için

$$[d(x), d(v)]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{3.3.31}$$

olur. Son eşitlikte x yerine $u \in U$ olmak üzere $xd(u)$ yazılır, Tanım 2.0.8 ve Önerme 2.0.31 (iii) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= [d(xd(u)), d(v)]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(x)d(u) + xd^2(u), d(v)]_{\sigma,\tau} \\
&= [d(x)d(u), d(v)]_{\sigma,\tau} \\
&= d(x)[d(u), d(v)]_{\sigma,\tau} + [d(x), \tau(d(v))]d(u) \\
&= [d(x), \tau(d(v))]d(u)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece her $x \in R, u \in U$ için

$$[d(x), \tau(d(v))]d(u) = 0$$

olur. Burada Önerme 3.3.6 kullanılırsa her $x \in R, u \in U$ için

$$[d(x), \tau(d(v))] = 0$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece

$$[d(R), \tau(d(U))] = 0$$

elde edilir. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan ve $\tau d = d\tau$ eşitlikleri göz önüne alınırsa $[d(R), d(U)] = 0$ elde edilir. Buradan $\tau(d(u)) \in Z$ olur. Böylece her $u \in U$ için $d(u) \in Z$ olur. Bu ise $d(U) \subset Z$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.
$\square$

Teorem 3.3.7. *[5] R bir asal halka U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma, \tau)-$Lie ideal ve d bir türev olsun.*

$$d^2(U) = 0 \textit{ ise } U \subset Z$$

olur.

İspat: $U \not\subset Z$ olduğunu kabul edelim. (3.2.28) eşitliğinde u yerine keyfi bir $v \in U$ olmak üzere u+v yazılırsa Önerme 2.0.31 (v), Tanım 2.0.8 kullanılır ve (3.3.28) eşitliği göz önüne alırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u+v))d([x,u+v]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(\tau(u)+\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau}+[x,u]_{\sigma,\tau}) \\
&= (d(\tau(u))+d(\tau(v)))(d([x,u]_{\sigma,\tau})+d([x,u]_{\sigma,\tau})) \\
&= d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})+ \\
& d(\tau(v))d([x,v]_{\sigma,\tau})
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada 3.3.28 eşitliğinden her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0 \text{ ve } d(\tau(v))d([x,v]_{\sigma,\tau}) = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$d(\tau(u))d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau}) = 0$$

olur. Eşitliği soldan her $u \in U$ için $d(\tau(u))$ ile çarpılır, Önerme 3.3.7 kullanılır ve 3.3.28, $\tau d = d\tau, \sigma d = d\sigma$ eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(u))d(\tau(v))d([x,u]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})+\tau(d(u))\tau(d(v))d([x,u]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})+\tau(d(u)d(v))d([x,u]_{\sigma,\tau})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada Önerme 3.3.7 den $d(U) \subset Z$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})+\tau(d(v)d(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})+\tau(d(v))\tau(d(u))d([x,u]_{\sigma,\tau}) \\
&= d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau})+d(\tau(v))d(\tau(u))d([x,u]_{\sigma,\tau})
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Ayrıca 3.3.28 eşitliği kullanırsa son eşitlikten

$$d(\tau(u))^2 d([x,v]_{\sigma,\tau}) = 0 \ \ \forall u,v \in U, x \in R \tag{3.3.32}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x \in R$ ve $v \in U$ için $[x\sigma(v),v]_{\sigma,\tau} \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ ve

$$[x\sigma(v),v]_{\sigma,\tau} = x[\sigma(v),\sigma(v)] + [x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v) = [x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. Buradan $[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(v) \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ olur. 3.3.32 eşitliğinde sağ taraftan $d(\sigma(v))$ ile çarpılırsa

$$d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v)) = 0 \ \ \forall u,v \in U, x \in R \tag{3.3.33}$$

elde edilir. 3.3.33 eşitliğinde v yerine $v+w$ yazılır ve 3.3.33 eşitliği kullanılırsa

$$d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w)) + d(\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v)) = 0 \tag{3.3.34}$$

elde edilir. 3.3.34 eşitliği sağdan taraftan $d(\sigma(v))$ ile çarpılır, 3.3.33 eşitliği ve Önerme 3.3.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau} d(\sigma(w))d(\sigma(v)) + d(\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 \\
&= d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(d(w)d(v)) + d(\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 \\
&= d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(d(v)d(w)) + d(\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 \\
&= d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(d(v))\sigma(d(w)) + d(\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan 3.3.33 eşitliğinden $d(\tau(u))^2[x,v]_{\sigma,\tau}\sigma(d(v)) = 0$ olduğundan son eşitlikten

$$d(\tau(u))^2[x,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 = 0 \ \ \forall u,v,w \in U, x \in R. \tag{3.3.35}$$

elde edilir. 3.3.35 eşitliğinde x yerine her $a \in U$ ve $y \in R$ olmak üzere $d([x,a]_{\sigma,\tau})y$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d(\tau(u))^2[d([x,a]_{\sigma,\tau})y,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 \\
&= d(\tau(u))^2(d([x,a]_{\sigma,\tau})[y,w]_{\sigma},\tau + [d([x,a]_{\sigma,\tau}),\tau(w)]y)d(\sigma(v))^2 \\
&= d(\tau(u))^2 d([x,a]_{\sigma,\tau})[y,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 + d(\tau(u))^2[d([x,a]_{\sigma,\tau}),\tau(w)]yd(\sigma(v))^2
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $d(\tau(u))^2 d([x,a]_{\sigma,\tau})[y,w]_{\sigma,\tau} d(\sigma(v))^2 = 0$ olduğundan $d(\tau(u))^2[d([x,a]_{\sigma,\tau}), \tau(w)]yd(\sigma(v))^2 = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= d(\tau(u))^2(d([x,a]_{\sigma,\tau})\tau(w) - \tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau}))yd(\sigma(v))^2 \\ &= d(\tau(u))^2 d([x,a]_{\sigma,\tau})\tau(w)yd(\sigma(v))^2 - d(\tau(u))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})yd(\sigma(v))^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $d(\tau(u))^2 d([x,a]_{\sigma,\tau})\tau(w)yd(\sigma(v))^2 = 0$ olduğundan her $u,v,w \in U$ ve $x,y \in R$ için

$$d(\tau(u))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})yd(\sigma(v))^2 = 0$$

olmasını gerektirir. O halde

$$d(\tau(u))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau})Rd(\sigma(v))^2 = 0$$

olur. Burada R asal halka olduğundan her $w \in U$ için

$$d(\tau(u))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau}) = 0 \text{ veya } d(\sigma(v))^2 = 0$$

olur. $d(\tau(u))^2\tau(w)d([x,a]_{\sigma,\tau}) = 0$ olsun. Bu durumda $d\tau = \tau d$ olduğu göz önüne alınırsa $\tau(d(u))^2\tau(U)d([x,a]_{\sigma,\tau}) = 0$ elde edilir. Eşitliğin her tarafına τ^{-1} uygulanırsa her $u \in U$ için

$$d(u)^2 U\tau^{-1}(d([x,a]_{\sigma,\tau})) = 0$$

elde edilir. Böylece sonuç 3.2.8 den her $x \in R$ ve $a \in U$ için

$$d(U)^2 = 0 \text{ veya } \tau^{-1}(d([x,a]_{\sigma,\tau})) = 0$$

elde edilir. Yani

$$d(U)^2 = 0 \text{ veya } d([R,U]_{\sigma,\tau}) = 0$$

olur. Şimdi bu durumları inceleyelim.

Eğer $d(U)^2 = 0$ ise her $u,v \in U$ için

$$
\begin{aligned}
0 &= d(u+v)^2 \\
&= d(u+v)d(u+v) \\
&= (d(u)+d(v))(d(u)+d(v)) \\
&= d(u)^2 + 2d(u)d(v) + d(v)^2
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $d(u)^2 = 0$ ve $d(v)^2 = 0$ olduğundan $2d(u)d(v) = 0$ olur. Böylece R karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan her $u \in U$ için $d(u)d(v) = 0$ olur. Burada Önerme 3.3.6 kullanılırsa $d(U) = 0$ ve Sonuç 3.3.5 den $d = 0$ veya $U \subset Z$ olur. Bu ise kabulumuzle çelişir.
Şimdi $d([R,U]_{\sigma,\tau}) = 0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda her $x \in R$ ve $u \in U$ için $[x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u) \in [R,U]_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
0 &= d([x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)) \\
&= d([x,u]_{\sigma,\tau})\sigma(u) + [x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u))
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $d([x,u]_{\sigma,\tau}\sigma(u)) = 0$ olduğundan son eşitlik

$$
[x,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u)) = 0 \quad \forall x \in R, u \in U \tag{3.3.36}
$$

olmasını gerektirir. 3.3.36 eşitliğinde x yerine $y \in R$ olmak üzere xy yazılırsa Önerme 2.0.31 (iii) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= [xy,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u)) \\
&= (x[y,u]_{\sigma,\tau} + [x,\tau(u)]y)d(\sigma(u)) \\
&= x[y,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u) + [x,\tau(u)]yd(\sigma(u)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Burada 3.3.36 eşitliğinden $x[y,u]_{\sigma,\tau}d(\sigma(u) = 0$ olduğundan her $y \in R$ için

$$
[x,\tau(u)]yd(\sigma(u) = 0
$$

olur. O halde $[x,\tau(u)]Rd(\sigma(u) = 0$ dır. Böylece R asal halka olduğundan

$$[x, \tau(u)] = 0 \text{ veya } d(\sigma(u) = 0$$

olur. Burada $d\sigma = \sigma d$ eşitlikleri kullanılırsa

$$[x, \tau(u)] = 0 \text{ veya } \sigma(d(u)) = 0$$

olur. Burada σ dönüşümünün otomorfizma olduğu göz önüne alınırsa

$$\tau(u) \in Z \text{ veya } d(u) = 0$$

elde edilir. Bu kez τ dönüşümünün otomorfizma olduğu kullanılırsa son ifade

$$u \in Z \text{ veya } d(u) = 0$$

olmasını gerektirir.

Şimdi $K = \{\ u \in U \mid u \in Z\ \}$ ve $L = \{u \in U | d(u) = 0\}$ kümeleri tanımlayalım. Boş olmayan K ve L kümelerinin U, (σ, τ)-lie idealinin toplamsal alt grupları olduğu açıktır. Önerme 2.0.7 den $K = U$ veya $L = U$ olmak zorundadır. $K \subset Z$ olduğu göz önüne alınırsa kabulumuzden $K \neq U$ olmak zorundadır. O halde $L = U$ olur. Bu durumda L kümesinin tanımından $d(U) = 0$ olur. Burada Önerme 3.3.6 kullanılırsa $d = 0$ veya $U \subset Z$ olur. $d \neq 0$ olduğundan $U \subset Z$ olmak zorundadır. Bu ise kabulumuzle çelişir. Böylece ispat biter.

$\square$

4. (σ,τ)- SAĞ JORDAN İDEALLER VE DEĞİŞMELİLİK KOŞULLARI

Bu bölümde H.Kandamar , K.Kazım ve N.Aydın'ın bazı çalışmaları incelenmiş ve bu çalışmalar kullanılarak R karakteristiği 2 den farklı bir asal halka U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-Jordan ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere,

i) U değişmeli ise R halkasının değişmeli,

ii $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmeli,

iii) $U \not\subset Z$ ise U, R halkasının $(M,R)_{\sigma,\tau} \subset U$ fakat $(M,R)_{\sigma,\tau} \not\subset C_{\sigma,\tau}$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir M idealini kapsadığı ,

vi) $U \not\subset Z$ ise U, R halkasının sıfırdan farklı bir $(\sigma,\tau)-$Jordan idealini kapsadığı gösterilmiştir.

Ayrıca R karekterstiği 2 den farklı bir asal halka J, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)- sağ Jordan ideali ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olmak üzere,

v) $d(J) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkasının değişmeli

iv) $d(J) \subset Z$ ise R halkasının değişmeli olduğu

gösterilmiştir.

4.1. (σ,τ)-Jordan İdealler Ve (σ,τ)-Türev

Önerme 4.1.1. *[12] R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)- sağ Jordan ideali olsun.*

$$2\tau[R,R]U \subset U \ ve \ 2U\sigma[R,R] \subset U.$$

İspat: Her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için $(u,[x,y])_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},y) + ((u,y)_{\sigma,\tau},x) \in U$ olduğu açıktır. Diğer taraftan bu eşitliğe Tanım 2.0.15 kullanılırsa

$(u,[x,y])_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},y) + ((u,y)_{\sigma,\tau},x)$

$= u\sigma([x,y]) + \tau([x,y])u - (u\sigma(x) + \tau(x)u,y)_{\sigma,\tau} + (u\sigma(y) + \tau(y)u,x)_{\sigma,\tau}$

$= u\sigma([x,y]) + \tau([x,y])u - ((u\sigma(x) + \tau(x)u)\sigma(y) + \tau(y)(u\sigma(x) + \tau(x)u)) +$

$((u\sigma(y) + \tau(y)u)\sigma(x) + \tau(x)(u\sigma(y) + \tau(y)u))$

$= u\sigma([x,y]) + \tau([x,y])u - u\sigma(x)\sigma(y) - \tau(x)u\sigma(y) - \tau(y)u\sigma(x) - \tau(y)\tau(x)u +$

$u\sigma(y) + \sigma(x) + \tau(y)u\sigma(x) + \tau(x)u\sigma(y) + \tau(x)\tau(y)u$

$= 2\tau(x)\tau(y)u - 2\tau(y)\tau(x)u$

$= 2(\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x))u$

$= 2(\tau[x,y])u$

eşitlikleri sağlandığından her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$2(\tau[x,y])u \in U$$

olur. Böylece

$$2\tau[R,R]U \subset U$$

elde edilir.Benzer şekilde her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$-(u,[x,y])_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau} + ((u,y)_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau} \in U$$

ve

$$(u,[x,y])_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},y) + ((u,y)_{\sigma,\tau},x) = 2(\tau[x,y])u$$

olduğundan $2\sigma[R,R] \subset U$ olduğu görülür. □

Önerme 4.1.2. *[12] R bir asal halka, U, R halkasının $(\sigma,\tau)-$ sağ Jordan ideali olsun.*

i) *$U \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.*

ii) *$U \subset Z$ ise R halkası değişmelidir.*

iii) *$a \in R$ ve $aU = 0$ $(Ua = 0)$ ise $a = 0$*

İspat: **i)** Önerme 4.1.1 den $2\tau[R,R]U \subset U$ olduğunu biliyoruz. $U \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $2\tau[R,R]U \subset U \subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Yani

$$2\tau[R,R]U \subset C_{\sigma,\tau} \qquad (4.1.1)$$

olur. Burada $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ve $2\tau[R,R]U \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu göz önüne alınır ve Önerme 4.1.1 kullanılırsa

$$2\tau[R,R] \subset Z \text{ veya } U = (0)$$

elde edilir. Burada son ifadede R halkasının karakteristiği 2 den farklı ve $U \neq (0)$ olduğu kullanılırsa

$$\tau[R,R] \subset Z$$

olmasını gerektirir. Burada τ dönüşümü otomofizma olduğundan

$$[R,R] \subset Z$$

olur. Böylece Önerme 2.0.33 ten R halkası değişmelidir.

ii) Önerme 4.1.1 den $2\tau[R,R]U \subset U$ olduğunu biliyoruz. $U \subset Z$ olduğundan $2\tau[R,R]U \subset U \subset Z$ olur. Böylece

$$2\tau[R,R]U \subset Z$$

elde edilir. Buradan son eşitlikte Önerme 2.0.22 kullanılır ve $U \neq (0)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$2\tau[R,R] \subset Z$$

elde edilir.R halkası karakteristiği 2 den farklı asal halka ve τ otomofizma olduğundan

$$[R,R] \subset Z$$

olur. Böylece Önerme 2.0.33 den R halkası değişmelidir.

iii) $a \in R$ ve $aU = 0$ olsun. Her $x \in R$ ve $u \in U$ için

$$0 = a(u,x)_{\sigma,\tau} = a(u\sigma(x) + \tau(x)u) = a\tau(x)u$$

eşitlikleri sağlanır. Yani buradan her $x \in R$ ve her $u \in U$ için

$$a\tau(x)u = 0$$

elde edilir. Böylece

$$a\tau(R)U = 0$$

olur. Buradan τ otomorfizma olduğundan

$$aRU = 0$$

olur. Bu ise R asal halka ve $U \neq (0)$ oldğundan

$$a = 0$$

olmasını gerektirir. $\square$

Teorem 4.1.3. *[12] R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)- sağ Jordan ideali olsun. U değişmeli ise R değişmelidir.*

İspat: Her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için Önerme 4.1.1 den $2([x,y])u \in U$ olur. U, $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideali değişmeli olduğundan $v \in U$ için $[2\tau([x,y])u,v] = 0$ olur. Buradan Önerme 2.0.30 (i) ve U $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan idealinin olduğu göz önüne alınırsa

$$0 = [2\tau([x,y])u,v] = 2[\tau([x,y]),v]u + 2\tau([x,y])[u,v] = 2[\tau([x,y]),v]u$$

olur. Böylece

$$2[\tau([x,y]),v]u = 0$$

olur. R halkası, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka olduğundan her $x,y \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$[\tau([x,y]),v]u = 0$$

olur . Böylece

$$[\tau([x,y]),v]U = 0 \quad \forall x,y \in R, v \in U. \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Burada τ dönüşümünün otomorfizma olduğu kullanılırsa

$$[v,[x,y]]U = 0 \quad \forall x,y \in R, v \in U. \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Bu ise her $x,y \in R$ ve $v \in U$ için $[v,[x,y]] = 0$ olmasını gerektirir.Buradan I_v, v ile üretilen türev, I_x x ile üretilen türev olmak üzere $I_v I_x = 0$ elde edilir. Buradan her $v \in U$ için $U \subset Z$ ve R halkası değişmeli olur. Böylece $U \subset Z$ olduğunda önerme 4.1.2 (ii) den R halkası değişmelidir. □

Önerme 4.1.4. *[12] R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı* (σ,τ)*- sağ Jordan ideali ve* $a,b \in R$ *olsun.* $aUb = 0$ *ise* $a = 0$ *veya* $b = 0$ *ifadesi sağlanır.*

İspat: Önerme 4.1.1 den $2\tau([R,R])U \subset U$ olduğunu biliyoruz. Her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$a2\tau([x,y])ub = 0$$

olur. Burada R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka olduğundan son ifade

$$a\tau([x,y])ub = 0 \quad \forall x,y \in R, u \in U \tag{4.1.4}$$

olmasını gerektirir. Bu eşitlikte y yerine $y\tau^{-1}(a)$ yazılır ve Önerme 2.0.3 (ii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a\tau([x,y\tau^{-1}(a)])ub \\ &= a\tau([x,y]\tau^{-1}(a) + y[x,\tau^{-1}(a)])ub \\ &= a\tau([x,y])aub + a\tau(y)\tau([x,\tau^{-1}(a)])ub \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada aub=0 olduğundan her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$a\tau(y)\tau([x,\tau^{-1}(a)])ub = 0$$

bulunur. Bu durumda

$$a\tau(R)\tau([x,\tau^{-1}(a)])ub = 0$$

olur. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan

$$aR\tau([x,\tau^{-1}(a)])ub = 0$$

olur. Bu ise R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } \tau([x, \tau^{-1}(a)])ub = 0$$

olmasını gerektirir. Eğer $a = 0$ ise ispat biter.

Şimdi $\tau([x, \tau^{-1}(a)])ub = 0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $aub = 0$ olduğu göz önüne alınırsa her $x \in R$ ve $u \in U$ için

$$0 = \tau([x, \tau^{-1}(a)])ub = (\tau(x)a - a\tau(x))ub = \tau(x)aub - a\tau(x)ub = a\tau(x)ub$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. O halde her $u \in U$ için

$$a\tau(R)ub$$

dır. Burada τ dönüşümünün otomorfizma olduğu kullanılırsa

$$aRUb = 0$$

olur. R asal halka olduğundan

$$a = 0 \text{ veya } Ub = 0$$

dır. Önerme 4.1.2 (iii) kullanılırsa

$$a = 0 \text{ veya } b = 0$$

olduğu görülür. □

Önerme 4.1.5. *[12] R asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $a, b \in U$, $x \in R$ olsun.*

$$[a, [b, x]]_{\sigma,\tau} = 0 \text{ ise } a \in C_{\sigma,\tau} \text{ veya } a \in Z$$

olur.

İspat: I_a, a ile (σ, τ)-iç türev, I_b, b ile üretilen iç türev olmak üzere. Hipotezden $I_b I_a(U) = 0$ elde edilir.

$0 = [a,[b,x]]_{\sigma,\tau} = I_1 I_2(U)$

olur. Buradan Önerme 2.0.29 kullanılırsa

$$I_1 = 0 \text{ veya } I_2 = 0$$

olduğu görülür. Yani her $x \in R$ için $[a,x]_{\sigma,\tau} = 0$ veya $[b,x] = 0$ ifadesi sağlanır. Buradan $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya $b \in Z$ olduğu görülür. □

Önerme 4.1.6. *[12] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ sağ Jordan ideali ve $a \in R$ olsun.*

i) *$(U,a)_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$.*

ii) *$(a,R)_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in C_{\sigma,\tau}$*

iii) *$(a,U)_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ veya $a \in C_{\sigma,\tau}$*

İspat: **i)** $(U,a)_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. O halde her $x \in R$ ve $u \in U$ için $(u,x)_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan $((u,a)_{\sigma,\tau},x)_{\tau,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Burada Tanım 2.0.15 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= ((u,a)_{\sigma,\tau},x)_{\sigma,\tau} - ((u,x)_{\sigma,\tau},a)_{\sigma,\tau} \\
&= (u,a)_{\sigma,\tau}\sigma(x) + \tau(x)(u,a)_{\sigma,\tau} - (u,x)_{\sigma,\tau}\sigma(a) + \tau(a)(u,x)_{\sigma,\tau} \\
&= (u\sigma(a) + \tau(a)u)\sigma(x) + \tau(x)(u\sigma(a) + \tau(a)u) \\
&\quad -(u\sigma(x) + \tau(x)u)\sigma(a) + \tau(a)(u\sigma(x) + \tau(x)u) \\
&= u\sigma(a)\sigma(x) + \tau(a)u\sigma(x) + \tau(x)u\sigma(a) \\
&\quad +\tau(x)\tau(a)u - u\sigma(x)\sigma(a) - \tau(x)u\sigma(a) - \tau(a)u\sigma(x) - \tau(a)\tau(x)u \\
&= u\sigma(a)\sigma(x) + \tau(x)\tau(a)u - u\sigma(x)\sigma(a) - \tau(a)\tau(x)u \\
&= u\sigma(ax) + \tau(xa)u - u\sigma(xa) - \tau(ax)u \\
&= u\sigma([a,x]) - \tau([a,x])u \\
&= [u,[a,x]]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$[u,[a,x]]_{\sigma,\tau} = 0 \quad \forall x \in R, u \in U \tag{4.1.5}$$

olur. Burada $I_u(x) = [u,x]_{\sigma,\tau}$ dönüşümü R halkasının $(\sigma,\tau)-$ iç türevi ve $I_a = [a,x]$ dönüşümüde R halkasının iç türevi olsun. Buradan her $x \in R$ için

$$0 = [u,[a,x]]_{\sigma,\tau} = I_u I_a(x)$$

olur. Yani her $x \in R$ için $I_u I_a(x) = 0$ olur. Böylece

$$I_u I_a(R) = 0$$

olur. Önerme 2.0.39 kullanılırsa

$$U \subset C_{\sigma,\tau} \text{ veya } a \in Z$$

olur. Burada $U \subset C_{\sigma,\tau}$ ise Önerme 4.1.2 den R halkası değişmeli olduğundan $a \in Z$ olur. O halde $(U,a)_{\sigma,\tau} = 0$ iken $a \in Z$ olur. olur. Böylece ispat tamamlanır.

ii) $(a,R)_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. Bu durumda $x,y \in R$ için Önerme 2.0.31 (vii) kullanılırsa

$$0 = (a,xy)_{\sigma,\tau} = \tau(x)(a,y)_{\sigma,\tau} + [a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) = [a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $(a,R)_{\sigma,\tau} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa her $x,y \in R$ için

$$[a,x]_{\sigma,\tau}\sigma(y) = 0$$

olur. Böylece

$$[a,R]_{\sigma,\tau}\sigma(R) = 0$$

elde edilir. σ dönüşümü otomorfizma olduğundan son eşitlik

$$[a,R]_{\sigma,\tau} R = 0$$

olmasını gerektirir. R asal halka olduğundan buradan

$$[a,R]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$a \in C_{\sigma,\tau}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

iii) $(a,U)_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. $a \notin C_{\sigma,\tau}$ olduğunu varsayalım. $y \in R$ için $[a,y]u \in U$ olduğu, Önerme 2.0.31 (vii) ve hipotez kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (a, 2\tau([a,y])u)_{\sigma,\tau} \\ &= 2\tau^2([a,y])(a,u)_{\sigma,\tau} + 2\tau([a,\tau([a,y])])\sigma(u) \\ &= 2\tau([a,\tau([a,y])])\sigma(u) \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Buradan R karekteristiği 2 den farklı asal halka ve τ otomorfizma olduğundan her $u \in U$ için

$$[a,[a,y]]_{\sigma,\tau}\sigma(u) = 0$$

elde edilir. $\sigma(U) \neq (0)$, (σ,τ)-Jordan ideal olduğu göz önüne alınırsa ve Önerme 4.1.2 (iii) kullanılırsa son eşitlikten

$$[a,[a,y]]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{4.1.6}$$

elde edilir. Böylece Önerme 4.1.5 den

$$a \in C_{\sigma,\tau} \text{ veya } a \in Z$$

olduğu görülür. Varsayımımızdan $a \in Z$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.1.7. *[12] R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı (σ,τ)-sağ Jordan ideali olsun. $(U,U)_{\sigma,\tau} = 0$ ise R halkası değişmelidir.*

İspat: $(U,U)_{\sigma,\tau} = 0$ olsun. Bu durumda Önerme 4.1.6 (i) den $U \subset Z$ olur. Burada Önerme 4.1.2 (ii) kullanılırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür. □

Teorem 4.1.8. *[12] R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideali olsun.*

$$(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \textit{ ise R değişmelidir.}$$

İspat: $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Her $u,v,w,t \in U$ ve $x \in R$ için $(u,v)_{\sigma,\tau} \in U$ ve Önerme 4.1.1 den $2w[t,x] \in U$ olsun. Bu durumda her $u,v,t,w \in U$, $x \in R$ için $((u,v)_{\sigma,\tau}, 2w[t,x])_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olur. Burada Önerme 2.0.31 (vii) kullanılırsa

$$((u,v)_{\sigma,\tau}, 2w[t,x])_{\sigma,\tau} = \tau(w)((u,v)_{\sigma,\tau}, 2[t,x])_{\sigma,\tau} + 2[(u,v)_{\sigma,\tau}, w]_{\sigma,\tau}\sigma([t,x])$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Burada $[(u,v)_{\sigma,\tau}, w]_{\sigma,\tau} = 0$ olduğundan

$$((u,v)_{\sigma,\tau}, 2w[t,x])_{\sigma,\tau} = \tau(w)((u,v)_{\sigma,\tau}, 2[t,x])_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Hipotezden $((u,v)_{\sigma,\tau}, 2w[t,x])_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan eşitlikten her $u,v,w,t \in U$ ve $x \in R$ için

$$\tau(w)((u,v)_{\sigma,\tau}, 2[t,x])_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$$

olur. Böylece

$$\tau(U)((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,x])_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \quad \forall x \in R, t \in U$$

olur. Bir önceki ifadede x yerine her $y \in R$ olmak üzere *[x,y]* yazılırsa

$$\tau(U)((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. Burada

$$2[t,[x,y]] = 2t[x,y] - 2[x,y]t \in U$$

olduğu kullanılırsa

$$((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} \subset (U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$$

olduğu görülür. Böylece 4.1.7 eşitliği dikkate alınır ve Önerme 3.3.1 kullanılırsa

$$\tau(U) \subset Z \text{ veya } ((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. $\tau(U) \subset Z$ durumunda τ dönüşümünün otomorfizma olduğu ve Önerme 4.1.2 (ii) kullanılırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Şimdi her $u,v,t \in U$ ve $x,y \in R$ için $((U,U)_{\sigma,\tau}, 2[t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$ durumunu inceleyelim. Bu durumda

$$2((U,U)_{\sigma,\tau}, [t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. R karekteristiği 2 den farklı asal halka ve $(U,U)_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$((U,U)_{\sigma,\tau}, [t,[x,y]])_{\sigma,\tau} = 0$$

olduğu açıktır. Buradan her $u,v \in U$ için

$$\begin{aligned} 0 &= ((u,v)_{\sigma,\tau}, [t,[x,y]])_{\sigma,\tau} \\ &= (u,v)_{\sigma,\tau}\sigma([t,[x,y]]) + \tau([t,[x,y]])(u,v)_{\sigma,\tau} \\ &= (u,v)_{\sigma,\tau}\sigma([t,[x,y]]) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $u,v,t \in U$ ve $x,y \in R$ için

$$(u,v)_{\sigma,\tau}\sigma([t,[x,y]]) = 0$$

olur. Bu eşitlik $z \in R$ olmak üzere sol taraftan $\sigma(z)$ ile çarpılırsa

$$\sigma(z)(u,v)_{\sigma,\tau}\sigma([t,[x,y]]) = 0$$

elde edilir. Burada $(u,v)_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan her $u,v \in U, z \in R$ olmak üzere son eşitlik

$$(u,v)_{\sigma,\tau}\tau(z)\sigma([t,[x,y]]) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$(u,v)_{\sigma,\tau}\tau(R)\sigma([t,[x,y]]) = 0$$

olur. Böylece τ dönüşümü otomorfizma olduğundan son eşitlik her $u,v,t \in U$ ve $x,y \in R$ için

$$(u,v)_{\sigma,\tau}R\sigma([t,[x,y]]) = 0$$

elde edilir. O halde

$$(U,U)_{\sigma,\tau}R\sigma([t,[x,y]])=0$$

olur. R asal halka olduğundan son eşitlik her $t\in U$ ve $x,y\in R$ için

$$(U,U)_{\sigma,\tau}=0 \text{ veya } \sigma([t,[x,y]])=0$$

olmasını gerektirir. Burada σ otomorfizma olduğundan

$$(U,U)_{\sigma,\tau}=0 \text{ veya } [t,[x,y]]=0$$

olduğu görülür. Eğer $(U,U)_{\sigma,\tau}=0$ ise Sonuç 4.1.7 den R halkası değişmelidir. Eğer her $t\in U$ ve $x,y\in R$ için [t,[x,y]]=0 ise Önerme 2.0.33 den $U\subset Z$ olur. Buradan $U\subset Z$ ise Önerme 4.1.2 (ii) den R halkası değişmelidir. □

Önerme 4.1.9. *[12] R asal halka ve M, R halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olsun.*

$$(M,R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau} \text{ ise R halkası değişmelidir.}$$

İspat: $(M,R)_{\sigma,\tau}=0$ olduğunu kabul edelim. Her $a,b\in M$ ve $r\in R$ için

$$0=(\tau(a)b,r)_{\sigma,\tau}=\tau(a)(b,r)_{\sigma,\tau}-[\tau(a),\tau(r)]b=-[\tau(a),\tau(r)]b$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$[\tau(a),\tau(r)]b=0$$

olur. Burada τ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $a,b\in M$ ve $r,z\in R$ için

$$\tau([a,r])zb=0$$

olur. Böylece

$$\tau([M,R])RM=0$$

olur. R asal halka olduğundan

$$\tau([M,R])\text{=}0 \text{ veya } M=0$$

olmasını gerektirir. τ dönüşümü otomorfizma olduğu gözönüne alınırsa

$$[M,R]=0 \text{ veya } M=0$$

olduğu görülür. Buradan $M\neq 0$ olduğundan $[M,R]=0$ elde edilir. Yani $M\subset Z$ olur. Böylece Önerme 2.0.35 göz önüne alınırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür.

Şimdi $(M,R)_{\sigma,\tau}\neq 0$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda $(m,r)_{\sigma,\tau}\neq 0$ olacak şekilde en az bir $m\in M$ ve bir $r\in R$ vardır. Bu durumda hipotezden her $r\in R$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [(\tau(r)m,r)_{\sigma,\tau},z] \\
&= [\tau(r)(m,r)_{\sigma,\tau}-[\tau(r),\tau(r)]m,z]_{\sigma,\tau} \\
&= [\tau(r)(m,r)_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau} \\
&= \tau(r)[(m,r)_{\sigma,\tau},z]_{\sigma,\tau}+[\tau(r),\tau(z)](m,r)_{\sigma,\tau} \\
&= [\tau(r),\tau(z)](m,r)_{\sigma,\tau} \\
&= \tau([r,z])(m,r)_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığından.

$$\tau([r,z])(m,r)_{\sigma,\tau}=0$$

olur. Burada Önerme 3.3.1 kullanılırsa her $r,z\in R$ için

$$[r,z]=0$$

olur. Böylece R halkası değişmelidir. $\square$

Teorem 4.1.10. *[12] R asal halka ve U, R halkasının iki yanlı $(\sigma,\tau)-$ Jordan ideali ve $U\not\subset Z$ olsun. R halkasının $(M,R)_{\sigma,\tau}\subset U$ fakat $(M,R)_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ koşulunu sağlayan bir M ideali vardır.*

İspat: Her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için U $(\sigma,\tau)-$ Jordan ideal olduğundan $(2\tau(x)v,u)_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Burada Önerme 2.0.31 (viii) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(2\tau(x)v,u)_{\sigma,\tau} &= 2\tau(x)(v,u)_{\sigma,\tau} - 2[\tau(x),\tau(u)]v \\ &= 2\tau(x)(v,u)_{\sigma,\tau} - 2\tau([x,u])v\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Önerme 4.1.1 den $2\tau([x,u])v \in U$ olduğundan her $x \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$2\tau(x)(v,u)_{\sigma,\tau} \in U$$

elde edilir. Böylece

$$2R(U,U)_{\sigma,\tau} \subset U$$

olur. Her $x,y \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$(2x(v,u)_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau} = 2x(v,u)_{\sigma,\tau}\sigma(y) + 2\tau(y)x(v,u)_{\sigma,\tau}$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Burada $(2x(v,u)_{\sigma,\tau},y)_{\sigma,\tau} \in U$ ve $2\tau(y)x(v,u)_{\sigma,\tau} \in U$ olduğundan son eşitlik her $x,y \in R$ ve $u,v \in U$ için $2x(v,u)_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U$ olmasını gerektirir. Böylece

$$2R(U,U)_{\sigma,\tau}\sigma(R) \subset U$$

olur. Buradan σ dönüşümü otomorfizma olduğundan

$$2R(U,U)_{\sigma,\tau}R \subset U$$

ifadesi sağlanır. $2R(U,U)_{\sigma,\tau}R = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R halkasının karakteristiğinin 2 den farklı olduğu kullanılırsa her $x,y \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$0 = 2x(u,v)_{\sigma,\tau}y = x(u,v)_{\sigma,\tau}y$$

elde edilir. Yani buradan

$$R(U,U)_{\sigma,\tau}R=0$$

olur. R asal halka olduğundan

$$(U,U)_{\sigma,\tau}=0$$

olmasını gerektirir. Burada Sonuç 4.1.7 kullanılırsa R halkasının değişmeli olduğu görülür. Yani $U\subset Z$ olur. Bu durum $U\not\subset Z$ olması ile çelişir. O halde $2R[U,U]_{\sigma,\tau}R\neq 0$ olmak zorundadır. O halde $M=R(U,U)_{\sigma,\tau}R$ alınırsa $M\neq(0)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan M kümesinin U tarafından kapsanan sıfırdan farklı R halkasının bir ideali olduğu kolayca görülür. Şimdi $(M,R)_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu göstereceğiz. $(M,R)_{\sigma,\tau}\subset C_{\sigma,\tau}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $(M,R)_{\sigma,\tau}\neq 0$ olduğundan $(m,r)_{\sigma,\tau}\neq 0$ olacak şekilde en az bir $m\in M$ ve $r\in R$ vardır. O zaman

$$\tau([r,z])(m,r)_{\sigma,\tau}=0$$

olur. Burada Önerme 3.3.1 kullanılırsa ve $(m,r)_{\sigma,\tau}\neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\tau([r,z])=0$$

olur. τ dönüşümü otomorfizma olduğundan her $r,z\in R$ için

$$[r,z]=0$$

olur. O zaman R halkası değişmelidir. Bu durum $U\not\subset Z$ olması ile çelişir. O zaman buradan $(M,R)_{\sigma,\tau}\not\subset C_{\sigma,\tau}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 4.1.11. *[12] R bir asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideali, $a\in R$ olsun. $[U,a]_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in Z$ olur.*

İspat: U, R halkasında sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideal olduğundan her $x\in R$ ve $u\in U$ için $(u,x)_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Böylece hipotezden

$$0=[((u,x)_{\sigma,\tau},a)]_{\sigma,\tau}-([u,x_{\sigma,\tau}],x)_{\sigma,\tau}+(u,[x,a])_{\sigma,\tau}$$

olur. Burada $[((u,x)_{\sigma,\tau},a)]_{\sigma,\tau}=0$ ve $([u,x_{\sigma,\tau}],x)_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan son eşitlikten

$$(u,[x,a])_{\sigma,\tau}=0 \quad \forall u\in U, x\in R \tag{4.1.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(u,[x,y])_{\sigma,\tau}\in U$ olduğu kullanılırsa hipotezden her $x\in R$ ve $u\in U$ için

$$\begin{aligned}0 &= [(u,[x,y])_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}\\ &= -[[u,[x,y]]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}+[2u\sigma([x,y]),a]_{\sigma,\tau}\\ &= -[[u,[x,y]]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Önerme 2.0.30 (iv) kullanılırsa

$$0=-[[u,[x,y]]_{\sigma,\tau},a]_{\sigma,\tau}=-[[u,a]_{\sigma,\tau},[x,y]]_{\sigma,\tau}-[u,[[x,y],a]]_{\sigma,\tau}$$

olduğu görülür. Burada $[[u,a]_{\sigma,\tau},[x,y]]_{\sigma,\tau}=0$ olduğundan son eşitlikten

$$[u,[[x,y],a]]_{\sigma,\tau}=0 \quad \forall x,y\in R, u\in U \tag{4.1.9}$$

elde edilir. Ayrıca 4.1.8 eşitliğini açarak

$$0=(u,[x,a])_{\sigma,\tau}=u\sigma([[x,y],a])+\tau([[x,y],a])u$$

elde edilir. 4.1.9 eşitliğini açarak

$$0=[u,[[x,y],a]]_{\sigma,\tau}=u\sigma([[x,y],a])+\tau([[x,y],a])u$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa her $a,x,y\in R$ ve $u\in U$ için

$$2u\sigma([[x,y],a])=0$$

olduğu görülür. R halkası karakteristiği 2 den farklı bir asal halka olduğundan

$$u\sigma([[x,y],a])=0$$

olur. Burada Önerme 4.1.2 (iii) kullanılırsa

$$\sigma([[x,y],a]) = 0$$

elde edilir. σ dönüşümü otomorfizma olduğundan bu eşitlik

$$[[x,y],a] = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan Önerme 2.0.33 den $a \in Z$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.12. *[12] R bir asal halka U, hem R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideali ve hem de bir alt halkası olsun. $U \not\subset Z$ ise U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.*

İspat: U, $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideal olduğundan Her $y \in R$ ve $u,v \in U$ için $(u,\tau^{-1}(v)y)_{\sigma,\tau} \in U$ olur. Diğer taraftan Önerme 2.0.31 (vii) kullanılırsa

$$(u,\tau^{-1}(v)y)_{\sigma,\tau} = v(u,y)_{\sigma,\tau} + [u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U$$

elde edilir. Burada U, R halkasının bir alt halkası olduğu kullanılırsa $v(u,y)_{\sigma,\tau} \in U$ olduğu görülür. Böylece her $y \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U$$

olur. Diğer taraftan Önerme 2.0.31 (viii) kullanılırsa her $u,v \in U$ ve $y \in R$ için

$$\begin{aligned}([u,\tau^{-1}(v)]\sigma(y),r)_{\sigma,\tau} &= [u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\sigma(r) + \tau(r)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\\ &= [u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(yr) + \tau(r)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y) \in U\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(yr) \in U$ olduğu göz önüne alınırsa son ifade her $y \in R$ ve $u,v \in U$ için

$$\tau(r)[u,\tau^{-1}(v)]_{\sigma,\tau}\sigma(y)\in U$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}]R\subset U$$

olur. Eğer $[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}]=0$ olursa Önerme 4.1.11 den $U\subset Z$ olur. Bu durum hipotez ile çelişir. O halde $R[U,\tau^{-1}(U)]_{\sigma,\tau}]R$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealidir ve U tarafından kapsanır. □

4.2. (σ,τ)-Sağ Jordan İdealler Ve Türevler

Önerme 4.2.1. *[11] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideal ve $a,b\in R$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*
i) *$[U,a]=0$ ise $a\in Z$*
ii) *$[a,U]_{\sigma,\tau}=0$ ise $a\in C_{\sigma,\tau}$ veya $a\in Z$.*
iii) *$a\neq 0$ ve $a[b,U]_{\sigma,\tau}=0$ ise $b\in Z$ veya $b\in C_{\sigma,\tau}$.*
İspat: i) $[U,a]=0$ olsun. Önerme 4.1.1 den her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için $2u\sigma([x,y])\in U$ olduğunu biliyoruz. R halkasının karekteristiği 2 den farklı olduğu ve σ dönüşümünün otomorfizma olduğu göz önüne alınırsa her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için $2u[x,y]\in U$ olur. Buradan hipotezden $[2u[x,y],a]=0$ olur. Böylece $[u[x,y],a]=0$ elde edilir. Burada Önerme 2.0.30 (i) kullanılır ve $[U,a]=0$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}0&=[u[x,y],a]\\&=[u,a][x,y]+u[[x,y],a]\\&=u[[x,y],a]\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Yani her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için $u[[x,y],a]=0$ olur. Böylece son eşitlikten

$$U[[x,y],a]=0 \quad \forall x,y\in R \tag{4.2.10}$$

elde edilir. Burada Önerme 4.1.2 (iii) kullanılırsa

$$[[x,y],a]=0$$

olduğu görülür. Yani her $x,y\in R$ için $[a,[x,y]]=0$ dır. Burada Önerme 2.0.33 kullanılırsa $a\in Z$ elde edilir.

ii) $[a,U]_{\sigma,\tau}=0$ fakat $a\notin C_{\sigma,\tau}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a\in Z$ olduğunu göstereceğiz. Her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için $2u[x,y]\in U$ olduğundan ve Önerme 2.0.30 (ii) kullanılırsa

$$0=[a,2u[x,y]]_{\sigma,\tau}=2\tau(u)[a,[x,y]]_{\sigma,\tau}+2[a,u]_{\sigma,\tau}\sigma([x,y])$$

eşitlikleri sağlanır. Hipotezden $2[a,u]_{\sigma,\tau}\sigma([x,y])=0$ olduğundan her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için

$$2\tau(u)[a,[x,y]]_{\sigma,\tau}=0$$

olur. Burada R karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan bu eşitlikten her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için

$$\tau(u)[a,[x,y]]_{\sigma,\tau}=0$$

elde edilir. Böylece

$$\tau(U)[a,[x,y]]_{\sigma,\tau}=0$$

olur. τ otomorfizma olduğundan

$$U[a,[x,y]]_{\sigma,\tau}=0 \tag{4.2.11}$$

olur. Buradan Önerme 4.1.2 (iii) kullanılırsa her $x,y\in R$ ve $u\in U$ için

$$[a,[x,y]]_{\sigma,\tau}=0$$

olmasını gerektirir. Diğer yandan I_a R halkasının (σ,τ)-iç türevi ve I_x R halkasının iç türevi olmak üzere son eşitlikten

$$I_a I_x(R) = 0$$

olur. Buradan önerme 3.1.4 ten $d_a = 0$ veya $I_x = 0$ elde edilir. Bu ise $a \in C_{\sigma,\tau}$ veya R değişmeli olmasını gerektirir. Burada $a \notin C_{\sigma,\tau}$ olduğundan R halkası değişmeli olur. Yani $a \in Z$ dir.

iii) $a[b,u]_{\sigma,\tau} = 0$ ve $a \neq 0$ olsun. Her $x,y \in R$ ve $u \in U$ olmak üzere $2u[x,u] \in U$ olur. O halde hipotezden $a[b,2u[x,u]]_{\sigma,\tau} = 0$ olur. Burada Önerme 2.0.30 (ii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a[b,2u[x,u]]_{\sigma,\tau} \\ &= a(2\tau(u)[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} + 2[b,u]_{\sigma,\tau}\sigma([x,y])) \\ &= 2a\tau(u)[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} + 2a[b,u]_{\sigma,\tau}\sigma([x,y]) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada hipotezden $2a[b,u]_{\sigma,\tau}\sigma([x,y]) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşilikten her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$2a\tau(u)[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. R karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan son eşitlik her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$a\tau(u)[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$a\tau(U)[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} = 0 \quad \forall x,y \in R, u \in U. \tag{4.2.12}$$

olur. Burada Önerme 4.1.4 kullanılırsa

$$a = 0 \text{ veya } [b,[x,y]]_{\sigma,\tau} = 0$$

elde edilir. $a \neq 0$ olduğundan son ifade her $x,y \in R$ için

$$[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan I_b, b ile üretilen (σ,τ)-iç türev ve I_x, x ile üretilen iç türev olmak üzere her $x,y \in R$ için

$$[b,[x,y]]_{\sigma,\tau} = I_b I_x(y) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$I_b I_x(R) = 0$$

olur. Buradan Önerme 3.1.4 kullanılırsa

$$I_b = 0 \text{ veya } I_x = 0$$

olduğu görülür. Bu ise

$$b \in C_{\sigma,\tau} \text{ veya R değişmeli}$$

olmasını gerektirir □

Teorem 4.2.2. *[11] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideali ve $d \neq 0$ türev olsun.*
i) *$d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise R halkası değişmelidir.*
ii) *$d(U) \subset Z$ ise R halkası değişmelidir.*

İspat: **i)** $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ olsun. Önerme 4.1.1 den her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için $2\tau([x,y])u, 2u\sigma([x,y]) \in U$ olduğunu biliyoruz. Buradan Tanım 2.0.15 göz önününe alınırsa

$$\begin{aligned}[2u,[x,y]]_{\sigma,\tau} &= 2u\sigma([x,y]) - \tau([x,y])2u \\ &= 2u\sigma([x,y]) - 2\tau([x,y])u\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ve U kümesinin toplamsal alt grup olduğu kullanılırsa

$$[2u,[x,y]]_{\sigma,\tau} \in U$$

olduğu görülür. O halde $d(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğundan

$$d([2u,[x,y]]_{\sigma,\tau}) \subset C_{\sigma,\tau}$$

olur. Bu ifadede Önerme 2.0.30 (i), Tanım 2.0.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d([2u,[x,y]]_{\sigma,\tau}) &= d(2u\sigma([x,y]) - \tau([x,y])2u) \\
&= d(2u\sigma([x,y])) - d(\tau([x,y])2u) \\
&= 2d(u)\sigma([x,y]) + 2ud\sigma([x,y]) - d\tau([x,y])2u - 2\tau([x,y])d(u) \\
&= 2d(u)\sigma([x,y]) - 2\tau([x,y])d(u) + 2u\sigma d([x,y]) - 2\tau d([x,y])u \\
&= 2[d(u),[x,y]]_{\sigma,\tau} + 2[u,d([x,y])]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde elde edilir. Burada $d(u) \in C_{\sigma,\tau}$ olduğundan $2[d(u),[x,y]]_{\sigma,\tau} = 0$ ve $2[d(u),[x,y]]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ olduğu göz önüne alınırsa bu eşitlikten $2[u,d([x,y])]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau}$ elde edilir. Böylece

$$[u,d([x,y])]_{\sigma,\tau} \in C_{\sigma,\tau} \quad \forall x,y \in R, u \in U \tag{4.2.13}$$

olur. Şimdi yukarıdaki eşitlikte Önerme 2.0.31 (iv) kullanılırsa her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$\begin{aligned}
0 &= [[u,d([x,y])]_{\sigma,\tau}, d([z,t])]_{\sigma,\tau} \\
&= [[u,d([z,t])]_{\sigma,\tau}, d([x,y])]_{\sigma,\tau} + [u,[d([x,y]),d([z,t])]]_{\sigma,\tau}
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Burada

$$[[u,d([z,t])]_{\sigma,\tau}, d([x,y])]_{\sigma,\tau} = 0$$

olduğundan

$$[u,[d([x,y]),d([z,t])]]_{\sigma,\tau} = 0$$

olur. Buradan

$$[U,[d([R,R]),d([R,R])]]_{\sigma,\tau} = 0 \tag{4.2.14}$$

elde edilir. Burada Önerme 4.1.11 kullanılırsa

$$[d([R,R]), d([R,R])] \subset Z$$

elde edilir. d dönüşümünün türev $[R,R]$ kümesinin R halkasının lie ideali olduğu göz önüne alınırsa Teorem 2.0.36 kullanılırsa $[R,R] \subset Z$ olur. Bu ise her $x,y,z \in R$ için $[x,[y,z]] = 0$ olmasını gerektirir. Böylece Önerme 2.0.33 den R halkası değişmelidir.

ii) $d(U) \subset Z$ olsun. Her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için $[2u,[x,y]] \in U$ olduğundan $d([2u,[x,y]]) \in Z$ olur. Bu ifadeye Tanım 2.0.11 ve Tanım 2.0.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d([2u,[x,y]]) &= d([2u[x,y] - [x,y]2u]) \\
&= d([2u[x,y]]) - d([x,y]2u) \\
&= 2d(u)[x,y] + 2ud([x,y]) - d([x,y])2u - [x,y]2d(u) \\
&= 2d(u)[x,y] - [x,y]2d(u) + 2ud([x,y]) - 2d([x,y])u \\
&= 2[d(u),[x,y]] + 2[u,d([x,y])]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$d([2u,[x,y]]) = 2[d(u),[x,y]] + 2[u,d([x,y])]$$

olduğu görülür. Burada $[d(u),[x,y]] = 0$ olduğu kullanılırsa

$$2[u,d([x,y])] \in Z$$

elde edilir. Buradan R halkası karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan son ifade her $x,y \in R$ ve $u \in U$ için

$$[u,d([x,y])] \in Z$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$[U,d([R,R])] \subset Z$$

olur. Buradan

$$[[U,d([R,R])],d([R,R])]=0$$

olur. Son eşitlikte Önerme 2.0.30 (iii) kullanılırsa

$$[d([R,R]),d([R,R]),U]=0$$

olmasını gerektirir. Burada Önerme 4.2.1 (i) kullanılırsa

$$[d([R,R]),d([R,R])]\subset Z$$

olduğu görülür. Buradan d dönüşümünün türev, $[R,R]$ kümesinin R halkasının lie ideali olduğu göz önüne alınırsa ve Teorem 2.0.36 kullanılırsa $[R,R]\subset Z$ elde edilir. Bu ise Önerme 2.0.33 den R halkasının değişmeli olmasını gerektirir. □

Önerme 4.2.3. *[11] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı* $(\sigma,\tau)-$*sağ Jordan ideali ve d, R halkasında sıfırdan farklı türev olsun.* $a\in R$ *için* $d(U)a=0$ *veya* $(ad(U)=0)$ *ise* $a=0$ *veya R halkası değişmelidir.*

İspat: Her $x,y\in R$ için σ otomorfizma olduğundan $x=\sigma(a)$ ve $y=\sigma(b)$ olacak şekilde en az bir $a,b\in R$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}2u[x,y] &= 2u[\sigma(a),\sigma(b)]\\ &= 2u\sigma([a,b])\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Önerme 4.1.1 kullanılırsa $2u\sigma([a,b])\in U$ olduğundan $2u[x,y]\in U$ olur. O halde her $x,y\in R$, $u\in U$ için $d(2[x,y]u)a=0$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte Önerme 2.0.30 (i), Tanım 2.0.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned}0 &= d(2[x,y]u)a\\ &= d(2xyu-2yxu)a\\ &= 2d(xyu)a-2d(yxu)a\\ &= 2(d(x)yu+xd(yu))a-2(d(y)xu+yd(xu))a\end{aligned}$$

$$= 2d(x)yua + 2xd(yu)a - 2d(y)xua - 2yd(xu)a$$
$$= 2d(x)yua + 2xd(y)ua + 2xyd(u)a - 2d(y)xua - 2yd(x)ua - 2yxd(u)a$$
$$= 2(d(x)y + xd(y) - (d(y)x + yd(x)))ua + 2xyd(u)a - 2yxd(u)a$$
$$= 2d(xy)ua - 2d(yx)ua + 2xyd(u)a - 2yxd(u)a$$
$$= 2d(xy - yx)ua + 2(xy - yx)d(u)a$$
$$= 2d([x,y])ua + 2([x,y])d(u)a$$

elde edilir. Böylece her $x, y \in R$ ve $u \in U$ için

$$2d([x,y])ua + 2([x,y])d(u)a = 0$$

olur. Hipotezden $2([x,y])d(u)a = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitlik her $x, y \in R$ ve $u \in U$ için

$$2d([x,y])ua = 0$$

olmasını gerektirir. R halkası karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan her $x, y \in R$ ve $u \in U$ için

$$d([x,y])ua = 0$$

olur. Böylece

$$d([R,R])Ua = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada Önerme 4.1.4 kullanılırsa

$$d[R,R] = 0 \text{ veya } a = 0$$

elde edilir. [R,R], R halkasının Lie ideal olduğundan Teorem 2.0.36 kullanılırsa

$$[R,R] \subset Z$$

olduğu görülür. Bu ise Önerme 2.0.37 den R halkasının değişmeli olmasını gerektirir. □

Teorem 4.2.4. *[11] R bir asal halka, U, R halkasının sıfırdan farklı* $(\sigma,\tau)-$*sağ Jordan ideal ve d, R halkasının sıfırdan farklı türevi olsun.*

$d^2(U)=0$ *ise R halkası değişmelidir.*

İspat: $d(U)+U$, R halkasında $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan ideali olduğunu gösterelim. $d(U)+U$ kümesinin toplamsal altgrup olduğu görmek kolaydır. Şimdi $(d(U)+U,R)_{\sigma,\tau}\subset d(U)+U$ olduğunu gösterelim. Her $u,v\in U$ ve $x\in R$ için tanım 2.0.15 ve $\sigma d=d\sigma$, $\tau d=d\tau$ eşitliklikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
(d(u)+v,x)_{\sigma,\tau} &= (d(u)+v)\sigma(x)+\tau(x)(d(u)+v)\\
&= d(u)\sigma(x)+v\sigma(x)+\tau(x)d(u)+\tau(x)v\\
&= (d(u),x)_{\sigma,\tau}+(v,x)_{\sigma,\tau}\\
&= (d(u),x)_{\sigma,\tau}+(u,d(x))_{\sigma,\tau}-(u,d(x))_{\sigma,\tau}+(v,x)_{\sigma,\tau}\\
&= d(u)\sigma(x)+\tau(x)d(u)+u\sigma(d(x))+\tau(d(x))u\\
&\quad -(u,d(x))_{\sigma,\tau}+(v,x)_{\sigma,\tau}\\
&= d(u\sigma(x)+\tau(x)u)-(u,d(x))_{\sigma,\tau}+(v,x)_{\sigma,\tau}\\
&= d(u,x)_{\sigma,\tau}-(u,d(x))_{\sigma,\tau}+(v,x)_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan U, R halkasının sıfırdan farklı $(\sigma,\tau)-$ sağ Jordan ideal olduğundan $(u,x)_{\sigma,\tau}\in U$, $(u,d(x))_{\sigma,\tau}\in U$ ve $(v,x)_{\sigma,\tau}\in U$ olur. Böylece $d(u,x)_{\sigma,\tau}-(u,d(x))_{\sigma,\tau}+(v,x)_{\sigma,\tau}\in d(U)+U$ elde edilir. O halde $d(U)+U$, R halkasında $(\sigma,\tau)-$sağ Jordan idealdir. $W=U+d(U)$ olsun. Her $a,b\in U$ için $a+d(b)\in U+d(U)$ dır. Böylece $d(a+d(b))=d(a)+d^2(b)\in d(U)$ olur. O halde $d(W)\subset d(U)\subset U+d(U)=W$ ifadesi sağlanır. Buradan $d(U)\subset U$ olduğu görülür. Hipotezden her $u,v\in U$ için $d^2(u,v)_{\sigma,\tau}=0$ olur. Bu eşitlikte Tanım 2.0.15, Tanım 2.0.8 kullanılırsa ve $d^2(U)=0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= d^2(u,v)_{\sigma,\tau}\\
&= d(d(u,v))_{\sigma,\tau}\\
&= d(d(u\sigma(v)+\tau(v)u))\\
&= d(d(u\sigma(v))+d(\tau(v)u))\\
&= d(d(u)\sigma(v)+ud(\sigma(v))+d(\tau(v))u+\tau(v)d(u))
\end{aligned}
$$

$$= d^2(u)\sigma(v)+d(u)d(\sigma(v))+d(u)d(\sigma(v))+u^2(\sigma(v))+d^2(\tau(v))u$$
$$+d(\tau(v))d(u)+d(\tau(v))d(u)+\tau(v)d^2(u)$$
$$= d(u)d(\sigma(v))+\tau(d(v))d(u)+d(u)\sigma(d(v))+\tau(d(v))d(u)$$
$$= (d(u),d(v))_{\sigma,\tau}+(d(u),d(v))_{\sigma,\tau}$$
$$= 2(d(u),d(v))_{\sigma,\tau}$$

elde edilir. Buradan her $u,v\in U$ için

$$2(d(u),d(v))_{\sigma,\tau}=0$$

olduğu görülür. R halkası karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan son eşitlik

$$(d(u),d(v))_{\sigma,\tau}=0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$d(u)\sigma(d(v))+\tau(d(v))d(u)=0 \quad \forall u,v\in U \tag{4.2.15}$$

olur. Her $x\in R$ ve $u\in U$ için $(d(u),x)_{\sigma,\tau}\in U$ olduğu göz önüne alınır, Tanım 2.0.15, Tanım 2.0.8 ve hipotezden $d^2(U)=0$ kullanılırsa

$$0 = d^2((d(u),x)_{\sigma,\tau})$$
$$= d^2(d(u)\sigma(x)+\tau(x)d(u))$$
$$= d^2(d(u)\sigma(x))+d^2(\tau(x)d(u))$$
$$= d(d(d(u)\sigma(x)))+d(d(\tau(x)d(u)))$$
$$= d(d^2(u)\sigma(x)+d(u)d(\sigma(x)))+d(d(\tau(x))d(u)+\tau(x)d^2(u))$$
$$= d(d(u)+d(\sigma(x)))+d(d(\tau(x))d(u))$$
$$= d^2(u)d(\sigma(x))+d(u)d^2(\sigma(x))+d^2(\tau(x))d(u)+d(\tau(x))d^2(u)$$
$$= d(u)d^2(\sigma(x))+d^2(\tau(x))d(u)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Buradan

$$(d(u),d^2(x))_{\sigma,\tau}=0 \quad \forall x\in R, u\in U \tag{4.2.16}$$

elde edilir. 4.2.16 eşitliğinde her $v,w \in U$ olmak üzere x yerine wv alınır, Tanım 2.0.8 ve hipotezden $d^2(U)=0$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= (d(u),d^2(wv))_{\sigma,\tau}\\
&= (d(u),d(d(wv)))_{\sigma,\tau}\\
&= (d(u),d(d(w)v+wd(v)))_{\sigma,\tau}\\
&= (d(u),d^2(w)v+d(w)d(v)+d(w)d(v)+wd^2(v))_{\sigma,\tau}\\
&= (d(u),2d(w)d(v))_{\sigma,\tau}\\
&= d(u)\sigma(2d(w)d(v))+\tau(2d(w))d(v)d(u)\\
&= 2(d(u),d(w)d(v))_{\sigma,\tau}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada R halkasının karakteristiğinin 2 den farklı olduğu göz önüne alınırsa her $u,v,w \in U$ için

$$(d(u),d(w)d(v))_{\sigma,\tau}=0$$

olduğu görülür. Burada 4.2.15 eşitliğini ve Önerme 2.0.31 (vii) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= (d(u),d(w)d(v))_{\sigma,\tau}\\
&= d(u)\sigma(d(w)d(v))+\tau(d(w)d(v))d(u)\\
&= d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))+\tau(d(w))\tau(d(v))d(u)\\
&= d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))-\tau(d(w))d(u)\sigma(d(v))\\
&= d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))+d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))\\
&= 2d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilr. Böylece her $u,v,w \in U$ için $2d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))=0$ olur. R halkası karakteristiği 2 den farklı asal halka olduğundan son eşitlik her $u,v,w \in U$ için $d(u)\sigma(d(w))\sigma(d(v))=0$ olmasını gerektirir. Bu durumda

$$d(U)\sigma(d(w))\sigma(d(v))=0 \quad \forall u,v \in U \tag{4.2.17}$$

olur. Önerme 4.2.3 kullanılırsa her $u,v,w \in U$ için

$$\sigma(d(w))\sigma(d(v))=0$$

elde edilir. Burada σ dönüşümü otomorfizma olduğu göz önüne alınırsa $v, w \in U$ için

$$d(w)d(v) = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$d(U)d(U) = 0$$

elde edilir. Burada Önerme 4.2.3 kullanılırsa $d(U) = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.2.2 den R halkası değişmelidir.

$\square$

KAYNAKLAR

[1] **Ashraf, M., Rehman, N. (2002). On commutativity of rings with derivations. *Results in Math,* 42, no:1-2, 3-8.**

[2] **Aydın, N., Kandamar, H. (2015). *Soyut Cebir*. (3. Baskı). Çanakkale :Paradigma Akademi, 509.**

[3] **Aydın, N., Kandamar, H. (1994).** $(\sigma,\tau)-$ **Lie ideals in Prime Rings. *Tr J. of Mathematics*, 18, 143-148.**

[4] **Aydın, N., Kaya, K. (1992). Some Generalized in Prime Rings with** $(\sigma,\tau)-$ **Derivations. *Doğa-Tr. J. of Mathematics,* 16, 169-176.**

[5] **Aydın, N. Soytürk, M. (1995).** $(\sigma,\tau)-$**Lie İdeals in Prime Rings with Derivations. *Tr. J.Mathematics,* 19, 239-244.**

[6] **Bergen, J., Herstein, I.N., Kerr, J. (1981). Lie ideals and Derivations of Prime Rings. *Journal of Algebra,* 71, 259-267.**

[7] **Herstein, I.N. (1976). *Rings with involution*. (1.Baskı). Chicago: Univ, Chicago Press, 247.**

[8] **Herstein, I.N. (1979). A Note on Derivations II. *Canad. Math.Bull,* 22(4), 509-511.**

[9] **Herstein, I.N. (1969). *Topics in Ring Theory.* (1.Baskı), Chicago: Univ, Chicago Press, 132.**

[10] **Kandamar, H., Kaya, K. (1993). Lie Ideals and** $(\sigma,\tau)-$ **Derivations In Prime Rings. *H. Bul. of Natural Sciences and Engin Engineering,* 199. sayı**

[11] **Kandamar, H., Kaya, K. (1993).** (σ,τ)**- Right Jordan İdeal. *6.National Mathematics Symposium, Kıbrıs*.**

[12] **Kaya, K., Kandamar, H., Aydın, N. (1993). Generalized Jordan Structure of Prime Rings. *Doğa Tr. J. Math. Acad. Sinica,* Vol.17, No.3, 251-258.**

[13] **Kaya, K. (1988). On** $(\sigma,\tau)-$**Derivations of Prime Rings. *Doğa TU Math,* D.C.12, s.2, 46-51.**

[14] **Kaya, K. (1991).** $(\sigma,\tau)-$**right Lie ideals in Prime Rings. *Proc.4. National Mathematics Symposium, Antakya.***

[15] **Lee, P.H., Lee, T.K. (1981).On derivations of prime rings. *Chinese J. Math,* 9(2), 107-110.**

[16] **Lee, P.H., Lee, T.K. (1983). Lie ideals of Prime Rings with Derivations. *Bull. of the Ins. of Math. Acad. Sinica,* Vol.11 No.1, 81-86.**

[17] **Posner, E. C. (1957). Derivations in prime rings. *Proc.Amer.Soc.,* 8,1093-1100.**

ÖZ GEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Gökşin GÜRBÜZ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Ankara, 20.01.1989

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Öğrenimi	:	Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:	İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar
-SCI :

-Diğer :

b) Bildiriler
-Uluslararası :

-Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Olimpiyat Dershanesi, 2014
	:	Değişim Koleji , 2015
	:	Nazilli Bahçeşehir Koleji, 2017

İLETİŞİM

E-posta Adresi	:	goksin.gurbuz@adu.edu.tr
Tarih	:	