**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ZAMAN SKALASINDA OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLERİN İNCELENMESİ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÖZLEM KARAKAŞ**

**OCAK 2019**

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ZAMAN SKALASINDA OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLERİN İNCELENMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem KARAKAŞ

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN

ZONGULDAK
Ocak 2019

**KABUL:**

Özlem KARAKAŞ tarafından hazırlanan "Zaman Skalasında Ostrowski Tipi Eşitsizliklerin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 21/01/2019

**Danışman:** Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN ..........................
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

**Üye:** Prof. Dr. İsmail YASLAN ..........................
Pamukkale Üniversitesi,
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

**Üye:** Doç. Dr. Yüksel SOYKAN ..........................
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

---

**ONAY:**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2019

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*

Özlem KARAKAŞ

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**ZAMAN SKALASINDA OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLERİN İNCELENMESİ**



**Özlem KARAKAŞ**

**Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN**


**Ocak 2019, 49 Sayfa**



Orta nokta, yamuk ve Simpson kuralı gibi bazı özel yöntemlerin tahmini hata sınırını hesaplamada ve özellikle nümerik analizde olmak üzere matematikte eşitsizliklerin çok geniş bir uygulama alanı vardır. Bu yüzdendir ki eşitsizlikler, matematikçilerin yıllar boyunca ilgisini çeken ve geliştirmek için oldukça zaman ve efor harcadıkları bir konudur.

Tezimizde, yaygın kullanım alanı olan Ostrowski tipi eşitsizlikler üzerine önce B.G. Pachpatte'nin çalışmasını ve daha sonra A. Tuna ile I.B. Yaşar'ın ve son olarak C. Dinu'nun çalışmalarını ele aldık ([1], [2] ve [3] numaralı kaynaklara bakınız).

Öncelikle konunun daha iyi anlaşılması için birinci bölümde zaman skalası ile ilgili temel bilgiler ve ilgili uygulamalar yer aldı. İkinci bölümde Ostrowski tipi eşitsizlikleri reel sayılarda inceledik ve bazı örnekler verdik. Zaman skalasında Ostrowski tipi eşitsizlikleri üçüncü bölümde ele aldık. Son bölümde ise yine zaman skalasında diamond-α ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizliklere yer vererek eşitsizliğin genel halini elde etmiş olduk.

## ÖZET (devam ediyor)

**Anahtar Kelimeler:** Zaman Skalası, Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

**Bilim Kodu:** 403.03.01

## ABSTRACT

**M.Sc. Thesis**

**AN INVESTIGATION OF OSTROWSKI TYPE INEQUALITIES ON TIME SCALES**

**Özlem KARAKAŞ**

**Zonguldak Bülent Ecevit University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Can Murat DİKMEN**
**January 2019, 49 Pages**

Inequalities in mathematics have a wide range of application in calculating the estimated error limit of some specific methods, such as the midpoint, the trapezoid, and the Simpson rules, and in particularly in numerical analysis. That is why inequalities are a matter of time and effort that mathematicians have spent years developing and developing.

In our thesis, we discussed the work of B.G. Pachpatte on Ostrowski type inequalities, which are widely used, and then the works of A. Tuna with I.B. Yaşar and at last C. Dinu (see [1], [2] and [3].)

Firstly, in the first chapter, basic information about the time scale and related applications were taken for a better understanding of the subject. In the second chapter, we examined Ostrowski type inequalities in real numbers and gave some examples. We discussed Ostrowski type inequalities on the time scale in the third chapter. In the last chapter, we have obtained the general form of inequality by including the diamond-α weighted Ostrowski type inequalities on the time scale.

**ABSTRACT (continued)**

**Keywords:** Time Scale, Ostrowski Type Inequality

**Science Code:** 403.03.01

# TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her konuda benden ilgi, alaka ve samimiyetini esirgemeyen pek değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Can Murat DİKMEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eğitimim sırasında beni yetiştiren, üzerimde emeği geçen, özveri ile bizlere bilgilerini aktaran Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarına teşekkürü borç bilirim.

Beni bu günlere getiren, beni yetiştiren, aldığım her kararda yanımda olan çok değerli aileme, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Ender'e ve varlığından güç aldığım oğlum Ege'ye sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak kadınların eğitimine verdiği değeri, "Kadınlarımız için esas mücadele alanı, asıl zafer kazanılması gereken alan, biçim ve kılıkta başarıdan çok; ışıkla, bilgi ve kültürle, gerçek faziletle süslenip donanmaktır." sözüyle dillendiren ve şahsıma ışık tutan Mustafa Kemal ATATÜRK'e sonsuz şükranlarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

## SİMGELER

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | : Tamsayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}_0$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{T}$ | : Zaman Skalası |
| $\sigma$ | : İleri atlama operatörü |
| $\rho$ | : Geriye atlama operatörü |
| $\mu$ | : İleri Graininess (tanecik) fonksiyonu |
| $\eta$ | : Geriye Graininess (tanecik) fonksiyonu |
| $f^{\Delta}$ | : $f$ fonksiyonunun $\Delta$-türevi |
| $f^{\nabla}$ | : $f$ fonksiyonunun $\nabla$-türevi |
| $f^{\Diamond\alpha}$ | : $f$ fonksiyonunun $\Diamond\alpha$-türevi |
| $\Delta f$ | : $f$ fonksiyonunun ileri fark Operatörü |
| $\nabla f$ | : $f$ fonksiyonunun geriye fark Operatörü |
| $C_{rd}$ | : Sağ yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi |
| $C_{ld}$ | : Sol yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi |
| $C[a,b]$ | : Sürekli fonksiyonlar kümesi |
| $G(a,b)$ | : Graininess ölçüm fonksiyonu |

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

Bu bölümde tez konusunun daha iyi anlaşılabilmesi için ayrık ve sürekli analizi birleştirip bir teori oluşturmak amacıyla Stefan Hilger [4] tarafından başlatılan, geleneksel diferensiyel ve fark denklemlerinin birleşmesine ve genişlemesine olanak sağlayan zaman skalası ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için zaman skalasında delta, nabla ve temeli delta ve nabla dinamik türevlerine dayalı ve onların birleşimi olarak da bilinen diamond-$\alpha$ türevleri açıklanarak, bu türevler ile ilgili temel tanımlar ve örnekler ele alınmıştır. Ayrıca zaman skalasında delta, nabla ve diamond-$\alpha$ integral kavramına yer verilerek bu integrallerin özellikleri de incelenmiştir. Zaman skalasında türev ve integral kavramlarıyla ilgili daha detaylı bilgi için bu bölümde yararlandığımız M. Bohner ve A. Peterson'ın "Dynamic Equations on Time Scales" başlıklı kaynağına [5] bakılabilir.

**Tanım 1.0.1** *Bir zaman skalası keyfi reel sayıların boş kümeden farklı kapalı bir alt kümesidir. Örneğin,*

$\mathbb{R},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{N},\ \mathbb{N}_0$

*yani, reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve sıfır dahil doğal sayılar kümeleri ile* $[0,3] \cup [5,7]$ , $[0,1] \cup \mathbb{N}$ *ve Cantor kümesi zaman skalasına örnek olmalarına rağmen*

$\mathbb{Q},\ \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ (0,1)$

*yani, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar, sıfır bir açık aralığı zaman skalası değillerdir.*

**Tanım 1.0.2** $\mathbb{T}$ *bir zaman skalası olsun. Her* $t \in \mathbb{T}$, $t < \max \mathbb{T}$ *için*

$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$

*olarak tanımlanan* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *operatörüne ileriye atlama operatörü denir. Her* $t \in \mathbb{T}$, $t > \min \mathbb{T}$ *için*

$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$

*olarak tanımlanan $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geriye atlama operatörü denir. Her $t \in \mathbb{T}$ için*

$\mu(t) = \sigma(t) - t$

*ile tanımlanan $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna ileriye graininess fonksiyonu denir. Her $t \in \mathbb{T}$ için*

$\nu(t) = t - \rho(t)$

*ile tanımlanan $\nu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna geriye graininess fonksiyonu denir.*

Ayrıca $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$ ve $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. $\mathbb{T}$, reel sayıların kapalı bir alt kümesi olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$ dir.

$\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ-saçılmış nokta ve $\rho(t) < t$ ise $t$ ye sol-saçılmış nokta adı verilir. Eğer $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise, yani $t \in \mathbb{T}$ hem sağ-saçılmış hem de sol-saçılmış ise bu noktaya ayrık (izole) nokta denir.
$\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ yoğun nokta ve $\rho(t) = t$ ise sol yoğun nokta adı verilir. Eğer $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise, yani $t \in \mathbb{T}$ hem sağ, hem de sol yoğun ise bu noktaya yoğun nokta denir.

**Örnek 1.0.3** *Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$, $\rho(t) = t$ bulunur. Böylece her $t \in \mathbb{T}$ yoğun noktadır. Bu durumda, her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 0$ olur.*

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ elde edilir. O halde, her $t \in \mathbb{Z}$ noktası ayrık noktadır. Bu durumda, her $t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 1$ dir.

**Tanım 1.0.4** *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun ve $a, b \in \mathbb{T}, a \leq b$ verilsin. Bu zaman skalasına ait $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığı,*

$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\} = \mathbb{T} \cap [a, b]$

*ile tanımlanır.*

**Tanım 1.0.5** *Delta diferensiyellenebilirlik bölgesi, eğer $\mathbb{T}$ sol saçılmış maksimum $M$ ye sahip ise $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{M\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ olur.*

**Tanım 1.0.6** *Nabla diferensiyellenebilirlik bölgesi, eğer $\mathbb{T}$ sağ saçılmış minimum $m$ ye sahip ise $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}$ olur.*

**Tanım 1.0.7** $\mathbb{T}^\kappa$ *ve* $\mathbb{T}_\kappa$ *sırasıyla delta ve nabla diferensiyellenebilirlik bölgeleri olmak üzere* $\mathbb{T}^\kappa_\kappa$ *diamond-*$\alpha$ *diferensiyellenebilirlik bölgesi* $\mathbb{T}_\kappa \cap \mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}^\kappa_\kappa$ *ile tanımlanır.*

**Tanım 1.0.8** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *ye bir fonksiyon olsun.* $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu, her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = f \circ \sigma(t)$$

*ve* $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu, her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^\rho(t) = f(\rho(t)) = f \circ \rho(t)$$

*ile tanımlanır. Yani* $f^\sigma = f \circ \sigma$ *ve* $f^\rho = f \circ \rho$ *olur.*

**Tanım 1.0.9** $U \subset \mathbb{T}$ *olsun. Her* $\delta > 0$ *için*

$$U(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \delta\}$$

*ile tanımlanan* $U(t)$ *kümesine* $t$ *nin* $\delta$ *komşuluğu denir.*

**Tanım 1.0.10** $t_0 \in \mathbb{T}$ *olsun. Verilen her* $\varepsilon > 0$ *ve her* $t \in U(t_0)$ *için*

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

*olacak şekilde bir* $U(t_0)$ *komşuluğu var ise* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* $t = t_0$ *noktasında süreklidir denir.*

## 1.1 ZAMAN SKALASINDA TÜREV

Bu kısımda zaman skalasında türev tanımlarını verip, özelliklerini inceleyeceğiz.

**Tanım 1.1.1** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *noktası olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \text{ her } s \in U$$

*olacak şekilde* $t$ *noktasının bir* $U$ *komşuluğu (yani, en az bir* $\delta > 0$ *için* $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$*) varsa, bu eşitsizliği sağlayan sonlu* $f^\Delta(t)$ *reel sayısına* $f$ *fonksiyonunun* $t$ *noktasındaki (delta)* $\Delta$*-türevi denir.*

Üstelik her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise $f$ fonksiyonuna $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde delta türevlenebilir denir. $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f$ nin $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde delta türevi denir. Ayrıca, $f$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasındaki $\Delta$-türevi

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde tanımlanabilir.

**Tanım 1.1.2** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktası olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için*

$$\left|f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon \left|\rho(t) - s\right|, \text{ her } s \in U$$

*olacak şekilde $t$ noktasının bir $U$ komşuluğu varsa, bu özelliği sağlayan sonlu $f^{\nabla}(t)$ reel sayısına $f$ fonksiyonunun $t$ noktasındaki (nabla) $\nabla$-türevi denir.*

Üstelik her $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktası için $f^{\nabla}(t)$ sayısı mevcut ise $f$ fonksiyonuna $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde nabla türevlenebilir denir. Ayrıca, $f$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktasındaki $\nabla$-türevi

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}$$

şeklinde tanımlanabilir.

**Tanım 1.1.3** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktası olsun. $\alpha \in [0, 1]$, $\mu_{ts} = \sigma(t) - s$, $\eta_{ts} = s - \rho(t)$ olmak üzere, eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için*

$$\left|\alpha \left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] \eta_{ts} + (1 - \alpha) \left[f(\rho(t)) - f(s)\right] \mu_{ts} - f^{\Diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\eta_{ts}\right| \leq \varepsilon \left|\mu_{ts}\eta_{ts}\right|, \text{ her } s \in U$$

*olacak şekilde $t$ noktasının bir $U$ komşuluğu varsa, bu özelliği sağlayan sonlu $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ reel sayısına $f$ fonksiyonunun $t$ noktasındaki diamond-$\alpha$ türevi denir.*

Üstelik her $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktası için $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ sayısı mevcut ise $f$ fonksiyonuna $\mathbb{T}_\kappa^\kappa$ üzerinde diamond-$\alpha$ türevlenebilir denir. Ayrıca, $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\triangle}(t) + (1 - \alpha) f^{\nabla}(t)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada, $\alpha = 0$ için $f^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\nabla}(t)$ iken $\alpha = 1$ için $f^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Delta}(t)$ olduğuna dikkat ediniz.

**Örnek 1.1.4** *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $c \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = c$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)| = |c - c| = 0 \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \text{ her } s \in \mathbb{T}$$

*eşitsizliği sağlandığından $f^{\Delta}(t) = 0$ olur. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t) = 0$ elde edilir. Buradan $\alpha \in [0, 1]$ için $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\triangle}(t) + (1 - \alpha) f^{\nabla}(t) = 0$ bulunur.*

**Örnek 1.1.5** *$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f(t)=t$ olarak verilsin. Bu taktirde herhangi bir $\varepsilon>0$ için*

$$|f(\sigma(t))-f(s)-1(\sigma(t)-s)|=|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)|=0\le\varepsilon\,|\sigma(t)-s|\,,\ \text{her } s\in\mathbb{T}$$

*için gerçekleştiğinden $f^{\Delta}(t)=1$ bulunur. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t)=1$ elde edilir. Buradan $\alpha\in[0,1]$ için $f^{\Diamond_\alpha}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)+(1-\alpha)\,f^{\nabla}(t)=\alpha+(1-\alpha)=1$ bulunur.*

**Örnek 1.1.6** *$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathbb{T}$ için $f(t)=3t^3$ ile tanımlansın.*

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\lim_{s\to t}\frac{3\sigma(t)^3-3s^3}{\sigma(t)-s}=3((\sigma(t))^2+\sigma(t)\,t+t^2) \\ &= \begin{cases} 9t^2, & \mathbb{T}=\mathbb{R}\ ise \\ 9t^2+9t+3, & \mathbb{T}=\mathbb{Z}\ ise \\ \frac{3}{4}(12t^2+6t+1), & \mathbb{T}=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\ ise \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1}$$

*bulunur. Benzer şekilde,*

$$\begin{aligned} f^{\nabla}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f(\rho(t))-f(s)}{\rho(t)-s}=\lim_{s\to t}\frac{3\rho(t)^3-3s^3}{\rho(t)-s}=3((\rho(t))^2+\rho(t)\,t+t^2) \\ &= \begin{cases} 9t^2, & \mathbb{T}=\mathbb{R}\ ise \\ 9t^2-9t+3, & \mathbb{T}=\mathbb{Z}\ ise \\ \frac{3}{4}(12t^2-6t+1), & \mathbb{T}=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\ ise \end{cases} \end{aligned}$$

*bulunur. Buradan*

$$f^{\Diamond_\alpha}(t)=\begin{cases} 9t^2, & \mathbb{T}=\mathbb{R}\ ise \\ 9t^2+(18\alpha-9)t+3, & \mathbb{T}=\mathbb{Z}\ ise \\ \frac{3}{4}\left(12t^2+(12\alpha-6)\,t+1\right), & \mathbb{T}=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}\ ise \end{cases}$$

*bulunur.*

**Teorem 1.1.7** *Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun.*

**i)** $f$ fonksiyonu $t$ noktasında $\Delta$-türevlenebilir ise, $f$ fonksiyonu aynı noktada süreklidir.

**ii)** Eğer $f$ fonksiyonu $t$ noktasında sürekli ve $t$ sağ saçılmış ise, $f$ fonksiyonu $t$ noktasında $\Delta$-türevlenebilirdir ve $\Delta$-türevi

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

**iii)** Eğer $t$ sağ yoğun nokta ise $f$ fonksiyonunun $t$ noktasında $\Delta$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limit değerinin sonlu bir sayı olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

**iv)** $f$ fonksiyonu $t$ noktasında $\Delta$-türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

eşitliği doğrudur.

**Teorem 1.1.8** *Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ olsun.*

**i)** $f$ fonksiyonu $t$ noktasında $\nabla$ türevlenebilir ise, $f$ fonksiyonu aynı noktada süreklidir.

**ii)** Eğer $f$ fonksiyonu $t$ noktasında sürekli ve $t$ sol saçılmış ise, $f$ fonksiyonu $t$ noktasında $\nabla$-türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\nu(t)}$$

dir.

**iii)** Eğer $t$ sol yoğun nokta ise $f$ fonksiyonunun $t$ noktasında $\nabla$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limit değerinin sonlu bir sayı olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

dir.

**iv)** $f$ fonksiyonu $t$ noktasında $\nabla$-türevlenebilir ise

$$f(\rho(t))=f(t)+\nu(t)f^{\nabla}(t)$$

eşitliği doğrudur.

**Örnek 1.1.9** *$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını ele alalım.*

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her $t \in \mathbb{R}$ sağ yoğun olduğundan Teorem 1.1.7 deki **iii)** şıkkı sağlanır. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{R}$ de $\Delta$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. Eğer $f'(t)$ türev değeri var ise $f, t$ de türevlenebilirdir. (Bu türev bildiğimiz adi türevdir.) Böylece Teorem 1.1.7 deki **iii)** şıkkından

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ iken her $t \in \mathbb{R}$ sol yoğun olduğundan Teorem 1.1.8 deki **iii)** şıkkı sağlanır. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{R}$ de $\nabla$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. O halde Teorem 1.1.8 deki **iii)** şıkkından

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

bulunur.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise her $t \in \mathbb{Z}$ sağ saçılmış olduğundan Teorem 1.1.7 deki **ii)** şıkkı sağlanır. Yani $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

türevi ile $\Delta$-türevlenebilirdir. Buradaki $\Delta$, fark denklemlerinde kullanılan ileri fark operatörüdür. Benzer şekilde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için her $t \in \mathbb{Z}$ sol saçılmış olduğundan Teorem 1.1.7 deki **ii)** şıkkı sağlanır. Yani $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{1} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

türevi ile $\nabla$-türevlenebilirdir. Buradaki $\nabla$, fark denklemlerinde kullanılan geri fark operatörüdür.

**Teorem 1.1.10** *Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta$-türevlenebilir olsun. O zaman*

**i)** $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta$-türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

eşitliği doğrudur.

**ii)** Herhangi bir $\alpha$ sabiti için $\alpha f$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta$-türevlenebilirdir ve $\alpha f$ fonksiyonunun $\Delta$-türevi

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

ile verilir.

**iii)** $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta$-türevlenebilirdir ve $fg$ nin fonksiyonunun $\Delta$-türevi

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))\,g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)\,g(\sigma(t))$$

şeklindedir.

**iv)** Eğer $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise, o halde $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)\,g(t)-f(t)\,g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

ile $\Delta$-türevlenebilirdir.

**Teorem 1.1.11** *Kabul edelim ki $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında $\nabla$-türevlenebilir olsun. O zaman*

**i)** $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında $\nabla$-türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)+g^{\nabla}(t)$$

eşitliği doğrudur.

**ii)** Herhangi bir $\alpha$ sabiti için $\alpha f$ fonksiyonu da $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında $\nabla$-türevlenebilirdir ve $\alpha f$ fonksiyonunun $\nabla$-türevi

$$(\alpha f)^{\nabla}(t)=\alpha f^{\nabla}(t)$$

ile verilir.

**iii)** $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktasında $\nabla$-türevlenebilirdir ve $fg$ nin fonksiyonunun $\nabla$-türevi

$$(fg)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f(\rho(t))\, g^{\nabla}(t) = f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)\, g(\rho(t))$$

şeklindedir.

**iv)** Eğer $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise, o halde $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktasında

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)\, g(t) - f(t)\, g^{\nabla}(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

ile $\nabla$-türevlenebilirdir.

**Teorem 1.1.12** *Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında diamond-$\alpha$ türevlenebilir olsun. O zaman*

**i)** $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında diamond-$\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Diamond_\alpha}(t) + g^{\Diamond_\alpha}(t)$$

eşitliği doğrudur.

**ii)** Herhangi bir $\alpha$ sabiti için $\alpha f$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında diamond-$\alpha$ türevlenebilirdir ve $\alpha f$ fonksiyonunun diamond-$\alpha$ türevi

$$(\alpha f)^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Diamond_\alpha}(t)$$

ile verilir.

**iii)** $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ noktasında diamond-$\alpha$ türevlenebilirdir ve $fg$ nin fonksiyonunun diamond-$\alpha$ türevi

$$(fg)^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)$$

şeklindedir.

**Örnek 1.1.13** *Zaman skalası olarak $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hz : z \in \mathbb{Z}\}$ alalım. Her $t \in \mathbb{T}$ için*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h,$$

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup\{t - nh : n \in \mathbb{N}\} = t - h,$

$\mu(t) = \sigma(t) - t = h$ *ve* $\nu(t) = t - \rho(t) = h$

*elde edilir.* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $t \in \mathbb{T}$ *için*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

*ve benzer şekilde*

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

*türevlerine sahiptir. Delta ve nabla türevlerinin birlikte kullanabildiğimiz diamond-*$\alpha$ *türevi ise,*

$$\begin{aligned} f^{\diamondsuit_\alpha}(t) &= \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla}(t) \\ f^{\diamondsuit_\alpha}(t) &= \alpha \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + (1-\alpha) \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \end{aligned}$$

*dir.*

## 1.2 ZAMAN SKALASINDA İNTEGRAL

**Tanım 1.2.1** *Eğer* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $\mathbb{T}$ *deki sağ yoğun noktalarda sağdan limiti ve sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona düzenli (regular) fonksiyon denir.*

**Tanım 1.2.2** *Eğer* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* $\mathbb{T}$ *deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona sağ yoğun sürekli veya rd-sürekli (rd-continuous) fonksiyon denir.*

**Tanım 1.2.3** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *rd-sürekli fonksiyonların kümesi*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

*ile gösterilir.*

**Tanım 1.2.4** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu türevlenebilir ve rd-sürekli ise*

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

*ile gösterilir.*

**Tanım 1.2.5** *Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ deki sol yoğun noktalarda sürekli ve sağ yoğun noktalarda sağdan limiti varsa bu fonksiyona sol yoğun sürekli veya ld-sürekli (ld-continuous) denir.*

**Tanım 1.2.6** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ld-sürekli fonksiyonların kümesi*

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

*ile gösterilir.*

**Tanım 1.2.7** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve ld-sürekli ise*

$$C^1_{ld} = C^1_{ld}(\mathbb{T}) = C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

*ile gösterilir.*

**Tanım 1.2.8** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ da $\Delta$-türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise, $F$ fonksiyonuna $f$ nin $\Delta$-anti türevi veya ilkeli denir.*

Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\Delta$-anti türevi varsa $f$ ye $\Delta$-integrallenebilir fonksiyon denir ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır.

**Tanım 1.2.9** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_{\kappa}$ da $\nabla$-türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ ise $F$ fonksiyonuna $f$ nin $\nabla$- anti türevi veya ilkeli denir.*

Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\nabla$- anti türevi varsa $f$ ye $\nabla$- integrallenebilir fonksiyon denir ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır.

**Teorem 1.2.10** *Her rd-sürekli fonksiyonun bir antitürevi vardır.*

**Teorem 1.2.11** *Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ise bu taktirde*

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t) f(t)$$

*formülü doğrudur.*

**İspat.** Teorem 1.2.10 dan $f$ nin bir antitürevi vardır ve

$$\begin{aligned} \int_{t}^{\sigma(t)} f(s)\Delta s &= F(\sigma(t)) - F(t) \\ &= \mu(t) F^{\Delta}(t) \\ &= \mu(t) f(t) \end{aligned}$$

bulunur. ■

**Teorem 1.2.12** *Her ld-sürekli fonksiyonun bir antitürevi vardır.*

**Teorem 1.2.13** *Eğer $f \in C_{ld}$ ve $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ ise bu taktirde*

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(s)\nabla s = \nu(t) f(t)$$

*eşitliği sağlanır.*

**İspat.** Teorem 1.2.11 in ispatına benzer şekilde yapılır. ■

**Teorem 1.2.14** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları rd-sürekli ve $a, b, c \in \mathbb{T}$ olduğunu kabul edelim.*

**i)** $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$ *dir.*

**ii)** *Her $\beta$ sabiti için* $\int_a^b \beta f(t)\Delta t = \beta \int_a^b f(t)\Delta t$ *dir.*

**iii)** $a \leq c \leq b$ *olmak üzere* $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$ *dir.*

**iv)** $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$ *dir.*

**v)** $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$ *dır.*

**vi)** $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$ *dir.*

**vii)** $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$ *dir.*

**viii)** *Eğer* $[a,b)$ *aralığında* $|f(t)| \leq g(t)$ *ise*

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

*dir.*

**ix)** *Eğer her* $t \in [a,b)$ *için* $f(t) \geq 0$ *ise*

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

*dır.*

Teorem 1.2.14 teki $vi)$ ve $vii)$ eşitliklerine kısmı integrasyon formülleri denir.

**Örnek 1.2.15** $a, b \in \mathbb{T}$ *ve* $f \in C_{rd}$ *verilsin. Bu durumda*

**i)** Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$ olur. Burada sağ taraftaki integral bildiğimiz Riemann integralidir.

**ii)** Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise bu halde

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanır.

**iii)** Eğer $[a,b]$ aralığı sadece ayrık noktaları içeriyor ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t) f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t\in[b,a)} \mu(t) f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

**Teorem 1.2.16** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *ve* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları ld-sürekli ve* $a, b, c \in \mathbb{T}$ *olduğunu kabul edelim.*

**i)** $\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$ *dir.*

**ii)** *Her $\beta$ sabiti için* $\int_a^b \beta f(t)\nabla t = \beta \int_a^b f(t)\nabla t$ *dir.*

**iii)** $a \leq c \leq b$ *olmak üzere* $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$ *dir.*

**iv)** $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$ *dir.*

**v)** $\int_a^a f(t)\nabla t = 0$ *dır.*

**vi)** $\int_a^b f(\rho(t))g^{\nabla}(t)\nabla t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t$ *dir.*

**vii)** $\int_a^b f(t)g^{\nabla}(t)\nabla t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(\rho(t))\nabla t$ *dir.*

**viii)** *Eğer* $[a,b)$ *aralığında* $|f(t)| \leq g(t)$ *ise*

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla t\right| \leq \int_a^b g(t)\nabla t$$

*dir.*

**ix)** *Eğer her* $t \in [a,b)$ *için* $f(t) \geq 0$ *ise*

$$\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$$

*eşitliği sağlanır.*

**Örnek 1.2.17** $a,b \in \mathbb{T}$ *ve* $f \in C_{ld}$ *verilsin. Bu durumda*

**i)** Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$ olur.

**ii)** Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a+1}^{b} f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t=b+1}^{a} f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

sağlanır.

**iii)** Eğer $[a,b]$ aralığı sadece ayrık noktaları içeriyor ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in(a,b]} \nu(t)\, f(t), & a < b \text{ ise} \\ 0, & a = b \text{ ise} \\ -\sum\limits_{t\in(b,a]} \nu(t)\, f(t), & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir.

**Teorem 1.2.18** *$a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur.*

**i)** $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b - \rho(b)]\, f(\rho(b))$ *dir.*

**ii)** $\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a) - a]\, f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t$ *dir.*

**iii)** $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\nabla t + [b - \rho(b)]\, f(b)$ *dir.*

**iv)** $\int_a^b f(t)\nabla t = [\sigma(a) - a]\, f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\nabla t$ *dir.*

**Teorem 1.2.19** *Aşağıdaki formüllerde $f^{\Delta}(t, s)$ ve $f^{\nabla}(t, s)$ ile $s$ değişkeni sabit tutularak $f(t, s)$ fonksiyonunun $t$ ye göre sırasıyla $\Delta$ ve $\nabla$ türevleri belirtilmiştir. Eğer $f, f^{\Delta}$ ve $f^{\nabla}$ iki değişkenli fonksiyonları sürekli ise bu durumda aşağıdaki formüller doğrudur.*

**i)** $\left(\int_a^t f(t, s)\Delta s\right)^{\Delta} = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^{\Delta}(t, s)\Delta s$ *dir.*

**ii)** $\left(\int_a^t f(t, s)\Delta s\right)^{\nabla} = \int_a^t f^{\nabla}(t, s)\Delta s + f(\rho(t), \rho(t))$ *dir.*

**iii)** $\left(\int_a^t f(t, s)\nabla s\right)^{\Delta} = f(\sigma(t), \sigma(t)) + \int_a^t f^{\Delta}(t, s)\nabla s$ *dir.*

**iv)** $\left(\int_a^t f(t, s)\nabla s\right)^{\nabla} = \int_a^t f^{\nabla}(t, s)\nabla s + f(\rho(t), t)$ *dir.*

**Tanım 1.2.20** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ye tanımlı ve $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda $f$ nin diamond-$\alpha$ integrali $a$ dan $b$ ye,*

$$\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + (1 - \alpha) \int_a^b f(t)\nabla t, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

*şeklinde tanımlıdır. $\Diamond_\alpha$ anti türevi olmadığından, birleştirilmiş $\Diamond_\alpha$türevi bir dinamik türev değildir. Genel olarak,*

$$\left(\int_a^t f(s)\Diamond_\alpha s\right)^{\Diamond_\alpha} \neq f(t), t \in \mathbb{R}$$

*eşitsizliği vardır. Ancak yine de nabla integraline benzer olarak Teorem 1.2.16 dan kolaylıkla çıkarabileceğimiz klasik özelliklerin bazıları diamond-$\alpha$ integrali için de geçerlidir.*

**Teorem 1.2.21** *$a, b, c \in \mathbb{T}$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g$ sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda:*

**i)** $\int_a^b (f(t) + g(t))\Diamond_\alpha t = \int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t + \int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t;$

**ii)** $\int_a^b \beta f(t)\Diamond_\alpha t = \beta \int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t;$

**iii)** $\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t = -\int_b^a f(t)\Diamond_\alpha t;$

**iv)** $\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t = \int_a^c f(t)\Diamond_\alpha t + \int_c^b f(t)\Diamond_\alpha t;$

**v)** $\int_a^a f(t)\Diamond_\alpha t = 0;$

**vi)** *Her* $t$ *için* $f(t) \geq 0$ *ise bu durumda* $\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t \geq 0$ *dır.*

**vii)** *Her* $t$ *için* $f(t) \leq g(t)$ *ise bu durumda* $\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t \leq \int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t$ *dir.*

**viii)** *Her* $t$ *için* $f(t) \geq 0$ *ise ancak ve ancak* $\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t = 0$ *olduğunda* $f \equiv 0$ *dır.*

**ix)** $[a,b)$ *üzerinde* $|f(t)| \leq g(t)$ *ise bu durumda,*

$$\left|\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t\right| \leq \int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t$$

*dir. Eğer* $[a,b)$ *üzerinde* $g(t) = |f(t)|$ *olarak seçilirse,*

$$\left|\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\Diamond_\alpha t$$

*olur.*

**Örnek 1.2.22** $\mathbb{T} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *olsun.* $f(s) = s(1-s)$ *için* $\int_0^1 f(s)\Delta s, \int_0^1 f(s)\nabla s$ *ve* $\int_0^1 f(s)\Diamond_\alpha s$ *integrallerinin değerlerini bulalım. Teorem 1.2.14 iii. yardımıyla,*

$$\int_0^1 f(s)\Delta s = \int_0^{\frac{1}{3}} f(s)\Delta s + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\Delta s + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)\Delta s$$

*olduğundan integralleri ayrı ayrı hesaplayalım,*

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(s)\Delta s = \int_0^{\frac{1}{3}} f(s)ds = \int_0^{\frac{1}{3}} s(1-s)ds = \frac{7}{162}$$

*olur.* $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ *aralığını göz önüne alırsak,* $\sigma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ *ve* $\mu\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ *olduğundan Teorem 1.2.11 yardımıyla,*

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\Delta s = f\left(\frac{1}{3}\right)\mu\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$$

*bulunur.* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *aralığında integrali hesaplarsak,*

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)\Delta s = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 s(1-s)ds = \frac{1}{12}$$

*elde edilir. Böylece*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s)\Delta s &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(s)\Delta s + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\Delta s + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)\Delta s \\ &= \frac{7}{162} + \frac{1}{27} + \frac{1}{12} = \frac{106}{648}\end{aligned}$$

*olur.*

*Nabla integrali için Teorem 1.2.16 iii. yardımıyla,*

$$\int_0^1 f(s)\nabla s = \int_0^{\frac{1}{3}} f(s)\nabla s + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\nabla s + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)\nabla s$$

*olduğundan integralleri ayrı ayrı hesaplayalım,*

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(s)\nabla s = \int_0^{\frac{1}{3}} f(s)ds = \int_0^{\frac{1}{3}} s(1-s)ds = \frac{7}{162}$$

*olur.* $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ *aralığını göz önüne alırsak,* $\rho\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ *ve* $\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ *olduğundan Teorem 1.2.16 iii. yardımıyla,*

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\nabla s = f\left(\frac{1}{2}\right)\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

*bulunur.* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *aralığında integrali hesaplarsak,*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)\nabla s = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)ds = \int_{\frac{1}{2}}^{1} s(1-s)ds = \frac{1}{12}$$

*elde edilir. Böylece*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s)\nabla s &= \int_0^{\frac{1}{3}} f(s)\nabla s + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(s)\nabla s + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(s)\nabla s \\ &= \frac{7}{162} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{109}{648}\end{aligned}$$

*olur.*

*Son olarak diamond-*$\alpha$ *integrali*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(s)\Diamond_\alpha s &= \alpha\int_0^1 f(s)\Delta s + (1-\alpha)\int_0^1 f(s)\nabla s \\ &= \alpha\frac{106}{648} + (1-\alpha)\frac{109}{648} = \frac{109}{648} - \frac{1}{216}\alpha\end{aligned}$$

*bulunur.*

# BÖLÜM 2

# OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Son yirmi yıldan beri, eşitsizlik alanı dikkate değer bir gelişim göstermiştir. Özellikle Čebysev, Grüss, Yamuk (Trapezoid), Ostrowski, Hadamard ve Jensen olarak adlandırılan eşitsizlikler ile ilgili pek çok araştırma makalesi yapılmıştır. Son birkaç yılda yayınlanan bazı araştırma ve monografiler eşitsizlik alanındaki ilerlemenin önemli bir kısmını oluşturmuştur.

En önemli matematiksel eşitsizliklerden biri 1938 yılında klasik integral eşitsizliği olarak A. M. Ostrowski tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir;

Her $x \in [a,b]$, $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli, $(a,b)$ üzerinde diferensiyellenebilir ve türevi $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(a,b)$ üzerinde sınırlı yani $\|f'\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$ olmak üzere,

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[ \frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right](b-a)\|f'\|_\infty \tag{2.1}$$

şeklinde tanıtılmıştır. Bu eşitsizliğin detaylarını [7, syf. 468] daki kaynaktan inceleyebilirsiniz. Burada $\frac{1}{4}$ mümkün en iyi sonuçtur ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez. (2.1) eşitsizliği, $x \in [a,b]$ noktasındaki $f(x)$ değeri ile $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ integral ortalaması arasındaki yaklaşım için bir üst sınır vermektedir.

Bu eşitsizlik literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinmektedir. Ortaya çıkışından beri, pek çok araştırmacı (2.1) tipindeki eşitsizlikler ve uygulamalar üzerine yoğunlaşmıştır. Bu tip eşitsizlikleri incelemek, araştırmacılar için büyük bir ilgi odağı olmuştur. Ostrowski eşitsizliğinden ilham alınarak, bu konuyla ilgili bir dizi makale yazıldı. (bakınız [6], [7] ve [8]).

## 2.1 OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde size sunacağımız B.G. Pachpatte tarafından hazırlanan çalışmada, iki fonksiyon ve onların türevlerini içeren Ostrowski tipinde yeni eşitsizliklerin üzerinde durulmuştur.

Yapılan çalışmanın ilginç bir özelliği, elde edilen sonuçların basit bir şekilde sunulmuş olması ve bu tip eşitsizliklerin yeni tahminlerine olanak sağlamasıdır.
Pachpatte tarafından elde edilen temel sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**Teorem 2.1.1** *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $(a, b)$ üzerinde diferensiyellenebilir, ayrıca $f', g' : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevleri $(a, b)$ üzerinde sınırlı olsun. Yani, $\|f'\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$, $\|g'\|_\infty = \sup_{x\in(a,b)} |g'(x)| < \infty$. Bu durumda, her $x \in [a, b]$ için*

$$\left| f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)} \left[ g(x) \int_a^b f(y)dy + f(x) \int_a^b g(y)dy \right] \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ |g(x)| \|f'\|_\infty + |f(x)| \|g'\|_\infty \right\} \left[ \frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) \quad (2.2)$$

*dir.*

**İspat.** Her $x, y \in [a, b]$ için aşağıdaki özdeşlikleri kullanabiliriz:

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt, \quad (2.3)$$

$$g(x) - g(y) = \int_y^x g'(t)dt. \quad (2.4)$$

Sırasıyla (2.3) ve (2.4) özdeşliklerinin her iki tarafını $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpıp taraf tarafa topladığımızda:

$$2f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)] = g(x)\int_y^x f'(t)dt + f(x)\int_y^x g'(t)dt \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) eşitliğinin her iki tarafının $[a, b]$ üzerinde $y$ ye göre integralini alırsak;

$$\int_a^b [2f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)]] \, dy = \int_a^b \left[ g(x)\int_y^x f'(t)dt + f(x)\int_y^x g'(t)dt \right] dy$$

$$2f(x)g(x)(b-a) - g(x) \int_a^b f(y)dy - f(x) \int_a^b g(y)dy \\ = \int_a^b \left[ g(x)\int_y^x f'(t)dt + f(x)\int_y^x g'(t)dt \right] dy$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $2(b-a)$ ile bölünür ise

$$f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)} \left[ g(x) \int_a^b f(y)dy + f(x) \int_a^b g(y)dy \right] \\ = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left[ g(x)\int_y^x f'(t)dt + f(x)\int_y^x g'(t)dt \right] dy \quad (2.6)$$

bulunur. (2.6) eşitliğinden ve mutlak değer özelliklerinden:

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \{|g(x)|\,\|f'\|_\infty |x-y|+|f(x)|\,\|g'\|_\infty |x-y|\}\,dy \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}(|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty)\int_a^b |x-y|\,dy \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}(|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty)\left(\int_a^x (x-y)dy+\int_x^b (y-x)dy\right) \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}(|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty)\left[xy-\frac{y^2}{2}\Big|_{y=a}^{x}+\frac{y^2}{2}-xy\Big|_{y=x}^{b}\right] \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\,[\frac{2x^2-2xa-2xb+a^2+b^2}{2}]\right\} \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\left[\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2}\right]\right\} \\
=\ & \frac{1}{2}\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\}\left[\frac{1}{4}+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right](b-a)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

**Uyarı 2.1.2** *Teorem* 2.1.1 *de* $g(x)=1$ *ve bundan dolayı* $g'(x)=0$ *alındığında, (2.1) deki bilinen Ostrowski eşitsizliğini yeniden elde etmiş oluruz.*
*(2.6) eşitsizliğinin her iki tarafının* $[a,b]$ *etrafında,* $x$ *e göre integralini alıp, özdeşliğin sonuçlarını tekrar yazdıktan sonra, mutlak değer özelliklerini kullanırsak ,*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\right| \\
&\qquad\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\left[\int_a^b \{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\}\,|x-y|\,dy\right]dx. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

*şeklindeki Grüss tipi eşitsizliği elde ederiz.*

Teorem 2.1.1 in benzer bir çeşiti de aşağıdaki teoremde sunulmuştur.

**Teorem 2.1.3** $f$, $g$, $f'$, $g'$ *fonksiyonları Teorem* 2.1.1 *deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda her* $x\in[a,b]$ *için;*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x)-\frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)dy\right| \\
&\qquad\leq \frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\left[\frac{(x-a)^3+(b-x)^3}{3}\right] \quad (2.8)
\end{aligned}$$

*dir.*

**İspat.** Hipotezden (2.3) ve (2.4) özdeşlikleri mevcuttur. (2.3) ve (2.4) özdeşliklerinin sol ve sağ taraflarını, taraf tarafa çarptığımızda;

$$f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)] + f(y)g(y) = \left\{ \int_y^x f'(t)dt \right\} \left\{ \int_y^x g'(t)dt \right\}. \tag{2.9}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.9) eşitliğinin her iki tarafının da $[a, b]$ etrafında $y$ ye göre integralini alıp tekrar yazdığımızda,

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)g(x)dy - \left[ \int_a^b g(x)f(y)dy + \int_a^b f(x)g(y)dy \right] + \int_a^b f(y)g(y)dy \\ &= \int_a^b \left\{ \int_y^x f'(t)dt \right\} \left\{ \int_y^x g'(t)dt \right\} dy \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &f(x)g(x) - \frac{1}{b-a} \left[ g(x) \int_a^b f(y)dy + f(x) \int_a^b g(y)dy \right] + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left\{ \int_y^x f'(t)dt \right\} \left\{ \int_y^x g'(t)dt \right\} dy \end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir. Mutlak değer özelliklerinden,

$$\begin{aligned} &\left| f(x)g(x) - \frac{1}{b-a} \left[ g(x) \int_a^b f(y)dy + f(x) \int_a^b g(y)dy \right] + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y)g(y)dy \right| \\ \leq\ & \frac{1}{b-a} \int_a^b \left\{ \|f'\|_\infty |x-y| \right\} \left\{ \|g'\|_\infty |x-y| \right\} dy \\ \leq\ & \frac{1}{b-a} \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \int_a^b |x-y|^2 dy \\ =\ & \frac{1}{b-a} \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \int_a^b (x-y)^2 dy \\ =\ & \frac{1}{b-a} \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \left[ \frac{(x-a)^3 + (b-x)^3}{3} \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. İspat tamamlandı.

Şimdi ispatlanan eşitsizliklerin geçerli olduklarını birer örnek ile gösterelim. ■

**Örnek 2.1.4** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$ olsun. Bu durumda $f'(t) = 1$ ve $\|f'\|_\infty = 1$ dir.*

(2.1) *deki eşitsizlikte yerine yazdığımızda,*

$$\begin{aligned}
t-\frac{1}{b-a}\int_a^b tdt &\leq \left[\frac{1}{4}+\frac{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a).1 \\
t-\frac{1}{b-a}\left.\frac{t^2}{2}\right|_a^b &\leq \left[\frac{1}{4}+\frac{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a) \\
t-\frac{b^2-a^2}{2(b-a)} &\leq \frac{b-a}{4}+\frac{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)} \\
t-\frac{a+b}{2} &\leq \frac{(b-a)^2+4t^2-4t(a+b)+(a+b)^2}{4(b-a)} \\
\frac{2t-(a+b)}{2} &\leq \frac{(b-a)^2+4t^2-4t(a+b)+(a+b)^2}{4(b-a)}
\end{aligned}$$

$b-a>0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
[2t-(a+b)].2(b-a) &\leq (b-a)^2+4t^2-4t(a+b)+(a+b)^2 \\
4t(b-a)-2(b^2-a^2) &\leq (b-a)^2+4t^2-4t(a+b)+(a+b)^2 \\
0 &\leq 4t^2-8tb+4b^2 \\
0 &\leq (2t-2b)^2
\end{aligned}$$

*elde edilir. Bu ise eşitsizliğin doğru olduğunu gösterir.*

**Örnek 2.1.5** $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t$ *ve* $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(t)=\ t+1$ *olsun.* $f'(t)=1$ , $\|f'\|_\infty=1$ *ve* $g'(t)=1$ *ve* $\|g'\|_\infty=1$ *dir.* (2.2) *deki eşitsizlikte yerine yazdığımızda,*

$$\begin{aligned}
\left|t(t+1)-\frac{1}{2(1-0)}\left[(t+1)\int_0^1 tdt+t\int_0^1(t+1)\,dt\right]\right| &\leq \frac{1}{2}\{|t+1|+|t|\}\left[\frac{1}{4}+\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{(1-0)^2}\right] \\
\left|\left(t^2+t\right)-\frac{1}{2}\left[(t+1)\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1+t\left.\frac{t^2}{2}+t\right|_0^1\right]\right| &\leq \frac{1}{2}\left(|t+1|+|t|\right)\left[\frac{1}{4}+(t-\frac{1}{2})^2\right] \\
\left|\left(t^2+t\right)-\frac{1}{2}\left[(t+1)\frac{1}{2}+t\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\right| &\leq \frac{1}{2}\left(|t+1|+|t|\right)\left[t^2-t+\frac{1}{2}\right] \\
\left|t^2-\frac{1}{4}\right| &\leq \frac{1}{4}(2t+1)\left(2t^2-2t+1\right) \\
\left|4t^2-1\right| &\leq (2t+1)\left(2t^2-2t+1\right)
\end{aligned}$$

*bulunur. Eğer* $t\geq\frac{1}{2}$ *ise* $4t^2-1>0$ *ve* $2t-1\geq 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
4t^2-1 &\leq (2t+1)\left(2t^2-2t+1\right) \\
0 &\leq (2t+1)\left(-2t+1+2t^2-2t+1\right) \\
0 &\leq 2(2t+1)\left(t^2-2t+1\right) \\
0 &\leq 2(2t+1)(t-1)^2
\end{aligned}$$

*sağlanır. Eğer* $t < \frac{1}{2}$ *ise* $4t^2 - 1 < 0$ *ve* $2t + 1 > 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} -4t^2 + 1 &\leq (2t+1)\left(2t^2 - 2t + 1\right) \\ 0 &\leq (2t+1)\left(2t - 1 + 2t^2 - 2t + 1\right) \\ 0 &\leq (2t+1)\, 2t^2 \end{aligned}$$

*sağlanır. Bu ise* (2.2) *deki eşitsizliğin doğru olduğunu gösterir.*

**Uyarı 2.1.6** (2.11) *deki eşitsizliğin her iki tarafının,* $[a, b]$ *etrafında* $x$ *e göre integralini alıp, mutlak değer özelliklerini kullanarak, temel hesaplar ile eşitsizlik,*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\right| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2 \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty$$

*şeklinde tekrar yazılabilir. Bu şekli ile eşitsizliklik iyi bilinen Čebyšev eşitsizliğine (bakınız [9 ,s. 297]) dönüşmüştür.*

# BÖLÜM 3

# ZAMAN SKALASINDA OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bir önceki bölümde $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için incelenen Ostrowski tipi eşitsizlikleri Pachpatte (bkz. [1]) çalışmıştır. A.Tuna ve I.B.Yaşar, $\mathbb{T}$ zaman skalası olmak üzere $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun delta türevi için çalışmışlardır (bkz. [2]). Bu bölümde bu çalışma üzerinde durulmuştur.

Yapılan incelemeler sırasında fark edilmiştir ki, bir önceki bölümde Pachpatte'nin vermiş olduğu Teorem 2.1.1 deki eşitsizlik, bu çalışmada yapılan bir mutlak değer hatası sebebiyle iddia edildiği gibi Teorem 3.1.1 ile genelleştirilememiştir. Biz bu bölümde yapılan hatayı düzelterek eşitsizliğin genelleştirilmiş halini elde edeceğiz. Daha sonra A.Tuna ve I.B.Yaşar tarafından verilen ikinci teorem üzerinde duracağız.

## 3.1 ZAMAN SKALASINDA OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

A.Tuna ve I.B. Yaşar tarafından yapılan çalışmadaki teorem aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.1.1** *$f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ üzerinde rd-sürekli ve $\mathbb{T}^\kappa$ da diferensiyellenebilir ve türevleri $f^\triangle, g^\triangle : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde sınırlı olsun. Yani $\left\|f^\triangle\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{T}^\kappa} \left|f^\triangle(x)\right| < \infty$, $\left\|g^\triangle\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{T}^\kappa} \left|g^\triangle(x)\right| < \infty$. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}$ için*

$$\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)\triangle y + f(x)\int_a^b g(y)\triangle y\right]\right|$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^\triangle\right\|_\infty + |f(x)|\left\|g^\triangle\right\|_\infty\right\}\left[x(b-a) - (b^2-a^2) + \int_a^b \sigma(y)\triangle y\right] \quad (3.1)$$

*dir.*

Verilen bu teoremde, A.Tuna ve I.B.Yaşar'ın (bakınız [2]) makalesinde iddia edildiği gibi $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alındığında Pachpatte' nin Teorem 2.1.1 ine ulaşılamamaktadır. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$\sigma(y)=y$ olur. Elde ettikleri eşitsizlikte yerine yazdığımızda;

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\right\}\left[x(b-a)-(b^2-a^2)+\int_a^b ydy\right] \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\right\}\left[x(b-a)-(b^2-a^2)+\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right] \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\right\}\left[x(b-a)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right] \\
=\ & \frac{1}{2}\left\{|g(x)|\,\|f'\|_\infty+|f(x)|\,\|g'\|_\infty\right\}\left[x-\frac{b+a}{2}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $\left[x-\frac{b+a}{2}\right]$ ifadesinin $\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)$ olması gerekirken bu doğru değildir. Şimdi bulunan eşitsizliğin doğru olmadığını bir örnek ile gösterelim.

**Örnek 3.1.2** *$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t$ ve $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(t)=1$ olsun. $f'(t)=1$ , $\|f'\|_\infty=1$ ve $g'(t)=0$ ve $\|g'\|_\infty=0$ dir. İkinci eşitsizlikte yerine yazdığımızda,*

$$\begin{aligned}
\left|t-\frac{1}{2(1-0)}\left[\int_0^1 tdt+t\int_0^1 dt\right]\right| &\leq \frac{1}{2}\left\{|1|\,.1+|t|\,.0\right\}\left[t-\frac{1+0}{2}\right] \\
\left|t-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+t\right]\right| &\leq \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\right] \\
\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\right| &\leq \frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\right] \\
\left|t-\frac{1}{2}\right| &\leq t-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

*bulunur. Bu ise her $t\in[0,1]$ için doğru değildir..*

Bu teorem düzeltilerek aşağıdaki şekilde revize edilmiştir.

**Teorem 3.1.3** *$f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ üzerinde rd-sürekli ve $\mathbb{T}^\kappa$ da diferensiyellenebilir ve türevleri $f^\triangle, g^\triangle:\mathbb{T}^\kappa\to\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde sınırlı olsun. Yani $\left\|f^\triangle\right\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{T}^\kappa}\left|f^\triangle(x)\right|<\infty$, $\left\|g^\triangle\right\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{T}^\kappa}\left|g^\triangle(x)\right|<\infty$. Bu durumda her $t\in\mathbb{T}$ için*

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x)-\tfrac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)\triangle y+f(x)\int_a^b g(y)\triangle y\right]\right| \\
&\leq \tfrac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^\triangle\right\|_\infty+|f(x)|\left\|g^\triangle\right\|_\infty\right\}\left[(a^2+b^2)-x(a+b)+\int_a^x\sigma(y)\triangle y-\int_x^b\sigma(y)\triangle y\right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

*dir.*

**İspat.** Her $x, y \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki özdeşlikler mevcuttur.

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f^{\triangle}(\tau)\triangle\tau \tag{3.3}$$

$$g(x) - g(y) = \int_y^x g^{\triangle}(\tau)\triangle\tau \tag{3.4}$$

Özdeşliklerin her iki tarafını sırayla $g(x)$ ve $f(x)$ ile çarpıp taraf tarafa topladığımızda,

$$2f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)] = g(x)\int_y^x f^{\triangle}(\tau)\triangle\tau + f(x)\int_y^x g^{\triangle}(\tau)\triangle\tau \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafında $\mathbb{T}$ üzerinde $y$ ye göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned} 2f(x)g(x)(b-a) - &\left[g(x)\int_a^b f(y)\triangle y + f(x)\int_a^b g(y)\triangle y\right] \\ &= \int_a^b \left\{g(x)\int_y^x f^{\triangle}(\tau)\triangle\tau + f(x)\int_y^x g^{\triangle}(\tau)\triangle\tau\right\}\triangle y \end{aligned} \tag{3.6}$$

Eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{2(b-a)}$ile çarparsak,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}&\left[g(x)\int_a^b f(y)\triangle y + f(x)\int_a^b g(y)\triangle y\right] \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left\{g(x)\int_y^x f^{\triangle}(\tau)\triangle\tau + f(x)\int_y^x g^{\triangle}(\tau)\triangle\tau\right\}\triangle y \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Mutlak değer özelliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} &\left|f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)\triangle y + f(x)\int_a^b g(y)\triangle y\right]\right| \\ \leq\ & \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty |x-y| + |f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_\infty |x-y|\right\}\triangle y \\ =\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty + |f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_\infty\right\}\int_a^b |x-y|\triangle y \\ =\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty + |f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_\infty\right\} \\ & \times\left[\int_a^x (x-y)\triangle y + \int_x^b (y-x)\triangle y\right] \\ =\ & \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty + |f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_\infty\right\} \\ & \times\left[\int_a^x x\triangle y - \int_a^x y\triangle y + \int_x^b y\triangle y - \int_x^b x\triangle y\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\quad \times\left[\left.xy\right|_a^x-\left.y^2\right|_a^x+\int_a^x \sigma(y)\triangle y+\left.y^2\right|_x^b-\int_x^b \sigma(y)\triangle y-\left.xy\right|_x^b\right] \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\quad \times\left[x^2-xa-x^2+a^2+b^2-x^2-xb+x^2+\int_a^x \sigma(y)\triangle y-\int_x^b \sigma(y)\triangle y\right] \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f^{\triangle}\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g^{\triangle}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\quad \times\left[(a^2+b^2)-x(a+b)+\int_a^x \sigma(y)\triangle y-\int_x^b \sigma(y)\triangle y\right]
\end{aligned}
$$

ispat tamamlandı. ■

**Sonuç 3.1.4** *Eğer* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *ise* $\sigma(y)=y$ *olur. Elde ettiğimiz eşitsizlikte yerine yazdığımızda;*

$$
\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(x)\int_a^b f(y)dy+f(x)\int_a^b g(y)dy\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f'\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g'\right\|_{\infty}\right\}\left[(a^2+b^2)-x(a+b)+\int_a^x y\triangle y-\int_x^b y\triangle y\right] \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f'\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g'\right\|_{\infty}\right\}\left[(a^2+b^2)-x(a+b)+x^2-\frac{a^2+b^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f'\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g'\right\|_{\infty}\right\}\left[\frac{a^2+b^2}{2}-x(a+b)+x^2\right] \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f'\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g'\right\|_{\infty}\right\}\left[\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{(a+b)^2}{4}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(x)|\left\|f'\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g'\right\|_{\infty}\right\}\left[\frac{(b-a)^2}{4}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{|g(x)|\left\|f'\right\|_{\infty}+|f(x)|\left\|g'\right\|_{\infty}\right\}\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a).
\end{aligned}
$$

*Teorem* 2.1.1 *deki sonuca ulaşırız.*

Elde ettiğimiz bu düzenlemeden sonra (A.Tuna 2007) nin ikinci teoremini inceleyeceğiz. Bu teoremde önceki teoremde olduğu gibi bir hata ile karşılaşılmamıştır.

**Teorem 3.1.5** $f, g, f^{\Delta}, g^{\Delta}$ *Teorem* 3.1.3 *deki gibi tanımlansın. Bu durumda her* $x \in \mathbb{T}$ *için*

$$
\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x)-\frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)\Delta y+f(x)\int_a^b g(y)\Delta y\right]+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)\Delta y\right| \\
&\leq \tfrac{1}{b-a}\left\|f^{\triangle}\right\|_{\infty}\left\|g^{\triangle}\right\|_{\infty}\left[x^2(b-a)-2x(b^2-a^2)+(b^3-a^3)+\int_a^b\left[2x-y-\sigma(y)\right]\sigma(y)\Delta y\right]
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

*dir.*

**İspat.** (3.3) ve (3.4) teki özdeşlikler hipotezden mevcuttur. Özdeşliklerin sol ve sağ taraflarını, taraf tarafa çarptığımızda;

$$f(x)g(x) - [g(x)f(y) + f(x)g(y)] + f(y)g(y) = \left\{\int_y^x f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau\right\}\left\{\int_y^x g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau\right\} \quad (3.9)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.9) denkleminin her iki tarafının da $\mathbb{T}$ de $y$ ye göre integralini alarak tekrar yazdığımızda;

$$f(x)g(x) - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)\Delta y + f(x)\int_a^b g(y)\Delta y\right] + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)\Delta y = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{\int_y^x f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau\right\}\left\{\int_y^x g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau\right\}\Delta y \quad (3.10)$$

eşitliğini elde ederiz. Mutlak değer özelliklerini kullandığımızda;

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)g(x) - \frac{1}{b-a}\left[g(x)\int_a^b f(y)\Delta y + f(x)\int_a^b g(y)\Delta y\right] + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)\Delta y\right| \\
\leq\ & \frac{1}{b-a}\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty \left\|g^{\triangle}\right\|_\infty \int_a^b |x-y|^2 \Delta y \\
=\ & \frac{1}{b-a}\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty \left\|g^{\triangle}\right\|_\infty \int_a^b (x^2 - 2xy + y^2)\Delta y \\
=\ & \tfrac{1}{b-a}\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty \left\|g^{\triangle}\right\|_\infty \left[x^2 y\Big|_a^b - 2x(y^2\Big|_a^b - \textstyle\int_a^b \sigma(y)\Delta y) + y^3\Big|_a^b - \textstyle\int_a^b (\sigma(y)(\sigma(y)+y))\Delta y\right] \\
=\ & \frac{1}{b-a}\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty \left\|g^{\triangle}\right\|_\infty [x^2(b-a) - 2x(b^2-a^2) + (b^3-a^3) \\
& +2x\int_a^b \sigma(y)\Delta y - \int_a^b (\sigma(y)(\sigma(y)+y))\Delta y] \\
=\ & \tfrac{1}{b-a}\left\|f^{\triangle}\right\|_\infty \left\|g^{\triangle}\right\|_\infty \left[x^2(b-a) - 2x(b^2-a^2) + (b^3-a^3) + \textstyle\int_a^b [2x - y - \sigma(y)]\,\sigma(y)\Delta y\right]
\end{aligned}$$

ispat tamamlandı. ■

**Sonuç 3.1.6** *Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa $\sigma(y) = y$ olur. Eşitsizlikte yerine yazdığımızda Teorem* 2.1.3 *deki sonuca ulaşılır.*

**Sonuç 3.1.7** *A.Tuna ve I.B. Yaşar'ın makalesinde(bakınız [2]) ilk teoremdeki hatanın oluşma sebebi, mutlak değer fonksiyonunun integrali alınırken, verilen aralıkta pozitif ve negatif olduğu durumların gözardı edilmiş olmasıydı. İkinci teoremde bu hatanın tekrarlanmamasının sebebi ise mutlak değer fonksiyonunun karesinin her zaman pozitif olması, ilk teoremde önemsenmeyen bu durumdan ötürü hata oluşmasına izin vermemiştir.*

# BÖLÜM 4

# ZAMAN SKALASINDA DİAMOND-$\alpha$ OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Tezimizin bu bölümünde de Christian Dinu tarafından incelenen zaman skalasında hem delta hem de nabla türevin ikisini de aynı zamanda kullabildiğimiz diamond-$\alpha$ ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizliklerden bahsedeceğiz.

Son zamanlarda, zaman skalasında dinamik türevlerin uygulamaları ve teorisi ile ilgili yeni gelişmeler mevcuttur. Çalışmalar adi diferensiyel ve fark denklemlerinin genişletilmesine ve birleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Aynı zamanda, teorik bakış açısıyla, sürekli teorinin ayrık teoriyle birleştirilmesidir. Dahası, bir çok hesaplama ve nümerik uygulamalarda kullanılan önemli bir araçtır. Dimond-$\alpha$ ile adlandırılan $\Diamond_\alpha$ ile gösterilen dinamik türev, iyi bildiğimiz $\Delta(delta)$ ve $\nabla(nabla)$ dinamik türevlerinin birleştirilmesine dayanır. Diamond-$\alpha$ dinamik türevi, $\alpha = 1$ için $\Delta$-türevine, $\alpha = 0$ için $\nabla$-türevine dönüşür. Öte yandan, herhangi bir ayrık zaman skalasında $\alpha = 1/2$ olduğunda ağırlıklı dinamik türevi temsil eder. Diamond-$\alpha$ dinamik türev ile ilgili hesabın temel kuralların daha detaylı incelemesi için [4], [5] ve [10] nolu kaynaklara bakılabilir.

## 4.1 ZAMAN SKALASINDA DİAMOND-$\alpha$ OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Daha önce Pachpatte ve A.Tuna tarafından reel sayılarda ve zaman skalasında çalışılan Ostrowski tipi eşitsizliklerinin en genel halini, Christina Dinu'nun zaman skalasında diamond-$\alpha$ türeviyle yaptığı çalışmaları (bakınız [3]) inceleyerek göstereceğiz.

**Tanım 4.1.1** *$f$, delta ve nabla diferensiyellenebilir fonksiyon $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\left\|f^\Delta\right\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}^\kappa} \left|f^\Delta(t)\right|$ ve $\left\|f^\nabla\right\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}^\kappa} \left|f^\nabla(t)\right|$ olarak tanımlanır. Ayrıca*

$$\left\|f^{\Diamond_\alpha}\right\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}^\kappa_\kappa} \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|$$

*olarak tanımlarız. Açıktır ki,*

$$\begin{aligned}\left\|f^{\Diamond_\alpha}\right\|_\infty &= \sup_{t\in\mathbb{T}_\kappa^\kappa}\left|\alpha f^{\Delta}(t)+(1-\alpha)f^{\nabla}(t)\right| \\ &\leq \alpha\sup_{t\in\mathbb{T}_\kappa^\kappa}\left|f^{\Delta}(t)\right|+(1-\alpha)\sup_{t\in\mathbb{T}_\kappa^\kappa}\left|f^{\nabla}(t)\right| \\ &= \alpha\left\|f^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^{\nabla}\right\|_\infty .\end{aligned}$$

*$f^{\Delta}$ ve $f^{\nabla}$ aynı noktada maksimum değerlerine ulaşırlarsa, yukarıdaki eşitlik durumu mevcut olur.*

Şimdi de aşağıdaki tüm zaman skalalarında geçerli olan lemmaları inceleyeceğiz.

**Lemma 4.1.2** *$a,b\in\mathbb{T}$ olmak üzere, $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.*

**i)** *$f$, $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve her $t\in\mathbb{T}$ için $\widetilde{f}(t)=f(t)$ olacak şekilde $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon ise o zaman,*

$$(b-a)f(a)\leq\int_a^b f(t)\Delta t\leq\int_a^b\widetilde{f}(t)dt\leq\int_a^b f(t)\nabla t\leq(b-a)f(b)$$

*eşitsizliği vardır.*

**ii)** *$f$, $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde artmayan bir fonksiyon ve her $t\in\mathbb{T}$ için $\widetilde{f}(t)=f(t)$ olacak şekilde $\widetilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ artmayan sürekli bir fonksiyon ise o zaman,*

$$(b-a)f(a)\geq\int_a^b f(t)\Delta t\geq\int_a^b\widetilde{f}(t)dt\geq\int_a^b f(t)\nabla t\geq(b-a)f(b)$$

*eşitsizliği mevcuttur.*

*Her iki durumda da $\alpha_T\in[0,1]$ olacak şekilde,*

$$\int_a^b f(t)\Diamond_{\alpha_T}t=\int_a^b\widetilde{f}(t)dt$$

*vardır.*

**İspat. i)** İspata $\mathbb{T}=\{a,b\}$ alındığında, $\sigma(a)=b$ ve $\mu(a)=b-a$ olduğundan, Teorem 1.2.11 den

$$\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^{\sigma(a)} f(t)\Delta t=f(a)(b-a) \tag{4.1}$$

ve $\mathbb{T}=[a,b]$ aldığımızda,

$$\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^b f(t)dt \tag{4.2}$$

olduğunu hatırlatarak başlayalım. İspat için, monoton fonksiyonların genel bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki $\int_a^b f(t)\Delta t$ integralinin, $\mathbb{T} = \{a, b\}$ ve $\mathbb{T} = [a, b]$ zaman skalaları için yukarıdaki (4.1) ve (4.2) integral değerleri arasında olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Şimdi her $t \in \mathbb{T}$ için $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli azalmayan $\widetilde{f}(t) = f(t)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. İlk olarak zaman skalasına bir nokta veya bir aralık eklendiğinde, buna karşılık gelen integralin arttığını göstereceğiz.

$a < c < b$ olmak üzere bir $c$ noktasını $\mathbb{T}$ zaman skalasına eklediğimizi varsayalım. Eğer $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T} \cup \{c\}$ ve $c \notin \mathbb{T}$, $\mathbb{T}_1$ in bir izole noktası ( ve $\int_a^b f(t)\Delta_1 t$ buna karşılık gelen integral), ise

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\Delta_1 t &= \int_a^c f(t)\Delta_1 t + \int_c^b f(t)\Delta_1 t \\
&= \int_a^{\rho(c)} f(t)\Delta_1 t + \int_{\rho(c)}^c f(t)\Delta_1 t + \int_c^{\sigma(c)} f(t)\Delta_1 t + \int_{\sigma(c)}^b f(t)\Delta_1 t \\
&= \int_a^{\rho(c)} f(t)\Delta t + \int_{\rho(c)}^c f(t)\Delta_1 t + \int_c^{\sigma(c)} f(t)\Delta_1 t + \int_{\sigma(c)}^b f(t)\Delta t \\
&= \int_a^b f(t)\Delta t - \int_{\rho(c)}^{\sigma(c)} f(t)\Delta t + \int_{\rho(c)}^c f(t)\Delta_1 t + \int_c^{\sigma(c)} f(t)\Delta_1 t \\
&= \int_a^b f(t)\Delta t - f(\rho(c))(\sigma(c) - \rho(c)) + f(\rho(c))(c - \rho(c)) + f(c)(\sigma(c) - c) \\
&= \int_a^b f(t)\Delta t + (f(c) - f(\rho(c)))(\sigma(c) - c) \\
&\geq \int_a^b f(t)\Delta t
\end{aligned}$$

elde edilir.

Aynı şekilde, bir aralık zaman skalasına ilave edildiğinde buna karşılık gelen integralin (4.1) ve (4.2) integral değerleri arasında olduğunu gösterelim. Bundan dolayı $a < c < d < b$

olacak şekilde $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T} \cup [c,d]$ ve $[c,d] \cap \mathbb{T} = \varnothing$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(t)\Delta_1 t \\
= & \int_a^{\rho(c)} f(t)\Delta_1 t + \int_{\rho(c)}^{c} f(t)\Delta_1 t + \int_c^d f(t)\Delta_1 t + \int_d^{\sigma(d)} f(t)\Delta_1 t + \int_{\sigma(d)}^{b} f(t)\Delta_1 t \\
= & \int_a^{\rho(c)} f(t)\Delta t + \int_{\rho(c)}^{c} f(t)\Delta_1 t + \int_c^d f(t)\Delta_1 t + \int_d^{\sigma(d)} f(t)\Delta_1 t + \int_{\sigma(d)}^{b} f(t)\Delta t \\
= & \int_a^b f(t)\Delta t - \int_{\rho(c)}^{\sigma(d)} f(t)\Delta t + \int_{\rho(c)}^{c} f(t)\Delta_1 t + \int_c^d f(t)\Delta_1 t + \int_d^{\sigma(d)} f(t)\Delta_1 t \\
= & \int_a^b f(t)\Delta t - f(\rho(c))(\sigma(d) - \rho(c)) + f(\rho(c))\,(c - \rho(c)) \\
& \qquad + \int_c^d \widetilde{f}\,(t)\,dt + f(d)\,(\sigma(d) - d) \\
\geq & \int_a^b f(t)\Delta t - f(\rho(c))\,(d-c) + (d-c)\,\widetilde{f}\,(s) \\
\geq & \int_a^b f(t)\Delta t
\end{aligned}$$

olur. Burada $s \in (c,d)$ ortalama değer teoreminden gelen noktadır.

Aynı metodları kullanarak başlangıçtaki zaman skalasında bir nokta veya bir aralık çıkarıldığı zaman integral değerinin azaldığını gösterebiliriz. Ve bu sebep ile $\int_a^b f(t)\Delta t$ integrali $\mathbb{T} = \{a,b\}$ zaman skalası için bulunan (4.1) minimum değeri ile $\mathbb{T} = [a,b]$ zaman skalası için bulunan (4.2) maksimum değeri arasındadır. Yani

$$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

dir.

Artmayan fonksiyonlar için ve nabla integral için ispat benzerdir. Eğer

$$\alpha_T = \frac{\int_a^b \widetilde{f}(t)dt - \int_a^b f(t)\nabla t}{\int_a^b f(t)\Delta t - \int_a^b f(t)\nabla t}$$

alınırsa Lemma 4.1.2 deki sonuç açık olarak elde edilir. Böylece,

$$\int_a^b \widetilde{f}(t)dt = \alpha_T \int_a^b f(t)\Delta t + (1-\alpha_T)\int_a^b f(t)\nabla t,$$

yani

$$\int_a^b f(t)\Diamond_{\alpha_T} t = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt.$$

bulunur. ■

Şimdi azalmayan fonksiyonlar için yukarıda ispatı verilen eşitsizlik için bir örnek verelim.

**Örnek 4.1.3** $\mathbb{T}=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ *ve* $f(t)=t$ *olsun.* $a=0$ *ve* $b=1$ *alalım.*

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{n},\sigma(t)=\frac{1}{n-1}\\
\mu(t) &= \sigma(t)-t=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{t^2}{1-t}\\
\int_0^1 f(t)\Delta t &= \sum_{t\in[0,1)}\mu\left(t\right)f(t)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n-1)}\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n-1}\right)\\
&= 1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
&= 2-\frac{\pi^2}{6}=0.355\,07
\end{aligned}$$

*bulunur.*

$$\begin{aligned}
\rho\left(t\right) &= \frac{1}{n+1}\\
\nu(t) &= t-\rho\left(t\right)=\frac{1}{n(n+1)}\\
\int_0^1 f(t)\nabla t &= \sum_{t\in(0,1]}\nu\left(t\right)f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)-1\\
&= \frac{\pi^2}{6}-1=0.644\,93
\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$0\le 0.355\,07\le 0.5\le 0.644\,93\le 1$

yani,

$$(b-a)f(a)\le\int_a^b f(t)\Delta t\le\int_a^b f(t)dt\le\int_a^b f(t)\nabla t\le(b-a)f(b)$$

elde edilir.

**Uyarı 4.1.4** **i)** *$\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı $f$, azalmayan fonksiyonu için $\alpha \leq \alpha_T$ olduğu zaman,*

$$\int_a^b f(t)\Diamond_{\alpha_T} t \geq \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

*dir. $\alpha \geq \alpha_T$ olduğu zaman ise,*

$$\int_a^b f(t)\Diamond_{\alpha_T} t \leq \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

*eşitsizliği mevcuttur.*

**ii)** *$\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı $f$, artmayan fonksiyonu için $\alpha \leq \alpha_T$ olduğu zaman,*

$$\int_a^b f(t)\Diamond_{\alpha_T} t \leq \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

*dir. $\alpha \geq \alpha_T$ olduğu zaman ise,*

$$\int_a^b f(t)\Diamond_{\alpha_T} t \geq \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

*eşitsizliği mevcuttur.*

Eğer $\mathbb{T} = [a, b]$ veya $f$ fonksiyonu sabit ise $\alpha_T$, $[0, 1]$ aralığında bir reel sayı olabilir. Aksi takdirde $\alpha_T \in (0, 1)$ dir.
Şimdi $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ye doğrusal bir fonksiyon (yani $f(t) = ut + v$) ise o zaman $\int_a^b f(t)\Delta t$ ve $\int_a^b f(t)\nabla t$, $[a, b]$ aralığında tanımlı $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olan $\int_a^b \widetilde{f}(t)dt$ ye göre simetrik olduğunu ispatlayacağız.

**Lemma 4.1.5** *$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ye doğrusal bir fonksiyon ve $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olsun. Eğer $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt - C$, $C \in \mathbb{R}$ ise o zaman $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt + C$.*

**İspat.** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olduğu zaman $f(t) = t$ olduğunu dikkate alarak başlayacağız. Eğer $\mathbb{T} = [a, b]$ ise $c = 0$ ve sonuç açıktır. $\mathbb{T} = [a, b] \diagdown (c, d)$ olduğunda,

$$\begin{aligned}
\int_a^b t\Delta t &= \int_a^c t\Delta t + \int_c^d t\Delta t + \int_d^b t\Delta t \\
&= \int_a^c tdt + \int_c^{\sigma(c)} t\Delta t + \int_d^b tdt \\
&= \int_a^b tdt - \int_c^d tdt + c\,(d - c) \\
&= \int_a^b tdt - (d - c)\,\frac{d + c}{2} + c\,(d - c) \\
&= \int_a^b tdt - \frac{(d - c)^2}{2}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\int_a^b t\nabla t &= \int_a^c t\nabla t + \int_c^d t\nabla t + \int_d^b t\nabla t \\
&= \int_a^c tdt + \int_{\rho(d)}^d t\nabla t + \int_d^b tdt \\
&= \int_a^b tdt - \int_c^d tdt + d\,(d-c) \\
&= \int_a^b tdt - (d-c)\,\frac{d+c}{2} + d\,(d-c) \\
&= \int_a^b tdt + \frac{(d-c)^2}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan, açıktır ki $C = \frac{(d-c)^2}{2}$ seçtiğimizde ispat tamamlanmış olur.

Aynı argümanları birden fazla tekrarlayıp, $[a,b]$ aralığından herhangi bir sayıda aralığı çıkardığımızda yine aynı sonucu elde edebiliriz.

Eğer bir aralığı çıkartıp, ayrık bir nokta eklersek (yani $\mathbb{T} = [a,b] \setminus ((c,e) \cup (e,d)) = [a,c] \cup \{e\} \cup [d,b]$) bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_a^b t\Delta t &= \int_a^c t\Delta t + \int_c^e t\Delta t + \int_e^d t\Delta t + \int_d^b t\Delta t \\
&= \int_a^c tdt + \int_c^{\sigma(c)} t\Delta t + \int_e^{\sigma(e)} t\Delta t + \int_d^b tdt \\
&= \int_a^b tdt - \int_c^d tdt + c\,(e-c) + e\,(d-e) \\
&= \int_a^b tdt - (d-c)\,\frac{d+c}{2} + e\,(c+d) - c^2 - e^2 \\
&= \int_a^b tdt - \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2} + e\,(c+d) - e^2
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\int_a^b t\nabla t &= \int_a^c t\nabla t + \int_c^e t\nabla t + \int_e^d t\nabla t + \int_d^b t\nabla t \\
&= \int_a^c tdt + \int_{\rho(e)}^e t\nabla t + \int_{\rho(d)}^d t\nabla t + \int_d^b tdt \\
&= \int_a^b tdt - \int_c^d tdt + e\,(e-c) + d\,(d-e) \\
&= \int_a^b tdt - (d-c)\,\frac{d+c}{2} - e\,(c+d) + d^2 + e^2 \\
&= \int_a^b tdt + \frac{d^2}{2} + \frac{c^2}{2} - e\,(c+d) + e^2
\end{aligned}$$

dir. Böylelikle $C = \frac{(e-c)^2}{2} + \frac{(d-e)^2}{2}$ olarak aldığımızda istenilen sonuca ulaşırız.

Genel bir doğrusal fonksiyon $f(t) = ut + v$ için

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b (ut+v)\Delta t = u\left(\int_a^b tdt - C\right) + v(b-a) = u\int_a^b tdt - uC + v(b-a)$$

ve

$$\int_a^b f(t)\,\nabla t = \int_a^b (ut+v)\nabla t = u\left(\int_a^b tdt + C\right) + v(b-a) = u\int_a^b tdt + uC + v(b-a)$$

olduğundan dolayı $\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b \widetilde{f}(t)\,dt - uC$ ve $\int_a^b f(t)\,\nabla t = \int_a^b \widetilde{f}(t)\,dt + uC$ elde edilir. ■

**Tanım 4.1.6** $\mathbb{T}$ *zaman skalası olsun. a ile b arasında* $G : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ *graininess ölçüm fonksiyonunu,*

$$G(a,b) = \sum_{a\le t\le b} \frac{\mu(t)^2}{2} = \sum_{a\le t\le b} \frac{\nu(t)^2}{2}$$

*olarak tanımlayacağız. Bir diğer deyişle, G fonksiyonu, zaman skalası* $\mathbb{T}$ *nin geometrisine dayanan, a ve b arasındaki tüm saçılmış noktalar arasındaki mesafelerin karesini ölçer.*

**Uyarı 4.1.7** $\int_a^b f(t)\,\Delta t$ *ve* $\int_a^b f(t)\,dt$ *arasındaki fark, graininess fonksiyonunun ölçümüne bağlıdır. Neticede,*

$$\int_a^b t\Delta t = \int_a^b tdt - G(a,b)$$

*dir. Aynı şekilde*

$$\int_a^b t\nabla t = \int_a^b tdt + G(a,b)$$

*olduğunu farkediniz.*

Önceki ifadelere göre $\int_a^b |t-s|\,\Diamond_\alpha s$ yi hesaplayabiliriz.

**Sonuç 4.1.8** $\mathbb{T}$ *zaman skalası olsun. O zaman Tanım* 4.1.6 *da tanımlanan G fonksiyonu olmak üzere,*

$$\int_a^b |t-s|\,\Diamond_\alpha s = \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} + (1-2\alpha)\left(G(x,b) - G(a,x)\right)$$

*dir.*

**İspat.** Uyarı 4.1.7 yi kullanarak

$$\begin{aligned}\int_a^b |t-s| \Diamond_\alpha s &= \int_a^t (t-s) \Diamond_\alpha s + \int_t^b (s-t) \Diamond_\alpha s \\ &= t(t-a) - \int_a^t s\Diamond_\alpha s - t(b-t) + \int_t^b s\Diamond_\alpha s \\ &= \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} + (1-2\alpha)(G(x,b) - G(a,x))\end{aligned}$$

olduğunu gösterebiliriz. ■

Şimdi aşağıdaki ana sonucu verelim.

**Teorem 4.1.9** $f$ *ve* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, *delta ve nabla türevleri sınırlı olan, yani* $\|f^\Delta\|_\infty, \|g^\Delta\|_\infty, \|f^\nabla\|_\infty, \|g^\nabla\|_\infty < \infty$ *olmak üzere,* $\mathbb{T}$ *üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman,* $G$*,* $a$ *ile* $b$ *arasındaki graininess ölçümü olmak üzere, her* $t \in \mathbb{T}$ *için;*

$$\begin{aligned}&\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2(a-b)}\left[g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s + f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s\right]\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left\{\alpha\left[|g(t)|\,\|f^\Delta\|_\infty + |f(t)|\,\|g^\Delta\|_\infty\right] + (1-\alpha)\left[|g(t)|\,\|f^\nabla\|_\infty + |f(t)|\,\|g^\nabla\|_\infty\right]\right\} \\ &\qquad\qquad \times\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2 + (1-2\alpha)\frac{G(t,b)-G(a,t)}{(b-a)^2}\right](b-a)\end{aligned}$$

*dır.*

**İspat.** Her $t, s \in \mathbb{T}$ ve $a \leq t$ ve $s \leq b$ olmak üzere;

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f^\Delta(\tau)\Delta\tau \tag{4.3}$$

ve

$$g(t) - g(s) = \int_s^t g^\Delta(\tau)\Delta\tau \tag{4.4}$$

eşitlikleri mevcuttur. Eğer eşitliklerin (4.3) ve (4.4) her iki taraflarını da sırasıyla $g(t)$ ve $f(t)$ ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak;

$$2f(t)g(t) - [g(t)f(s) + f(t)g(s)] = g(t)\int_s^t f^\Delta(\tau)\Delta\tau + f(t)\int_s^t g^\Delta(\tau)\Delta\tau \tag{4.5}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f^\nabla(\tau)\nabla\tau \tag{4.6}$$

ve

$$g(t)-g(s)=\int_s^t g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \tag{4.7}$$

eşitlikleri için de aynı işlemleri uygulayacağız. Eğer (4.6) ve (4.7) ün her iki tarafını da sırasıyla $g(t)$ ve $f(t)$ ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak;

$$2f(t)g(t)-[g(t)f(s)+f(t)g(s)]=g(t)\int_s^t f^{\nabla}(\tau)\nabla\tau+f(t)\int_s^t g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \tag{4.8}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. (4.5) ve (4.8) eşitliklerinin her iki tarafını da sırasıyla $\alpha$ ve $(1-\alpha)$ ile çarpıp, taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{aligned}2f(t)g(t)-[g(t)f(s)+f(t)g(s)]&=g(t)\left(\alpha\int_s^t f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau+(1-\alpha)\int_s^t f^{\nabla}(\tau)\nabla\tau\right)\\&\quad+f(t)\left(\alpha\int_s^t g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau+(1-\alpha)\int_s^t g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau\right)\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer (4.9) eşitliğinin her iki tarafının da $s$ ye göre $a$ dan $b$ ye diamond-$\alpha$ integralini alır ve ardından her tarafı $2(b-a)$ ile bölersek,

$$\begin{aligned}&f(t)g(t)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s+f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s\right]\\&=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left\{g(t)\left(\alpha\int_s^t f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau+(1-\alpha)\int_s^t f^{\nabla}(\tau)\nabla\tau\right)\right.\\&\qquad\left.+f(t)\left(\alpha\int_s^t g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau+(1-\alpha)\int_s^t g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau\right)\right\}\Diamond_\alpha s\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.10) eşitliğinde mutlak değer özellikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}&\left|f(t)g(t)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s+f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s\right]\right|\\
\leq\ &\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left\{|g(t)|\left[\alpha\left\|f^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^{\nabla}\right\|_\infty\right]|t-s|\right.\\&\qquad\left.+|f(t)|\left[\alpha\left\|g^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|g^{\nabla}\right\|_\infty\right]|t-s|\right\}\Diamond_\alpha s\\
=\ &\frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(t)|\left[\alpha\left\|f^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^{\nabla}\right\|_\infty\right]\right.\\&\qquad\left.+|f(t)|\left[\alpha\left\|g^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|g^{\nabla}\right\|_\infty\right]\right\}\int_a^b|t-s|\Diamond_\alpha s\\
=\ &\frac{1}{2(b-a)}\left\{|g(t)|\left[\alpha\left\|f^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^{\nabla}\right\|_\infty\right]+|f(t)|\left[\alpha\left\|g^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|g^{\nabla}\right\|_\infty\right]\right\}\\&\qquad\times\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2}+(1-2\alpha)(G(t,b)-G(a,t))\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\left\{|g(t)|\left[\alpha\left\|f^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^{\nabla}\right\|_\infty\right]+|f(t)|\left[\alpha\left\|g^{\Delta}\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|g^{\nabla}\right\|_\infty\right]\right\}\\&\qquad\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2+(1-2\alpha)\frac{G(t,b)-G(a,t)}{(b-a)^2}\right](b-a)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispatı tamamlanmış olur. ∎

**Uyarı 4.1.10**

**(i)** $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *ise ve fonksiyonlar da diferansiyallenebilir ise,* $f^{\Delta}=f', g^{\nabla}=g'$ *ve* $G(a,t)=G(t,b)=0$ *ise Teorem* 2.1.1 *deki sonuca ulaşırız.*

**(ii)** $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ *deki aralıkların birleşimi ve fonksiyonlar aralıkların uç noktalarında diferensiyellenebilir değil fakat* $f^{\Delta}=f'_{-}, f^{\nabla}=f'_{+}, g^{\Delta}=g'_{-}, g^{\nabla}=g'_{+}$, *ise Teorem* 2.1.1 *in genişletilmiş çeşitini elde ederiz.*

**(iii)** $\alpha=\frac{1}{2}$ *veya* $\mathbb{T}$ *zaman skalası için* $G(a,t)=G(t,b)$ *(bu şekildeki zaman skalalarına t ye göre G-simetrik deriz) ise*

$$\begin{aligned}
&\left|f(t)g(t)-\frac{1}{2(b-a)}\left[g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s+f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s\right]\right|\\
&\leq\frac{1}{2}\left\{\alpha\left[|g(t)|\left\|f^{\Delta}\right\|_\infty+|f(t)|\left\|g^{\Delta}\right\|_\infty\right]+(1-\alpha)\left[|g(t)|\left\|f^{\nabla}\right\|_\infty+|f(t)|\left\|g^{\nabla}\right\|_\infty\right]\right\}\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right](b-a)
\end{aligned}$$

*elde ederiz.*

**(iv)** $\alpha=1$ *ve* $\alpha=0$ *ise o zaman Teorem* 4.1.9 *daki zaman skalası için sırasıyla delta versiyonu ve nabla versiyonu bulunur.*

**(v)** $f^{\Delta}$ *ve* $f^{\nabla}$ *nin her ikisi de aynı noktada maksimum değere ulaşırsa o zaman,*

$$\begin{aligned}
&\left|f(t)g(t)-\frac{1}{(b-a)}\left[g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s+f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s\right]\right|\\
&\leq\frac{1}{2}\left\{|g(t)|\left\|f^{\Diamond_\alpha}\right\|_\infty+|f(t)|\left\|g^{\Diamond_\alpha}\right\|_\infty\right\}\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2+(1-2\alpha)\frac{G(t,b)-G(a,t)}{(b-a)^2}\right](b-a)
\end{aligned}$$

*eşitsizliğini elde ederiz.*

**Uyarı 4.1.11** *Her* $t\in\mathbb{T}$ *için* $g(t)=1$ *alırsak,* $g^{\Delta}(t)=g^{\nabla}(t)=0$ *olur ve Teorem* 4.1.9 *da yerine yazarsak, Ostrowski eşitsizliğinin zaman skalasındaki aşağıdaki versiyonunu elde* *ederiz (bakınız [7]):*

$$\left|f(t)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s\right|$$
$$\leq \left[\alpha\left\|f^\Delta\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^\nabla\right\|_\infty\right]\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{t-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2+(1-2\alpha)\frac{G(t,b)-G(a,t)}{(b-a)^2}\right](b-a).$$

*Diğer yandan (4.9) nin her iki tarafının da diamond-$\alpha$ integralini alırsak, yeniden düzenleyip, mutlak değer özelliklerini kullanırsak, aşağıdaki Grüss tipi eşitsizliği elde ederiz.*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\Diamond_\alpha t-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left\{\alpha\left[|g(t)|\left\|f^\Delta\right\|_\infty+|f(t)|\left\|g^\Delta\right\|_\infty\right]\right.$$
$$\left.+(1-\alpha)\left[|g(t)|\left\|f^\nabla\right\|_\infty+|f(t)|\left\|g^\nabla\right\|_\infty\right]\right\}|t-s|\Diamond_\alpha s\Diamond_\alpha t.$$

Şimdiki teorem Teorem 4.1.9 un daha güçlü bir versiyonudur.

**Teorem 4.1.12** *$f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, delta ve nabla türevleri sınırlı olan $\mathbb{T}$ de sürekli fonksiyonlar olsun. $a\leq t\leq b$ olacak şekilde her $t\in\mathbb{T}$ için,*

$$\left|f(t)g(t)-\frac{1}{(b-a)}\left[g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s+f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s\right]+\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(s)g(s)\Diamond_\alpha s\right|$$
$$\leq\frac{1}{(b-a)}\left[\alpha\left\|f^\Delta\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|f^\nabla\right\|_\infty\right]\left[\alpha\left\|g^\Delta\right\|_\infty+(1-\alpha)\left\|g^\nabla\right\|_\infty\right]\int_a^b|t-s|^2\Diamond_\alpha s$$

*eşitsizliği mevcuttur.*

**İspat.** Teorem 4.1.9 daki gibi aynı hipotezlere sahip olduğumuzdan, (4.3), (4.4), (4.6) ve (4.7) özdeşliklerinin de aynı şekilde kaldığı açıktır. Sırasıyla (4.3) ve (4.4) yı, (4.6) ve (4.7) ü, (4.3) ve (4.7) ve (4.4) ve (4.6) ü taraf tarafa çarparsak,

$$f(t)g(t)-[g(t)f(s)+f(t)g(s)]+f(s)g(s)=\begin{cases}\left\{\int_t^s f^\Delta(\tau)\Delta\tau\right\}\left\{\int_t^s g^\Delta(\tau)\Delta\tau\right\}\\ \left\{\int_t^s f^\nabla(\tau)\nabla\tau\right\}\left\{\int_t^s g^\nabla(\tau)\nabla\tau\right\}\\ \left\{\int_t^s f^\Delta(\tau)\Delta\tau\right\}\left\{\int_t^s g^\nabla(\tau)\nabla\tau\right\}\\ \left\{\int_t^s f^\nabla(\tau)\nabla\tau\right\}\left\{\int_t^s g^\Delta(\tau)\Delta\tau\right\}\end{cases}\quad(4.11)$$

eşitliğini elde ederiz.(4.11) deki ilk ve üçüncü özdeşliği sırasıyla $\alpha$ ve $1-\alpha$ ile çarpıp toplar ardından aynı işlemleri ikinci ve dördüncü özdeşlik için de yaparsak,

$$f(t)g(t)-[g(t)f(s)+f(t)g(s)]+f(s)g(s)$$
$$=\left\{\int_t^s f^\Delta(\tau)\Delta\tau\right\}\left\{\alpha\int_t^s g^\Delta(\tau)\Delta\tau+(1-\alpha)\int_t^s g^\nabla(\tau)\nabla\tau\right\}\quad(4.12)$$

ve

$$f(t)g(t) - [g(t)f(s) + f(t)g(s)] + f(s)g(s)$$
$$= \left\{ \int_t^s f^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \right\} \left\{ \alpha \int_t^s g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha) \int_t^s g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \right\} \quad (4.13)$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.12) özdeşliğini $\alpha$ ile, (4.13) özdeşliğini $1-\alpha$ ile çarpıp toplarsak,

$$f(t)g(t) - [g(t)f(s) + f(t)g(s)] + f(s)g(s)$$
$$= \left\{ \alpha \int_t^s f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha) \int_t^s f^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \right\} \left\{ \alpha \int_t^s g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha) \int_t^s g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \right\} \quad (4.14)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu (4.14) eşitlikte her iki tarafın da $s$ ye göre, $a$ dan $b$ ye diamond-$\alpha$ integralini alıp, ardından $(b-a)$ ya bölersek:

$$f(t)g(t) - \frac{1}{(b-a)} \left[ g(t) \int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s + f(t) \int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s \right] + \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(s)g(s)\Diamond_\alpha s$$
$$\leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \left\{ \alpha \int_t^s f^{\Delta}(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha) \int_t^s f^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \right\}$$
$$\left\{ \alpha \int_t^s g^{\Delta}(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha) \int_t^s g^{\nabla}(\tau)\nabla\tau \right\} \Diamond_\alpha s \quad (4.15)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.15) deki eşitsizliğinin mutlak değerini alıp, mutlak değer özelliklerini kullanarak sonucu elde eder ve ispatı tamamlarız. ■

**Uyarı 4.1.13** **(i)** $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ve* $f, g$ *fonksiyonları diferensiyellenebilir,* $f^{\Delta} = f^{\nabla} = f'$, $g^{\Delta} = g^{\nabla} = g'$ *ise o zaman Teorem* 2.1.3 *ü elde ederiz.*

**(ii)** $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ *deki aralıkların birleşiminden oluşur ve fonksiyonlar uç noktalarında diferensiyellenebilir değil ise bu noktalarda* $f^{\Delta} = f'_-, f^{\nabla} = f'_+, g^{\Delta} = g'_-, g^{\nabla} = g'_+$ *dir, ve böylelikle Teorem* 2.1.3 *ün genişletilmiş çeşitini elde etmiş oluruz.*

**(iii)**

$$\int_a^b |t-s|^2 \Diamond_\alpha s = \int_a^t (t-s)^2 \Diamond_\alpha s + \int_t^b (s-t)^2 \Diamond_\alpha s$$

*eşitliği mevcuttur.* $s \to (t-s)^2$ *fonksiyonu* $[a,t]$ *üzerinde artmayan ve* $s \to (s-t)^2$ *fonksiyonu* $[t,b]$ *üzerinde azalmayan fonksiyondur. Uyarı* 4.1.4 *den,*

*her* $\alpha \leq \alpha_1$ *için* $\displaystyle\int_a^t (t-s)^2 \Diamond_\alpha s \leq \frac{(t-a)^3}{3}$, *ve*

$$\text{her } \alpha \geq \alpha_2 \text{ için} \int_a^t (s-t)^2 \Diamond_\alpha s \leq \frac{(b-t)^3}{3}$$

*olacak şekilde* $\alpha_1 \in [0,1]$ *ve* $\alpha_2 \in [0,1]$ *vardır. Bundan dolayı her* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *için*

$$\begin{aligned} &\left| f(t)g(t) - \tfrac{1}{b-a}\left[ g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s + f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s \right] + \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(s)g(s)\Diamond_\alpha s \right| \\ \leq\ & \tfrac{1}{b-a}\left[ \alpha \left\| f^\Delta \right\|_\infty + (1-\alpha)\left\| f^\nabla \right\|_\infty \right]\left[ \alpha \left\| g^\Delta \right\|_\infty + (1-\alpha)\left\| g^\nabla \right\|_\infty \right]\left[ \tfrac{(t-a)^3 + (b-t)^3}{3} \right] \end{aligned}$$

*dir. Bu* $\alpha_1$ *ve* $\alpha_2$ $\mathbb{T}$ *zaman skalasının graininess fonksiyonuna bağlıdır.*

**(iv)** $\alpha = 1$ *ve* $\alpha = 0$ *ise sırasıyla delta ve nabla versiyonu Teorem* 4.1.12 *deki zaman skalası için bulunabilir.*

**(v)** *Eğer* $f^\Delta$ *ve* $f^\nabla$*, aynı noktada maksimum değerlerine ulaşıyorlarsa,*

$$\begin{aligned} &\left| f(t)g(t) - \tfrac{1}{b-a}\left[ g(t)\int_a^b f(s)\Diamond_\alpha s + f(t)\int_a^b g(s)\Diamond_\alpha s \right] + \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(s)g(s)\Diamond_\alpha s \right| \\ \leq\ & \tfrac{1}{b-a}\left\| f^{\Diamond_\alpha} \right\|_\infty \left\| g^{\Diamond_\alpha} \right\|_\infty \int_a^b |t-s|^2 \Diamond_\alpha s \end{aligned}$$

*eşitsizliği mevcuttur.*

**Uyarı 4.1.14** (4.14) *nın her iki tarafının t ye göre, (a dan b ye), diamond-*$\alpha$ *integralini alır ve mutlak değer özelliklerini kullandıktan sonra,* $(b-a)$ *ya bölersek,*

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\Diamond_\alpha t - \left( \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\Diamond_\alpha t \right)\left( \tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t \right) \right| \\ &\leq \tfrac{1}{b-a}\left[ \alpha \left\| f^\Delta \right\|_\infty + (1-\alpha)\left\| f^\nabla \right\|_\infty \right]\left[ \alpha \left\| g^\Delta \right\|_\infty + (1-\alpha)\left\| g^\nabla \right\|_\infty \right] \\ &\qquad \times \int_a^b \int_a^b |t-s|^2 \Diamond_\alpha s \Diamond_\alpha t \end{aligned}$$

*eşitsizliğini elde ederiz. Bu son eşitsizlik Čebyšev tipi eşitsizliktir.* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *alınırsa, bilinen Čebyšev eşitsizliğine (bkz. Uyarı 2.1.6 ) ulaşmış oluruz.*

**Sonuç 4.1.15** *Bu tezde genel olarak Ostrowski tipi eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Zaman skalasında tek değişkenli fonksiyonlar için delta ve diamond-*$\alpha$ *integralleri kullanılarak çeşitli eşitsizlikler elde edilmiştir. İki fonksiyon içeren son bölümde verilen eşitsizlikler 2015 yılında Wenjun Liu ve Adnan Tuna'nın makalesinde ağırlıklı olarak ve* *üç fonksiyon için çalışılmışlardır (detaylı bilgi için [11] nolu kaynağı inceleyebilirsiniz.). Daha ileri çalışmalarda bu eşitsizlikler iki ve daha çok değişkenli fonksiyonlar için çalışılabilirler.*

## KAYNAKLAR

**[1] Pachpatte B G** (2005) A Note on Ostrowski Like Inequalities. *J. Inequal. Pure and Appl. Math*. 6 (4): Art. 114.

**[2] Tuna A and Yaşar I B** (2007) A Note on Integral Inequalities on Time Scales. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.,* 34 (2): 259-265.

**[3] Dinu C** (2007) Ostrowski Type Inequalities on Time Scales, Annals of University of Craiova. *Math. Comp. Sci. Ser.* 34(1): 43-58.

**[4] Hilger S** (1990) Analysis on Measure Chains – *A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus. Results Math.*, 35: 18-56.

**[5] Bohner M and Peterson A** (2001) *Dynamic Equations on Time Scales, An introduction with Applications*. Birkhäuser, Boston.

**[6] Dragomir S S and Rassıas Th M (Eds.)** (2002) Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration. *Kluwer Academic Publishers,* Dordrecht.

**[7] Mitrinović D S, Pečarič J E and Fink A M** (1994) Inequalities for Functions and their Integrals and Derivatives. *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

**[8] Pachpatte B G** (2004) On a New Generalization of Ostrowski's Inequality. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.* 5 (2): Art 36.

**[9] Mitrinović D S, Pečarič J E and Fink A M** (1993) Classical and New Inequalities in Analysis. *Kluwer Academic Publishers*, Drodrecht.

**[10] Agarwal R P and Bohner M** (1999) Basic calculus on time scales and some of its applications. *Results Math.* 35: 3-22.

**[11] Liu W and Tuna A** (2015) Diamond-α Weighted Ostrowski Type and Grüss Type Inequalities on Time Scales. *Applied Mathematics and Computation* 270: 251-260.

## ÖZGEÇMİŞ

1987 yılı Gölcük/KOCAELİ doğumlu olan Özlem KARAKAŞ, ilk ve orta eğitimini Gölcük'te tamamladıktan sonra 2008 yılında İzmir Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Ardından 2009 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans programını tamamladı. 2010 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak Bartın ilinde başladığı Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği görevine halen devam etmektedir.

**ADRES BİLGİLERİ**

Adres : Gölbucağı mahallesi. 109. Sokak No:32 Eren Sitesi D Blok D/6.
Merkez/BARTIN

Tel : 0505 763 43 03

E-Posta : ozlem6712@gmail.com