

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2018-YL-029

DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
RADYAL TABANLI FONKSİYON AĞI
ÇÖZÜMLERİ

Merve KOCAKULA

Tez Danışmanı:
Dr. Öğr. Üyesi Korhan GÜNEL

AYDIN

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Merve KOCAKULA tarafından hazırlanan Dirichlet Sınır Değer Problemlerinin Radyal Tabanlı Fonksiyon Ağı Çözümleri başlıklı tez, 10.07.2018 tarihinde yapılan savunma sonucunda aşağıda isimleri bulunan jüri üyelerince kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı Soyadı	Kurumu	İmzası
Başkan :	Dr. Öğr. Üyesi Korhan GÜNEL	ADÜ	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Refet POLAT	Yaşar Üni..	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Rıfat AŞLIYAN	ADÜ	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilen bu Yüksek Lisans tezi, Enstitü Yönetim KurulununSayılı kararıylatarihinde onaylanmıştır.

Prof. Dr. Aydın ÜNAY
Enstitü Müdürü

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE
AYDIN

Bu tezde sunulan tüm bilgi ve sonuçların, bilimsel yöntemlerle yürütülen gerçek deney ve gözlemler çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, çalışmada bana ait olmayan tüm veri, düşünce, sonuç ve bilgilere bilimsel etik kuralların gereği olarak eksiksiz şekilde uygun atıf yaptığımı ve kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

10/07/2018

Merve KOCAKULA

ÖZET

DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN RADYAL TABANLI FONKSİYON AĞI ÇÖZÜMLERİ

Merve KOCAKULA

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doktor Öğretim Üyesi Korhan GÜNEL
2018, 57 sayfa

Bu tezdeki amaç, Adi Diferansiyel Denklemler için Dirichlet sınır problemlerinin gerçek çözümlerine en yakın eğriyi oluşturmaktır. Çözümleri elde edebilmek için ileri beslemeli yapay sinir ağları kullanılmıştır. Ağın eğitimi için, farklı Radyal tabanlı transfer fonksiyonları denenmiştir. Çözüm eğrisinin saptanması için oluşturulan yapay sinir ağı modeli tanımlanırken ortaya çıkan keyfi parametreler, ortalama karesel hata miktarını minimize edecek şekilde Parçacık Sürü Optimizasyonu yardımıyla belirlenmiştir.

Tezde kullanılan çeşitli radyal tabanlı fonksiyonların karşılaştırılabilmesi için örnek problemler üzerinde deneysel çalışmalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlarda oluşan hata miktarını en aza indirgeyen, yani en uygun Radyal tabanlı fonksiyon belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Radyal Tabanlı Fonksiyon, Parçacık Sürü Optimizasyonu, Sınır Değer Problemi, Adi Diferansiyel Denklem.

ABSTRACT

RADIAL BASIS FUNCTION NETWORK SOLUTIONS OF DIRICHLET BOUNDARY PROBLEMS

Merve KOCAKULA

M.Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Korhan GÜNEL, Ph.D.

2018, 57 pages

The purpose of this thesis is to create the nearest curve to the exact solutions of the Dirichlet boundary problems for Ordinary Differential Equations. In order to obtain the solutions, feed-forward neural networks were used. At training of neural network, different Radial Basis transfer functions were tried on. The arbitrary parameters that are obtained when constructing the neural network model for the determination of the solution curve are adjusted with the help of Particle Swarm Optimization to minimize the Mean Squared Errors.

In order to compare the various radial basis functions used in this thesis, some experimental studies have been made on sample problems. The most suitable radial based function which reduces the error emerged from obtained results has been determined.

Key Words: Radial Basis Functions, Particle Swarm Optimization, Boundary Value Problems, Ordinary Differential Equations.

ÖNSÖZ

Çalışma sürecimin her anında sabrı ve bilgisiyle yol gösteren danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Korhan GÜNEL'e ve desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Merve KOCAKULA

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	iii
BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	ix
ÖNSÖZ	xi
ŞİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xxi
1. GİRİŞ	1
2. RADYAL TABANLI FONKSİYONLAR ve ÖZELLİKLERİ	3
2.1. Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Eğri Uydurma	6
3. DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN RADYAL TABANLI YAPAY SINIR AĞI MODELİ.....	9
4. DENEYSEL SONUÇLAR.....	15
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

DBVP : Dirichlet Sınır Değer Problemi

ODE : Adi Diferansiyel Denklem

PSO : Parçacık Sürü Optimizasyonu

RBF : Radyal Tabanlı Fonksiyon

RBFN : Radyal Tabanlı Fonksiyon Ağları

TPS : İnce Plaka Spline

YSA : Yapay Sinir Ağı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Gauss fonksiyonu için r (yarıçap) arttıkça ε (genlik) azalmaktadır.	4
Şekil 2.2. Farklı genlik değerlerinde Gauss Fonksiyonu (Mongillo, 2011)	4
Şekil 4.1. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	15
Şekil 4.2. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	16
Şekil 4.3. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	17
Şekil 4.4. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	18
Şekil 4.5. Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	19
Şekil 4.6. Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	20
Şekil 4.7. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	21
Şekil 4.8. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	22
Şekil 4.9. Ters Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	23

Şekil 4.10 .Ters Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	24
Şekil 4.11. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	25
Şekil 4.12. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	26
Şekil 4.13. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	28
Şekil 4.14. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	28
Şekil 4.15. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	30
Şekil 4.16. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	30
Şekil 4.17. Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	32
Şekil 4.18. Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	32
Şekil 4.19. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği	34

Şekil 4.20. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	34
Şekil 4.21. Ters Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	36
Şekil 4.22. Ters Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	36
Şekil 4.23. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	38
Şekil 4.24. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	38
Şekil 4.25. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	40
Şekil 4.26. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	41
Şekil 4.27. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	42
Şekil 4.28. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	43
Şekil 4.29. Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği.....	44

- Şekil 4.30. Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği 45
- Şekil 4.31. Ters kvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği 46
- Şekil 4.32. Ters kvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği 47
- Şekil 4.33. Ters multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği 48
- Şekil 4.34. Ters multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği 49
- Şekil 4.35. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği..... 50
- Şekil 4.36. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği 51

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	16
Çizelge 4.2. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.....	17
Çizelge 4.3. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	18
Çizelge 4.4. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.....	19
Çizelge 4.5. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	20
Çizelge 4.6. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	21
Çizelge 4.7. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	22
Çizelge 4.8. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	23
Çizelge 4.9. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	24
Çizelge 4.10. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	25

Çizelge 4.11. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	26
Çizelge 4.12. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	27
Çizelge 4.13. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	29
Çizelge 4.14. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	29
Çizelge 4.15. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	31
Çizelge 4.16. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	31
Çizelge 4.17. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	33
Çizelge 4.18. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	33
Çizelge 4.19. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	35
Çizelge 4.20. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	35

Çizelge 4.21. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	37
Çizelge 4.22. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	37
Çizelge 4.23. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	39
Çizelge 4.24 (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	39
Çizelge 4.25. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	41
Çizelge 4.26. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	42
Çizelge 4.27. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	43
Çizelge 4.28. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	44
Çizelge 4.29. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	45
Çizelge 4.30. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.	46

- Çizelge 4.31. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları..... 47
- Çizelge 4.32. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları..... 48
- Çizelge 4.33. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları. 49
- Çizelge 4.34. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları..... 50
- Çizelge 4.35. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları. 51
- Çizelge 4.36. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları. 52

1. GİRİŞ

Günlük yaşamda karşılaşılan problemlerin çoğu dinamik sistemlere birer örnektir ve bu problemlerin çözümü için ilk adım dinamik sistemin matematiksel olarak modellenmesi işlemidir. Örneğin büyük gemiler için tasarlanan yalpa tankları sayesinde gemilerin dalgalara karşı direncinin artırılması ve geminin alabora olmasının önüne geçilmesi amaçlanmıştır (Zihnioğlu, 2016). Bu problemin çözümü için, dalga hareketleri interpolasyon ile tahmin edilip, dalgadan kaynaklı salınımı sönmüleyecek şekilde tanklar arasında su pompalaması gerçekleştirilir.

Dinamik sistemlerin davranış tahminleri için Bölüm 2’de tanımlanan Radyal Tabanlı Fonksiyonların kullanımı ilk kez Broomhead and Lowe tarafından 1988 yılında için önerilmiştir.

Moody ve Darken (1989), çok değişkenli interpolasyon problemlerinin çözümünde ve Renals ve Rohwer (1989) fonem sınıflamasında radyal tabanlı fonksiyonları kullanmışlardır. Benzer problemler için, Hanson ve Burr (1987), Lapedes ve Farber (1987), Lee ve Kil (1988), Niranjan ve Fallside (1988), Casdagli (1989), Poggio ve Girosi (1990) Radyal tabanlı fonksiyonların kullanımını önermiştir.

Radyal tabanlı fonksiyonlardan biri olan multikvadrik fonksiyonlar ilk olarak Hardy (1971) tarafından ortaya atıldı. Kapsamlı olarak yüzey interpolasyonlarında kullanılıp iyi sonuçlar verdi (Franke,1982; Rippa,1984). Radyal tabanlı fonksiyonların neredeyse hepsi genelde veri noktalarının dağılımına bağlı olan parametrelerden kaynaklı düzensizlik gösterir. Ancak Hardy’nin iki boyutlu multikvadrik fonksiyonlarının ürettiği sonuçların bu parametreler ile güçlü bir bağı olmadığı fark edilmiştir ve elde edilen yüzeyler düzensizlikten güçlü şekilde etkilenmedikleri için genellikle pürüzsüzdür (Franke,1982).

Agterberg (1974) ve Schogen (1979), Gauss fonksiyonunu radyal tabanlı fonksiyon olarak kullanmış ve radyal tabanlı fonksiyon yaklaşımlarına genişlemesi incelenmiştir (Klopfenstein and Sverdlove,1983).

Bu tezdeki temel amacımız; Yapay Sinir Ağı (YSA) modellerinden biri olan Radyal Tabanlı Fonksiyon Ağları (RBFN) ile adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin elde edilmesidir. Yapay sinir ağlarının kullanıldığı ve farklı tipteki diferansiyel denklemlerin çözüldüğü çalışmaların ilkinin Meade ve

Fernandez (1994), lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kesin sınırlı aktivasyon fonksiyonunu (hard limit transfer function) içeren ileri beslemeli ağ yaklaşımını kullanarak gerçekleştirmiştir. Önerilen bu metot ile birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümü elde edilmiştir. Lagaris, Likas ve Fotiadis (1998), başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü için deneme fonksiyonu (trial function) tanımlamıştır. Çalışmalarında önerilen metodun adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile diferansiyel denklem sistemleri için uygulanabilir olduğu iddia edilmiştir.

Aarts ve Van Der Veer (2001), yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde ileri beslemeli ağ kullanmıştır. Malek ve Beidokhti (2006), ANN'ler ile yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümü için optimizasyon yaklaşımına dayalı hibrit metot önermiştir. Li-Ying, Hui ve Zhe-Zhao (2007), başlangıç değer problemi için kosinüs fonksiyonu kullanarak bir model oluşturmuştur. Bununla beraber bu modelin adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmede temel sayılan Euler ve Heun metoduna göre daha elverişli bir metot olduğu iddia edilmiştir.

Bu tezde, Dirichlet sınır koşullarına sahip adi diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonuna radyal tabanlı fonksiyonlar ile yaklaşılması önerilmektedir. Bu doğrultuda tezin geri kalan kısmı şu şekilde planlanmıştır: Bölüm 2'de Radyal tabanlı fonksiyonların tanımları ve özellikleri incelenmiştir. Bölüm 3'te ileri beslemeli yapay sinir ağları hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Bölüm 4'te YSA ile Dirichlet sınır değer problemlerinin nasıl çözüldüğü anlatılmıştır. Bölüm 5'te elde edilen deneysel sonuçlar sunulmuştur. Bölüm 6'da ise çalışmalardan elde edilen sonuçlara göre önemli hususlara değinilerek önerilerde bulunulmuştur.

2. RADYAL TABANLI FONKSİYONLAR ve ÖZELLİKLERİ

Radyal Tabanlı Fonksiyon (RBF) değeri, verinin orijine veya seçilen merkeze olan uzaklığına bağlı bir fonksiyondur. Orijine bağlı uzaklığı düşünülürse $\varphi(x) = \varphi(\|x\|)$ ile gösterilir. Alternatif olarak, verilerin c merkezine olan uzaklığı düşünülürse $\varphi(x, c) = \varphi(\|x - c\|)$ şeklinde ifade edilir. RBF'ler uzaklığa yani norma bağlı fonksiyonlar olduğu için $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanır.

Genel olarak, yapay sinir ağlarının ara (gizli) katman adı verilen katmanlarında kullanılan radyal tabanlı fonksiyonların toplamı ile doğrusal bir çıktı fonksiyonu oluşturulur. Toplam şeklinde tanımlanan bu çıktı ile verilen veri kümesine uygun fonksiyon yaklaşımları oluşturulur. Bu yaklaşım süreci basit bir sinir ağı olarak düşünülebilir.

Çıktı fonksiyonu i . nöron için, ω_i ağırlık vektörü, p boyutlu girdi ve $\varphi_i(\vec{x})$ kullanılan radyal tabanlı fonksiyon olmak üzere ;

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \varphi_i(\|\vec{x} - \vec{c}\|) = \sum_{i=1}^m \omega_i \varphi_i(\vec{x})$$

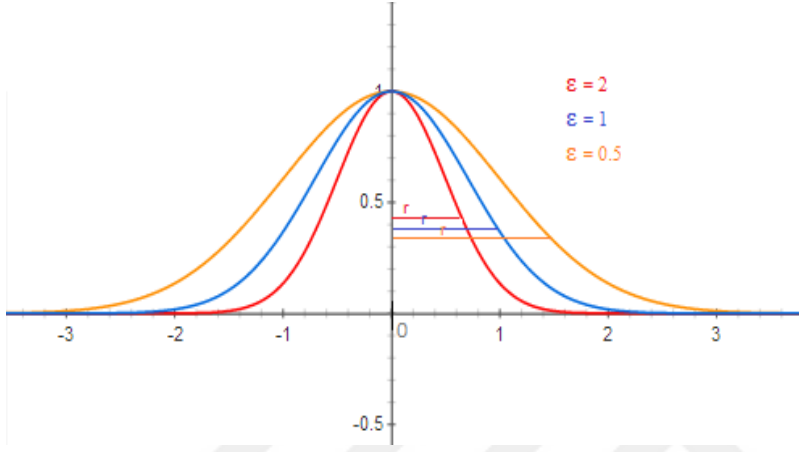
şeklinde m tane nöron için toplam fonksiyon olarak ifade edilebilir. Çıktı fonksiyonu doğrusal bir sonuç üreteceği için $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanabilir. Radyal tabanlı fonksiyon olarak kullanılacak çeşitli fonksiyonlar vardır.

Kullanılan fonksiyonlar ve özellikleri:

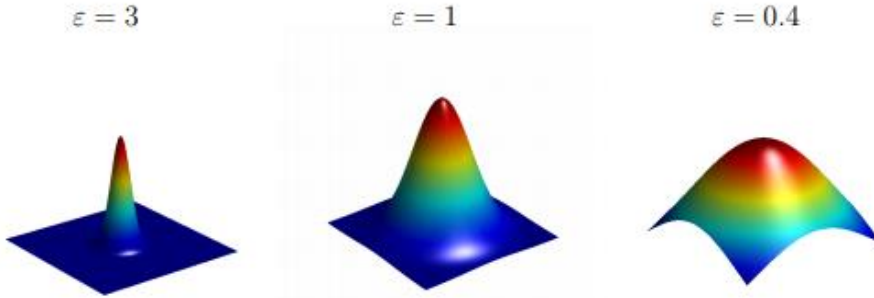
r , \vec{x} girdi vektörünün c merkeze olan uzaklığı olmak üzere $r = \|\vec{x} - c\| = \sqrt{(\vec{x} - c)(\vec{x} - c)}$ şeklinde ifade edilebilir. \vec{x} vektörü ara katmana $\vec{\omega}$ ağırlıklar ile çarpıldıktan sonra $\vec{\beta}$ eşik değeri ile toplanarak iletilir. Yani i . nöron için $z_i = \omega_i \vec{x} + \beta_i$ olarak belirtilirse uzaklığı $r_i = \|z_i - c_i\|$ ile ifade etmek mümkündür.

1-Gauss Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.1) eşitliği ile verilen Gauss tipli fonksiyonlar, elips şeklindedir.

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|_2) = e^{-\frac{r_i}{s_i^2}} \quad (2.1)$$



Şekil 2.1. Gauss fonksiyonu için r (yarıçap) arttıkça ε (genlik) azalmaktadır.



Şekil 2.2. Farklı genlik değerlerinde Gauss Fonksiyonu (Mongillo, 2011)

2-Kuadratik Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.2) eşitliği ile verilen kuadratik fonksiyon ikinci derece polinom, grafiği ise bir parabolüdür.

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|_2) = r_i^2 + s_i^2 \quad (2.2)$$

3-Multikuadratik Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.3) eşitliği ile verilen multikuadratik fonksiyonu 1971’de Hardy tarafından tanıtıldı (Hardy, 1971; Hardy, 1990; Alipanah, 2016). 1979’a kadar fark edilmeyen multikuadratiklerin sonrasında dağınık veri interpolasyonu gerektiren problemlerin çözümünde iyi bir yöntem olduğu saptandı (Franke, 1982; Alipanah, 2016). İnterpolasyon için

öncelik kazanan multikvadrikler aynı zamanda kısmi diferansiyel denklemlerin dağılık kümelerde çözümünde de başarı sağlamıştır (Fasshauer, 1997; Alipanah, 2016). Multikvadrikleri kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde ilk olarak 1990 yılında Edward Kansa (Kansa, 1990a; Kansa, 1990b; Alipanah, 2016) kullanmıştır (Fasshauer, 1997; Larsson, 2003; Alipanah, 2016).

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|_2) = \sqrt{r_i^2 + s_i^2} \quad (2.3)$$

4-Ters-kuadrik Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.4) eşitliği ile verilen fonksiyondur.

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|_2) = \frac{1}{r_i^2 + s_i^2} \quad (2.4)$$

5-Tersmultikvadrik Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.5) eşitliği ile verilen fonksiyondur.

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|_2) = \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + s_i^2}} \quad (2.5)$$

6-İnce Tabaka Spline Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.6) eşitliği ile verilen fonksiyondur. İnce tabaka splineler (TPS), pürüzsüz veri interpolasyonu için önerilen spline tabanlı bir tekniktir. Duchon tarafından geometrik tasarım amacıyla getirilmiştir (Micchelli, 1983).

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|_2) = r^2 \ln r \quad (2.6)$$

7-Cauchy Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.7) eşitliği ile verilen fonksiyondur.

$$\varphi(r_i) = \varphi(\|z_i - c_i\|) = \frac{1}{r + 1} \quad (2.7)$$

8-Wedland Tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon: Genel formu (2.8) eşitliği ile verilen fonksiyondur.

$$\varphi(r_i) = \begin{cases} (1+r)^4(1+4r), & 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.1. Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Eğri Uydurma

$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ noktaları için $f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ şeklinde radyal tabanlı fonksiyonların lineer bileşimlerinin bir sonlu toplamı şeklinde yazılan bir eğri uydurulmak istensin.

$1 \leq j \leq n$ için c_j bilinmeyen sabitler ve $\varphi_j(x)$ radyal tabanlı fonksiyonları ise x_i 'lerin birer fonksiyonu olarak alınsın. Buna göre hata fonksiyonu,

$$\begin{aligned} E(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) &= \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + c_3\varphi_3(x_i) + \dots + c_n\varphi_n(x_i) - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n c_j\varphi_j(x_i) \end{aligned}$$

ile ifade edilir.

Hatayı minimize etmek için E 'nin c_j 'lere göre kısmi türevi alınır.

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=1}^N (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \dots + c_n\varphi_n(x_i) - y_i)(\varphi_1(x_i)) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = 2 \sum_{i=1}^N (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \dots + c_n\varphi_n(x_i) - y_i)(\varphi_2(x_i)) = 0$$

⋮

$$\frac{\partial E}{\partial c_n} = 2 \sum_{i=1}^N (c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \dots + c_n\varphi_n(x_i) - y_i)(\varphi_n(x_i)) = 0$$

Bu denklemler düzenlenirse;

$$c_1 \sum_{i=1}^N (\varphi_1(x_i))^2 + c_2 \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) + \dots + c_n \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)\varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)y_i$$

$$c_1 \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^N (\varphi_2(x_i))^2 + \dots + c_n \sum_{i=1}^N \varphi_2(x_i)\varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^N \varphi_2(x_i)y_i$$

⋮

$$c_1 \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i)\varphi_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i)\varphi_2(x_i) + \dots + c_n \sum_{i=1}^N (\varphi_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i)y_i$$

denklem sistemi elde edilir.

Matris formda yazarsak;

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N [\varphi_1(x_i)]^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)\varphi_n(x_i) \\ \sum_{i=1}^N \varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum_{i=1}^N [\varphi_2(x_i)]^2 & \dots & \sum_{i=1}^N \varphi_2(x_i)\varphi_n(x_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i)\varphi_2(x_i) & \dots & \sum_{i=1}^N [\varphi_n(x_i)]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \varphi_1(x_i)y_i \\ \sum_{i=1}^N \varphi_2(x_i)y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \varphi_n(x_i)y_i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

sistemi elde edilir. Eğer bu sistem çözümlerse c_j katsayıları bulunur. Ancak bilinmeyen parametre sayısı arttıkça denklem sistemini çözmek için gerekli iş yükü artar. Üstelik (2.9) ile verilen denklem sisteminde radyal tabanlı fonksiyonların yarıçap ve genlik gibi parametreleri diğer bilinmeyen keyfi parametreler dikkate alınmamıştır. Eğer her bir radyal tabanlı fonksiyon için bilinmeyen parametreler sadece yarıçap ve genlik olarak alınırsa, katsayılarla beraber hatayı minimize etmek için $(3n) \times (3n)$ tipinde bir denklem sistemini çözmemiz gerekir.

Bahsedilen iş yükünden ve türev değerlerini elde etmekten kaçınarak çözüm elde edebilmek adına takip eden bölümde ileri beslemeli yapay sinir ağları ile nasıl çözüm elde edildiği anlatılmıştır.

3. DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN RADYAL TABANLI YAPAY SİNİR AĞI MODELİ

Yapay Sinir Ağları (YSA) insan beynine ait olan bilgiyi keşfetme, öğrenme gibi özellikleri otomatik olarak gerçekleştiren sistemlerdir. YSA'lar ağırlıklandırılmış bağlar ile bağlanmış katmanlardan oluşur. Genellikle girdi katmanı, ara katman ve çıktı katmanı olmak üzere üç katmandan oluşur. Girdi katmanı bilgiyi karşılar. Herhangi bir bilgi işleme gerçekleştirilmeden bilgiyi ara katmana taşıyan katmandır. Bilgi ara katmanda radyal tabanlı fonksiyonlar ile işlenir ve ağırlıklandırılmış bağlar ile çıktı katmanına gönderilir. Ara katmandan gelen işlenmiş bilgilerin nümerik değerleri, ağırlıklar ile çapılarak çıktı katmanına gönderilir ve tüm bileşenlerin lineer kombinasyonu ile bir çıktı fonksiyonu elde edilir.

Çıktı katmanının oluşturduğu çıktı fonksiyonu ile gerçek çözüm arasındaki değer hata fonksiyonunu oluşturur. İleri beslemeli YSA da çıkış katmanı hariç herhangi bir katmanın çıktısı kendinden sonra gelen katmanın girdisini oluşturur. Son olarak çıktı katmanında hesaplanan değer ile gerçek çözüm değeri arasındaki fark hatayı oluşturur. Fakat çıktı katmanının çıktısı başka bir katmanın girdisini oluşturmadığı için hata, ağ üzerine geri bildirim ile işlenmez. Yani hata ağ üzerine geri yayılım gerçekleştirmez.

Bu çalışmada amaç Dirichlet sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümünü ileri beslemeli Radyal Tabanlı Fonksiyon Ağları (RBFN) ile sağlamaktır. Dirichlet Sınır Değer Problemi (DBVP), $x \in [a, b]$ için $y(a) = A$ ve $y(b) = B$ sınır değer koşullarını sağlayan ikinci mertebeden $y'' = f(x, y, y')$ şeklinde tanımlanan adi diferansiyel denklem problemleridir.

RBFN eğitimi için y_T ile ifade edilen deneme fonksiyonu oluşturulur. Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak ve yapay sinir ağı çözümüne bağımlı olacak şekilde (3.1) eşitliğindeki gibi tanımlanır. Eğitimin amacı oluşturulan deneme fonksiyonu ile gerçek çözüm arasındaki farkı yani hatayı minimize ederek gerçek değerlere olabildiğince yaklaşmaktır. $x \in [a, b]$ için $y(a) = A$ ve $y(b) = B$ sınır değer koşullarını sağlayan ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem için deneme fonksiyonunu

$$y_T = \frac{bA - aB}{b - a} + \frac{B - A}{b - a}x + (x - a)(x - b)Net(x, \vec{p}) \quad (3.1)$$

olarak yazarsak, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ için x_j girdisi için oluşan hatayı;

$$e_j = \left| \frac{\partial^2 y_T(x_j)}{\partial x_j^2} - f \left(x_j, y_T, \frac{\partial y_T(x_j)}{\partial x_j} \right) \right|$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu durumda her bir girdi için elde edilen mutlak hataların kareleri toplamı;

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 y_T(x_j)}{\partial x_j^2} - f \left(x_j, y_T, \frac{\partial y_T(x_j)}{\partial x_j} \right) \right]^2 \quad (3.2)$$

olur.

(3.1) eşliğinde $Net(x, \vec{p})$ verilen sınır değer probleminde yapay sinir ağı çözümüdür ve m yapay sinir ağındaki nöron sayısının belirtmek üzere (3.3) eşitliğinde verildiği gibi ifade edilir.

$$Net(x, \vec{p}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(\|z_i\|) \quad (3.3)$$

(3.2) eşitliğinde $z_i = \omega_i x_j + \beta_i$ denkleğinden faydalanarak

$$Net(x_j, \vec{p}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(\|\omega_i x_j + \beta_i\|)$$

eşitliği ile de kullanılabilir. Burada α_i , ω_i ve β_i değerleri ağıın arasındaki ağırlık katsayılarıdır. β_i eşik değerdir ve değerler bilinmeyen parametrelerdir. Dolayısıyla ağıın keyfi parametreleri $\vec{\alpha}, \vec{\omega}, \vec{\beta} \in R^m$ olacak şekilde $\vec{p} = (\vec{\alpha}, \vec{\omega}, \vec{\beta})$ vektörü ile belirlenir. Ağıın eğitimi sırasında uygun \vec{p} parametre değerleri belirlenir. Bu amaçla (3.2) eşitliği ile verilen maliyet fonksiyonunun minimize edilmesi gerekmektedir. Bunun içinse α_i , ω_i ve β_i değişkenlerine göre kısmi türevler aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 y_T}{\partial x_j^2} - f(x_j, y_T, \frac{\partial y_T}{\partial x_j}) \right) \left(\frac{\partial^3 y_T}{\partial \alpha_i \partial x_j^2} - \frac{\partial f \left(x_j, y_T, \frac{\partial y_T}{\partial x_j} \right)}{\partial \alpha_i} \right) \right] = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 y_T}{\partial x_j^2} - f(x_j, y_T, \frac{\partial y_T}{\partial x_j}) \right) \left(\frac{\partial^3 y_T}{\partial \omega_i \partial x_j^2} - \frac{\partial f \left(x_j, y_T, \frac{\partial y_T}{\partial x_j} \right)}{\partial \omega_i} \right) \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 y_T}{\partial x_j^2} - f(x_j, y_T, \frac{\partial y_T}{\partial x_j}) \right) \left(\frac{\partial^3 y_T}{\partial \beta_i \partial x_j^2} - \frac{\partial f \left(x_j, y_T, \frac{\partial y_T}{\partial x_j} \right)}{\partial \beta_i} \right) \right] = 0 \quad (3.6)$$

(3.4), (3.5), (3.6) denklemlerinde ihtiyaç duyulan $\frac{\partial y_T}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 y_T}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial^2 y_T}{\partial \alpha_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 y_T}{\partial \omega_i \partial x_j}$

, $\frac{\partial^2 y_T}{\partial \beta_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^3 y_T}{\partial \alpha_i \partial x_j^2}$, $\frac{\partial^3 y_T}{\partial \omega_i \partial x_j^2}$ ve $\frac{\partial^3 y_T}{\partial \beta_i \partial x_j^2}$ türevleri aşağıdaki gibi ifade

edilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial x_j} &= \frac{B-A}{b-a} + (x-b)Net(x_j, \bar{p}) + (x-a)Net(x_j, \bar{p}) \\ &+ (x-a)(x-b) \cdot \frac{\partial Net(x_j, \bar{p})}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_T}{\partial x_j^2} &= 2Net(x_j, \bar{p}) + (4x-2a-2b) \frac{\partial Net(x_j, \bar{p})}{\partial x_j} \\ &+ (x-a)(x-b) \frac{\partial^2 Net(x_j, \bar{p})}{\partial x_j^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 y_T}{\partial \alpha_i \partial x_j} = (2x - a - b) \frac{\partial \text{Net}}{\partial \alpha_i} + (x - a)(x - b) \frac{\partial^2 \text{Net}}{\partial x_j \partial \alpha_i}$$

$$\frac{\partial^2 y_T}{\partial \omega_i \partial x_j} = (2x - a - b) \frac{\partial \text{Net}}{\partial \omega_i} + (x - a)(x - b) \frac{\partial^2 \text{Net}}{\partial x_j \partial \omega_i}$$

$$\frac{\partial^2 y_T}{\partial \beta_i \partial x_j} = (2x - a - b) \frac{\partial \text{Net}}{\partial \beta_i} + (x - a)(x - b) \frac{\partial^2 \text{Net}}{\partial x_j \partial \beta_i}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y_T}{\partial \alpha_i \partial x_j^2} &= \frac{2\partial \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i \partial x_j} (4x - 2a - 2b) \\ &\quad + \frac{\partial^3 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i \partial x_j^2} (x - a)(x - b) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y_T}{\partial \omega_i \partial x_j^2} &= \frac{2\partial \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i} + \frac{\partial^2 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i \partial x_j} (4x - 2a - 2b) \\ &\quad + \frac{\partial^3 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i \partial x_j^2} (x - a)(x - b) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y_T}{\partial \beta_i \partial x_j^2} &= \frac{2\partial \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i} + \frac{\partial^2 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i \partial x_j} (4x - 2a - 2b) \\ &\quad + \frac{\partial^3 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i \partial x_j^2} (x - a)(x - b) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.7) ve (3.8) eşitlikleri yazılırken ihtiyaç duyulan $\frac{\partial \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial x_j}$ ve

$\frac{\partial^2 \text{Net}(x_j, \vec{p})}{\partial x_j^2}$ türevleri şu şekildedir:

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \omega_i \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i))$$

$$\frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \omega_i^2 \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i))$$

(3.9) denkliđi hesaplanırken ihtiyaç duyulan α_i ye gre gerekli trevler

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i \partial x_j^2}; \quad (3.10) \text{ denkliđi hesaplanırken}$$

ihitiya duyulan ω_i ye göre gerekli türevler

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i}, \frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i \partial x_j^2} \text{ ve } (3.11) \text{ denkliđi hesaplanırken}$$

ihitiya duyulan β_i ye göre gerekli türevler

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i}, \frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i \partial x_j^2} \text{ sırasıyla } (3.12), (3.13), (3.14),$$

(3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) denklemleri ile hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i} = \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i \partial x_j} = \omega_i \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^3 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \alpha_i \partial x_j^2} = \omega_i^2 \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i} = \alpha_i x_j \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i \partial x_j} = \alpha_i \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 + \omega_i x_j (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) + x_j \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \omega_i \partial x_j^2} &= 2\omega_i \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \\
&\quad + \omega_i^2 x_j \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i))^2 (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \\
&\quad - \omega_i^2 x_j \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)^2 (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \\
&\quad - 2\omega_i^2 x_j \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)^2 (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i))^2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial Net(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i} = \alpha_i \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i \partial x_j} = \alpha_i \omega_i \varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 Net(x_j, \vec{p})}{\partial \beta_i \partial x_j^2} &= \alpha_i \omega_i^2 (\varphi(\omega_i x_j + \beta_i) (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i))^2 (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \\
&\quad - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)^2 (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) (1 - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)) \\
&\quad - 2\varphi(\omega_i x_j + \beta_i)^2 (1 - \varphi(\omega_i x_j + \beta_i))^2)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

E hata fonksiyonu minimize edilip çözüm en iyileştirilirken genellikle Gradyan Düşüm yaklaşımı kullanılır. Ancak bu yöntem türevlenebilir fonksiyonların yerel minimum noktalarına ulaşmada oldukça etkinken, global minimum noktaya ulaşmada çoğu zaman yetersiz kalır. Dolayısıyla bu çalışmada RBF ağlarının eğitimi aşamasında optimizasyon yöntemlerinden biri olan ve sürü zekası yaklaşımını içeren Parçacık Sürü Optimizasyonu kullanılmıştır.

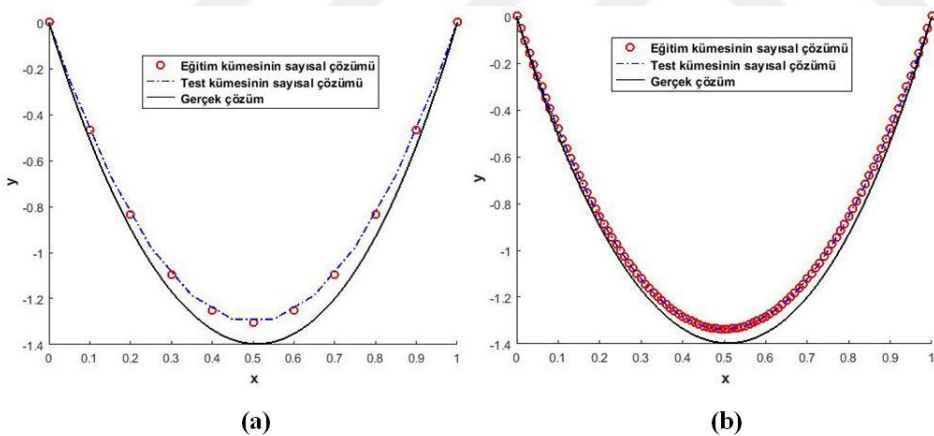
Bir sonraki bölümde deneysel çalışmalarla lineer ve lineer olmayan DBVP incelenmiş, elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

4. DENEYSEL SONUÇLAR

Örnek:

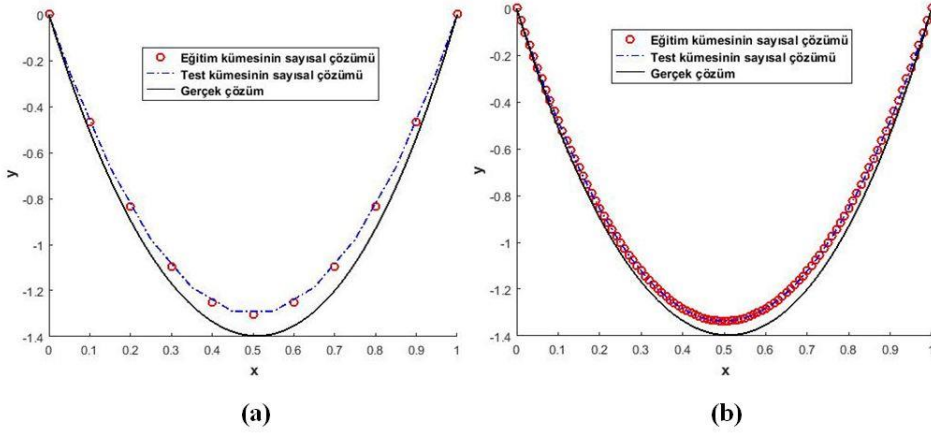
$$\begin{cases} y'' = y' + 2y + 8e^x, & x \in [0,1] \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Şekil 4.1’de Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak iki farklı adım uzunluğu için $y = \frac{8}{3} \frac{e^3}{e^3 - 1} (e^{-2x} - e^x) + xe^x$ gerçek çözümüne sahip (4.1) denklemi ile verilen Dirichlet sınır değer problemi için elde edilen çözüm grafiği verilmiştir.



Şekil 4.1. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda
(a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Benzer olarak kuadrik, multikuadrik, ters kuadrik, ters multikuadrik ve TPS tipli Radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak elde edilen çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 4.2 - Şekil 4.12 de gösterilmektedir.



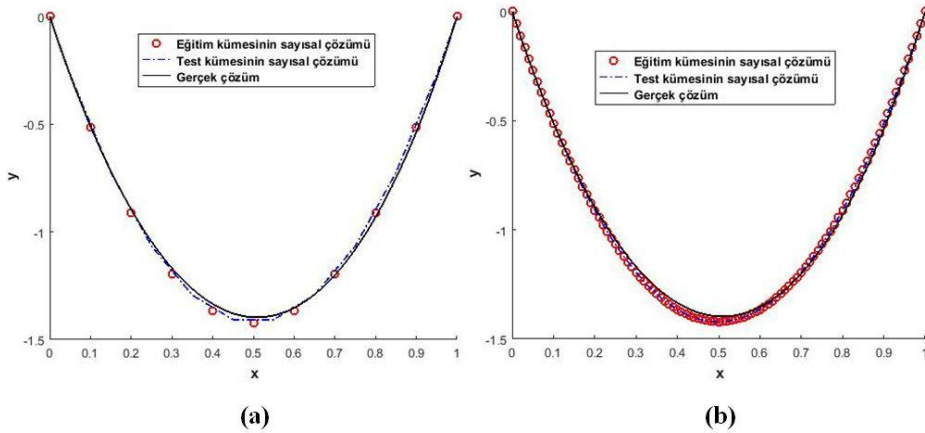
Şekil 4.2. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.1. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

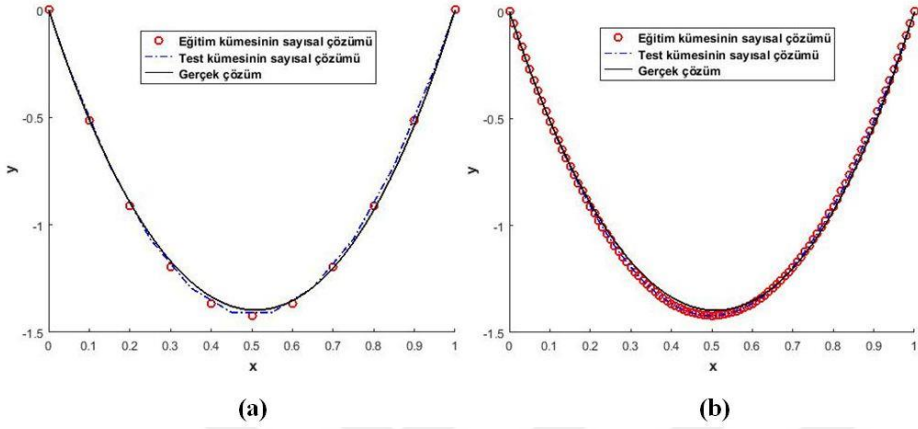
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	3.93×10^{-3}	4.03×10^{-3}
				3	0.02	7.57×10^{-3}	7.77×10^{-3}
				4	0.03	1.09×10^{-2}	1.12×10^{-2}
				5	0.04	1.41×10^{-2}	1.44×10^{-2}
2	0.1	4.00×10^{-2}	5.58×10^{-2}	11	0.10	2.82×10^{-2}	2.90×10^{-2}
3	0.2	6.10×10^{-2}	8.92×10^{-2}	21	0.20	4.00×10^{-2}	4.16×10^{-2}
4	0.3	7.34×10^{-2}	1.10×10^{-1}	31	0.30	4.58×10^{-2}	4.79×10^{-2}
5	0.4	8.32×10^{-2}	1.26×10^{-1}	41	0.40	5.17×10^{-2}	5.41×10^{-2}
6	0.5	9.29×10^{-2}	1.37×10^{-1}	51	0.50	6.01×10^{-2}	6.26×10^{-2}
7	0.6	1.02×10^{-1}	1.44×10^{-1}	61	0.60	7.03×10^{-2}	7.26×10^{-2}
8	0.7	1.06×10^{-1}	1.43×10^{-1}	71	0.70	7.80×10^{-2}	8.01×10^{-2}
9	0.8	9.72×10^{-2}	1.25×10^{-1}	81	0.80	7.62×10^{-2}	7.7×10^{-2}
10	0.9	6.65×10^{-2}	8.23×10^{-2}	91	0.90	5.47×10^{-2}	5.56×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.2. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	2.32×10^{-2}	3.15×10^{-2}	2	0.005	2.00×10^{-3}	2.05×10^{-3}
3	0.15	5.21×10^{-2}	7.46×10^{-2}	3	0.015	5.79×10^{-3}	5.93×10^{-3}
4	0.25	6.78×10^{-2}	1.01×10^{-1}	4	0.025	9.29×10^{-3}	9.53×10^{-3}
5	0.35	7.84×10^{-2}	1.19×10^{-1}	5	0.035	1.25×10^{-2}	1.29×10^{-2}
6	0.45	8.80×10^{-2}	1.32×10^{-1}	11	0.095	2.72×10^{-2}	2.81×10^{-2}
7	0.55	9.76×10^{-2}	1.41×10^{-1}	21	0.195	3.97×10^{-2}	4.12×10^{-2}
8	0.65	1.05×10^{-1}	1.45×10^{-1}	31	0.295	4.56×10^{-2}	4.76×10^{-2}
9	0.75	1.04×10^{-1}	1.37×10^{-1}	41	0.395	5.14×10^{-2}	5.37×10^{-2}
10	0.85	8.54×10^{-2}	1.08×10^{-1}	51	0.495	5.97×10^{-2}	6.21×10^{-2}
11	0.95	3.87×10^{-2}	4.70×10^{-2}	61	0.595	6.98×10^{-2}	7.21×10^{-2}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	7.78×10^{-2}	7.99×10^{-2}
				81	0.795	7.67×10^{-2}	7.83×10^{-2}
				91	0.895	5.64×10^{-2}	5.73×10^{-2}
				101	0.995	3.76×10^{-3}	3.81×10^{-3}
				102	1.000	0.00	0.00



Şekil 4.3. Kuadratik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



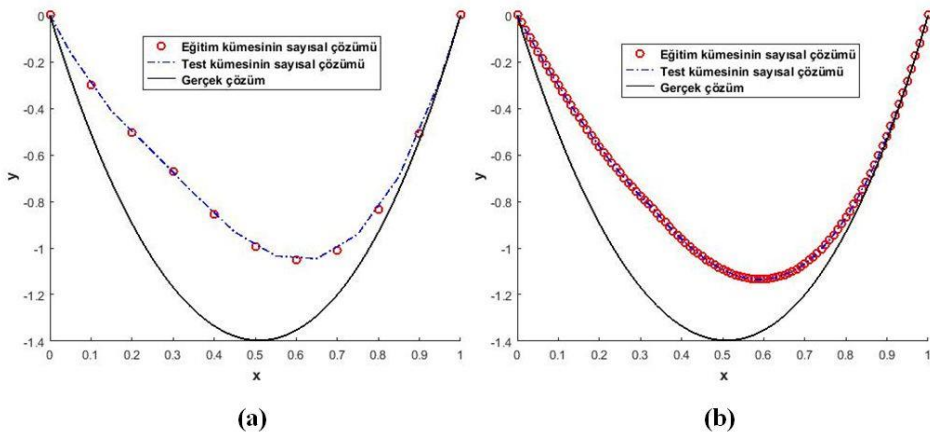
Şekil 4.4. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.3. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

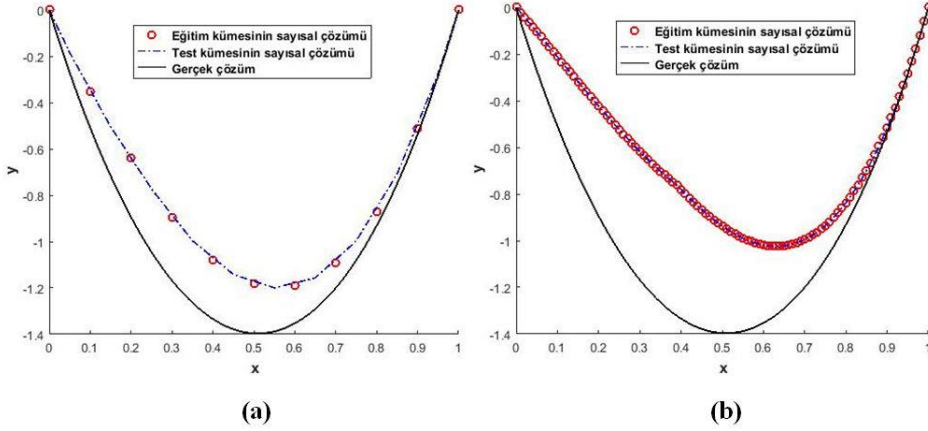
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	5.44×10^{-4}	5.44×10^{-4}
				3	0.02	8.67×10^{-4}	8.66×10^{-4}
				4	0.03	9.85×10^{-4}	9.84×10^{-4}
				5	0.04	9.14×10^{-4}	9.14×10^{-4}
2	0.1	2.60×10^{-3}	2.59×10^{-3}	11	0.10	2.64×10^{-3}	2.64×10^{-3}
3	0.2	1.46×10^{-2}	1.46×10^{-2}	21	0.20	1.47×10^{-2}	1.47×10^{-2}
4	0.3	2.59×10^{-2}	2.59×10^{-2}	31	0.30	2.60×10^{-2}	2.60×10^{-2}
5	0.4	3.03×10^{-2}	3.03×10^{-2}	41	0.40	3.04×10^{-2}	3.04×10^{-2}
6	0.5	2.53×10^{-2}	2.53×10^{-2}	51	0.50	2.54×10^{-2}	2.54×10^{-2}
7	0.6	1.18×10^{-2}	1.17×10^{-2}	61	0.60	1.19×10^{-2}	1.19×10^{-2}
8	0.7	6.26×10^{-3}	6.26×10^{-3}	71	0.70	6.15×10^{-3}	6.15×10^{-3}
9	0.8	2.16×10^{-2}	2.16×10^{-2}	81	0.80	2.15×10^{-2}	2.15×10^{-2}
10	0.9	2.40×10^{-2}	2.39×10^{-2}	91	0.90	2.39×10^{-2}	2.39×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.4. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0,00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	6.95×10^{-4}	6.95×10^{-4}	2	0.005	3.00×10^{-4}	3.00×10^{-4}
3	0.15	8.17×10^{-3}	8.17×10^{-3}	3	0.015	7.32×10^{-4}	7.31×10^{-4}
4	0.25	2.08×10^{-2}	2.08×10^{-2}	4	0.025	9.50×10^{-4}	9.50×10^{-4}
5	0.35	2.92×10^{-2}	2.92×10^{-2}	5	0.035	9.72×10^{-4}	9.71×10^{-4}
6	0.45	2.90×10^{-2}	2.90×10^{-2}	11	0.095	2.18×10^{-3}	2.18×10^{-3}
7	0.55	1.94×10^{-2}	1.94×10^{-2}	21	0.195	1.41×10^{-2}	1.40×10^{-2}
8	0.65	2.92×10^{-3}	2.92×10^{-3}	31	0.295	2.56×10^{-2}	2.56×10^{-2}
9	0.75	1.48×10^{-2}	1.48×10^{-2}	41	0.395	3.04×10^{-2}	3.04×10^{-2}
10	0.85	2.51×10^{-2}	2.51×10^{-2}	51	0.495	2.59×10^{-2}	2.59×10^{-2}
11	0.95	1.62×10^{-2}	1.62×10^{-2}	61	0.595	1.27×10^{-2}	1.27×10^{-2}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	5.25×10^{-3}	5.24×10^{-3}
				81	0.795	2.09×10^{-2}	2.09×10^{-2}
				91	0.895	2.43×10^{-2}	2.42×10^{-2}
				101	0.995	2.06×10^{-3}	2.06×10^{-3}
				102	1.000	0.00	0.00



Şekil 4.5. Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



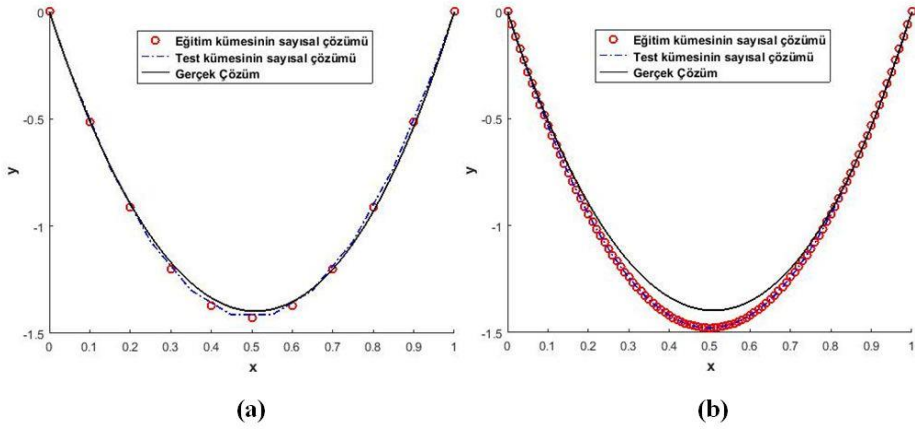
Şekil 4.6. Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.5. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

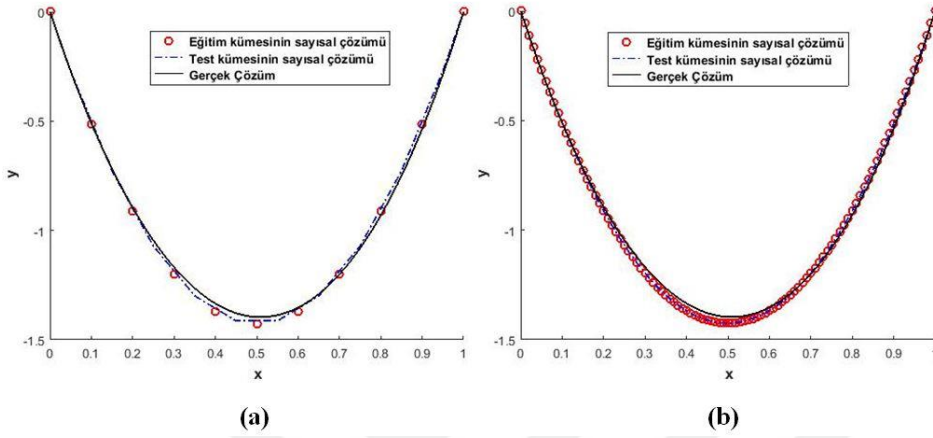
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	2.52×10^{-2}	3.62×10^{-2}
				3	0.02	4.94×10^{-2}	7.09×10^{-2}
				4	0.03	7.25×10^{-2}	1.04×10^{-1}
				5	0.04	9.46×10^{-2}	1.36×10^{-1}
2	0.1	2.11×10^{-1}	1.56×10^{-1}	11	0.10	2.07×10^{-1}	2.98×10^{-1}
3	0.2	3.90×10^{-1}	2.57×10^{-1}	21	0.20	3.31×10^{-1}	4.72×10^{-1}
4	0.3	4.96×10^{-1}	2.74×10^{-1}	31	0.30	3.92×10^{-1}	5.51×10^{-1}
5	0.4	4.81×10^{-1}	2.55×10^{-1}	41	0.40	3.73×10^{-1}	5.53×10^{-1}
6	0.5	4.04×10^{-1}	2.14×10^{-1}	51	0.50	3.04×10^{-1}	4.59×10^{-1}
7	0.6	3.00×10^{-1}	1.61×10^{-1}	61	0.60	2.19×10^{-1}	3.34×10^{-1}
8	0.7	1.91×10^{-1}	1.08×10^{-1}	71	0.70	1.34×10^{-1}	2.05×10^{-1}
9	0.8	9.51×10^{-2}	6.12×10^{-2}	81	0.80	6.27×10^{-2}	9.38×10^{-2}
10	0.9	2.74×10^{-2}	2.49×10^{-2}	91	0.90	1.59×10^{-2}	2.00×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizgelge 4.6. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	1.09×10^{-1}	8.62×10^{-2}	2	0.005	1.28×10^{-2}	1.83×10^{-2}
3	0.15	3.05×10^{-1}	2.13×10^{-1}	3	0.015	3.74×10^{-2}	5.37×10^{-2}
4	0.25	4.60×10^{-1}	2.72×10^{-1}	4	0.025	6.11×10^{-2}	8.76×10^{-2}
5	0.35	4.10×10^{-1}	2.68×10^{-1}	5	0.035	8.37×10^{-2}	1.20×10^{-1}
6	0.45	4.47×10^{-1}	2.37×10^{-1}	11	0.095	1.99×10^{-1}	2.86×10^{-1}
7	0.55	3.54×10^{-1}	1.88×10^{-1}	21	0.195	3.26×10^{-1}	4.66×10^{-1}
8	0.65	2.45×10^{-1}	1.34×10^{-1}	31	0.295	3.90×10^{-1}	5.49×10^{-1}
9	0.75	1.40×10^{-1}	8.35×10^{-2}	41	0.395	3.76×10^{-1}	5.57×10^{-1}
10	0.85	5.68×10^{-2}	4.16×10^{-2}	51	0.495	3.08×10^{-1}	4.64×10^{-1}
11	0.95	8.00×10^{-3}	1.11×10^{-2}	61	0.595	2.23×10^{-1}	3.41×10^{-1}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	1.38×10^{-1}	2.11×10^{-1}
				81	0.795	6.57×10^{-2}	9.86×10^{-2}
				91	0.895	1.76×10^{-2}	2.26×10^{-2}
				101	0.995	2.65×10^{-6}	4.90×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00



Şekil 4.7. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



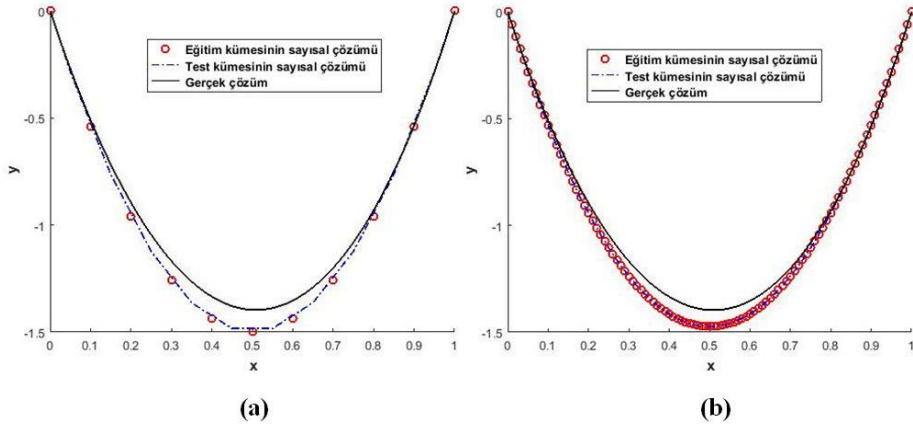
Şekil 4.8. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda **(a)** $h=0.1$ ve **(b)** $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.7. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

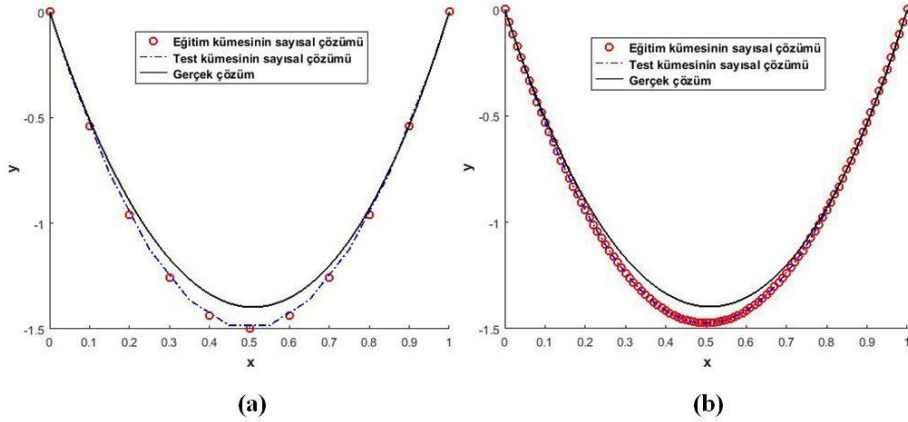
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	1.70×10^{-3}	4.23×10^{-4}
				3	0.02	3.58×10^{-3}	6.27×10^{-4}
				4	0.03	5.62×10^{-3}	6.29×10^{-4}
				5	0.04	7.81×10^{-3}	4.44×10^{-4}
2	0.1	4.87×10^{-3}	4.86×10^{-3}	11	0.10	2.31×10^{-2}	3.74×10^{-3}
3	0.2	1.87×10^{-2}	1.87×10^{-2}	21	0.20	5.10×10^{-2}	1.67×10^{-2}
4	0.3	3.12×10^{-2}	3.12×10^{-2}	31	0.30	7.37×10^{-2}	2.86×10^{-2}
5	0.4	3.64×10^{-2}	3.63×10^{-2}	41	0.40	8.49×10^{-2}	3.33×10^{-2}
6	0.5	3.16×10^{-2}	3.16×10^{-2}	51	0.50	8.22×10^{-2}	2.84×10^{-2}
7	0.6	1.78×10^{-2}	1.78×10^{-2}	61	0.60	6.64×10^{-2}	1.48×10^{-2}
8	0.7	9.40×10^{-4}	9.63×10^{-4}	71	0.70	4.15×10^{-2}	3.58×10^{-3}
9	0.8	1.75×10^{-2}	1.75×10^{-2}	81	0.80	1.49×10^{-2}	1.95×10^{-2}
10	0.9	2.16×10^{-2}	2.17×10^{-2}	91	0.90	3.439×10^{-3}	2.28×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.8. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	5.08×10^{-4}	5.03×10^{-4}	2	0.005	8.29×10^{-4}	4.23×10^{-4}
3	0.15	1.14×10^{-2}	1.14×10^{-2}	3	0.015	2.62×10^{-3}	6.27×10^{-4}
4	0.25	2.56×10^{-2}	2.55×10^{-2}	4	0.025	4.59×10^{-3}	6.29×10^{-4}
5	0.35	3.50×10^{-2}	3.49×10^{-2}	5	0.035	6.70×10^{-3}	4.44×10^{-4}
6	0.45	3.52×10^{-2}	3.52×10^{-2}	11	0.095	2.17×10^{-2}	3.74×10^{-3}
7	0.55	2.56×10^{-2}	2.56×10^{-2}	21	0.195	4.97×10^{-2}	1.67×10^{-2}
8	0.65	8.68×10^{-3}	8.65×10^{-3}	31	0.295	7.28×10^{-2}	2.86×10^{-2}
9	0.75	1.01×10^{-2}	1.01×10^{-2}	41	0.395	8.47×10^{-2}	3.33×10^{-2}
10	0.85	2.19×10^{-2}	2.19×10^{-2}	51	0.495	8.26×10^{-2}	2.84×10^{-2}
11	0.95	1.50×10^{-2}	1.50×10^{-2}	61	0.595	6.74×10^{-2}	1.48×10^{-2}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	4.29×10^{-2}	3.58×10^{-3}
				81	0.795	1.61×10^{-2}	1.95×10^{-2}
				91	0.895	2.92×10^{-3}	2.28×10^{-2}
				101	0.995	9.32×10^{-4}	4.23×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00



Şekil 4.9. Ters Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



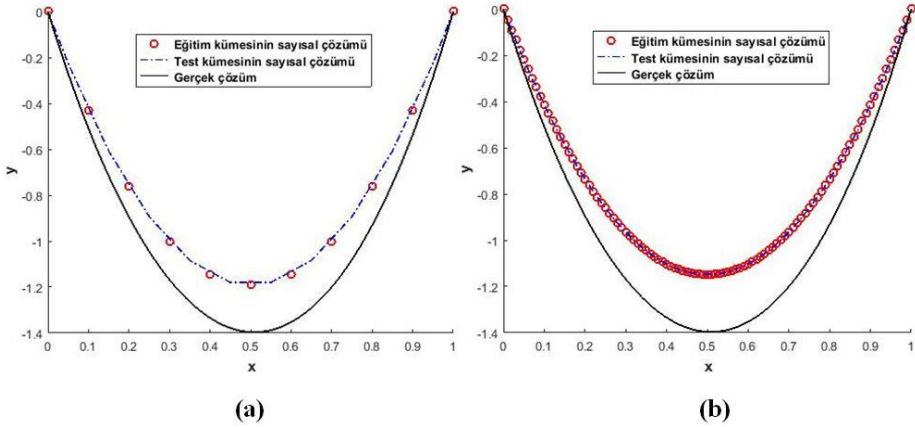
Şekil 4.10 .Ters Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.9. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

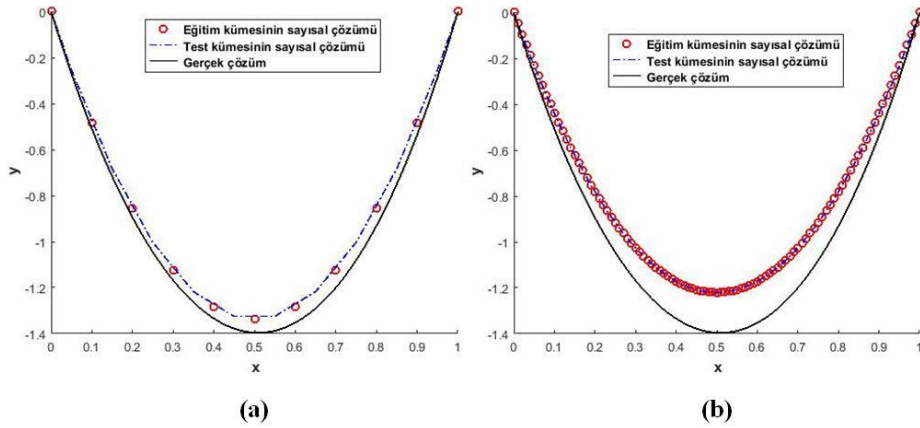
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	1.51×10^{-3}	1.51×10^{-3}
				3	0.02	3.20×10^{-3}	3.20×10^{-3}
				4	0.03	5.05×10^{-3}	5.04×10^{-3}
				5	0.04	7.04×10^{-3}	7.04×10^{-3}
2	0.1	3.01×10^{-2}	3.01×10^{-2}	11	0.10	2.13×10^{-2}	2.13×10^{-2}
3	0.2	6.35×10^{-2}	6.35×10^{-2}	21	0.20	4.79×10^{-2}	4.79×10^{-2}
4	0.3	9.01×10^{-2}	9.01×10^{-2}	31	0.30	6.95×10^{-2}	6.95×10^{-2}
5	0.4	1.04×10^{-1}	1.04×10^{-1}	41	0.40	8.01×10^{-2}	8.01×10^{-2}
6	0.5	1.02×10^{-1}	1.02×10^{-1}	51	0.50	7.72×10^{-2}	7.72×10^{-2}
7	0.6	8.50×10^{-2}	8.51×10^{-2}	61	0.60	6.16×10^{-2}	6.15×10^{-2}
8	0.7	5.79×10^{-2}	5.79×10^{-2}	71	0.70	3.74×10^{-2}	3.73×10^{-2}
9	0.8	2.73×10^{-2}	2.74×10^{-2}	81	0.80	1.17×10^{-2}	1.17×10^{-2}
10	0.9	3.58×10^{-3}	3.59×10^{-3}	91	0.90	5.23×10^{-3}	5.24×10^{-3}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.10. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	1.38×10^{-2}	1.38×10^{-2}	2	0.005	7.30×10^{-4}	7.30×10^{-4}
3	0.15	4.71×10^{-2}	4.71×10^{-2}	3	0.015	2.33×10^{-3}	2.33×10^{-3}
4	0.25	7.81×10^{-2}	7.81×10^{-2}	4	0.025	4.10×10^{-3}	4.10×10^{-3}
5	0.35	9.87×10^{-2}	9.87×10^{-2}	5	0.035	6.03×10^{-3}	6.02×10^{-3}
6	0.45	1.05×10^{-1}	1.05×10^{-1}	11	0.095	1.10×10^{-2}	1.10×10^{-2}
7	0.55	9.50×10^{-2}	9.50×10^{-2}	21	0.195	4.66×10^{-2}	4.66×10^{-2}
8	0.65	7.24×10^{-2}	7.25×10^{-2}	31	0.295	6.87×10^{-2}	6.86×10^{-2}
9	0.75	4.25×10^{-2}	4.25×10^{-2}	41	0.395	7.99×10^{-2}	7.99×10^{-2}
10	0.85	1.39×10^{-2}	1.39×10^{-2}	51	0.495	7.77×10^{-2}	7.76×10^{-2}
11	0.95	1.70×10^{-3}	1.69×10^{-3}	61	0.595	6.26×10^{-2}	6.26×10^{-2}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	3.87×10^{-2}	3.87×10^{-2}
				81	0.795	1.29×10^{-2}	1.28×10^{-2}
				91	0.895	4.78×10^{-3}	4.80×10^{-3}
				101	0.995	1.03×10^{-3}	1.03×10^{-3}
				102	1.000	0.00	0.00



Şekil 4.11. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.12. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.11. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	1.14×10^{-2}	$8.51e-03$
				3	0.02	2.23×10^{-2}	1.66×10^{-2}
				4	0.03	3.28×10^{-2}	2.44×10^{-2}
				5	0.04	4.29×10^{-2}	3.18×10^{-2}
2	0.1	8.02×10^{-2}	2.73×10^{-2}	11	0.10	9.58×10^{-2}	6.98×10^{-2}
3	0.2	1.33×10^{-1}	3.85×10^{-2}	21	0.20	1.60×10^{-1}	1.14×10^{-1}
4	0.3	1.67×10^{-1}	4.39×10^{-2}	31	0.30	2.04×10^{-1}	1.43×10^{-1}
5	0.4	1.90×10^{-1}	4.95×10^{-2}	41	0.40	2.32×10^{-1}	1.63×10^{-1}
6	0.5	2.05×10^{-1}	5.78×10^{-2}	51	0.50	2.48×10^{-1}	1.76×10^{-1}
7	0.6	2.09×10^{-1}	6.80×10^{-2}	61	0.60	2.51×10^{-1}	1.81×10^{-1}
8	0.7	1.99×10^{-1}	7.60×10^{-2}	71	0.70	2.36×10^{-1}	1.75×10^{-1}
9	0.8	1.69×10^{-1}	$7.47 e-02$	81	0.80	1.97×10^{-1}	1.50×10^{-1}
10	0.9	1.07×10^{-1}	$5.38 e-02$	91	0.90	1.22×10^{-1}	9.63×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

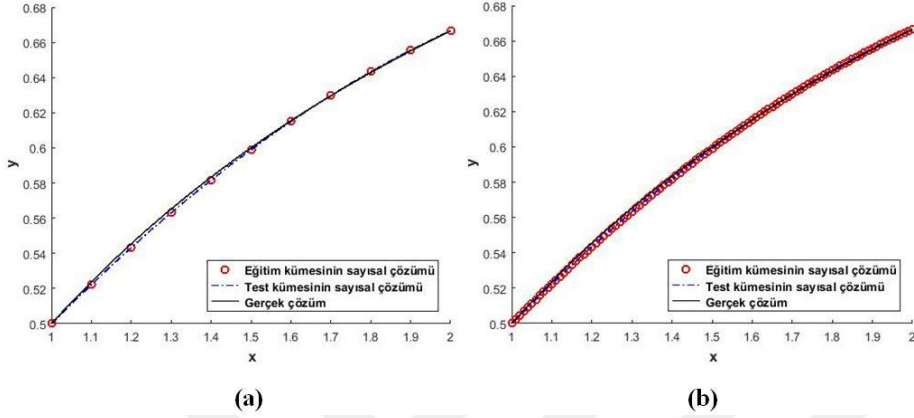
Çizelge 4.12. (4.1) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	4.44×10^{-2}	1.65×10^{-2}	2	0.005	5.74×10^{-3}	4.30×10^{-3}
3	0.15	1.09×10^{-1}	3.42×10^{-2}	3	0.015	1.69×10^{-2}	1.26×10^{-2}
4	0.25	1.52×10^{-1}	4.15×10^{-2}	4	0.025	2.76×10^{-2}	2.06×10^{-2}
5	0.35	1.80×10^{-1}	4.64×10^{-2}	5	0.035	3.79×10^{-2}	2.82×10^{-2}
6	0.45	1.99×10^{-1}	5.33×10^{-2}	11	0.095	9.19×10^{-2}	6.70×10^{-2}
7	0.55	2.08×10^{-1}	6.29×10^{-2}	21	0.195	1.58×10^{-1}	1.12×10^{-1}
8	0.65	2.06×10^{-1}	7.27×10^{-2}	31	0.295	2.02×10^{-1}	1.42×10^{-1}
9	0.75	1.87×10^{-1}	7.71×10^{-2}	41	0.395	2.31×10^{-1}	1.62×10^{-1}
10	0.85	1.42×10^{-1}	6.75×10^{-2}	51	0.495	2.48×10^{-1}	1.75×10^{-1}
11	0.95	5.99×10^{-2}	3.20×10^{-2}	61	0.595	2.51×10^{-1}	1.81×10^{-1}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	2.37×10^{-1}	1.76×10^{-1}
				81	0.795	1.99×10^{-1}	1.52×10^{-1}
				91	0.895	1.27×10^{-1}	9.99×10^{-2}
				101	0.995	7.50×10^{-3}	6.07×10^{-3}
				102	1.000	0.00	0.00

Örnek:

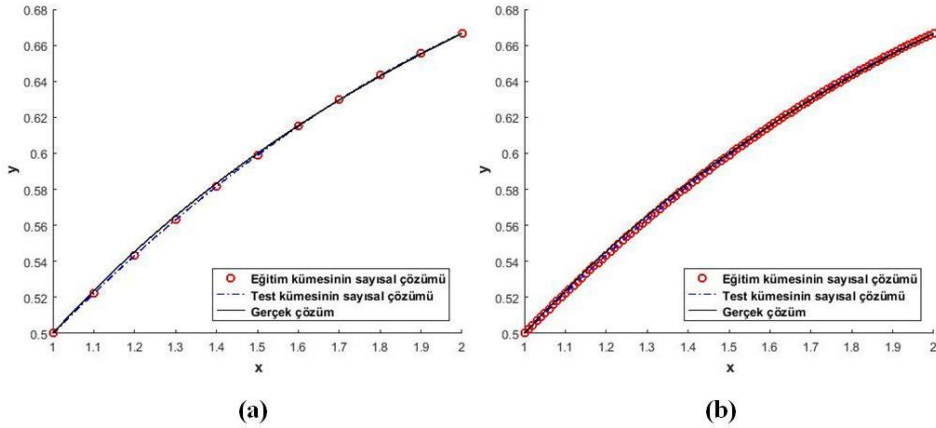
$$\begin{cases} y'' = \frac{-2}{x} yy' \\ y(1) = \frac{1}{2} \\ y(2) = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (4.2)$$

Şekil 4.13'te Gauss tipli Radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak farklı adım uzunlukları için $y = \frac{x}{x+1}$ gerçek çözümüne sahip lineer olmayan (4.2) denklemi ile verilen Dirichlet sınır değer problemi için elde edilen çözüm grafiği verilmiştir.



Şekil 4.13. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Benzer olarak kuadrik, multikuadrik, ters kuadrik, ters multikuadrik ve TPS tipli Radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak elde edilen çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 4.14 - Şekil 4.24'te gösterilmektedir.



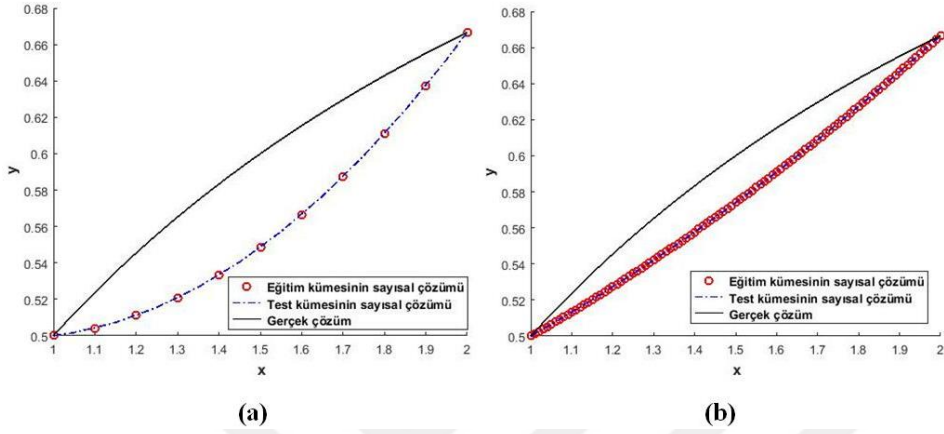
Şekil 4.14. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.13. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

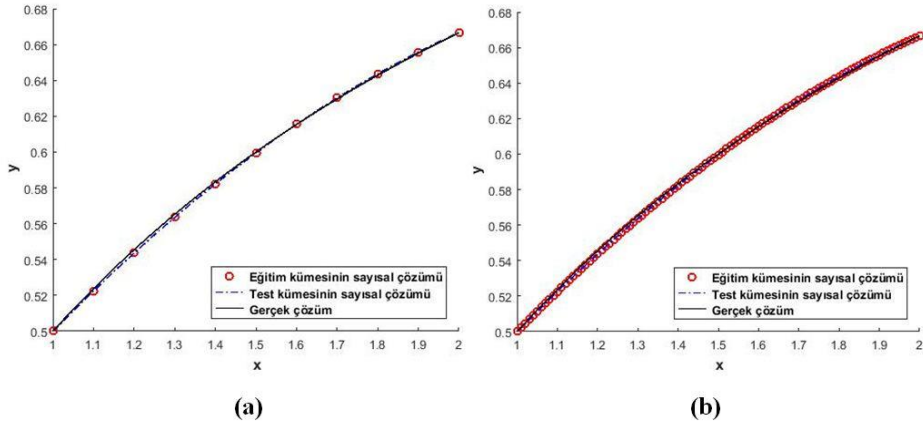
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.0	0.00	0.00	1	1.00	0.00	0.00
				2	1.01	1.94×10^{-4}	1.94×10^{-4}
				3	1.02	3.76×10^{-4}	3.76×10^{-4}
				4	1.03	5.46×10^{-4}	5.46×10^{-4}
				5	1.04	7.05×10^{-4}	7.05×10^{-4}
2	1.1	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}	11	1.10	1.44×10^{-3}	1.44×10^{-3}
3	1.2	2.08×10^{-3}	2.08×10^{-3}	21	1.20	1.99×10^{-3}	1.99×10^{-3}
4	1.3	2.04×10^{-3}	2.04×10^{-3}	31	1.30	1.92×10^{-3}	1.92×10^{-3}
5	1.4	1.61×10^{-3}	1.61×10^{-3}	41	1.40	1.47×10^{-3}	1.47×10^{-3}
6	1.5	9.83×10^{-4}	9.83×10^{-4}	51	1.50	8.34×10^{-4}	8.34×10^{-4}
7	1.6	3.28×10^{-4}	3.28×10^{-4}	61	1.60	1.86×10^{-4}	1.86×10^{-4}
8	1.7	2.11×10^{-4}	2.11×10^{-4}	71	1.70	3.36×10^{-4}	3.36×10^{-4}
9	1.8	5.14×10^{-4}	5.14×10^{-4}	81	1.80	6.09×10^{-4}	6.09×10^{-4}
10	1.9	4.74×10^{-4}	4.74×10^{-4}	91	1.90	5.27×10^{-4}	5.27×10^{-4}
11	2.0	0.00	0.00	101	2.00	0.00	0.00

Çizelge 4.14. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.00	0.00	0.00	1	1.000	0.00	0.00
2	1.05	8.82×10^{-4}	8.82×10^{-4}	2	1.005	9.85×10^{-5}	9.85×10^{-5}
3	1.15	1.86×10^{-3}	1.86×10^{-3}	3	1.015	2.86×10^{-4}	2.86×10^{-4}
4	1.25	2.13×10^{-3}	2.13×10^{-3}	4	1.025	4.63×10^{-4}	4.63×10^{-4}
5	1.35	1.86×10^{-3}	1.86×10^{-3}	5	1.035	6.27×10^{-4}	6.27×10^{-4}
6	1.45	1.31×10^{-3}	1.31×10^{-3}	11	1.095	1.40×10^{-3}	1.40×10^{-3}
7	1.55	6.50×10^{-4}	6.50×10^{-4}	21	1.195	1.98×10^{-3}	1.98×10^{-3}
8	1.65	3.59×10^{-5}	3.59×10^{-5}	31	1.295	1.93×10^{-3}	1.93×10^{-3}
9	1.75	3.99×10^{-4}	3.99×10^{-4}	41	1.395	1.50×10^{-3}	1.50×10^{-3}
10	1.85	5.43×10^{-4}	5.43×10^{-4}	51	1.495	8.68×10^{-4}	8.68×10^{-4}
11	1.95	2.96×10^{-4}	2.96×10^{-4}	61	1.595	2.16×10^{-4}	2.16×10^{-4}
12	2.00	0.00	0.00	71	1.695	3.15×10^{-4}	3.15×10^{-4}
				81	1.795	6.03×10^{-4}	6.03×10^{-4}
				91	1.895	5.41×10^{-4}	5.41×10^{-4}
				101	1.995	3.82×10^{-5}	3.82×10^{-5}
				102	2.000	0.00	0.00



Şekil 4.15. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



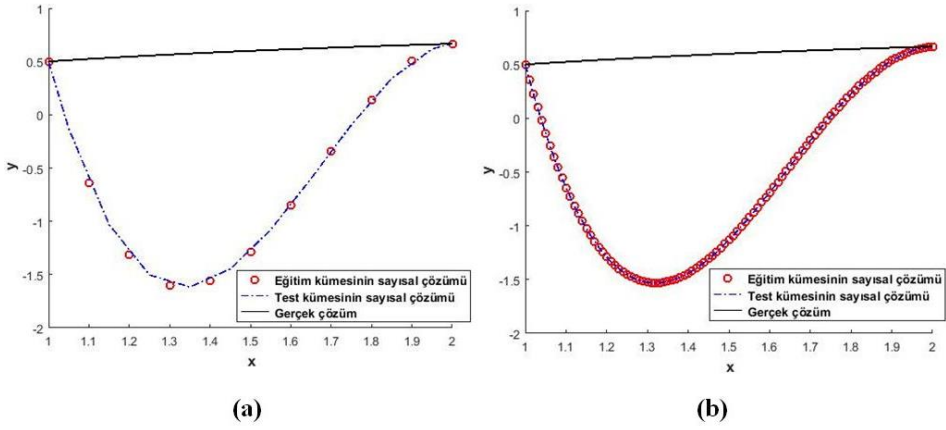
Şekil 4.16. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.15. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

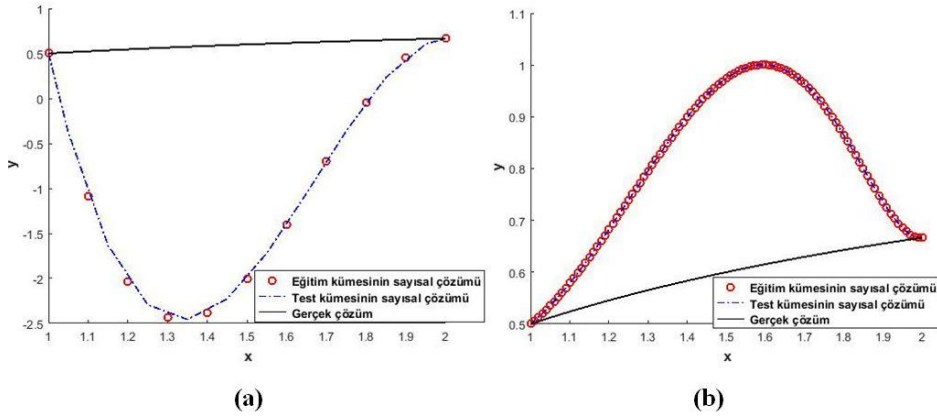
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.0	0.00	0.00	1	1.00	0.00	0.00
				2	1.01	1.19×10^{-3}	1.77×10^{-4}
				3	1.02	2.35×10^{-3}	3.43×10^{-4}
				4	1.03	3.48×10^{-3}	4.98×10^{-4}
				5	1.04	4.57×10^{-3}	6.41×10^{-4}
2	1.1	1.97×10^{-2}	1.30×10^{-3}	11	1.10	1.05×10^{-2}	1.29×10^{-3}
3	1.2	3.44×10^{-2}	1.73×10^{-3}	21	1.20	1.81×10^{-2}	1.72×10^{-3}
4	1.3	4.45×10^{-2}	1.57×10^{-3}	31	1.30	2.31×10^{-2}	1.57×10^{-3}
5	1.4	5.01×10^{-2}	1.07×10^{-3}	41	1.40	2.56×10^{-2}	1.07×10^{-3}
6	1.5	5.15×10^{-2}	4.22×10^{-4}	51	1.50	2.60×10^{-2}	4.16×10^{-4}
7	1.6	4.88×10^{-2}	2.10×10^{-4}	61	1.60	2.43×10^{-2}	2.16×10^{-4}
8	1.7	4.22×10^{-2}	6.82×10^{-4}	71	1.70	2.08×10^{-2}	6.88×10^{-4}
9	1.8	3.18×10^{-2}	8.73×10^{-4}	81	1.80	1.55×10^{-2}	8.77×10^{-4}
10	1.9	1.77×10^{-2}	6.76×10^{-4}	91	1.90	8.53×10^{-3}	6.78×10^{-4}
11	2.0	0.00	0.00	101	2.00	0.00	0.00

Çizelge 4.16. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.00	0.00	0.00	1	1.000	0.00	0.00
2	1.05	1.05×10^{-2}	7.75×10^{-4}	2	1.005	5.99×10^{-4}	9.02×10^{-5}
3	1.15	2.76×10^{-2}	1.60×10^{-3}	3	1.015	1.77×10^{-3}	2.62×10^{-4}
4	1.25	4.00×10^{-2}	1.71×10^{-3}	4	1.025	2.92×10^{-3}	4.22×10^{-4}
5	1.35	4.78×10^{-2}	1.35×10^{-3}	5	1.035	4.03×10^{-3}	5.71×10^{-4}
6	1.45	5.13×10^{-2}	7.55×10^{-4}	11	1.095	1.00×10^{-2}	1.25×10^{-3}
7	1.55	5.06×10^{-2}	9.45×10^{-5}	21	1.195	1.78×10^{-2}	1.72×10^{-3}
8	1.65	4.60×10^{-2}	4.74×10^{-4}	31	1.295	2.29×10^{-2}	1.58×10^{-3}
9	1.75	3.75×10^{-2}	8.20×10^{-4}	41	1.395	2.56×10^{-2}	1.20×10^{-3}
10	1.85	2.52×10^{-2}	8.29×10^{-4}	51	1.495	2.60×10^{-2}	4.49×10^{-4}
11	1.95	9.30×10^{-3}	4.03×10^{-4}	61	1.595	2.45×10^{-2}	1.88×10^{-4}
12	2.00	0.00	0.00	71	1.695	2.10×10^{-2}	6.70×10^{-4}
				81	1.795	1.58×10^{-2}	8.76×10^{-4}
				91	1.895	8.92×10^{-3}	6.99×10^{-4}
				101	1.995	4.63×10^{-4}	4.66×10^{-5}
				102	2.000	0.00	0.00



Şekil 4.17. Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



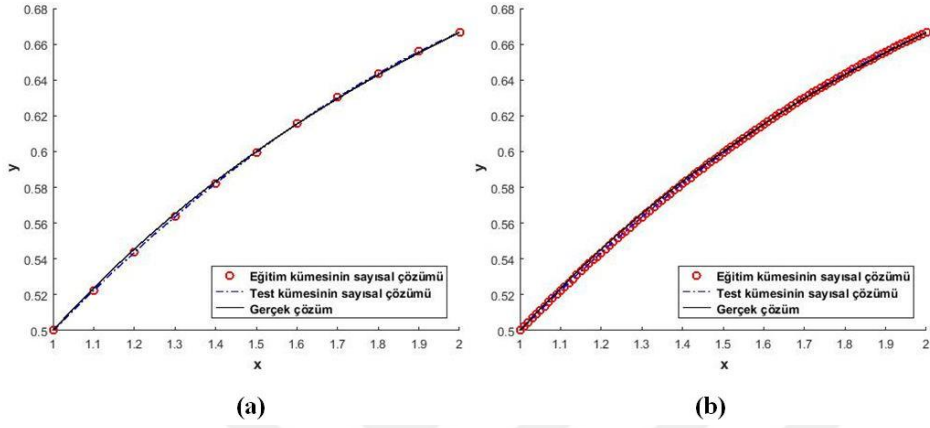
Şekil 4.18. Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.17. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multiküadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

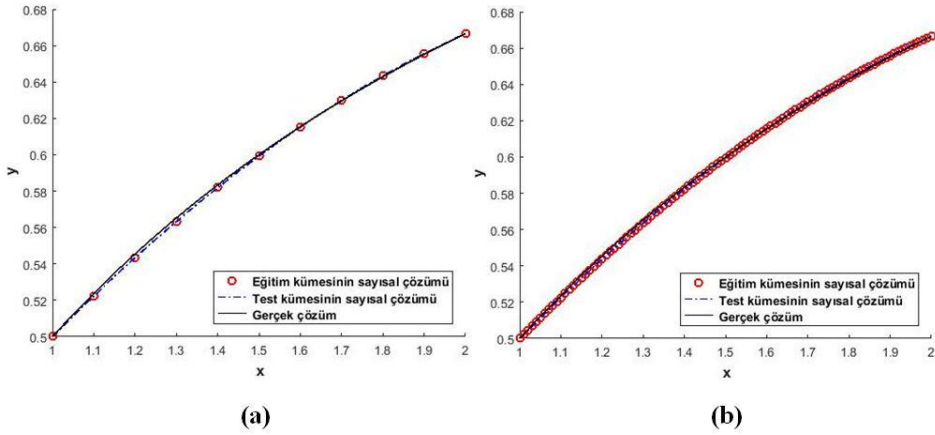
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.0	0.00	0.00	1	1.00	0.00	0.00
				2	1.01	1.42×10^{-1}	3.91×10^{-3}
				3	1.02	2.78×10^{-1}	8.21×10^{-3}
				4	1.03	4.08×10^{-1}	1.29×10^{-2}
				5	1.04	5.33×10^{-1}	1.79×10^{-2}
2	1.1	1.16×10^0	1.61×10^0	11	1.10	1.17×10^0	5.51×10^{-2}
3	1.2	1.86×10^0	2.58×10^0	21	1.20	1.84×10^0	1.37×10^{-1}
4	1.3	2.17×10^0	2.99×10^0	31	1.30	2.09×10^0	2.30×10^{-1}
5	1.4	2.15×10^0	2.97×10^0	41	1.40	2.02×10^0	3.16×10^{-1}
6	1.5	1.88×10^0	2.60×10^0	51	1.50	1.73×10^0	3.74×10^{-1}
7	1.6	1.46×10^0	2.01×10^0	61	1.60	1.30×10^0	3.85×10^{-1}
8	1.7	9.74×10^{-1}	1.33×10^0	71	1.70	8.37×10^{-1}	3.34×10^{-1}
9	1.8	5.05×10^{-1}	6.86×10^0	81	1.80	4.16×10^{-1}	2.22×10^{-1}
10	1.9	1.50×10^{-1}	2.01×10^0	91	1.90	1.19×10^{-1}	8.07×10^{-2}
11	2.0	0.00	0.00	101	2.00	0.00	0.00

Çizelge 4.18. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multiküadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.00	0.00	0.00	1	1.000	0.00	0.00
2	1.05	6.42×10^{-1}	8.89×10^{-1}	2	1.005	7.16×10^{-2}	1.91×10^{-3}
3	1.15	1.57×10^0	2.17×10^0	3	1.015	2.11×10^{-1}	6.02×10^{-3}
4	1.25	2.06×10^0	2.85×10^0	4	1.025	3.44×10^{-1}	1.05×10^{-2}
5	1.35	2.19×10^0	3.03×10^0	5	1.035	4.71×10^{-1}	1.54×10^{-2}
6	1.45	2.04×10^0	2.82×10^0	11	1.095	1.12×10^0	5.16×10^{-2}
7	1.55	1.69×10^0	2.33×10^0	21	1.195	1.81×10^0	1.33×10^{-1}
8	1.65	1.22×10^0	1.68×10^0	31	1.295	2.09×10^0	2.26×10^{-1}
9	1.75	7.31×10^{-1}	9.98×10^{-1}	41	1.395	2.03×10^0	3.12×10^{-1}
10	1.85	3.08×10^{-1}	4.15×10^{-1}	51	1.495	1.75×10^0	3.72×10^{-1}
11	1.95	4.34×10^{-2}	5.74×10^{-2}	61	1.595	1.33×10^0	3.86×10^{-1}
12	2.00	0.00	0.00	71	1.695	8.60×10^{-1}	3.38×10^{-1}
				81	1.795	4.35×10^{-1}	2.28×10^{-1}
				91	1.895	1.30×10^{-1}	8.74×10^{-2}
				101	1.995	9.99×10^{-4}	4.44×10^{-4}
				102	2.000	0.00	0.00



Şekil 4.19. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



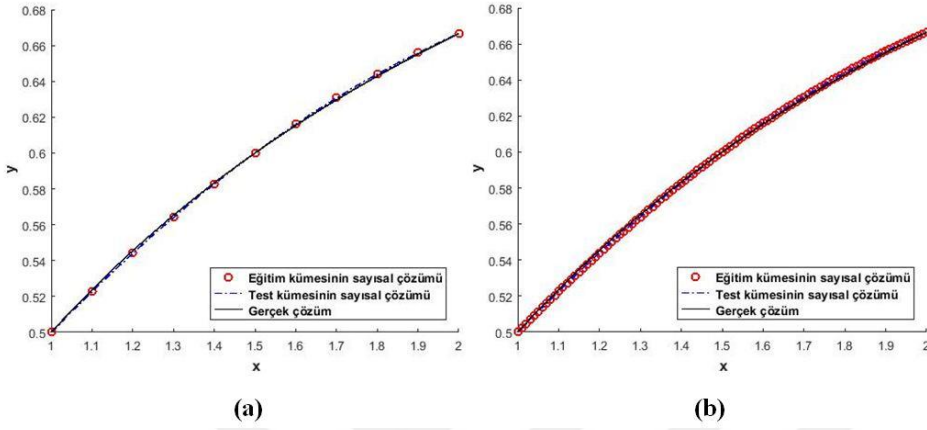
Şekil 4.20. Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.19. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

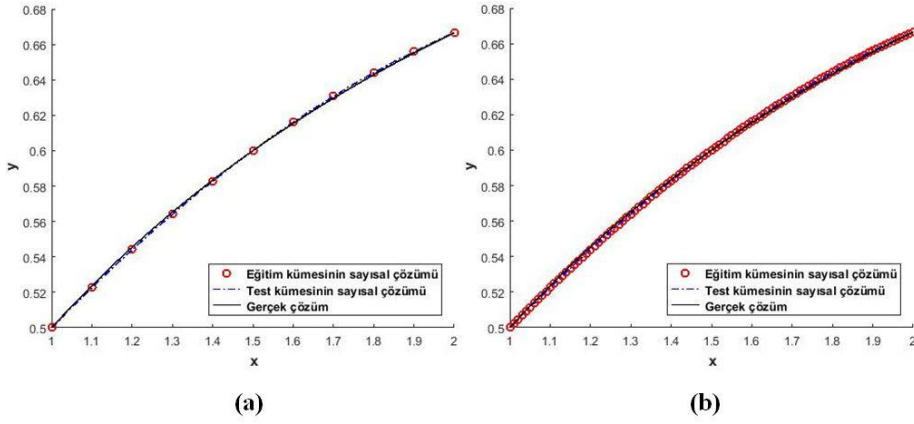
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.0	0.00	0.00	1	1.00	0.00	0.00
				2	1.01	1.92×10^{-4}	1.79×10^{-4}
				3	1.02	3.72×10^{-4}	3.47×10^{-4}
				4	1.03	5.40×10^{-4}	5.04×10^{-4}
				5	1.04	6.97×10^{-4}	6.49×10^{-4}
2	1.1	1.28×10^{-3}	1.42×10^{-3}	11	1.10	1.42×10^{-3}	1.31×10^{-3}
3	1.2	1.70×10^{-3}	1.94×10^{-3}	21	1.20	1.96×10^{-3}	1.75×10^{-3}
4	1.3	1.54×10^{-3}	1.86×10^{-3}	31	1.30	1.87×10^{-3}	1.61×10^{-3}
5	1.4	1.04×10^{-3}	1.40×10^{-3}	41	1.40	1.42×10^{-3}	1.12×10^{-3}
6	1.5	3.84×10^{-4}	7.60×10^{-4}	51	1.50	7.82×10^{-4}	4.68×10^{-4}
7	1.6	2.47×10^{-4}	1.14×10^{-4}	61	1.60	1.36×10^{-4}	1.67×10^{-4}
8	1.7	7.15×10^{-4}	3.99×10^{-4}	71	1.70	3.80×10^{-4}	6.44×10^{-4}
9	1.8	8.97×10^{-4}	6.57×10^{-4}	81	1.80	6.42×10^{-4}	8.44×10^{-4}
10	1.9	6.90×10^{-4}	5.54×10^{-4}	91	1.90	5.46×10^{-4}	6.59×10^{-4}
11	2.0	0.00	0.00	101	2.00	0.00	0.00

Çizelge 4.20. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.00	0.00	0.00	1	1.000	0.00	0.00
2	1.05	7.68×10^{-4}	8.40×10^{-4}	2	1.005	9.75×10^{-5}	9.12×10^{-5}
3	1.15	1.58×10^{-3}	1.77×10^{-3}	3	1.015	2.83×10^{-4}	2.65×10^{-4}
4	1.25	1.68×10^{-3}	1.96×10^{-3}	4	1.025	4.57×10^{-4}	4.27×10^{-4}
5	1.35	1.32×10^{-3}	1.66×10^{-3}	5	1.035	6.20×10^{-4}	5.78×10^{-4}
6	1.45	7.16×10^{-4}	1.09×10^{-3}	11	1.095	1.38×10^{-3}	1.27×10^{-3}
7	1.55	5.62×10^{-5}	4.29×10^{-4}	21	1.195	1.95×10^{-3}	1.75×10^{-3}
8	1.65	5.10×10^{-4}	1.67×10^{-4}	31	1.295	1.89×10^{-3}	1.63×10^{-3}
9	1.75	8.49×10^{-4}	5.67×10^{-4}	41	1.395	1.45×10^{-3}	1.15×10^{-3}
10	1.85	8.48×10^{-4}	6.56×10^{-4}	51	1.495	8.16×10^{-4}	5.01×10^{-4}
11	1.95	4.10×10^{-4}	3.39×10^{-4}	61	1.595	1.66×10^{-4}	1.38×10^{-4}
12	2.00	0.00	0.00	71	1.695	3.59×10^{-4}	6.26×10^{-4}
				81	1.795	6.37×10^{-4}	8.42×10^{-4}
				91	1.895	5.61×10^{-4}	6.79×10^{-4}
				101	1.995	3.93×10^{-5}	4.55×10^{-5}
				102	2.000	0.00	0.00



Şekil 4.21. Ters Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



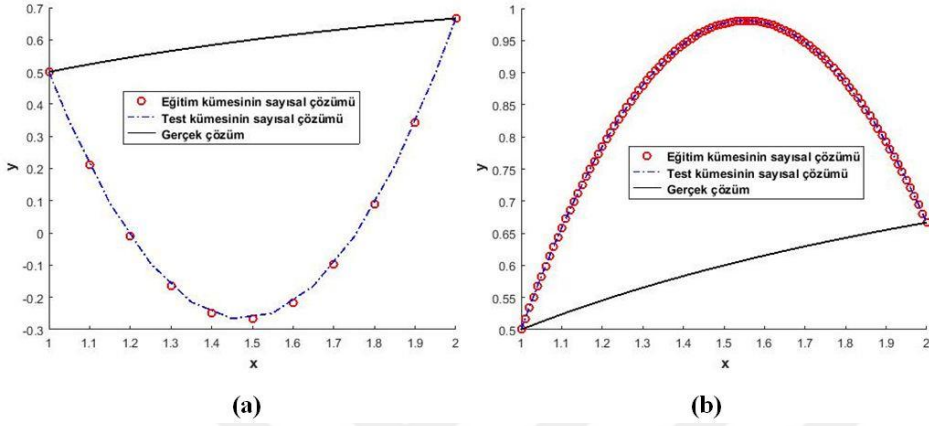
Şekil 4.22. Ters Multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.21. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

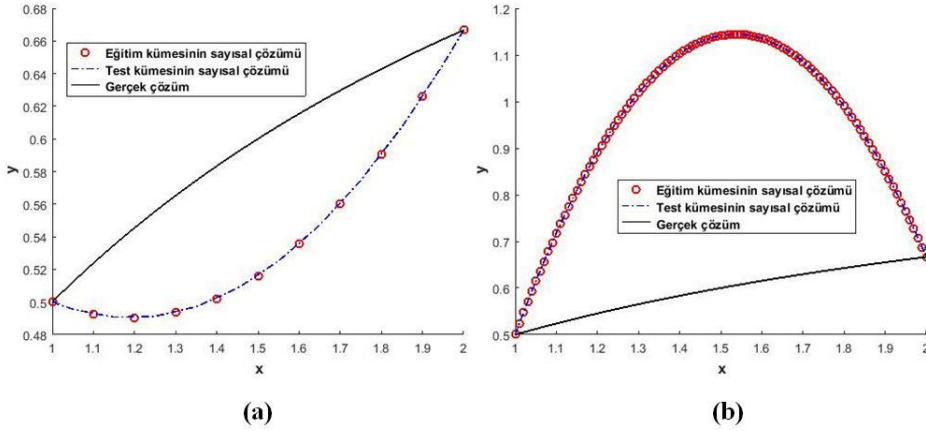
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.0	0.00	0.00	1	1.00	0.00	0.00
				2	1.01	1.61×10^{-4}	1.61×10^{-4}
				3	1.02	3.12×10^{-4}	3.12×10^{-4}
				4	1.03	4.51×10^{-4}	4.51×10^{-4}
				5	1.04	5.79×10^{-4}	5.79×10^{-4}
2	1.1	1.08×10^{-3}	1.08×10^{-3}	11	1.10	1.15×10^{-3}	1.15×10^{-3}
3	1.2	1.35×10^{-3}	1.35×10^{-3}	21	1.20	1.46×10^{-3}	1.46×10^{-3}
4	1.3	1.08×10^{-3}	1.08×10^{-3}	31	1.30	1.23×10^{-3}	1.23×10^{-3}
5	1.4	5.08×10^{-4}	5.07×10^{-4}	41	1.40	6.79×10^{-4}	6.79×10^{-4}
6	1.5	1.66×10^{-4}	1.66×10^{-4}	51	1.50	1.24×10^{-5}	1.27×10^{-5}
7	1.6	7.75×10^{-4}	7.75×10^{-4}	61	1.60	6.04×10^{-4}	6.03×10^{-4}
8	1.7	1.18×10^{-3}	1.18×10^{-3}	71	1.70	1.03×10^{-3}	1.03×10^{-3}
9	1.8	1.25×10^{-3}	1.25×10^{-3}	81	1.80	1.14×10^{-3}	1.14×10^{-3}
10	1.9	8.87×10^{-4}	8.87×10^{-4}	91	1.90	8.23×10^{-4}	8.23×10^{-4}
11	2.0	0.00	0.00	101	2.00	0.00	0.00

Çizelge 4.22. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.00	0.00	0.00	1	1.000	0.00	0.00
2	1.05	6.64×10^{-4}	6.64×10^{-4}	2	1.005	8.21×10^{-5}	8.21×10^{-5}
3	1.15	1.30×10^{-3}	1.30×10^{-3}	3	1.015	2.38×10^{-4}	2.38×10^{-4}
4	1.25	1.27×10^{-3}	1.26×10^{-3}	4	1.025	3.82×10^{-4}	3.82×10^{-4}
5	1.35	8.17×10^{-4}	8.17×10^{-4}	5	1.035	5.16×10^{-4}	5.16×10^{-4}
6	1.45	1.73×10^{-4}	1.72×10^{-4}	11	1.095	1.11×10^{-3}	1.11×10^{-3}
7	1.55	4.88×10^{-4}	4.88×10^{-4}	21	1.195	1.46×10^{-3}	1.46×10^{-3}
8	1.65	1.01×10^{-3}	1.01×10^{-3}	31	1.295	1.25×10^{-3}	1.25×10^{-3}
9	1.75	1.26×10^{-3}	1.26×10^{-3}	41	1.395	7.10×10^{-4}	7.11×10^{-4}
10	1.85	1.13×10^{-3}	1.13×10^{-3}	51	1.495	4.58×10^{-5}	4.61×10^{-5}
11	1.95	5.15×10^{-4}	5.15×10^{-4}	61	1.595	5.76×10^{-4}	5.76×10^{-4}
12	2.00	0.00	0.00	71	1.695	1.01×10^{-3}	1.01×10^{-3}
				81	1.795	1.14×10^{-3}	1.14×10^{-3}
				91	1.895	8.50×10^{-4}	8.50×10^{-4}
				101	1.995	5.46×10^{-5}	5.46×10^{-5}
				102	2.000	0.00	0.00



Şekil 4.23. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.24. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.23. (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.0	0.00	0.00	1	1.00	0.00	0.00
				2	1.01	1.48e-02	2.1310 ⁻²
				3	1.02	2.92e-02	4.2110 ⁻²
				4	1.03	4.3410 ⁻²	6.2610 ⁻²
				5	1.04	5.7310 ⁻²	8.2610 ⁻²
2	1.1	3.13× 10 ⁻¹	3.1410 ⁻²	11	1.10	1.3410 ⁻¹	1.9410 ⁻¹
3	1.2	5.56× 10 ⁻¹	5.5210 ⁻²	21	1.20	2.3910 ⁻¹	3.4510 ⁻¹
4	1.3	7.29× 10 ⁻¹	7.1710 ⁻²	31	1.30	3.1510 ⁻¹	4.5410 ⁻¹
5	1.4	8.32× 10 ⁻¹	8.12× 10 ⁻²	41	1.40	3.6110 ⁻¹	5.1910 ⁻¹
6	1.5	8.66× 10 ⁻¹	8.39× 10 ⁻²	51	1.50	3.7710 ⁻¹	5.4110 ⁻¹
7	1.6	8.31× 10 ⁻¹	7.99× 10 ⁻²	61	1.60	3.6210 ⁻¹	5.2010 ⁻¹
8	1.7	7.27× 10 ⁻¹	6.95× 10 ⁻²	71	1.70	3.1710 ⁻¹	4.5610 ⁻¹
9	1.8	5.53× 10 ⁻¹	5.26× 10 ⁻²	81	1.80	2.4210 ⁻¹	3.4810 ⁻¹
10	1.9	3.11× 10 ⁻¹	2.94× 10 ⁻²	91	1.90	1.3610 ⁻¹	1.96× 10 ⁻¹
11	2.0	0.00	0.00	101	2.00	0.00	0.00

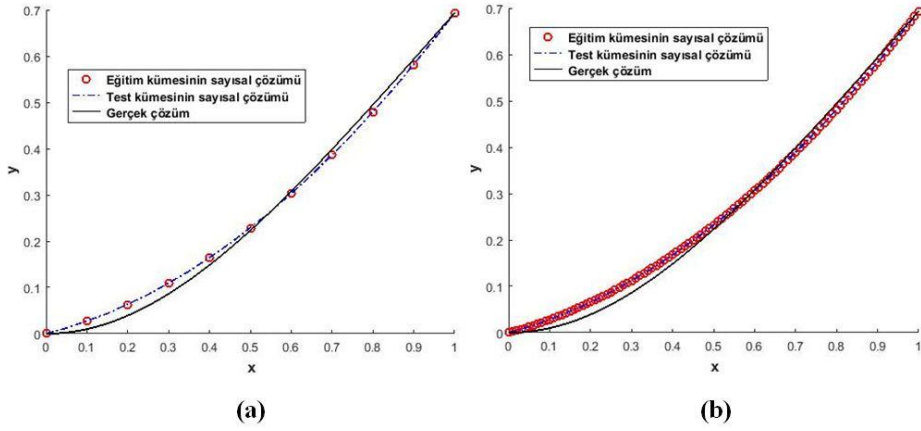
Çizelge 4.24 (4.2) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	1.00	0.00	0.00	1	1.000	0.00	0.00
2	1.05	1.65× 10 ⁻¹	1.66× 10 ⁻²	2	1.005	7.41e-03	1.07e-02
3	1.15	4.43× 10 ⁻¹	4.42× 10 ⁻²	3	1.015	2.20× 10 ⁻²	3.18e-02
4	1.25	6.51× 10 ⁻¹	6.43× 10 ⁻²	4	1.025	3.63× 10 ⁻²	5.24× 10 ⁻²
5	1.35	7.89× 10 ⁻¹	7.73× 10 ⁻²	5	1.035	5.04× 10 ⁻²	7.26× 10 ⁻²
6	1.45	8.58× 10 ⁻¹	8.34× 10 ⁻²	11	1.095	1.28× 10 ⁻¹	1.85× 10 ⁻¹
7	1.55	8.57× 10 ⁻¹	8.28× 10 ⁻²	21	1.195	2.35× 10 ⁻¹	3.38× 10 ⁻¹
8	1.65	7.87× 10 ⁻¹	7.55× 10 ⁻²	31	1.295	3.12× 10 ⁻¹	4.49× 10 ⁻¹
9	1.75	6.49× 10 ⁻¹	6.18× 10 ⁻²	41	1.395	3.59× 10 ⁻¹	5.17× 10 ⁻¹
10	1.85	4.41× 10 ⁻¹	4.18× 10 ⁻²	51	1.495	3.77× 10 ⁻¹	5.41× 10 ⁻¹
11	1.95	1.64× 10 ⁻¹	1.55× 10 ⁻²	61	1.595	3.64× 10 ⁻¹	5.22× 10 ⁻¹
12	2.00	0.00	0.00	71	1.695	3.20× 10 ⁻¹	4.60× 10 ⁻¹
				81	1.795	2.47× 10 ⁻¹	3.54× 10 ⁻¹
				91	1.895	1.42× 10 ⁻¹	2.04× 10 ⁻¹
				101	1.995	7.55× 10 ⁻³	1.08× 10 ⁻²
				102	2.000	0.00	0.00

Örnek:

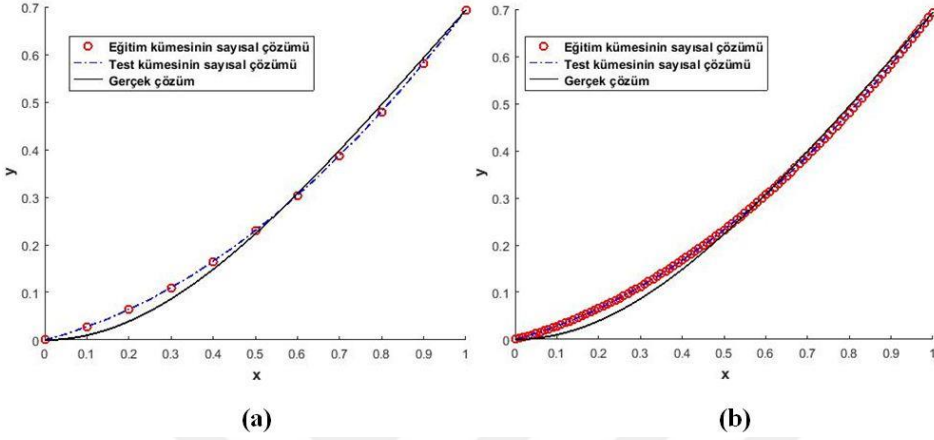
$$\begin{cases} y''(x) = -\frac{2x}{1+x^2} y' + y + \frac{2}{1+x^2} - \log(1+x^2) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = \log 2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Şekil 4.25'te Gauss tipli Radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak farklı adım uzunlukları için $y = \log(1+x^2)$ gerçek çözümüne sahip (4.3) denklemi ile verilen Dirichlet sınır değer problemi için elde edilen çözüm grafiği verilmiştir.



Şekil 4.25. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Benzer olarak kuadrik, multikuadrik, ters kuadrik, ters multikuadrik ve TPS tipli Radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak elde edilen çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 4.26 - Şekil 4.36'da gösterilmektedir.



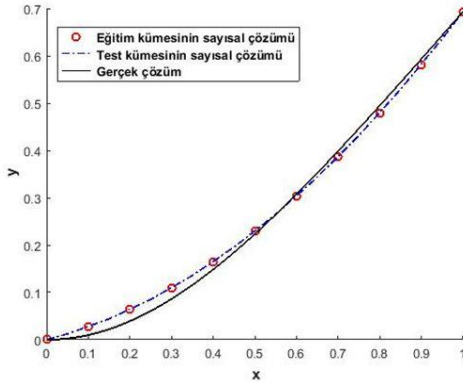
Şekil 4.26. Gauss tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.25. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

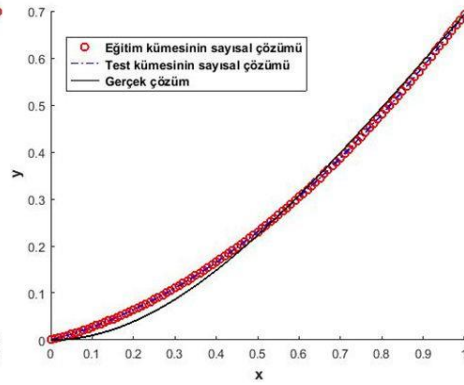
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	2.31×10^{-3}	2.31×10^{-3}
				3	0.02	4.52×10^{-3}	4.52×10^{-3}
				4	0.03	6.62×10^{-3}	6.62×10^{-3}
				5	0.04	8.60×10^{-3}	8.60×10^{-3}
2	0.1	1.68×10^{-2}	1.71×10^{-2}	11	0.10	1.83×10^{-2}	1.83×10^{-2}
3	0.2	2.37×10^{-2}	2.43×10^{-2}	21	0.20	2.64×10^{-2}	2.64×10^{-2}
4	0.3	2.24×10^{-2}	2.32×10^{-2}	31	0.30	2.59×10^{-2}	2.59×10^{-2}
5	0.4	1.52×10^{-2}	1.62×10^{-2}	41	0.40	1.93×10^{-2}	1.93×10^{-2}
6	0.5	5.10×10^{-2}	6.10×10^{-3}	51	0.50	9.34×10^{-3}	9.34×10^{-3}
7	0.6	5.19×10^{-3}	4.23×10^{-3}	61	0.60	1.12×10^{-3}	1.12×10^{-3}
8	0.7	1.30×10^{-2}	1.21×10^{-2}	71	0.70	9.41×10^{-3}	9.41×10^{-3}
9	0.8	1.59×10^{-2}	1.53×10^{-2}	81	0.80	1.32×10^{-2}	1.32×10^{-2}
10	0.9	1.21×10^{-2}	1.17×10^{-2}	91	0.90	1.06×10^{-2}	1.06×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.26. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Gauss tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	9.68×10^{-3}	9.87×10^{-3}	2	0.005	1.17×10^{-3}	1.17×10^{-3}
3	0.15	2.14×10^{-2}	2.19×10^{-2}	3	0.015	3.43×10^{-3}	3.43×10^{-3}
4	0.25	2.39×10^{-2}	2.47×10^{-2}	4	0.025	5.58×10^{-3}	5.58×10^{-3}
5	0.35	1.94×10^{-2}	2.03×10^{-2}	5	0.035	7.62×10^{-3}	7.62×10^{-3}
6	0.45	1.04×10^{-2}	1.14×10^{-2}	11	0.095	1.76×10^{-2}	1.76×10^{-2}
7	0.55	1.99×10^{-4}	7.88×10^{-4}	21	0.195	2.62×10^{-2}	2.62×10^{-2}
8	0.65	9.55×10^{-3}	8.64×10^{-3}	31	0.295	2.61×10^{-2}	2.61×10^{-2}
9	0.75	1.52×10^{-2}	1.44×10^{-2}	41	0.395	1.98×10^{-2}	1.98×10^{-2}
10	0.85	1.50×10^{-2}	1.44×10^{-2}	51	0.495	9.88×10^{-3}	9.88×10^{-3}
11	0.95	7.16×10^{-3}	6.97×10^{-3}	61	0.595	6.29×10^{-4}	6.29×10^{-4}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	9.08×10^{-3}	9.08×10^{-3}
				81	0.795	1.31×10^{-2}	1.31×10^{-2}
				91	0.895	1.09×10^{-2}	1.09×10^{-2}
				101	0.995	7.36×10^{-4}	7.36×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00

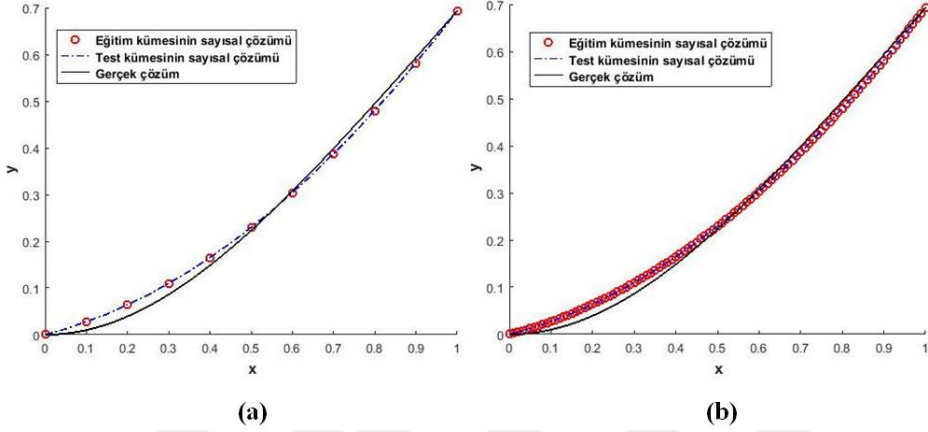


(a)



(b)

Şekil 4.27. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



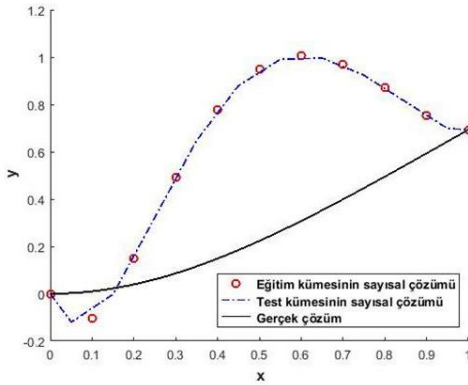
Şekil 4.28. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.27. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

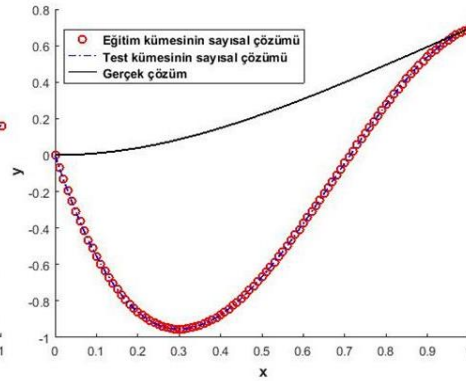
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	2.23×10^{-3}	2.19×10^{-3}
				3	0.02	4.35×10^{-3}	4.26×10^{-3}
				4	0.03	6.36×10^{-3}	6.24×10^{-3}
				5	0.04	1.75×10^{-2}	1.71×10^{-2}
2	0.1	1.70×10^{-2}	1.71×10^{-2}	11	0.10	2.50×10^{-2}	2.43×10^{-2}
3	0.2	2.41×10^{-2}	2.42×10^{-2}	21	0.20	2.41×10^{-2}	2.32×10^{-2}
4	0.3	2.30×10^{-2}	2.31×10^{-2}	31	0.30	1.72×10^{-2}	1.62×10^{-2}
5	0.4	1.59×10^{-2}	1.60×10^{-2}	41	0.40	7.13×10^{-3}	6.10×10^{-3}
6	0.5	5.81×10^{-3}	5.93×10^{-3}	51	0.50	3.25×10^{-3}	4.24×10^{-3}
7	0.6	4.51×10^{-3}	4.39×10^{-3}	61	0.60	1.13×10^{-2}	1.21×10^{-2}
8	0.7	1.24×10^{-2}	1.23×10^{-2}	71	0.70	1.46×10^{-2}	1.53×10^{-2}
9	0.8	1.55×10^{-2}	1.54×10^{-2}	81	0.80	1.14×10^{-2}	2.19×10^{-3}
10	0.9	1.18×10^{-2}	1.18×10^{-2}	91	0.90	2.23×10^{-3}	1.17×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.28. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0,00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	9.81×10^{-3}	9.84×10^{-3}	2	0.005	1.13×10^{-3}	1.11×10^{-3}
3	0.15	2.17×10^{-2}	2.18×10^{-2}	3	0.015	3.30×10^{-3}	3.24×10^{-3}
4	0.25	2.45×10^{-2}	2.45×10^{-2}	4	0.025	5.36×10^{-3}	5.26×10^{-3}
5	0.35	2.00×10^{-2}	2.01×10^{-2}	5	0.035	7.32×10^{-3}	7.18×10^{-3}
6	0.45	1.11×10^{-2}	1.12×10^{-2}	11	0.095	1.69×10^{-2}	1.65×10^{-2}
7	0.55	5.01×10^{-4}	6.24×10^{-4}	21	0.195	2.48×10^{-2}	2.42×10^{-2}
8	0.65	8.91×10^{-3}	8.79×10^{-3}	31	0.295	2.43×10^{-2}	2.34×10^{-2}
9	0.75	1.46×10^{-2}	1.46×10^{-2}	41	0.395	1.76×10^{-2}	1.67×10^{-2}
10	0.85	1.46×10^{-2}	1.45×10^{-2}	51	0.495	7.66×10^{-3}	6.63×10^{-3}
11	0.95	7.03×10^{-3}	7.00×10^{-3}	61	0.595	2.77×10^{-3}	3.76×10^{-3}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	1.10×10^{-2}	1.18×10^{-2}
				81	0.795	1.46×10^{-2}	1.53×10^{-2}
				91	0.895	1.17×10^{-2}	1.21×10^{-2}
				101	0.995	7.80×10^{-4}	8.01×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00

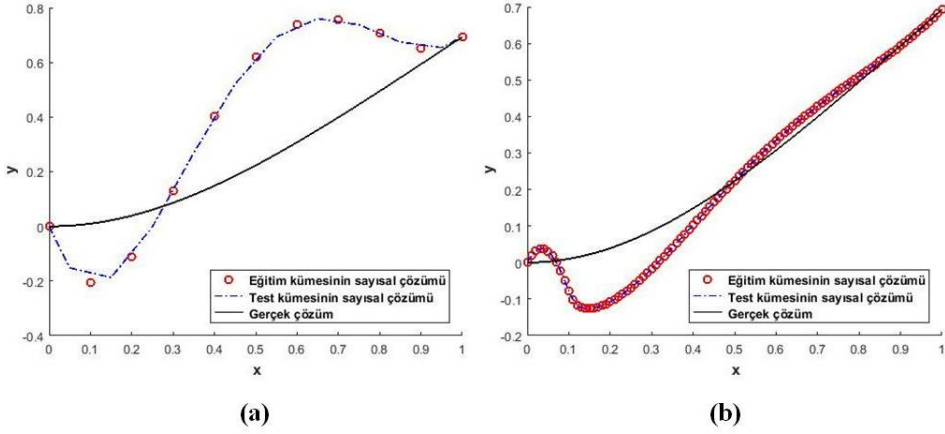


(a)



(b)

Şekil 4.29. Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



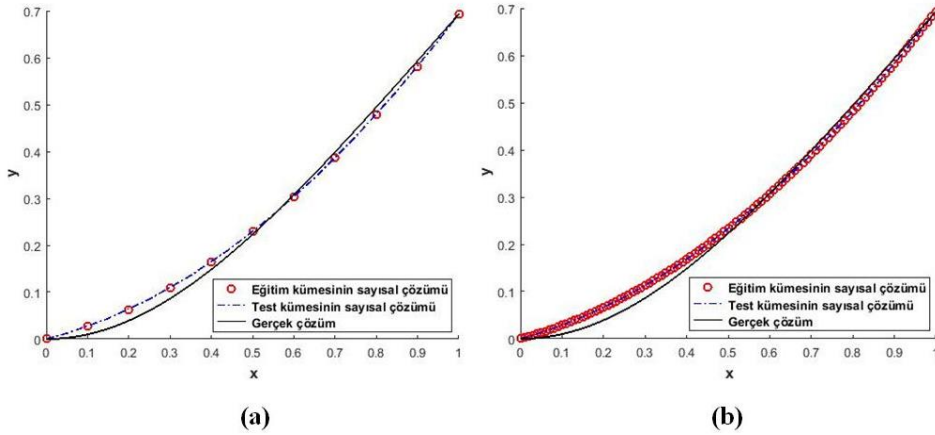
Şekil 4.30. Multiküadratik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.29. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multiküadratik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

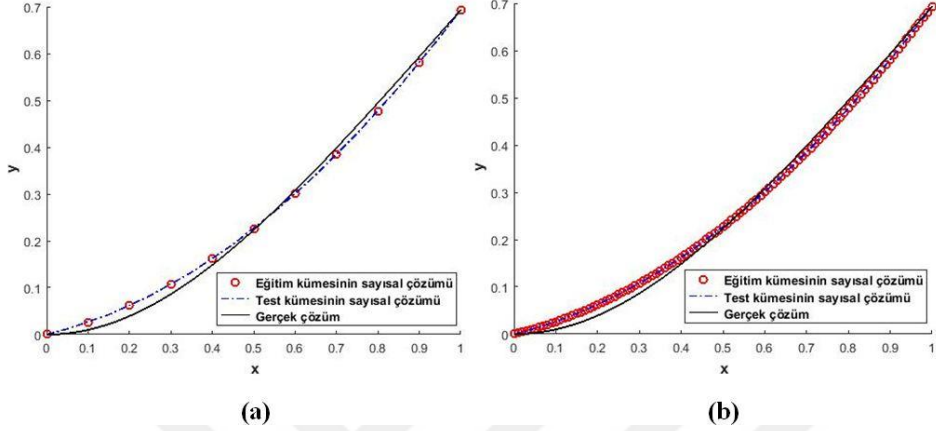
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	6.78×10^{-2}	1.89×10^{-2}
				3	0.02	1.33×10^{-1}	3.11×10^{-2}
				4	0.03	1.96×10^{-1}	3.66×10^{-2}
				5	0.04	2.56×10^{-1}	3.56×10^{-2}
2	0.1	1.15×10^{-1}	2.17×10^{-1}	11	0.10	5.65×10^{-1}	8.74×10^{-2}
3	0.2	1.11×10^{-1}	1.52×10^{-1}	21	0.20	9.00×10^{-1}	1.47×10^{-1}
4	0.3	4.07×10^{-1}	4.41×10^{-2}	31	0.30	1.04×10^0	1.04×10^{-1}
5	0.4	6.29×10^{-1}	2.53×10^{-1}	41	0.40	1.02×10^0	4.55×10^{-2}
6	0.5	7.26×10^{-1}	3.96×10^{-1}	51	0.50	8.91×10^{-1}	1.67×10^{-3}
7	0.6	6.98×10^{-1}	4.32×10^{-1}	61	0.60	6.83×10^{-1}	2.66×10^{-2}
8	0.7	5.69×10^{-1}	3.59×10^{-1}	71	0.70	4.43×10^{-1}	2.87×10^{-2}
9	0.8	3.75×10^{-1}	2.12×10^{-1}	81	0.80	2.20×10^{-1}	1.52×10^{-2}
10	0.9	1.58×10^{-1}	5.94×10^{-2}	91	0.90	5.55×10^{-2}	3.55×10^{-4}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.30. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	1.23e-01	1.54e-01	2	0.005	3.42×10^{-2}	1.03×10^{-2}
3	0.15	2.46e-02	2.09e-01	3	0.015	1.01×10^{-1}	2.59×10^{-2}
4	0.25	2.62e-01	6.20e-02	4	0.025	1.65×10^{-1}	3.46×10^{-2}
5	0.35	5.32e-01	1.53e-01	5	0.035	2.26×10^{-1}	3.69×10^{-2}
6	0.45	6.94e-01	3.37e-01	11	0.095	5.42×10^{-1}	7.22×10^{-2}
7	0.55	7.26e-01	4.29e-01	21	0.195	8.88×10^{-1}	1.48×10^{-1}
8	0.65	6.44e-01	4.08e-01	31	0.295	1.04×10^0	1.07×10^{-1}
9	0.75	4.78e-01	2.91e-01	41	0.395	1.028×10^0	4.83×10^{-2}
10	0.85	2.67e-01	1.31e-01	51	0.495	9.00×10^{-1}	2.05×10^{-4}
11	0.95	5.52e-02	1.09e-02	61	0.595	6.94×10^{-1}	2.60×10^{-2}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	4.55×10^{-1}	2.91×10^{-2}
				81	0.795	2.29×10^{-1}	1.61×10^{-2}
				91	0.895	6.15×10^{-2}	2.12×10^{-4}
				101	0.995	4.88×10^{-4}	7.19×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00



Şekil 4.31. Ters kvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



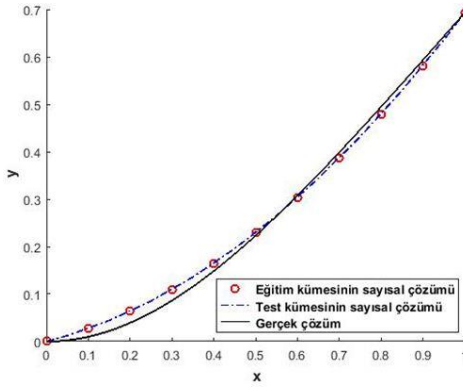
Şekil 4.32. Ters kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.31. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

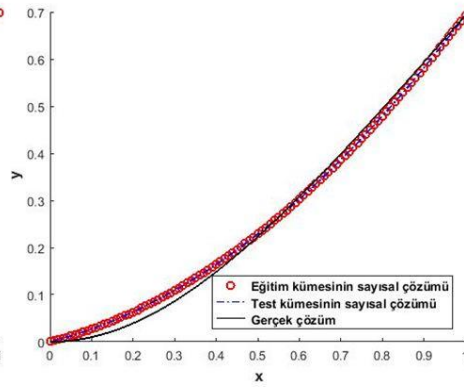
		$h = 0.1$				$h = 0.01$	
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	2.35×10^{-3}	2.10×10^{-3}
				3	0.02	4.60×10^{-3}	4.10×10^{-3}
				4	0.03	6.73×10^{-3}	5.60×10^{-3}
				5	0.04	8.76×10^{-3}	7.79×10^{-3}
2	0.1	1.70×10^{-2}	1.60×10^{-2}	11	0.10	1.87×10^{-2}	1.64×10^{-2}
3	0.2	2.40×10^{-2}	2.22×10^{-2}	21	0.20	2.70×10^{-2}	2.30×10^{-2}
4	0.3	2.28×10^{-2}	2.05×10^{-2}	31	0.30	2.68×10^{-2}	2.15×10^{-2}
5	0.4	1.58×10^{-2}	1.31×10^{-2}	41	0.40	2.03×10^{-2}	1.42×10^{-2}
6	0.5	5.66×10^{-3}	2.85×10^{-3}	51	0.50	1.03×10^{-2}	4.03×10^{-3}
7	0.6	4.66×10^{-3}	7.35×10^{-3}	61	0.60	1.72×10^{-4}	6.22×10^{-3}
8	0.7	1.25×10^{-2}	1.49×10^{-2}	71	0.70	8.58×10^{-3}	1.39×10^{-2}
9	0.8	1.56×10^{-2}	1.74×10^{-2}	81	0.80	1.26×10^{-2}	1.66×10^{-2}
10	0.9	1.19×10^{-2}	1.29×10^{-2}	91	0.90	1.02×10^{-2}	1.25×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.32. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Kuadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	9.78×10^{-3}	9.25×10^{-3}	2	0.005	1.19×10^{-3}	1.07×10^{-3}
3	0.15	2.17×10^{-2}	2.02×10^{-2}	3	0.015	3.49×10^{-3}	3.12×10^{-3}
4	0.25	2.43×10^{-2}	2.22×10^{-2}	4	0.025	5.68×10^{-3}	5.06×10^{-3}
5	0.35	1.99×10^{-2}	1.73×10^{-2}	5	0.035	7.76×10^{-3}	6.91×10^{-3}
6	0.45	1.09×10^{-2}	8.14×10^{-3}	11	0.095	1.80×10^{-2}	1.58×10^{-2}
7	0.55	3.51×10^{-4}	2.43×10^{-3}	21	0.195	2.68×10^{-2}	2.29×10^{-2}
8	0.65	9.04×10^{-3}	1.16×10^{-2}	31	0.295	2.70×10^{-2}	2.17×10^{-2}
9	0.75	1.48×10^{-2}	1.69×10^{-2}	41	0.395	2.07×10^{-2}	1.47×10^{-2}
10	0.85	1.47×10^{-2}	1.61×10^{-2}	51	0.495	1.09×10^{-2}	4.57×10^{-3}
11	0.95	7.06×10^{-3}	7.59×10^{-3}	61	0.595	3.24×10^{-4}	5.75×10^{-3}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	8.24×10^{-3}	1.36×10^{-2}
				81	0.795	1.25×10^{-2}	1.66×10^{-2}
				91	0.895	1.05×10^{-2}	1.29×10^{-2}
				101	0.995	7.16×10^{-4}	8.42×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00

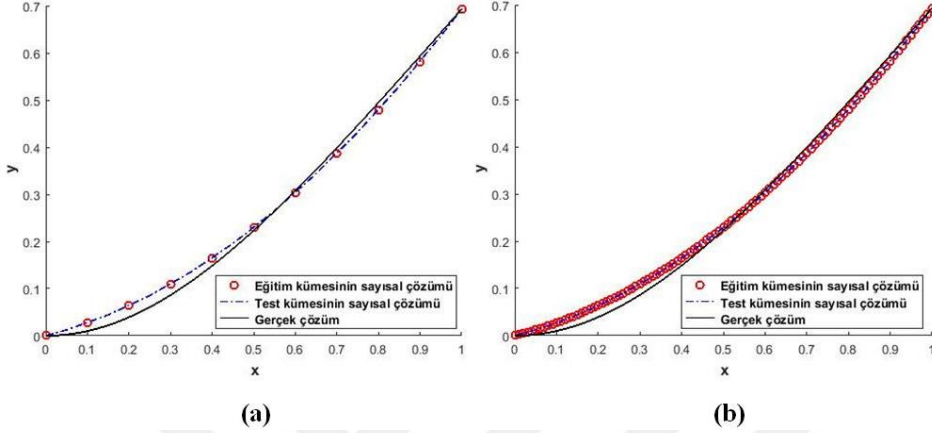


(a)



(b)

Şekil 4.33. Ters multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



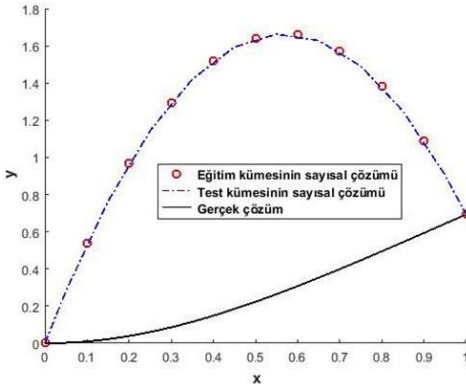
Şekil 4.34. Ters multikvadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.33. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

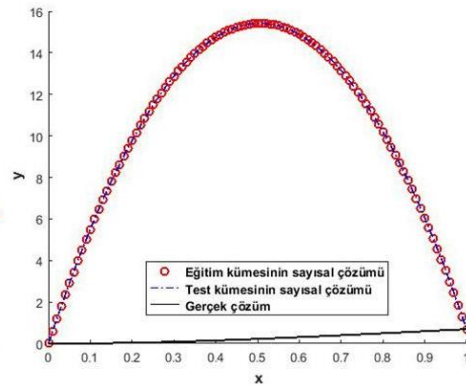
$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	2.16×10^{-3}	2.18×10^{-3}
				3	0.02	4.22×10^{-3}	4.25×10^{-3}
				4	0.03	6.18×10^{-3}	6.21×10^{-3}
				5	0.04	8.02×10^{-3}	8.08×10^{-3}
2	0.1	1.71×10^{-2}	1.71×10^{-2}	11	0.10	1.69×10^{-2}	1.71×10^{-2}
3	0.2	2.43×10^{-2}	2.43×10^{-2}	21	0.20	2.40×10^{-2}	2.42×10^{-2}
4	0.3	2.32×10^{-2}	2.32×10^{-2}	31	0.30	2.28×10^{-2}	2.30×10^{-2}
5	0.4	1.61×10^{-2}	1.61×10^{-2}	41	0.40	1.57×10^{-2}	1.60×10^{-2}
6	0.5	6.03×10^{-3}	6.03×10^{-3}	51	0.50	5.56×10^{-3}	5.90×10^{-3}
7	0.6	4.30×10^{-3}	4.30×10^{-3}	61	0.60	4.75×10^{-3}	4.42×10^{-3}
8	0.7	1.22×10^{-2}	1.22×10^{-2}	71	0.70	1.26×10^{-3}	1.23×10^{-2}
9	0.8	1.53×10^{-2}	1.53×10^{-2}	81	0.80	1.56×10^{-2}	1.54×10^{-2}
10	0.9	1.18×10^{-2}	1.18×10^{-2}	91	0.90	1.19×10^{-2}	1.18×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.34. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin Ters Multikvadrik tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	9.86×10^{-3}	9.86×10^{-3}	2	0.005	1.10×10^{-3}	1.10×10^{-3}
3	0.15	2.19×10^{-2}	2.19×10^{-2}	3	0.015	3.21×10^{-3}	3.23×10^{-3}
4	0.25	2.46×10^{-2}	2.46×10^{-2}	4	0.025	5.21×10^{-3}	5.25×10^{-3}
5	0.35	2.02×10^{-2}	2.02×10^{-2}	5	0.035	7.11×10^{-3}	7.16×10^{-3}
6	0.45	1.13×10^{-2}	1.13×10^{-2}	11	0.095	1.63×10^{-2}	1.65×10^{-2}
7	0.55	7.20×10^{-4}	7.20×10^{-4}	21	0.195	2.38×10^{-2}	2.41×10^{-2}
8	0.65	8.70×10^{-3}	8.70×10^{-3}	31	0.295	2.30×10^{-2}	2.33×10^{-2}
9	0.75	1.45×10^{-2}	1.45×10^{-2}	41	0.395	1.61×10^{-2}	1.65×10^{-2}
10	0.85	1.45×10^{-2}	1.45×10^{-2}	51	0.495	6.09×10^{-3}	6.44×10^{-3}
11	0.95	6.99×10^{-3}	6.99×10^{-3}	61	0.595	4.27×10^{-3}	3.95×10^{-3}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	1.23×10^{-2}	1.20×10^{-2}
				81	0.795	1.56×10^{-2}	1.54×10^{-2}
				91	0.895	1.23×10^{-2}	1.22×10^{-2}
				101	0.995	8.11×10^{-4}	8.05×10^{-4}
				102	1.000	0.00	0.00

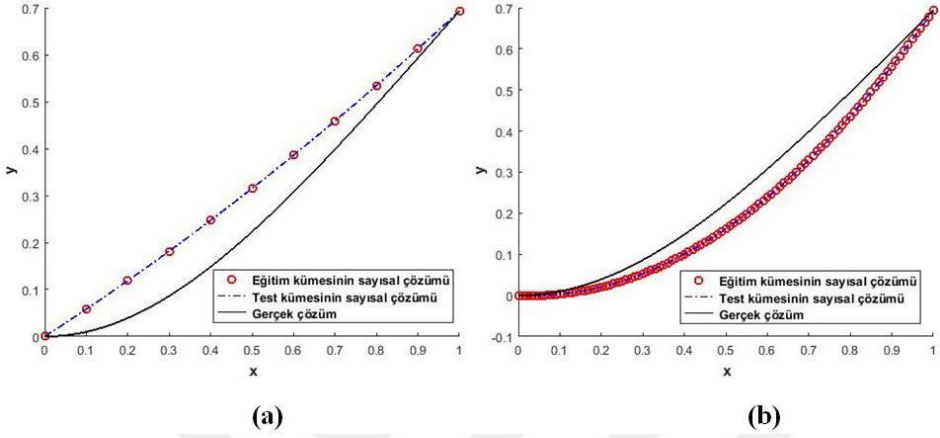


(a)



(b)

Şekil 4.35. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 1000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği



Şekil 4.36. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ağı kullanılarak 10000 iterasyonda (a) $h=0.1$ ve (b) $h=0.01$ için çözülen Dirichlet sınır probleminin yaklaşık çözüm grafiği

Çizelge 4.35. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak eğitim kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı		1000	10000	İterasyon Sayısı		1000	10000
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	0.00
				2	0.01	6.04×10^{-1}	4.81×10^{-4}
				3	0.02	1.20×10^0	1.02×10^{-3}
				4	0.03	1.77×10^0	1.60×10^{-3}
				5	0.04	2.34×10^0	2.24×10^{-3}
2	0.1	5.26×10^{-1}	4.81×10^{-2}	11	0.10	5.49×10^0	7.12×10^{-3}
3	0.2	9.28×10^{-1}	7.94×10^{-2}	21	0.20	9.75×10^0	1.88×10^{-2}
4	0.3	1.21×10^0	9.55×10^{-2}	31	0.30	1.28×10^1	3.34×10^{-2}
5	0.4	1.37×10^0	9.88×10^{-2}	41	0.40	1.46×10^1	4.84×10^{-2}
6	0.5	1.42×10^0	9.21×10^{-2}	51	0.50	1.52×10^1	6.12×10^{-2}
7	0.6	1.35×10^0	7.83×10^{-2}	61	0.60	1.46×10^1	6.89×10^{-2}
8	0.7	1.17×10^0	6.01×10^{-2}	71	0.70	1.28×10^1	6.87×10^{-2}
9	0.8	8.89×10^{-1}	3.98×10^{-2}	81	0.80	9.71×10^0	5.84×10^{-2}
10	0.9	4.97×10^{-1}	1.92×10^{-2}	91	0.90	5.46×10^0	3.60×10^{-2}
11	1.0	0.00	0.00	101	1.00	0.00	0.00

Çizelge 4.36. (4.3) eşitliği ile verilen Dirichlet Sınır Değer Probleminin TPS tipli Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılarak test kümesi üzerinde elde edilen mutlak hata miktarları.

$h = 0.1$				$h = 0.01$			
İterasyon Sayısı	1000	10000		İterasyon Sayısı	1000	10000	
k	x_k	E	E	k	x_k	E	E
1	0.0	0.00	0.00	1	0.000	0.00	0.00
2	0.05	2.78×10^{-1}	2.62×10^{-2}	2	0.005	3.03×10^{-1}	2.34×10^{-4}
3	0.15	7.42×10^{-1}	6.57×10^{-2}	3	0.015	9.01×10^{-1}	7.42×10^{-4}
4	0.25	1.08×10^0	8.92×10^{-2}	4	0.025	1.49×10^0	1.30×10^{-3}
5	0.35	1.31×10^0	9.85×10^{-2}	5	0.035	2.06×10^0	1.91×10^{-3}
6	0.45	1.41×10^0	9.65×10^{-2}	11	0.095	5.24×10^0	6.64×10^{-3}
7	0.55	1.40×10^0	8.59×10^{-2}	21	0.195	9.56×10^0	1.81×10^{-2}
8	0.65	1.28×10^0	6.96×10^{-2}	31	0.295	1.27×10^1	3.26×10^{-2}
9	0.75	1.05×10^0	5.01×10^{-2}	41	0.395	1.45×10^1	4.77×10^{-2}
10	0.85	7.06×10^{-1}	2.94×10^{-2}	51	0.495	1.52×10^1	6.07×10^{-2}
11	0.95	2.61×10^{-1}	9.37×10^{-3}	61	0.595	1.46×10^1	6.87×10^{-2}
12	1.00	0.00	0.00	71	0.695	1.29×10^1	6.89×10^{-2}
				81	0.795	9.89×10^0	5.92×10^{-2}
				91	0.895	5.70×10^0	3.74×10^{-2}
				101	0.995	3.02×10^{-1}	2.14×10^{-3}
				102	1.000	0.00	0.00

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bir önceki bölümde lineer ve lineer olmayan 2. mertebeden Dirichlet Sınır Değer problemleri için üç farklı örnek üzerinde altı farklı tipte radyal tabanlı fonksiyonu aktivasyon fonksiyonu olarak kullanan yapay sinir ağı modelleri oluşturulmuştur. Bununla birlikte sınır değer probleminin tanım aralığının $h = 0.1$ ve $h = 0.01$ sabit adım uzunlukları kullanılarak iki farklı parçalanışı oluşturulmuştur. Elde edilen düğüm noktaları yapay sinir ağı modellerinin eğitim kümesini oluşturmaktadır. Test kümesi ise tanım aralığının sınır noktaları ile birlikte eğitim kümesindeki her bir ardışık düğümün orta noktası kullanılarak oluşturulmuştur. Ek olarak, ortalama karesel hata miktarlarının ve yapay sinir ağı çıktısındaki standart sapmanın gözlemlenebilmesi için, başlangıçta rassal olarak belirlenen ağ parametreleri ile her bir örnek için yapay sinir ağı 10 kez eğitilmiştir. Sonuç olarak üç farklı örnek için toplamda 360 kez deneysel çalışma gerçekleştirilmiştir.

4. bölümde elde edilen çözüm grafikleri ve nümerik sonuçlar incelendiğinde (4.1) denklemi ile verilen sınır değer problemini çözmeye en başarılı radyal tabanlı fonksiyon Kuadrik tipli fonksiyon olduğu görülmüştür. Ters Kuadrik ve Gauss tipli fonksiyonlar ile de çözüme yakınsandığı görülmüştür. Ancak Multikuadrik, Ters Multikuadrik ve TPS tipli radyal tabanlı fonksiyonlar kullanıldığında çözüme yakınsamanın istenilen düzeyde olmadığı görülmektedir. Üstelik elde edilen sonuçların sabit uzunluğu h ve ağı eğitilmesi için kullanılan maksimum iterasyon sayısından bağımsız olduğu görülmektedir.

(4.2) denklemde verilen lineer olmayan sınır değer probleminin çözümünde ise Gauss, Ters Kuadrik ve Ters Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyonlar kullanıldığında, yapay sinir ağının sınır değer probleminin çözümünü öğrenebildiği gözlemlenmiştir. Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon için yapay sinir ağının eğitiminde 1000 iterasyonun yetersiz kaldığı, buna karşılık iterasyon sayısı artırıldığında çözüme yakınsandığı görülmüştür. Ancak Multikuadrik ve TPS tipli radyal tabanlı fonksiyonlar kullanıldığında çözüme yakınsama hiç görülmemiştir.

(4.3) eşitliği ile verilen örnek incelendiğinde Gauss, Kuadrik, Ters Kuadrik ve Ters Multikuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyon çözümlerinin hemen hemen birbirine eşit olduğu görülmüştür. Multikuadrik fonksiyon ile çözüme yakınsama sağlanamadığı tespit edilmiştir. TPS tipli radyal tabanlı fonksiyon ile çözüme

yakınsanabildiği, ancak yakınsama hızının çok yavaş olduğu görülmüştür. 1000 iterasyon sonucunda çözüm elde edilemezken, 10000 iterasyon çözüm eğrisine yakın bir eğri grafiği elde edilmiştir. Yine de elde edilen bu çözüm Gauss, Kuadrik, Ters Kuadrik ve Ters Multikuadrik tipli fonksiyonlara göre çok daha büyük hata miktarına sahiptir.

Genel olarak, diferansiyel denklemin tipine bağlı olarak en iyi çözümü elde eden radyal tabanlı fonksiyonu belirlemek mümkün olmamıştır. Bununla birlikte Gauss, Kuadrik ve Ters Kuadrik tipli radyal tabanlı fonksiyonlar kullanıldığında çözülen sınır değer problemlerinin tipinden bağımsız olarak çözüm elde edilebildiği yorumu yapılabilir. Multikuadrik ve TPS tipli fonksiyonlar ise çözüm elde etmede yetersiz kalmıştır. Ters Multikuadrik fonksiyon ise problemin lineer veya lineer olmasından bağımsız olarak çözüme yakınsamada değişkenlik gösterdiği tespit edilmiştir.

Bu çalışmada farklı tipte radyal tabanlı fonksiyonlar ileri beslemeli yapay sinir ağları için birer aktivasyon fonksiyonu olarak belirlenmiş ve ikinci mertebeden sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Yapay sinir ağlarının eğitiminde Parçacık Sürü Optimizasyonu kullanılmıştır. Bu optimizasyon algoritmanın seçilmesinin temel nedeni, türev tabanlı algoritmalarda hatayı minimize etmede kullanılan kısmi türevlerin hesaplanmasından kaçınarak toplam iş yükünü azaltmaktır.

Bu çalışmanın ileri aşamasında klasik Parçacık Sürü Optimizasyonu yaklaşımını iyileştirdiği ileri sürülen farklı varyantları kullanılarak yapay sinir çözümlerinin de iyileştirilmesi mümkündür. Aynı zamanda daha farklı sezgisel global optimizasyon algoritmaları denenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zihnioglu, A., Ünsan, Y. (2016). Gemiler İçin Yalpa Sönümleyici Sistemler. **GİDB**,7:7-10.
- [2] Mongillo, M. (2011). Choosing Basis Functions and Shape Parameters for Radial Basis Function Methods. *Siam, Undergraduate Research Online*, 4:191-201
- [3] Micchelli, C. (1983). Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions. *Approximation Theory, Spline Functions and Applications*(Singh,S.P., Burry, J. W. H., Watson, B.), Memorial University Department of Mathematic ans Statistic, Canada.
- [4] Fasshauer, G. E. (1997). Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions, in *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, A. LeMehaute, C. Rabut, and L. Schumaker, eds, Vanderbilt University Press, Nashville, 131-138.
- [5] Franke, R. (1982). Scattered data interpolation: Test of some methods, **Math. Comput.**, 38, 181-200.
- [6] Hardy, R. L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surface, **J. Geophy. Res.**, 76, 1905-1915.
- [7] Hardy, R. L. (1990). Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method: 20 years of discovery, **Comput. Math. Applic.**, 19, 163-208.
- [8] Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational uid dynamics I: Surface approximation and partial derivative estimates, **Comput. Math. Appl.**, 19, 127-145.
- [9] Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational uid dynamics II. Solutions to hyperbolic, parabolic, and elliptic partial differential equations, **Comput. Math. Appl.**, 19, 147-161.

- [10] Larsson, E. Fornberg, B. (2003). A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs, **Comput. Math. Appl.**, 46, 891-902.
- [11] Alipanah , A. (2016). Multiquadric Radial Basis Function Method for the Solution of Brachistochrone Problem. **Romanian Journal of Mathematics and Computer Science**, 6(2):126-133



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Merve KOCAKULA

Doğum Yeri ve Tarihi : AYDIN 06/08/1993

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Ege Üniversitesi

Yüksek Lisans Öğrenimi : Adnan Menderes Üniversitesi

Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

A) Bildiriler

Günel, K., İşman, G. and Kocakula, M., (2018). Numerical Solutions of ODEs with Dirichler Boundary Conditions via Recurrent Neural Networks, International Conference on Applied Mathematics in Engineering, June 27-29, 2018, Balıkesir, Turkey.

İLETİŞİM

E-Posta Adresi : kocakulamerve@gmail.com

Tarih : 10/07/2018