

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KORTEWEG-DE VRIES DENKLEM ÇİFTİNİN (COUPLED KdV) SSP-RUNGE-  
KUTTA DİFERANSİYEL KUADRATUR METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BAŞAK ÇAKMAK**

**HAZİRAN 2019**

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KORTEWEG-DE VRIES DENKLEM ÇİFTİNİN (COUPLED KdV) SSP-RUNGE-  
KUTTA DİFERANSİYEL KUADRATUR METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Başak ÇAKMAK**

**DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Ali BAŞHAN**

**ZONGULDAK**  
**Haziran 2019**

**KABUL:**

Başak ÇAKMAK tarafından hazırlanan “Korteweg-de Vries Denklem Çiftinin (Coupled KdV) SSP-Runge-Kutta Diferansiyel Kuadratur Metodu ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 26/06/2019

**Danışman:** Dr. Öğr. Üyesi Ali BAŞHAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**Üye** : Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK

Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü



---

**ONAY:**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*



Başak ÇAKMAK

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### KORTEWEG-DE VRIES DENKLEM ÇİFTİNİN (COUPLED KdV) SSP-RUNGE-KUTTA DİFERANSİYEL KUADRATUR METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Başak ÇAKMAK

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Ali BAŞHAN

Haziran 2019, 65 sayfa

Bu yüksek lisans tezi altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin amacı ve tezde kullanılacak olan diferansiyel kuadratur metodu hakkında genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, dalgalar ve sığ su dalgalarıyla birlikte spline fonksiyonlar ve B-spline fonksiyonlar hakkında temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde Korteweg-de Vries (KdV) ve coupled KdV denklemleri hakkında genel bilgiler verildikten sonra coupled KdV denklemi için daha önce yapılan çalışmalardan bahsedildi. Ayrıca coupled KdV denklemi için ele alınan üç model problem tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, tezde kullanılacak olan modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur metodu (MKB-DKM) ile çözümün kararlılığını güçlü bir şekilde koruyan strong stability-preserving Runge-Kutta (SSP-RK43) metodu verildi.

## ÖZET (devam ediyor)

Beşinci bölüm tezin ana kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde coupled KdV denkleminin MKB-DKM ile nümerik çözümleri elde edildi. Bu metot üç model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarıyla birlikte tablolar halinde verildi.

Altıncı bölümde elde edilen nümerik sonuçlar değerlendirildi.

**Anahtar Kelimeler:** Kısmi diferansiyel denklemler, coupled KdV denklemi, B-spline fonksiyonlar, SSP-RK43, diferansiyel kuadratur metot, soliton

**Bilim Kodu:** 403.06.01

## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **NUMERICAL SOLUTION OF COUPLED KORTEWEG-DE VRIES (COUPLED KdV) EQUATION WITH SSP-RUNGE-KUTTA DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD**

**Başak ÇAKMAK**

**Zonguldak Bülent Ecevit University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Assist. Prof. Ali BAŞHAN**

**June 2019, 65 pages**

This M.Sc. thesis consists of six chapters. In the first chapter, the aim of this thesis and general information about the differential quadrature method which is used in the thesis are given.

In the second chapter, some basic concepts about waves and shallow water waves together with spline functions and B-spline functions are presented.

In the third chapter, after some information about the Korteweg-de Vries (KdV) and coupled KdV equations were given, the previous studies about the coupled KdV equation were mentioned. Moreover, three model problems for the coupled KdV equation were introduced.

In the fourth chapter, modified cubic B-spline differential quadrature method (MCB-DQM) as well as the strong stability-preserving Runge-Kutta (SSP-RK43) method which are used in the thesis were presented.

## ABSTRACT (continued)

The fifth chapter contains the main part of the thesis. In this chapter, numerical solutions of the coupled KdV equation are obtained by MCB-DQM. This method is applied to three model problems. The obtained numerical results with the error norms  $L_2$  and  $L_\infty$  and the invariants  $I_1$  and  $I_2$  were given in the form of tables.

In the sixth chapter, the obtained numerical results were evaluated.

**Keywords:** Partial differential equations, coupled KdV, B-spline Function, SSP-RK43, differential quadrature method, soliton.

**Science Code:** 403.06.01



## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde danışmanım olan ve bu tezin hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her zaman yakın ilgi, alaka ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ali BAŞHAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği geçen Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarına ve tez jürimde yer alan saygıdeğer hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Bu tez çalışmam boyunca teşviklerini ve desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşım Leyla ABDULLAHOĐLU' na teşekkür ederim.

Sonsuz sevgi ve sabır ile hayatım boyunca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, beni bu günlere getiren, yetiştiren, her zaman yardımcı olan çok kıymetli babam Hıdır ÇAKMAK ve annem Sevim ÇAKMAK' a sonsuz teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vii
İÇİNDEKİLER.....	iix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ .....	1
BÖLÜM 2 TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1 DALGALAR VE SIĞ SU DALGALARI .....	3
2.2 SPLINE FONKSİYONLAR.....	5
2.3 B-SPLINE FONKSİYONLAR.....	7
BÖLÜM 3 KORTEWEG-de VRIES (KdV) VE COUPLED KdV DENKLEMİ .....	9
3.1 GİRİŞ.....	9
3.1.1 Korteweg-de Vries Denklem Çifti (Coupled KdV).....	12
3.2 MODEL PROBLEMLER.....	15
3.2.1 Model Problem 1.....	15
3.2.2 Model Problem 2.....	15
3.2.3 Model Problem 3.....	16

## İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 4 DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT (DKM).....	17
4.1 MODİFİYE EDİLMİŞ KÜBİK B-SPLINE DKM.....	17
4.1.1 Birinci Mertebeden Türeve Ait Ağırlık Katsayıları.....	18
4.1.2 İkinci Mertebeden Türeve Ait Ağırlık Katsayıları.....	27
4.1.3 Üçüncü Mertebeden Türeve Ait Ağırlık Katsayıları .....	28
4.2 ZAMANA BAĞLI NÜMERİK İNTEGRASYON .....	28
4.2.1 SSP-RK43.....	28
BÖLÜM 5 NÜMERİK ÇÖZÜMLER.....	31
5.1 MODEL PROBLEM 1: TEK SOLİTON DALGA .....	31
5.2 MODEL PROBLEM 2: İKİ DALGANIN GİRİŞİMİ.....	40
5.3 MODEL PROBLEM 3: DALGA OLUŞUMU .....	44
BÖLÜM 6 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	51
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ .....	65

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Basit Dalga Profili .....	3
Şekil 2.2 Solitary Dalga Hareketi .....	4
Şekil 2.3 1. Dereceden Spline Fonksiyon. ....	5
Şekil 2.4 0.Dereceden B-spline Fonksiyon. ....	7
Şekil 2.5 Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları.....	8
Şekil 5.1 TipA: Tek soliton dalğanın $-25 \leq x \leq 25$ aralığında $t=0 - t=20$ , $\Delta t=0.01$ , $N=149$ için elde edilen çözüm grafikleri. ....	37
Şekil 5.2 TipB: Tek soliton dalğanın $-25 \leq x \leq 25$ aralığında $t=0 - t=20$ , $\Delta t=0.01$ , $N=149$ için elde edilen çözüm grafikleri. ....	38
Şekil 5.3 TipC: Tek soliton dalğanın $-25 \leq x \leq 25$ aralığında $t=0 - t=20$ , $\Delta t=0.01$ , $N=149$ için elde edilen çözüm grafikleri. ....	39
Şekil 5.4 TipA: Tek soliton dalğanın $t=20$ zamanında $\Delta t=0.0001$ , $N=421$ için elde edilen hata norm grafikleri. ....	40
Şekil 5.5 TipB: Tek soliton dalğanın $t=20$ zamanında $\Delta t=0.0001$ , $N=421$ için elde edilen hata norm grafikleri. ....	40
Şekil 5.6 TipC: Tek soliton dalğanın $t=20$ zamanında $\Delta t=0.0001$ , $N=361$ için elde edilen hata norm grafikleri. ....	41
Şekil 5.7 İki soliton dalğanın $-10 \leq x \leq 120$ aralığında $\Delta t=0.001$ , $N=801$ , $t=0 - t=100$ , $\gamma_1=10$ , $\gamma_2=30$ , $\lambda_1=1$ , $\lambda_2=0.6$ , $\alpha=0.5$ ve $\beta= -3$ için U çözüm grafikleri.....	43
Şekil 5.8 İki soliton dalğanın $-10 \leq x \leq 120$ aralığında $\Delta t=0.001$ , $N=801$ , $t=0 - t=100$ , $\gamma_1=10$ , $\gamma_2=30$ , $\lambda_1=1$ , $\lambda_2=0.6$ , $\alpha=0.5$ ve $\beta= -3$ için V çözüm grafikleri.....	44
Şekil 5.9 Soliton dalga oluşumunun $-50 \leq x \leq 150$ aralığında $\Delta t=0.001$ , $N=1271$ , $t=0 - 50$ , $\alpha=0.5$ ve $\beta= -3$ için U çözüm grafikleri .....	47
Şekil 5.10 Soliton dalga oluşumunun $-50 \leq x \leq 150$ aralığında $\Delta t=0.001$ , $N=1271$ , $t=0 - 50$ , $\alpha=0.5$ ve $\beta= -3$ için V çözüm grafikleri .....	48



## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin düğüm nokta değerleri .....	18
Çizelge 5.1 TipA: Tek soliton dalganın farklı $\Delta t$ ve N için nümerik çözümleri .....	32
Çizelge 5.2 TipA: $I_1$ ve $I_2$ korunum sabitlerinin farklı $\Delta t$ ve N için bağıl değişimleri.....	33
Çizelge 5.3 TipB: Tek soliton dalganın farklı $\Delta t$ ve N için nümerik çözümleri .....	34
Çizelge 5.4 TipB: $I_1$ ve $I_2$ korunum sabitlerinin farklı $\Delta t$ ve N için bağıl değişimleri .....	34
Çizelge 5.5 TipC: Tek soliton dalganın farklı $\Delta t$ ve N için nümerik çözümleri .....	35
Çizelge 5.6 TipC: $I_1$ ve $I_2$ korunum sabitlerinin farklı $\Delta t$ ve N için bağıl değişimleri.....	36
Çizelge 5.7 İki soliton dalga girişiminin $I_1$ ve $I_2$ korunum sabitleri ve bağıl değişimleri .....	42
Çizelge 5.8 İki soliton dalga girişiminin $I_1$ ve $I_2$ korunum sabitleri ve bağıl değişimleri.. .....	42
Çizelge 5.9 Soliton dalga oluşumunun $I_1$ ve $I_2$ korunum sabitleri ve bağıl değişimleri.....	45
Çizelge 5.10 Soliton dalga oluşumunun $50 \leq x \leq 150$ aralığında $\Delta t=0.001$ , $N=1271$ için $t=50$ zamanında hesaplanan konum ve genlik değerleri .....	49





## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### SİMGELER

$\Delta t$  : Zaman adım uzunluğu

$\Delta x=h$  : Konum adım uzunluğu

### KISALTMALAR

**DKM** : Diferansiyel Kuadratur Metot

**KdV** : Korteweg-de Vries

**MKB** : Modifiye Edilmiş Kübik B-spline

**SSP-RK43** : Strong Stability Preserving Runge Kutta 43

**Coupled KdV**: KdV Denklem Çifti



## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Evrendeki birçok doğa olayı (biyolojik, mekanik, jeolojik vb.) fizik kuralları yardımıyla matematiksel denklemler ile ifade edilebilir. Bu durumları inceleyen bilim insanları olayların cebirsel, diferansiyel veya integral denklemler ile modellerini oluştururlar. Bu matematiksel modelleri oluşturmak ve sayısal analizlerini yapmak için genellikle lineer olmayan diferansiyel denklemler kullanılır. Bu tarz oluşturulan problemlerin çoğunlukla tam çözümleri aranır. Fakat lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerine ulaşmak zor ve kimi zaman neredeyse imkansızdır. Böyle durumlarda diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerine ulaşmak için nümerik yöntemler kullanılır [1]. Günümüzde yaygın olarak; sonlu fark yöntemleri, varyasyonel yöntemler, sonlu eleman yöntemleri ve diferansiyel kuadratur metot gibi yöntemler kullanılmaktadır.  $U = U(x, t)$  verilen bölge üzerindeki bir fonksiyon ve  $\varepsilon, \mu$  birer reel sayı olmak üzere,

Korteweg-de Vries denklemi (KdV) [2]:

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

dir. Tek bir denklemden oluşan kısmi diferansiyel denklemler dışında, her bir denklemin diğer denklem üzerindeki etkileşimini tanımlayan, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler de mevcuttur. Bu denklem sistemi eş zamanlı olarak çözülmektedir. Örneğin,  $U = U(x, t)$  ve  $V = V(x, t)$  verilen bölge üzerindeki iki fonksiyon ve  $\alpha$  ve  $\beta$  reel sayı olmak üzere,

Korteweg-de Vries denklem çifti (coupled KdV) [3]:

$$\begin{aligned} U_t - 6\alpha U U_x - 2\beta V V_x - \alpha U_{xxx} &= 0, \\ V_t + 3U V_x + V_{xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

dir.

Diferansiyel kuadratur metot (DKM), 1972 yılında kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için integral kuadratur fikrinden yola çıkarak Bellman vd. [4] tarafından ortaya atılmıştır.

Bu metot, nümerik analizde türev yaklaşımları için kullanılan bir nümerik ayrıklaştırma metodudur. Diferansiyel kuadratur metodunun esas düşüncesi,  $f$  fonksiyonunun çözüm bölgesinde yer alan herhangi bir  $x_i$  noktasındaki türev değerini, bölgedeki tüm düğüm noktalarındaki  $f$  fonksiyonunun bilinen değerlerinin lineer toplamı biçiminde ifade edilmesidir [4].

$[a, b]$  kapalı aralığında tanımlı, tek değişkenli düzgün bir fonksiyonda

$x_i$  :  $[a, b]$  kapalı aralığının düğüm noktaları,

$N$  : düğüm nokta sayısı,

$w_{i,j}^{(r)}$  :  $r$ . mertebeden türev yaklaşımında kullanılan ağırlık katsayıları

olmak üzere,

$$f_x^{(r)}(x_i) = \frac{d^{(r)}f}{dx^{(r)}} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(r)} f(x_j), \quad i = 1(1)N, \quad r = 1(1)N - 1 \quad (1.3)$$

eşitliği ile verilen kısmi diferansiyel denklemin çözüm aralığındaki herhangi bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $x$  bağımsız değişkenine göre,  $x_i$  noktasındaki  $r$ . mertebeden türevine yaklaşım yapılabilir. Günümüze kadar birçok araştırmacı farklı baz fonksiyonları kullanarak çeşitli DKM modelleri geliştirmiştir. Ağırlık katsayılarını elde etmek için Bellman vd. [4-5] Legendre polinomları ve spline fonksiyonları kullanmıştır. Sinc fonksiyonları yardımıyla Bonzani [6] ile Korkmaz ve Dağ [7] ağırlık katsayılarını elde etmişlerdir. Cheng vd. [8] Hermite polinomlarını kullanarak ağırlık katsayılarını tespit etmiştir. Lagrange interpolasyon polinomları yardımıyla Quan ve Chang [9-10] ile Korkmaz [11] ağırlık katsayılarını bulmuşlardır. Radial baz fonksiyonlarını kullanarak Shu ve Wu [12] radial tabanlı diferansiyel kuadratur metod geliştirmiştir. O'Mahoney [13] ise Laguerre polinomlarını, baz polinomlar olarak kullanıp iki boyutlu ters ısı iletim denkleminin çözümü için ağırlık katsayılarını tespit etmiştir. Harmonik fonksiyonları kullanarak ağırlık katsayılarını, Striz vd. [14] elde etmiştir. Zhong [15] ise spline fonksiyon tabanlı DKM geliştirmiştir. B-spline fonksiyonları kullanarak ağırlık katsayılarını, Korkmaz ve Dağ [16-19] ile Başhan vd. [20-27] elde etmişlerdir. Ağırlık katsayılarını elde etmek için modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ise Başhan vd. [28-33], Arora ve Singh [34], Mittal vd. [35-38], Jiwarı [39], Shukla vd. [40-42], Tamsir vd. [43,44] kullanmışlardır.

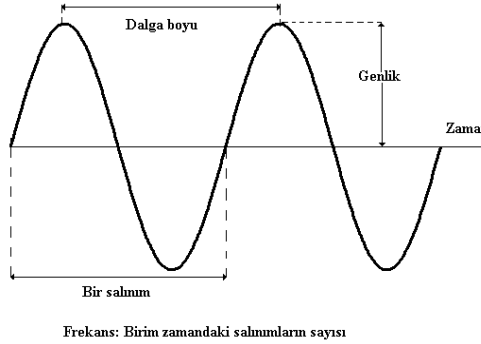
## BÖLÜM 2

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı kavramlar hakkında temel bilgiler verildi. Öncelikle dalgalar ve sığ su dalgaları hakkında bilgiler verildi. Ardından spline fonksiyonların tanımı verilerek B-spline fonksiyonları tanıtıldı.

#### 2.1 DALGALAR VE SIĞ SU DALGALARI

Dalga, su gibi bir ortamda veya bir boşlukta enerjinin taşınmasına yol açan titreşime denir. Ses dalgaları, ışık dalgaları, suda ilerleyen yüzey dalgaları örnek olarak verilebilir. Doğadaki olayların birçoğu periyodiktir. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi en basit bir dalgada titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile birlikte periyodik salınım yaparlar.



Şekil 2.1 Basit Dalga Profili

Elektromanyetik dalgalar boşlukta yayılırken, ses dalgalarının ilerleyebilecekleri ortama ihtiyaçları vardır. Bir dalganın yayılması bulunduğu ortamın özelliklerine bağlıdır [45].

Dalgalar; *ilerleyen dalga* ve *duran dalga* olarak sınıflandırılabilir. İlerleyen dalgalar, bir noktadan diğer bir noktaya enerji yayılması ile oluşan dalgalardır. Duran dalgalar ise, sabit pozisyonda kalan yani durağan bir ortamda zıt yönde hareket eden iki dalganın girişimi sonucu meydana gelen dalgalardır.

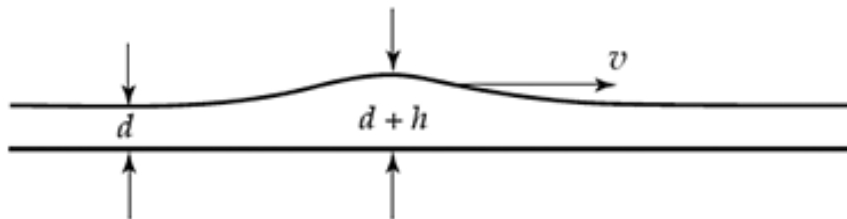
Dalgalar kıyıya doğru yaklaştıkça yükseklik ve boyları, sıklaşma ve sapma durumlarından dolayı değişmektedir. Bu durumlara göre sığ su dalgaları ve derin su dalgaları olarak nitelendirilebilir. Sığ su dalgaları, var olan yerçekim kuvveti altında sıklaşmış su kütlelerinin

yüzeyindeki serbest akışa denir. Bu dalgaları tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler mevcuttur. Sığ su dalga denklemlerinde ilerleyen dalgaların çözümleri oldukça önemlidir. İlerleyen dalgalar soliton ve solitary dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Dalga hareket halindeyken veya iki dalganın birbiriyle girişiminden sonra şekillerinde, genliklerinde ve hızlarında herhangi bir değişim olmadan ilerleyen dalgalar lineer olmayan soliton dalgalarıdır. Lineer olmayan solitary dalgalar ise solitonlara benzeyen, girişimin ardından genlik, hız ve şekillerini korumaya çalışan ve sığ suda geçerli olan dalgalarıdır. Solitary dalgalar ilk defa John Scott Russell tarafından tanımlanmıştır. Sonrasında Russell solitary dalgaları elde edebilmek için laboratuvarında su tankları oluşturup bir ucuna ağırlık bırakarak deneyler yapmış ve solitary dalgaların özelliklerini aşağıdaki gibi ifade etmiştir [46]:

- Solitary dalgalar  $h \operatorname{sech}^2 [k(x - vt)]$  şeklindedir [46];
- Yeterince büyük miktardaki bir su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalga üretir [46];
- Solitary dalgalar asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genlikli bir solitary dalga ile büyük genlikli bir solitary dalga birbirleri ile çarpıştıktan sonra, birbirlerinden ayrılarak şeklini koruyarak yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgalar kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler [46].
- $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden  $h$  yüksekliğine sahip olan bir solitary dalga

$$v = \sqrt{g(d + h)}$$

hızına sahiptir ( $g$ ; yerçekimi ivmesi). Yani solitary dalganın hızı; suyun derinliğine ve dalganın yüksekliğine bağlıdır. Bu ise bize büyük genlikli bir solitary dalganın, küçük genlikli bir solitary dalgaya göre daha hızlı hareket ettiğini gösterir [46].



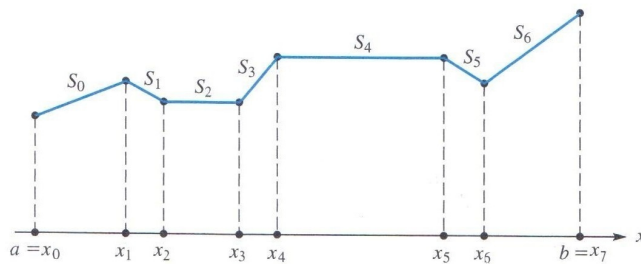
Şekil 2.2 Solitary Dalga Hareketi

Solitonlar, şeklini ve hızını koruyarak yayılan lokalize dalgalar olup karşılıklı çarpışma sonrasında da kendi özelliklerini korumaya devam eden lineer olmayan dalgalardır [47].

Bu tezde; sığ su dalgalarının önemli bir formu olan Korteweg-de Vries ve coupled Korteweg-de Vries denklemleri tanıtılmış ve coupled Korteweg-de Vries denkleminin nümerik çözümleri incelenmiştir.

## 2.2 SPLINE FONKSİYONLAR

Belirli düzgünlük (smoothness) şartlarını sağlayan polinom parçalarının birleştirilmesiyle elde edilen fonksiyona spline fonksiyonu denir. Bunun basit bir örneği olan 1. dereceden spline (veya poligonal fonksiyon) sekiz düğüm noktası Şekil 2.3' te görüldüğü gibi doğrusal polinomların birleştirilmesiyle elde edilir [48].



Şekil 2.3 1. Dereceden Spline Fonksiyon

Spline fonksiyonlar 1946 yılında Schoenberg [49] tarafından ortaya atılmıştır. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü, eğri uydurma, eğri ve yüzey yaklaşımı, interpolasyon gibi alanlarda kullanılmaktadır. Spline fonksiyonların kullanılması, depolanması ve işlenmesi kolaydır [48].

Reel sayıların monoton artan bir dizisi  $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$  olacak biçimde  $x_1, \dots, x_n$ ' e bağlı ve reel eksen üzerinde tanımlı  $k$ .dereceden bir  $s(x)$  spline fonksiyonu;

- $(x_i, x_{i+1})$   $i = 0(1)n$  aralığında  $k$ . veya daha düşük dereceden bir polinomdur.  
 $(x_0 = -\infty, x_{n+1} = \infty)$
- $x_1, \dots, x_n$  düğüm noktalarında ve  $1, 2, \dots, (k - 1)$ . mertebeden türevleri tanımlanan her aralıkta süreklidir [50].

0.dereceden spline fonksiyonu ( $k = 0$ ) için türev şartı kullanılmaz ve 0. dereceden spline fonksiyonuna "*Adım Fonksiyonu*" denir [51].

Spline Fonksiyonun özellikleri aşağıdaki gibidir [50, 52].

- a. Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır,
- b. Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır,
- c. Spline fonksiyonlar dijital bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından uygun fonksiyonlardır,
- d. Spline fonksiyonlar kullanıldığında ortaya çıkan matrisler uygun işaretleri ve determinant özellikleri açısından kolay hesaplanabilir,
- e. Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklık ve kararlılığın incelenmesi daha kolaydır,
- f. Fonksiyonlar ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanabilirler,
- g. Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen yapılar, katsayılar ve işaretler polinomların yapıları ile ilgilidir.

Bazı spline fonksiyonlar farklı özelliklere sahiptirler.  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ ,  $[a, b]$  aralığının bir parçalanışı ve  $x_i = x_{i-1} + h$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $i = 1(1)n$  olsun. Bu düğüm noktalarında fonksiyon değerleri  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  ve  $k$  kez ard arda türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi  $C^k[a, b]$  olsun.  $s(x)$  fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa kuadratik spline fonksiyon olarak adlandırılır [48].

(a)  $s(x) \in C^1[a, b]$ ,

(b)  $s(x) \forall [x_j, x_{j+1}]$ , ( $j = 0(1)n - 1$ )

(c)  $s(x_j) = f(x_j)$ ,  $0 \leq j \leq n$

Aşağıdaki şartlar ise kübik spline fonksiyonu tanımlar [48]:

(a)  $s(x) \in C^2[a, b]$ ,



(b)  $s(x) \forall [x_j, x_{j+1}], (j = 0(1)n - 1)$

(c)  $s(x_j) = f(x_j), 0 \leq j \leq n$

Spline fonksiyonların nümerik işlemler için daha uygun ve üretim tipi programlarda veri yaklaşımı için daha sık kullanılan özel tipine B-spline fonksiyonlar denir [48].

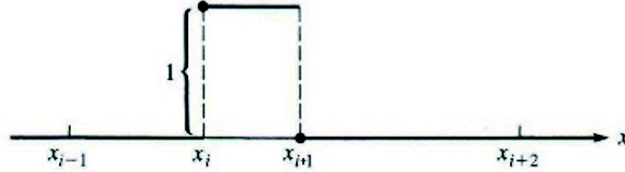
### 2.3 B-SPLINE FONKSİYONLAR

Spline fonksiyonlar ile elde edilen lineer veya lineer olmayan sistemler bazen iyi şartlı olmayan (ill-conditioned) olabilir. Nümerik kararsızlıklarla karşılaşılabilir. Bütün spline fonksiyonlar için baz oluşturan B-spline fonksiyonlar ile bu zorluklar aşılabılır. Nümerik hesaplamalar için B-spline fonksiyonlar oldukça kullanışlıdır [53].

Reel ekseninde düğüm noktalarının bir kümesi  $\lim_{i \rightarrow \infty} = \infty$  ve  $\lim_{i \rightarrow -\infty} = -\infty$  olmak üzere  $\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$  olsun. 0. dereceden bir B-spline fonksiyonu

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [51].



Şekil 2.4 0. Dereceden B-spline Fonksiyon

Buradan  $B_i^0(x)'$  in süreksiz olduğu açıktır ve  $B_i^0(x_i) = 1$  ve  $B_i^0(x_{i+1}) = 0$  dır.

Aşağıda 0. dereceden B-spline fonksiyonun özellikleri verilmiştir.

(a)  $B_i^0(x)$  B-spline fonksiyonu  $[x_i, x_{i+1})$  yarı açık aralığında tanımlıdır.

(b) Her  $x$  ve her  $i$  için  $B_i^0(x) \geq 0$  dır.

(c) Sıçramaların olduğu tüm düğüm noktalarında  $B_i^0(x)$  B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir.

(d) Her  $x \in \mathbb{R}$  için  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$  dir.

(e) 0. dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak diğer bütün yüksek dereceli B-spline fonksiyonlar bağıntısından kolayca

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bulunabilir [51,53].

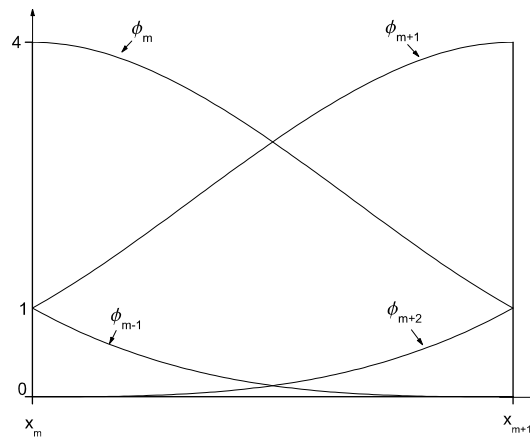
Bu tezde ele alınan coupled KdV denkleminin diferansiyel kuadratur metot ile nümerik çözümleri bulunurken, baz ve/veya ağırlık fonksiyonları yerine kullanılacak olan kübik B-spline fonksiyonunun tamamı ile birlikte bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

### Kübik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$  olsun.  $h = x_m - x_{m-1}$  ve  $m = -1(1)N + 1$  olmak üzere,  $x_m$  düğüm noktalarında  $\phi_m(x)$  kübik B-spline fonksiyonları,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-2})^3 - 4(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+2} - x)^3 - 4(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [54].



Şekil 2.5 Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları

Şekilde görüldüğü gibi her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  ve  $\phi_{m+2}$  gibi dört tane kübik B-spline şekil fonksiyonları tarafından örtülür. Kübik B-spline fonksiyonları ile onun birinci ve ikinci mertebeden türevleri  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfırdır [54].

## BÖLÜM 3

### KORTEWEG-de VRIES (KdV) VE COUPLED KdV DENKLEMİ

Bu bölümde KdV ve coupled KdV denklemleri tanıtıldıktan sonra farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen coupled KdV denklemi için 3 farklı model problem kısaca tanıtıldı.

#### 3.1 GİRİŞ

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi; ilk olarak tek yönlü sığ su dalgalarının yayılmasını açıklamak için kullanılmıştır [55]. Ayrıca, yoğun tabakalı okyanuslardaki büyük iç dalgalar, bir katının atom veya iyonlarının kendini üç boyutta yineleyen bir örüntü içinde dizilişi olan kristal kafesteki ses dalgaları, esnek çubuklarda ilerleyen dalgalar, soğuk plazmadaki lineer olmayan dalgalar gibi önemli fiziksel sistemlerde de kullanılabilir [56].

KdV denklemi ilk defa İskoçyalı gemi inşaat mühendisi John Scott Russell (1808 – 1882) tarafından 1834 yılında Edinburgh kentindeki Heriot-Watt üniversitesinin yakınlarındaki Union kanalında, sığ sularda şeklini değiştirmeyen "*solitary waves*" adını verdiği dalgayı gözlemlemesi ile kayda geçmiştir. Russell bu gözlemini 1844' te Bilimin İlerlemesi İçin raporunda "Report on waves" isimli yayınında şöyle tanımlar [57]:

*"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight*

*or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation."*



Soliton on the Scott Russell Aqueduct on the Union Canal near Heriot-Watt University, 12 July 1995.

Russell daha sonra bir su tankı kurarak aynı olayı tekrar gözlemlemiş ve gözlemlediği bu dalgayı "Great Wave of Translation" olarak adlandırmıştır. Solitary dalgaların şeklini koruyan, tümsek şeklinde ve simetrik izole edilmiş yayılan dalgalar olduğunu açıklamıştır. Ayrıca, Russell yayınladığı bildirisinde, büyük genlikli bir solitary dalganın küçük genlikli bir solitary dalgaya göre daha hızlı olduğunu göstermiştir ve dalga denkleminin lineer olmadığını, dalga hızının dalganın genliğine bağlı olduğunu söyleyerek ifade etmiştir [46]. Russell'ın bildirisi ve deneylerinden yıllar sonra teorik yapı oluşturulmaya başlanmış ve bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri araştırmacılar tarafından incelenmiştir. George Gabriel Stokes 1847 yılında, Joseph Valentin Boussinesq 1872 yılında bu dalgalardan bahsetmişlerdir. Scott Russell'ın sığ sulardaki bağımsız dalgaların keşfinden sonra ilk teorik çalışmalar, 1895 yılında Hollandalı matematikçi Diederik Johannes Korteweg ile doktora öğrencisi Gustav de Vries'e aittir. Korteweg ve de-Vries solitary dalgaların varlığını kanıtlamış ve sığ su dalgalarının hareketini matematiksel olarak modelleyen lineer olmayan Korteweg-de Vries (KdV) denklemini ortaya koymuşlardır [2]. Ancak Korteweg ve de-Vries'ın çalışmasında solitary dalgaların çarpışma sonrasındaki durumu ve dalgaların kararlılığı hakkında bilgi verilmemiştir. Zabusky ve Kruksal 1965 yılında solitary dalgaların etkileşimini inceleyip, çarpışma sonucunda şeklini ve genliğini

koruduklarını ve bu durumun parçacıkların çarpışmasına benzediğini keşfederek bu dalgalara *soliton* adını vermişlerdir [58]. Soliton kavramı; ilk defa su kanalında solitary dalganın gözlemlenmesiyle ortaya çıkıp günümüzde plazma fizik, lazer fizik, akışkanlar dinamiği gibi bilimin değişik bir çok alanında kullanılmaktadır [59].

Bir boyutta ve bir zamanda olan dalganın hareketi ile ilgili kısmi diferansiyel denklem [60]

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada;

- $g$  : yer çekimi ivme sabiti
- $\eta$  : denge seviyesi
- $L$  : kanalın derinliği
- $\alpha$  : sıvının tek biçimli düzgün hareket sabiti
- $\sigma$  :  $L^3/3 - TL/\rho g$
- $T$  : yüzey kılcal gerilimi
- $\rho$  : su yoğunluğudur.

(3.1) denklemine;

$$\begin{aligned} \tau &= t \left( \sqrt{\frac{2g\mu\alpha}{\sigma L}} \right)^3, \\ \eta &= \beta \alpha u, \\ \zeta &= -x \sqrt{\frac{2\alpha\mu}{\sigma}}, \end{aligned}$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$\mu u_{\zeta\zeta\zeta} + \varepsilon u u_{\zeta} + u_{\zeta} + u_{\tau} = 0 \quad (3.2)$$

halini alır.  $\varepsilon = \frac{3}{2}\beta$  ve  $\mu$  bilinen parametrelerdir. (3.2) denkleminde  $x = \zeta - \tau$  dönüşümü yapıp  $\tau$  yerine  $t$  yazılırsa

$$\mu u_{xxx} + \varepsilon u u_x + u_t = 0 \quad (3.3)$$

KdV denkleminin elde edilir [60].

1967 yılında KdV'ye göre Cauchy problemlerinin çözümleri için Ters Saçılma Dönüşüm metodu Gardner ve arkadaşları tarafından geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarak da vermiştir [61]. 1968'de ise Lax, KdV denkleminin tarafından yönlendirilen lineer olmayan etkileşim altında iki farklı çözümün korunduğunun analitik ispatını vermiştir [62]. Birçok araştırmacı KdV denklemini çözmek için çeşitli nümerik yöntemler kullanmışlardır. Bu nümerik yöntemler; sonlu fark metodu, sonlu elemanlar yöntemi, kollokasyon yöntemi, Adomian ayrıştırma metodu, diferansiyel kuadratur metot şeklinde sıralanabilir. A. Korkmaz[11], A. Başhan [29] ve B. Saka [63] diferansiyel kuadratur metot ile KdV denkleminin nümerik çözümlerini incelemiştir. A. C. Vliengenhart [64], K. Goda[65], I. S. Greig ve J. L. Morris [66] sonlu fark yöntemi ile KdV denkleminin nümerik çözümlerini incelemiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile KdV denklemini, M. E. Alexander ve J. L. Morris [67], G. A. Gardner, A. H. A. Ali [68], kollokasyon yöntemi ile İ. Dağ [69], Adomian ayrıştırma metodu ile D. Kaya [70] KdV denkleminin nümerik çözümlerini incelemiştir.

KdV tipindeki en önemli denklemlerden biri de Hirota ve Satsuma [71] tarafından sunulan coupled KdV sistemidir.

### 3.1.1 Korteweg-de Vries Denklem Çifti (Coupled KdV)

Coupled KdV denkleminin  $\alpha$  ve  $\beta$  reel sayı,  $x$  ve  $t$  sırasıyla konuma ve zamana bağlı türevler olmak üzere

$$\begin{aligned} U_t - 6\alpha U U_x - 2\beta V V_x - \alpha U_{xxx} &= 0, & a \leq x \leq b, & t \geq 0 \\ V_t + 3U V_x + V_{xxx} &= 0, & a \leq x \leq b, & t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir. (3.4) denklem sisteminde,  $U_t$  terimi dalganın tek bir yönde yayılmasında zamanın gelişimini, lineer olan  $U_{xxx}$  terimi dalganın yayılmasını ve lineer olmayan terim  $U U_x$  ise dalganın formunu korumasını sağlar. Hirota ve Satsuma çalışmalarında  $V$ 'nin etkisinin yokluğunda ikinci denklemin bilinen KdV denklemine indirgenmiş olduğunu göstermişlerdir [72].

Coupled KdV denklemi iki uzun dalganın etkileşimini farklı dağılım bağıntıları ile tanımlayan denklem çiftidir. Bu iki uzun dalgadan birinin diğeri üzerinde etkisi yoksa oluşan denklem çiftindeki ikinci denklem bildiğimiz KdV denklemidir. Dalgalar arasındaki ilişkide özel bir bağıntı varsa coupled KdV denklemi iki veya üç soliton çözümüne sahip olur [73].

Birçok araştırmacı tarafından coupled KdV denkleminin analitik ve nümerik çözümleri farklı yöntemler ile bulunmuştur. Coupled KdV denkleminin analitik çözümünü, Hirota yöntemini kullanarak Hirota ve Satsuma [74] ile Tam vd. [75] elde etmiştir. Gelişmiş bir homojen denge yöntemi kullanarak, Wang'ın sonuçları ile birlikte coupled KdV denkleminin bazı tam çözümlerini Fan ve Zhang [76] bulmuşlardır. Painlevé analizi ve auto-Bäcklund dönüşümü yoluyla Bogoyavlenskii coupled KdV denkleminin tam çözümünü Tian ve Gao [77] elde etmişlerdir. Trigonometrik fonksiyon dönüşüm yöntemi ve Miura dönüşümü ile Cao vd. [78] coupled KdV denkleminin tam çözümlerini Mathematica yardımıyla elde etmişlerdir. Karasu ve Kılıç [79] otonom olmayan coupled KdV tipi sistemlerin integrasyon için Painlevé özelliğini inceleyip, Painlevé testini geçtiği durumların bazıları için tam çözümleri vermişlerdir. Değişken katsayılı coupled KdV denkleminin periyodik dalga çözümlerini F-açılım yöntemi ile Zhou vd. [80] elde edip limit durumlarda tek soliton dalga çözümlerinin de elde edildiğini göstermişlerdir. Hirota ve Satsuma ile İto tarafından önerilen Coupled KdV denklem sistemlerinin bi-Hamiltonian yapısını Roy [81] incelemiştir. Qian ve Tian [82], coupled KdV denklemi için bazı potansiyeller ortaya koyduktan sonra lokal olmayan Lie-Bäcklund dönüşümünü elde edip bu dönüşümü kullanarak tek dalga çözümünü de bulmuşlardır. Coupled KdV denkleminin periyodik başlangıç- sınırlı problemi için fark denklemlerini Catch-ran yineleme metodu ile Zhu [83] oluşturmuş ve çift soliton dalga çözümlerinin varlığını göstermiştir. Inan [84] tarafından coupled KdV denkleminin bazı tam çözümleri için genelleştirilmiş tanh fonksiyon metodu uygulanmış ve yöntemin doğruluğu için KdV denkleminin de bazı tam çözümleri elde edilmiştir. Al-Khaled vd. [85], coupled KdV denklemine hem tanh hemde He'nin varyasyonel iterasyon yöntemini uygulamışlardır. Jacobi eliptik fonksiyon açılımı ve Hermite dönüşümü yardımıyla Ma ve Zhu [86] lineer olmayan Wick-type stokastik coupled KdV denklemlerinin bazı yeni tam çözümlerini elde etmişlerdir. Assas [87] lineer olmayan coupled KdV denklemini, Lagrange çarpanlarına dayanan He'nin varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözmüştür. Khater vd. [88] Coupled KdV denklemini, Lagrange polinomlarına

dayanarak spectral kollokasyon metod ile nümerik olarak çözmüşlerdir. Fan [89], tanh yönteminde bir parametre içeren Ricatti denkleminin ve çözümünün yararlanıp coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Coupled KdV ve mKdV denklemlerinin nümerik çözümlerini, sembolik hesaplama yardımıyla ayrıştırma metodu kullanarak Kaya ve Inan [90] hesaplamıştır. Genelleştirilmiş coupled KdV sistemleri için nümerik metod sunan Halim vd.[91] metodun kararlılık ve yakınsama incelemesini de yapmıştır. Halim ve Leble [92] ise sabit katsayılı keyfi sayıda denklemlerin Cauchy problemleri için fark denkleminin dayalı bir yöntem kullanarak coupled KdV- mKdV denklemlerinin nümerik çözümlerini bulmuşlardır. Coupled KdV denkleminin Gear- Grimshaw sistemi için yerel iyi şartlı olma durumunu Alvarez-Samaniego ve Carvajal [93] incelemiştir. Rady vd. [94], homojen denge yöntemi kullanarak auto-Bäcklund dönüşümünü ve Lax çiftlerini elde etmek için coupled KdV denklemlerini lineer olmayan bir basit kısmi diferansiyel denkleme dönüştüren uygun dönüşümü vermiş ve genelleştirilmiş tanh metodu kullanarak yeni trigonometrik fonksiyon periyodik çözümleri elde etmişlerdir. Coupled KdV denklemini kuintik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile İsmail [95] çözümlerini sunmuş ayrıca korunum sabitleri ve hata normlarını da incelemiştir. Basit klasik radyal bazlar yardımıyla kollokasyon yöntemi ile düğüm noktaları kullanmadan Siraj-ul-Islam vd. [96] coupled KdV denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmuşlar ve yöntemin doğruluğunu hata normları ile göstermişlerdir. İsmail ve Ashi [97] coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerine ulaşmak için lineer ve kübik B-spline fonksiyonları kullanarak Petrov-Galerkin metodu ile elde etmişlerdir. Coupled KdV denklemleri için spektral kollokasyon yönteminin hata tahminlerini periyodik sınır koşullarıyla Rashid ve İsmail [98] elde etmişler ayrıca nümerik çözümlerinin sonuçlarını sunmuşlardır. Coupled KdV denkleminin 1-Soliton çözümü ve Gear-Grimshaw modelini Biswas ve İsmail [99] sunmuştur. Kutluay ve Uçar [100], kuadratik B-spline galerkin sonlu eleman metodu ile coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini incelemiştir. Homotopi ayrıştırma yöntemi kullanarak Coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini Atangana ve Sece [101] vermiştir. Doğrudan algebraic metodu uygulayarak coupled KdV denkleminin yeni kesin çözümlerini Seadawy ve El-Rashidy [102] elde etmiştir. Kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile Hirota-satsuma coupled KdV denkleminin çözümünü Raslan vd. [103] elde etmiştir. Legendre polinomlarıyla time-fractional coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini Bhrawy vd. [104] vermiştir. Esfahani vd. [105] zayıf rotasyonlu coupled KdV



denkleminde çalışmıştır. Coupled KdV sisteminin soliton-cnoidal etkileşim çözümleri ve tutarlı tanh genişmesinin mümkün olduğunu Wang ve Wang [106] elde etmiştir. Oruç vd. [107] Haar dalgacık metodu ile coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini incelemiştir. Başhan, sonlu farklar metodu ve diferansiyel kuadratur metodunun karma algoritması ile coupled KdV denklemini nümerik olarak çözmüştür [108]. Meshless spektral interpolasyon yöntemi ile time-fractional coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini Hussain vd.[109] sunmuştur.

### 3.2 MODEL PROBLEMLER

(3.4) coupled KdV denkleminin;

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad V(a, t) = V(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

sınır şartları ve aşağıdaki üç farklı model problemdeki başlangıç şartları ile birlikte ele alındı.

#### 3.2.1 Model Problem 1

Birinci model problemimizde, (3.4) coupled KdV denkleminin (3.5) sınır şartları ve

$$U(x, 0) = 2\lambda^2 \operatorname{sech}^2 \left( \lambda x + \frac{1}{2 \log \omega} \right)$$

$$V(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \operatorname{sech} \left( \lambda x + \frac{1}{2 \log \omega} \right)$$

başlangıç şartları ile analitik çözümü aşağıdaki gibidir [71].

$$U(x, t) = 2\lambda^2 \operatorname{sech}^2 (\xi)$$

$$V(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \operatorname{sech} (\xi)$$

Burada;

$$\xi = \lambda \left( x - \lambda^2 t \right) + \frac{1}{2 \log \omega}, \quad \omega = \frac{-\beta}{8(4a+1)\lambda^4}$$

dir.

### 3.2.2 Model Problem 2

İkinci model problemimizde, (3.4) coupled KdV denklemini (3.5) sınır şartları ve

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 U_j(x, 0) = U_1(x, 0) + U_2(x, 0)$$
$$V(x, 0) = \sum_{j=1}^2 V_j(x, 0) = V_1(x, 0) + V_2(x, 0)$$

başlangıç şartları ile göz önüne alınmıştır. Burada;

$$U_j(x, 0) = 2\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\xi_j)$$

$$V_j(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\omega_j}} \operatorname{sech}(\xi_j)$$

$$\xi_j = \lambda_j \left( x - \gamma_j \right) + \frac{1}{2 \log(\omega_j)}, \quad \omega_j = \frac{-\beta}{8(4a+1)\lambda_j^4} \quad (j = 1, 2)$$

dir [95].

### 3.2.3 Model Problem 3

Üçüncü model problemimizde, (3.4) coupled KdV denklemini (3.5) sınır şartları ve

$$U(x, 0) = e^{-0.01x^2}$$

$$V(x, 0) = e^{-0.01x^2}$$

başlangıç şartları ile göz önüne alınmıştır [95].

## BÖLÜM 4

### DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT (DKM)

Bu bölümde tezde kullanılacak modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur metot hakkında bilgiler verilmiştir. Öncelikle bu tez çalışmasında  $f(x)$  fonksiyonunun birinci ve üçüncü mertebeden türevlerine ihtiyaç duyacağız. Böylece ilk olarak;

$$f_x^{(r)}(x_i) = \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(r)} f(x_j), \quad i = 1(1)N, \quad r = 1(1)N-1 \quad (4.1)$$

denkleminin  $r = 1$  için değerini bulacağız.

#### 4.1 MODİFİYE EDİLMİŞ B-SPLINE DKM

DKM yaklaşımının arkasındaki temel fikir; ilgili  $w_{i,j}^{(r)}$  ağırlık katsayılarını ilgili bazla bulup, problem bölgesini içeren çözümler bulmaktır [110]. Karşılık gelen ağırlık katsayılarını belirlerken, modifiye edilmiş kübik B-spline bazlı ağırlık katsayılarını hesaplayacağız.

Reel ekseninde  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$  şeklinde düzgün dağılmış,  $N$  tane düğüm noktalarının yer aldığı ve  $x_i$  düğüm noktalarını gösteren kübik B-spline  $C_m(x)$  olsun.  $\{C_0, C_1, \dots, C_{N+1}\}$  kübik B-spline fonksiyonları  $[a, b]$  kapalı aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturur.  $C_m(x)$  kübik B-spline fonksiyonları  $\forall m$  için  $h = x_m - x_{m-1}$  olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır [54].

$$C_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ (x - x_{m-2})^3 - 4(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+2} - x)^3 - 4(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (4.2)$$

Kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 4.1' de verilmiştir:

Çizelge 4.1 Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri

$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$C_m$	0	1	4	1	0
$C'_m$	0	$\frac{3}{h}$	0	$\frac{-3}{h}$	0
$C''_m$	0	$\frac{6}{h^2}$	$\frac{-12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

Modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarının kullanılması, köşegen dominant matris denklem sisteminin oluşmasına sebep olur. Kübik B-spline fonksiyonlarının modifiye edilmesi farklı şekilde yapılabilir.  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $[a, b]$  bölgesi üzerinde baz fonksiyonlarını göstermek üzere; Mittal ve Jain kübik B-spline fonksiyonları aşağıdaki gibi modifiye etmiştir [111]:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= C_1(x) + 2C_0(x) \\ \psi_2(x) &= C_2(x) - C_0(x) \\ \psi_k(x) &= C_k(x), \quad k = 3, 4, \dots, N-2 \\ \psi_{N-1}(x) &= C_{N-1}(x) - C_{N+1}(x) \\ \psi_N(x) &= C_N(x) + 2C_{N+1}(x)\end{aligned}$$

#### 4.1.1 Birinci Mertebeden Türeve Ait Ağırlık Katsayıları

(4.1) denkleminde,  $r = 1$  değeri ile aşağıdaki denklem elde edilmiştir:

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, N \text{ için } \psi'_k(x_i) = \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(1)} \psi_k(x_j) \quad (4.3)$$

(4.3)' te ilk düğüm noktası olan  $x_1$  noktası için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$k = 1, 2, \dots, N$  için;

$$\psi'_k(x_1) = \sum_{j=1}^N w_{1,j}^{(1)} \psi_k(x_j) = w_{1,1}^{(1)} \psi_k(x_1) + w_{1,2}^{(1)} \psi_k(x_2) + \dots + w_{1,N}^{(1)} \psi_k(x_N) \quad (4.4)$$

$k = 1$  için;

$$\psi'_1(x_1) = w_{1,1}^{(1)} \psi_1(x_1) + w_{1,2}^{(1)} \psi_1(x_2) + w_{1,3}^{(1)} \psi_1(x_3) + \dots + w_{1,N}^{(1)} \psi_1(x_N) \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5)' te modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
C_1'(x_1) + 2C_0'(x_1) &= w_{1,1}^{(1)} [C_1(x_1) + 2C_0(x_1)] + w_{1,2}^{(1)} [C_1(x_2) + 2C_0(x_2)] \\
&\quad + w_{1,3}^{(1)} [C_1(x_3) + 2C_0(x_3)] + \cdots + w_{1,N}^{(1)} [C_1(x_N) + 2C_0(x_N)] \\
0 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{h}\right) &= w_{1,1}^{(1)} [4 + 2.1] + w_{1,2}^{(1)} [1 + 2.0] + w_{1,3}^{(1)} [0 + 2.0] + \cdots \\
&\quad + w_{1,N}^{(1)} [0 + 2.0] \\
-\frac{6}{h} &= 6w_{1,1}^{(1)} + w_{1,2}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir.

$k = 2$  için;

$$\psi_2'(x_1) = w_{1,1}^{(1)} \psi_2(x_1) + w_{1,2}^{(1)} \psi_2(x_2) + w_{1,3}^{(1)} \psi_2(x_3) + \cdots + w_{1,N}^{(1)} \psi_2(x_N) \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
C_2'(x_1) - C_0'(x_1) &= w_{1,1}^{(1)} [C_2(x_1) - C_0(x_1)] + w_{1,2}^{(1)} [C_2(x_2) - C_0(x_2)] \\
&\quad + w_{1,3}^{(1)} [C_2(x_3) - C_0(x_3)] + \cdots + w_{1,N}^{(1)} [C_2(x_N) - C_0(x_N)] \\
\frac{3}{h} - \left(-\frac{3}{h}\right) &= w_{1,1}^{(1)} [1 - 1] + w_{1,2}^{(1)} [4 - 0] + w_{1,3}^{(1)} [1 - 0] \\
&\quad + w_{1,4}^{(1)} [0 - 0] + \cdots + w_{1,N}^{(1)} [0 - 0] \\
\frac{6}{h} &= 4w_{1,2}^{(1)} + w_{1,3}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir.

$k = 3$  için;

$$\psi_3'(x_1) = w_{1,1}^{(1)} \psi_3(x_1) + w_{1,2}^{(1)} \psi_3(x_2) + w_{1,3}^{(1)} \psi_3(x_3) + w_{1,4}^{(1)} \psi_3(x_4) + \cdots + w_{1,N}^{(1)} \psi_3(x_N) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9)' da modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
C_3'(x_1) &= w_{1,1}^{(1)} C_3(x_1) + w_{1,2}^{(1)} C_3(x_2) + w_{1,3}^{(1)} C_3(x_3) \\
&\quad + w_{1,4}^{(1)} C_3(x_4) + \cdots + w_{1,N}^{(1)} C_3(x_N) \\
0 &= w_{1,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{1,2}^{(1)} \cdot 1 + w_{1,3}^{(1)} \cdot 4 + w_{1,4}^{(1)} \cdot 1 + w_{1,5}^{(1)} \cdot 0 + \cdots + w_{1,N}^{(1)} \cdot 0 \\
0 &= w_{1,2}^{(1)} + 4w_{1,3}^{(1)} + w_{1,4}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir.

$k = 4$  için;

$$\psi'_4(x_1) = w_{1,1}^{(1)}\psi_4(x_1) + w_{1,2}^{(1)}\psi_4(x_2) + w_{1,3}^{(1)}\psi_4(x_3) + w_{1,4}^{(1)}\psi_4(x_4) + \cdots + w_{1,N}^{(1)}\psi_4(x_N) \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_4(x_1) &= w_{1,1}^{(1)}C_4(x_1) + w_{1,2}^{(1)}C_4(x_2) + w_{1,3}^{(1)}C_4(x_3) \\ &\quad + w_{1,4}^{(1)}C_4(x_4) + \cdots + w_{1,N}^{(1)}C_4(x_N) \\ 0 &= w_{1,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{1,2}^{(1)} \cdot 0 + w_{1,3}^{(1)} \cdot 1 + w_{1,4}^{(1)} \cdot 4 + w_{1,5}^{(1)} \cdot 1 + w_{1,6}^{(1)} \cdot 0 + \cdots + w_{1,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 &= w_{1,3}^{(1)} + 4w_{1,4}^{(1)} + w_{1,5}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir.  $k = 5, \dots, N - 2$  için de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri benzer şekilde uygulanır.

$k = N - 1$  için;

$$\begin{aligned} \psi'_{N-1}(x_1) &= w_{1,1}^{(1)}\psi_{N-1}(x_1) + \cdots + w_{1,N-2}^{(1)}\psi_{N-1}(x_{N-2}) + w_{1,N-1}^{(1)}\psi_{N-1}(x_{N-1}) \\ &\quad + w_{1,N}^{(1)}\psi_{N-1}(x_N) \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_{N-1}(x_1) - C'_{N+1}(x_1) &= w_{1,1}^{(1)}[C_{N-1}(x_1) - C_{N+1}(x_1)] + \cdots \\ &\quad + w_{1,N-2}^{(1)}[C_{N-1}(x_{N-2}) - C_{N+1}(x_{N-2})] \\ &\quad + w_{1,N-1}^{(1)}[C_{N-1}(x_{N-1}) - C_{N+1}(x_{N-1})] \\ &\quad + w_{1,N}^{(1)}[C_{N-1}(x_N) - C_{N+1}(x_N)] \\ 0 &= w_{1,1}^{(1)}[0 - 0] + \cdots + w_{1,N-3}^{(1)}[0 - 0] \\ &\quad + w_{1,N-2}^{(1)}[1 - 0] + w_{1,N-1}^{(1)}[4 - 0] + w_{1,N}^{(1)}[1 - 1] \\ 0 &= w_{1,N-2}^{(1)} + 4w_{1,N-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak  $k = N$  için;

$$\psi'_N(x_1) = w_{1,1}^{(1)}\psi_N(x_1) + \cdots + w_{1,N-1}^{(1)}\psi_N(x_{N-1}) + w_{1,N}^{(1)}\psi_N(x_N) \quad (4.15)$$

elde edilir. (4.15)' te modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
C'_N(x_1) + 2C'_{N+1}(x_1) &= w_{1,1}^{(1)} [C_N(x_1) + 2C_{N+1}(x_1)] + \cdots \\
&+ w_{1,N-2}^{(1)} [C_N(x_{N-2}) + 2C_{N+1}(x_{N-2})] \\
&+ w_{1,N-1}^{(1)} [C_N(x_{N-1}) + 2C_{N+1}(x_{N-1})] \\
&+ w_{1,N}^{(1)} [C_N(x_N) + 2C_{N+1}(x_N)] \\
0 &= w_{1,1}^{(1)} [0 + 2.0] + \cdots + w_{1,N-2}^{(1)} [0 + 2.0] \\
&+ w_{1,N-1}^{(1)} [1 + 2.0] + w_{1,N}^{(1)} [4 + 2.1] \\
0 &= w_{1,N-1}^{(1)} + 6w_{1,N}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlikler (4.17) denklem sistemi şeklindedir.

$$\begin{aligned}
-\frac{6}{h} &= 6w_{1,1}^{(1)} + w_{1,2}^{(1)} \\
\frac{6}{h} &= 4w_{1,2}^{(1)} + w_{1,3}^{(1)} \\
0 &= w_{1,2}^{(1)} + 4w_{1,3}^{(1)} + w_{1,4}^{(1)} \\
0 &= w_{1,3}^{(1)} + 4w_{1,4}^{(1)} + w_{1,5}^{(1)} \\
&\vdots \\
0 &= w_{1,N-3}^{(1)} + 4w_{1,N-2}^{(1)} + w_{1,N-1}^{(1)} \\
0 &= w_{1,N-2}^{(1)} + 4w_{1,N-1}^{(1)} \\
0 &= w_{1,N-1}^{(1)} + 6w_{1,N}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.17) denklem sistemi matris formunda yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 0 \\ & & & & & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,1}^{(1)} \\ w_{1,2}^{(1)} \\ w_{1,3}^{(1)} \\ \vdots \\ w_{1,N-1}^{(1)} \\ w_{1,N}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/h \\ 6/h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

(4.18) elde edilir. Elde edilen matris sistemi 3-bant Thomas Algoritması ile çözümlenerek ilk düğüm noktası  $x_1$  için birinci türeve ait ağırlık katsayıları bulunur.

(4.3)' te ikinci düğüm noktası olan  $x_2$  noktası için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$k = 1, 2, \dots, N$  için;

$$\psi'_k(x_2) = \sum_{j=1}^N w_{2,j}^{(1)} \psi_k(x_j) = w_{2,1}^{(1)} \psi_k(x_1) + w_{2,2}^{(1)} \psi_k(x_2) + \dots + w_{2,N}^{(1)} \psi_k(x_N) \quad (4.19)$$

$k = 1$  için;

$$\psi'_1(x_2) = w_{2,1}^{(1)} \psi_1(x_1) + w_{2,2}^{(1)} \psi_1(x_2) + w_{2,3}^{(1)} \psi_1(x_3) + \dots + w_{2,N}^{(1)} \psi_1(x_N) \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.20)' te modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_1(x_2) + 2C'_0(x_2) &= w_{2,1}^{(1)} \cdot 6 + w_{2,2}^{(1)} \cdot 1 + w_{2,3}^{(1)} \cdot 0 + \dots + w_{2,N}^{(1)} \cdot 0 \\ \left(-\frac{3}{h}\right) + 2 \cdot 0 &= 6w_{2,1}^{(1)} + w_{2,2}^{(1)} \\ -\frac{3}{h} &= 6w_{2,1}^{(1)} + w_{2,2}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir.

$k = 2$  için;

$$\psi'_2(x_2) = w_{2,1}^{(1)} \psi_2(x_1) + w_{2,2}^{(1)} \psi_2(x_2) + w_{2,3}^{(1)} \psi_2(x_3) + \dots + w_{2,N}^{(1)} \psi_2(x_N) \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_2(x_2) - C'_0(x_2) &= w_{2,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{2,2}^{(1)} \cdot 4 + w_{2,3}^{(1)} \cdot 1 + \dots + w_{2,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 - 0 &= 4w_{2,2}^{(1)} + w_{2,3}^{(1)} \\ 0 &= 4w_{2,2}^{(1)} + w_{2,3}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir.

$k = 3$  için;

$$\psi'_3(x_2) = w_{2,1}^{(1)} \psi_3(x_1) + w_{2,2}^{(1)} \psi_3(x_2) + w_{2,3}^{(1)} \psi_3(x_3) + w_{2,4}^{(1)} \psi_3(x_4) + \dots + w_{2,N}^{(1)} \psi_3(x_N) \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.24)' da modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_3(x_2) &= w_{2,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{2,2}^{(1)} \cdot 1 + w_{2,3}^{(1)} \cdot 4 + w_{2,4}^{(1)} \cdot 1 + \dots + w_{2,N}^{(1)} \cdot 0 \\ \frac{3}{h} &= w_{2,2}^{(1)} + 4w_{2,3}^{(1)} + w_{2,4}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.25)$$



eşitliği elde edilir.

$k = 4$  için;

$$\psi'_4(x_2) = w_{2,1}^{(1)}\psi_4(x_1) + w_{2,2}^{(1)}\psi_4(x_2) + w_{2,3}^{(1)}\psi_4(x_3) + w_{2,4}^{(1)}\psi_4(x_4) + \cdots + w_{2,N}^{(1)}\psi_4(x_N) \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_4(x_1) &= w_{2,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{2,2}^{(1)} \cdot 0 + w_{2,3}^{(1)} \cdot 1 + w_{2,4}^{(1)} \cdot 4 + \cdots + w_{2,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 &= w_{2,3}^{(1)} + 4w_{2,4}^{(1)} + w_{2,5}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

eşitliği elde edilir.  $k = 5, \dots, N - 2$  için de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri benzer şekilde uygulanır.

$k = N - 1$  için;

$$\begin{aligned} \psi'_{N-1}(x_2) &= w_{2,1}^{(1)}\psi_{N-1}(x_1) + \cdots + w_{2,N-2}^{(1)}\psi_{N-1}(x_{N-2}) + w_{2,N-1}^{(1)}\psi_{N-1}(x_{N-1}) \\ &\quad + w_{2,N}^{(1)}\psi_{N-1}(x_N) \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_{N-1}(x_2) - C'_{N+1}(x_2) &= w_{2,1}^{(1)} \cdot 0 + \cdots + w_{2,N-3}^{(1)} \cdot 0 + w_{2,N-2}^{(1)} \cdot 1 + w_{2,N-1}^{(1)} \cdot 4 \\ &\quad + w_{2,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 - 0 &= w_{2,N-2}^{(1)} + 4w_{2,N-1}^{(1)} \\ 0 &= w_{2,N-2}^{(1)} + 4w_{2,N-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak  $k = N$  için;

$$\psi'_N(x_2) = w_{2,1}^{(1)}\psi_N(x_1) + \cdots + w_{2,N-1}^{(1)}\psi_N(x_{N-1}) + w_{2,N}^{(1)}\psi_N(x_N) \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.30)' te modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_N(x_2) + 2C'_{N+1}(x_2) &= w_{2,1}^{(1)} \cdot 0 + \cdots + w_{2,N-2}^{(1)} \cdot 0 + w_{2,N-1}^{(1)} \cdot 1 + w_{2,N}^{(1)} \cdot 6 \\ 0 - 0 &= w_{2,N-1}^{(1)} + 6w_{2,N}^{(1)} \\ 0 &= w_{2,N-1}^{(1)} + 6w_{2,N}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.31)$$



Elde edilen bu denklem sisteminin Thomas Algoritması ile çözümünden  $N - 2$  tane düğüm noktası için birinci türeve ait ağırlık katsayıları bulunur.

(4.3)' te son düğüm noktası olan  $x_N$  noktası için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$k = 1, 2, \dots, N$  için;

$$\psi'_k(x_N) = \sum_{j=1}^N w_{N,j}^{(1)} \psi_k(x_j) = w_{N,1}^{(1)} \psi_k(x_1) + w_{N,2}^{(1)} \psi_k(x_2) + \dots + w_{N,N}^{(1)} \psi_k(x_N) \quad (4.35)$$

$k = 1$  için;

$$\psi'_1(x_N) = w_{N,1}^{(1)} \psi_1(x_1) + w_{N,2}^{(1)} \psi_1(x_2) + w_{N,3}^{(1)} \psi_1(x_3) + \dots + w_{N,N}^{(1)} \psi_1(x_N) \quad (4.36)$$

elde edilir. (4.36)' te modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_1(x_N) + 2C'_0(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \cdot 6 + w_{N,2}^{(1)} \cdot 1 + w_{N,3}^{(1)} \cdot 0 + \dots + w_{N,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 + 2 \cdot 0 &= 6w_{N,1}^{(1)} + w_{N,2}^{(1)} \\ 0 &= 6w_{N,1}^{(1)} + w_{N,2}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

eşitliği elde edilir.

$k = 2$  için;

$$\psi'_2(x_N) = w_{N,1}^{(1)} \psi_2(x_1) + w_{N,2}^{(1)} \psi_2(x_2) + w_{N,3}^{(1)} \psi_2(x_3) + \dots + w_{N,N}^{(1)} \psi_2(x_N) \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_2(x_N) - C'_0(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{N,2}^{(1)} \cdot 4 + w_{N,3}^{(1)} \cdot 1 + \dots + w_{N,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 - 0 &= 4w_{N,2}^{(1)} + w_{N,3}^{(1)} \\ 0 &= 4w_{N,2}^{(1)} + w_{N,3}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

eşitliği elde edilir.

$k = 3$  için;

$$\psi'_3(x_N) = w_{N,1}^{(1)} \psi_3(x_1) + w_{N,2}^{(1)} \psi_3(x_2) + w_{N,3}^{(1)} \psi_3(x_3) + w_{N,4}^{(1)} \psi_3(x_4) + \dots + w_{N,N}^{(1)} \psi_3(x_N) \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.40)' da modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_3(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \cdot 0 + w_{N,2}^{(1)} \cdot 1 + w_{N,3}^{(1)} \cdot 4 + w_{N,4}^{(1)} \cdot 1 + \cdots + w_{N,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 &= w_{N,2}^{(1)} + 4w_{N,3}^{(1)} + w_{N,4}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

eşitliği elde edilir.  $k = 4, \dots, N - 3$  içinde modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri benzer şekilde uygulanır.

$k = N - 2$  için;

$$\begin{aligned} \psi'_{N-2}(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \psi_{N-2}(x_1) + \cdots + w_{N,N-3}^{(1)} \psi_{N-2}(x_{N-3}) + w_{N,N-2}^{(1)} \psi_{N-2}(x_{N-2}) \\ &\quad + w_{N,N-1}^{(1)} \psi_{N-2}(x_{N-1}) + w_{N,N}^{(1)} \psi_{N-2}(x_N) \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. (4.42)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_{N-2}(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \cdot 0 + \cdots + w_{N,N-3}^{(1)} \cdot 1 + w_{N,N-2}^{(1)} \cdot 4 + w_{N,N-1}^{(1)} \cdot 1 + w_{N,N}^{(1)} \cdot 0 \\ 0 &= w_{N,N-3}^{(1)} + 4w_{N,N-2}^{(1)} + w_{N,N-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

eşitliği elde edilir.

$k = N - 1$  için;

$$\begin{aligned} \psi'_{N-1}(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \psi_{N-1}(x_1) + \cdots + w_{N,N-2}^{(1)} \psi_{N-1}(x_{N-2}) + w_{N,N-1}^{(1)} \psi_{N-1}(x_{N-1}) \\ &\quad + w_{N,N}^{(1)} \psi_{N-1}(x_N) \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.44)' de modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonları ve türevlerinin Çizelge 4.1 değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C'_{N-1}(x_N) - C'_{N+1}(x_N) &= w_{N,1}^{(1)} \cdot 0 + \cdots + w_{N,N-3}^{(1)} \cdot 0 + w_{N,N-2}^{(1)} \cdot 1 + w_{N,N-1}^{(1)} \cdot 4 \\ &\quad + w_{N,N}^{(1)} \cdot 0 \\ \left(-\frac{3}{h}\right) - \left(\frac{3}{h}\right) &= w_{N,N-2}^{(1)} + 4w_{N,N-1}^{(1)} \\ -\frac{6}{h} &= w_{N,N-2}^{(1)} + 4w_{N,N-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak  $k = N$  için;

$$\psi'_N(x_N) = w_{N,1}^{(1)} \psi_N(x_1) + \cdots + w_{N,N-1}^{(1)} \psi_N(x_{N-1}) + w_{N,N}^{(1)} \psi_N(x_N) \quad (4.46)$$



$1, 2, \dots, N$  için Shu' nun rekürsif formülü ile ikinci mertebeden türevelere ait ağırlık katsayıları aşağıdaki gibidir [110]:

$$w_{i,j}^{(2)} = 2w_{i,j}^{(1)} \left( w_{i,i}^{(1)} - \frac{1}{(x_i - x_j)} \right), \quad i \neq j \quad (4.50)$$

$$w_{i,i}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{i,j}^{(2)} \quad (4.51)$$

### 4.1.3 Üçüncü Mertebeden Türevlere Ait Ağırlık Katsayıları

Üçüncü mertebeden türevelere ait ağırlık katsayıları; birinci ve ikinci mertebeden türevelere ait ağırlık katsayılarına bağlı olarak elde edilir. Matris çarpımı yaklaşımı ile  $m$ . mertebeden türevin ağırlık katsayıları  $[A^{(m)}]$ ;  $(m-1)$  mertebeden türevin ağırlık katsayıları  $[A^{(m-1)}]$  ve 1. mertebeden türevin ağırlık katsayıları  $[A^{(1)}]$  ile (4.52) eşitliğindeki gibidir [110].

$$[A^{(m)}] = [A^{(1)}] [A^{(m-1)}] = [A^{(m-1)}] [A^{(1)}], \quad m = 2, 3, \dots, N-1. \quad (4.52)$$

## 4.2 ZAMANA BAĞLI NÜMERİK İNTEGRASYON

Bu tezde coupled KdV denkleminin zamana bağlı integrasyonu Strong Stability Preserving Runge-Kutta (SSP-RK) metodu ile yapıldı. Strong Stability Preserving Runge-Kutta metodunu uygulayabilmek için denklem diferansiyel kuadrature metot ile ayrıklaştırdıktan sonra zamana bağlı türev terimi yalnız bırakılarak integrasyon yapılır.

### 4.2.1 SSP-RK43

(3.5)' de verilen sınır koşulları kullanılarak (3.4) denklem sistemi;

$$\begin{aligned} U_t - 6\alpha U U_x - 2\beta V V_x - \alpha U_{xxx} &= 0, \\ V_t + 3U V_x + V_{xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (4.53)$$

aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_t &= 6\alpha U U_x + 2\beta V V_x + \alpha U_{xxx} \\ V_t &= -3U V_x - V_{xxx} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Daha sonra birinci ve üçüncü mertebeden diferansiyel kuadratur metodun türev yaklaşımları (4.54) denkleminde kullanılmasıyla (4.55) adi diferansiyel denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{dU(x_i)}{dt} &= 6\alpha U(x_i, t) \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(1)} U(x_j, t) + 2\beta V(x_i, t) \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(1)} V(x_j, t) + \alpha \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(3)} U(x_j, t) \\ \frac{dV(x_i)}{dt} &= -3U(x_i, t) \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(1)} V(x_j, t) - \sum_{j=1}^N w_{i,j}^{(3)} V(x_j, t), i = 1(1)N\end{aligned}\tag{4.55}$$

Daha sonra (4.55) denklem sistemi ile verilen cebirsel adi diferansiyel denklem sistemi zamana göre integre edilir. Burada strong stability-preserving Runge-Kutta (SSP-RK43) yöntemi, kullanım kolaylığı ve işlem yükünün azlığı sebebi ile tercih edildi [112].

---

### SSP-RK43

---

$$q1 = u;$$

$$q2 = q1 + \Delta t/2 * F(q1);$$

$$q2 = q2 + \Delta t/2 * F(q2)$$

$$q2 = 2/3 * q1 + 1/3 * (q2 + \Delta t/2 * F(q2))$$

$$q2 = q2 + \Delta t/2 * F(q2)$$

$$u = q2$$


---





## BÖLÜM 5

### NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Bu bölümde (3.4) coupled KdV denkleminin;

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad V(a, t) = V(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

sınır şartları ve üç farklı model problemdeki başlangıç şartları ile birlikte modifiye edilmiş kübik B-spline baz fonksiyonunu kullanarak diferansiyel kuadratur metot ile nümerik çözümleri elde edildi. Nümerik yöntemin doğruluğu,  $U$  ve  $V$ ' nin nümerik çözümlerinin analitik çözümlerine ne kadar tamlıkta yaklaştığını göstermek için  $L_2$  ortalama hata ve  $L_\infty$  maximum hata normları kullanıldı.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$L_2 = \|u - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j - (U_N)_j|^2},$$
$$L_\infty = \|u - U_N\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j - (U_N)_j|$$

Hata normlarına ek olarak coupled KdV denkleminin en düşük iki korunum sabiti olan, sırasıyla kütle ve momentuma karşılık gelen

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U dx \quad \text{ve} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \frac{2}{3}\beta V^2) dx$$

hesaplandı.

$I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin bağıl değişim oranı;

$$\hat{I}_i = \frac{I_i^{\text{son}} - I_i^{\text{başlangıç}}}{I_i^{\text{başlangıç}}}, \quad i = 1, 2.$$

ile hesaplandı.

## 5.1 MODEL PROBLEM 1: TEK SOLİTON DALGA

Bu bölümde, aşağıdaki  $\alpha, \beta$  ve  $\lambda$  değerleri ile  $-25 \leq x \leq 25$  aralığında Model Problem 1 için modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur metot ile nümerik çözümler elde edildi.

TipA :  $\alpha = 0.5, \beta = -3$  ve  $\lambda = 0.5$ .

TipB :  $\alpha = -0.5, \beta = 3$  ve  $\lambda = 0.5$ .

TipC :  $\alpha = -0.125, \beta = -3$  ve  $\lambda = 0.5$ .

TipA, TipB ve TipC değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir. Farklı  $N$  düğüm noktaları ve  $\Delta t$  zaman adımlarında hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile birlikte  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $t = 0 - t = 20$  zaman aralığında Çizelge 5.1, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.5' te, korunum sabitlerinin bağlı değişimleri ise Çizelge 5.2, Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.6' da verilmiştir. Çizelgeler, zaman adımları küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının azaldığını,  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri değerlerinin neredeyse sabit kaldığını göstermektedir.

Çizelge 5.1' de, TipA değerleri için  $\Delta t = 0.01$  ve  $N = 149$ ;  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 311$ ;  $\Delta t = 0.0001$  ve  $N = 421$  ile hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları verilmiştir.

Çizelge 5.1 TipA: Tek soliton dalganın farklı  $\Delta t$  ve  $N$  için nümerik çözümleri

$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
					$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	149	0.0	2.000000	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	1.999986	-0.333333	0.016370	0.087671	0.040544	0.020166
		10.0	2.000008	-0.333333	0.365521	0.178479	0.133577	0.077735
		15.0	1.999998	-0.333333	0.660599	0.377482	0.244838	0.142409
		20.0	2.000001	-0.333333	0.896964	0.484423	0.315272	0.152162
0.001	311	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	1.999999	-0.333333	0.010033	0.004987	0.007833	0.002852
		10.0	2.000001	-0.333333	0.018413	0.009338	0.010895	0.005556
		15.0	2.000000	-0.333333	0.024522	0.014660	0.013797	0.007308
		20.0	2.000001	-0.333333	0.017418	0.008458	0.019452	0.013045
0.0001	421	0.0	1.999999	-0.333333	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	1.999999	-0.333334	0.002901	0.001555	0.006830	0.002866
		10.0	1.999998	-0.333333	0.007193	0.004549	0.007726	0.003918
		15.0	2.000000	-0.333334	0.010394	0.006291	0.010657	0.007794
		20.0	1.999998	-0.333334	0.006064	0.003194	0.018083	0.013646

Çizelge 5.1' de verilen  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin  $t = 0$  ve  $t = 20$  zaman aralığındaki bağıl değişimleri,  $\Delta t = 0.01$  zaman adımı ve  $N = 149$  düğüm noktası için sırasıyla  $0.5 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.001$  zaman adımı ve  $N = 311$  düğüm noktası için sırasıyla  $1.0 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.0001$  zaman adımı ve  $N = 421$  düğüm noktası için sırasıyla  $-0.5 \times 10^{-6}$  ve  $3.0 \times 10^{-6}$  olarak hesaplanmıştır.  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin hesaplanan bağıl değişimleri Çizelge 5.2' de verilmiştir. Bu sonuçlardan;  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerindeki değişimlerin azaldığı açıkça görülür.

Çizelge 5.2 TipA:  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin farklı  $\Delta t$  ve  $N$  için bağıl değişimleri

$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$
0.01	149	0.0	2.000000	-0.333333	-	-
		5.0	1.999986	-0.333333	$-7.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	2.000008	-0.333333	$4.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	1.999998	-0.333333	$-1.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	2.000001	-0.333333	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
0.001	311	0.0	1.999999	-0.333333	-	-
		5.0	1.999999	-0.333333	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	2.000001	-0.333333	$1.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	2.000000	-0.333333	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	2.000001	-0.333333	$1.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
0.0001	421	0.0	1.999999	-0.333333	-	-
		5.0	1.999999	-0.333334	$0.0 \times 10^{-6}$	$3.0 \times 10^{-6}$
		10.0	1.999998	-0.333333	$-0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	2.000000	-0.333334	$0.5 \times 10^{-6}$	$3.0 \times 10^{-6}$
		20.0	1.999998	-0.333334	$-0.5 \times 10^{-6}$	$3.0 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.3' te, TipB değerleri için  $\Delta t = 0.01$  ve  $N = 149$ ;  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 271$ ;  $\Delta t = 0.0001$  ve  $N = 421$  ile hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları verilmiştir.  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının azaldığı açıktır.

Çizelge 5.3 TipB: Tek soliton dalganın farklı  $\Delta t$  ve  $N$  için nümerik çözümleri

$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
					$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	149	0.0	2.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	2.000005	1.000000	0.074947	0.044441	0.014556	0.009442
		10.0	1.999991	1.000000	0.088352	0.056638	0.023889	0.014189
		15.0	2.000008	1.000000	0.098418	0.068640	0.031542	0.015068
		20.0	2.000005	1.000000	0.131279	0.089817	0.044016	0.019204
0.001	271	0.0	1.999999	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	2.000000	1.000000	0.006430	0.004655	0.003891	0.001658
		10.0	2.000000	1.000000	0.006898	0.004988	0.005549	0.003376
		15.0	2.000000	1.000000	0.006580	0.004092	0.009134	0.006408
		20.0	2.000000	1.000000	0.007243	0.004430	0.017357	0.011420
0.0001	421	0.0	1.999999	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	1.999999	1.000000	0.001762	0.001087	0.003769	0.002040
		10.0	1.999999	1.000000	0.002950	0.001737	0.005229	0.003589
		15.0	1.999999	1.000000	0.003405	0.001238	0.009065	0.006734
		20.0	1.999999	1.000000	0.004569	0.002235	0.017473	0.012434

Çizelge 5.3' te verilen  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin  $t = 0$  ve  $t = 20$  zaman aralığında ki bağıl değişimleri,  $\Delta t = 0.01$  zaman adımı ve  $N = 149$  düğüm noktası için sırasıyla  $2.5 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.001$  zaman adımı ve  $N = 271$  düğüm noktası için sırasıyla  $0.5 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.0001$  zaman adımı ve  $N = 421$  düğüm noktası için sırasıyla  $0.0 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$  olarak hesaplanmıştır.  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin hesaplanan bağıl değişimleri Çizelge 5.4' te verilmiştir. Bu sonuçlardan;  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $I_1$  korunum sabitindeki değişimin azaldığı ve  $I_2$  korunum sabitinin aynı kaldığı açıkça görülür.

Çizelge 5.4 TipB:  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin farklı  $\Delta t$  ve  $N$  için bağıl değişimleri

$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$
0.01	149	0.0	2.000000	1.000000	–	–
		5.0	2.000005	1.000000	$2.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	1.999991	1.000000	$-4.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	2.000008	1.000000	$4.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	2.000005	1.000000	$2.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
0.001	271	0.0	1.999999	1.000000	–	–
		5.0	2.000000	1.000000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	2.000000	1.000000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	2.000000	1.000000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	2.000000	1.000000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
0.0001	421	0.0	1.999999	1.000000	–	–
		5.0	1.999999	1.000000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	1.999999	1.000000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	1.999999	1.000000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	1.999999	1.000000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.5' te, TipC değerleri için  $\Delta t = 0.01$  ve  $N = 149$ ;  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 251$ ;  $\Delta t = 0.0001$  ve  $N = 361$  ile hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları verilmiştir. Çizelgeden,  $\Delta t$  küçüldükçe  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının azaldığı görülmüştür.

Çizelge 5.5 TipC: Tek soliton dalganın farklı  $\Delta t$  ve  $N$  için nümerik çözümleri

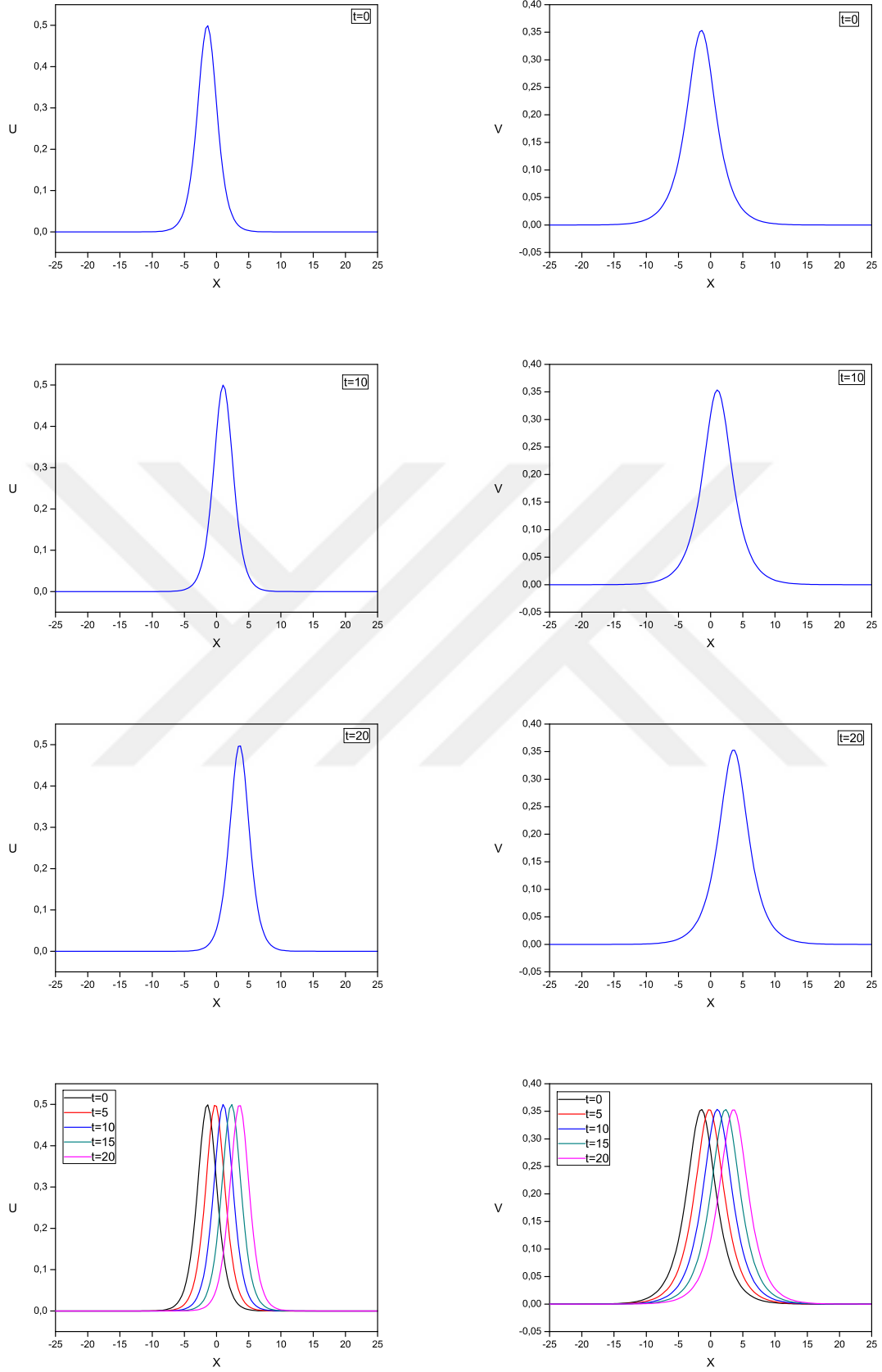
$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$U_N(x, t)$		$V_N(x, t)$	
					$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	149	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	2.000000	0.500000	0.047827	0.029764	0.009347	0.004575
		10.0	2.000001	0.500000	0.064771	0.046385	0.014908	0.008679
		15.0	1.999994	0.500000	0.106142	0.072425	0.029563	0.016683
		20.0	2.000005	0.500000	0.185821	0.123879	0.064441	0.033510
0.001	251	0.0	2.000000	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	1.999999	0.500000	0.005834	0.003675	0.002957	0.001338
		10.0	2.000000	0.500000	0.007274	0.004762	0.004647	0.002462
		15.0	2.000000	0.500000	0.009062	0.006096	0.008181	0.004787
		20.0	1.999999	0.500000	0.009251	0.006144	0.015080	0.008560
0.0001	361	0.0	1.999999	0.500000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		5.0	1.999999	0.500000	0.001360	0.000905	0.002751	0.001544
		10.0	1.999999	0.500000	0.001797	0.001080	0.003995	0.002534
		15.0	2.000000	0.500000	0.002773	0.002047	0.007099	0.004858
		20.0	2.000000	0.500000	0.003395	0.001823	0.013654	0.009361

Çizelge 5.5' te verilen  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin  $t = 0$  ve  $t = 20$  zaman aralığındaki bağıl değişimleri,  $\Delta t = 0.01$  zaman adımı ve  $N = 149$  düğüm noktası için sırasıyla  $2.5 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.001$  zaman adımı ve  $N = 251$  düğüm noktası için sırasıyla  $-0.5 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.0001$  zaman adımı ve  $N = 361$  düğüm noktası için sırasıyla  $0.5 \times 10^{-6}$  ve  $0.0 \times 10^{-6}$  olarak hesaplanmıştır.  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin hesaplanan bağıl değişimleri Çizelge 5.6' da verilmiştir. Bu sonuçlardan,  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $I_1$  korunum sabitindeki değişimin azalıp neredeyse sabit kaldığı ve  $I_2$  korunum sabitinin değerinin sabit kaldığı açıkça görülmüştür.

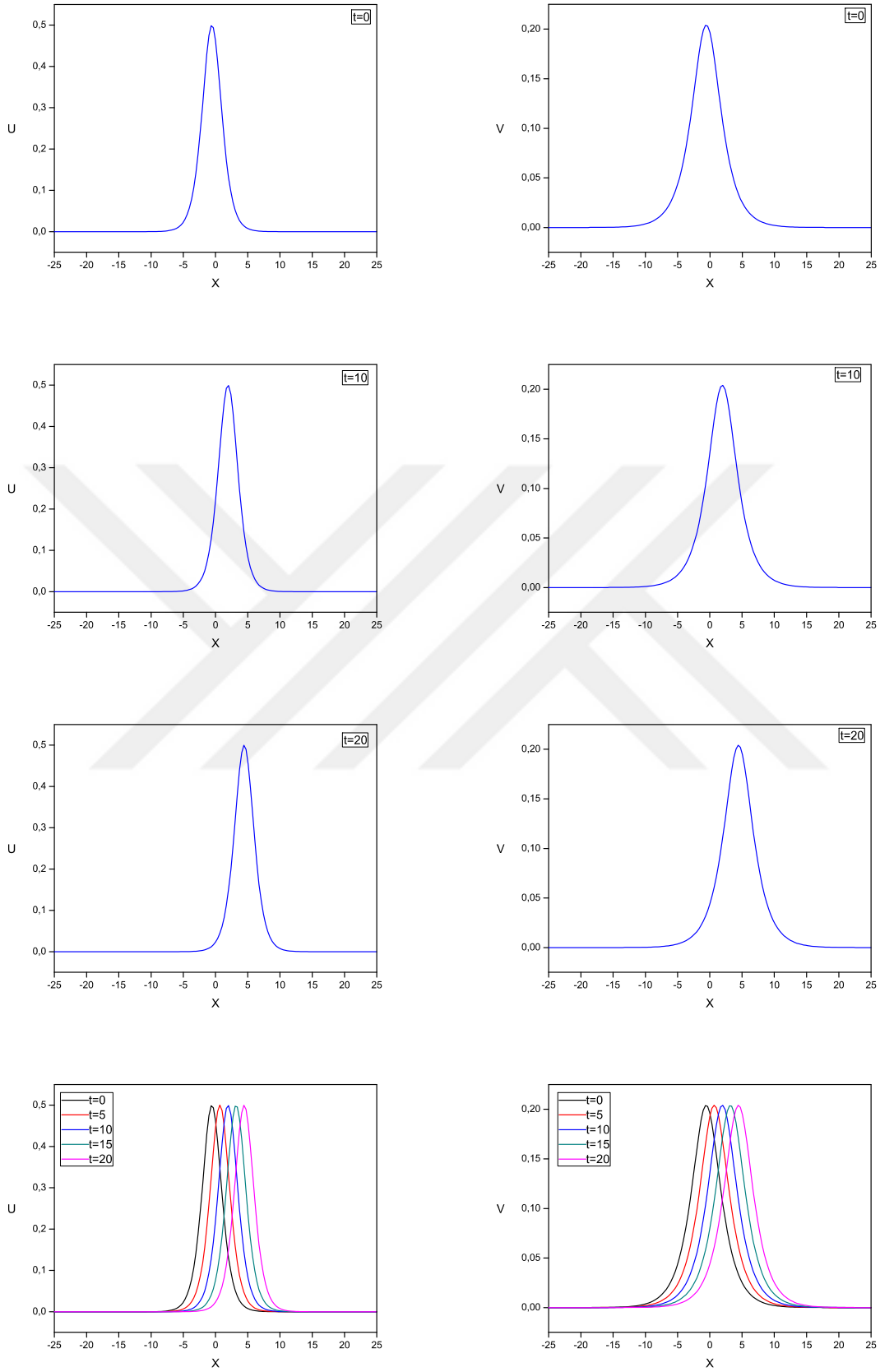
Çizelge 5.6 TipC:  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin farklı  $\Delta t$  ve  $N$  için bağıl değişimleri

$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$
0.01	149	0.0	2.000000	0.500000	–	–
		5.0	2.000000	0.500000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	2.000001	0.500000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	1.999994	0.500000	$-3.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	2.000005	0.500000	$2.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
0.001	251	0.0	2.000000	0.500000	–	–
		5.0	1.999999	0.500000	$-0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	2.000000	0.500000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	2.000000	0.500000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	1.999999	0.500000	$-0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
0.0001	361	0.0	1.999999	0.500000	–	–
		5.0	1.999999	0.500000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		10.0	1.999999	0.500000	$0.0 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		15.0	2.000000	0.500000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$
		20.0	2.000000	0.500000	$0.5 \times 10^{-6}$	$0.0 \times 10^{-6}$

Tek soliton dalganın TipA, TipB, TipC değerleri ve  $t=0, 5, 10, 15$  ve  $20$  için elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözüm grafikleri Şekil 5.1 - Şekil 5.3' te verilmiştir. Şekil 5.1, Şekil 5.2 ve Şekil 5.3' ten soliton dalganın,  $t$  artarken neredeyse değişmeyen genlikle sağa doğru hareket ettiği açıkça görülmektedir.

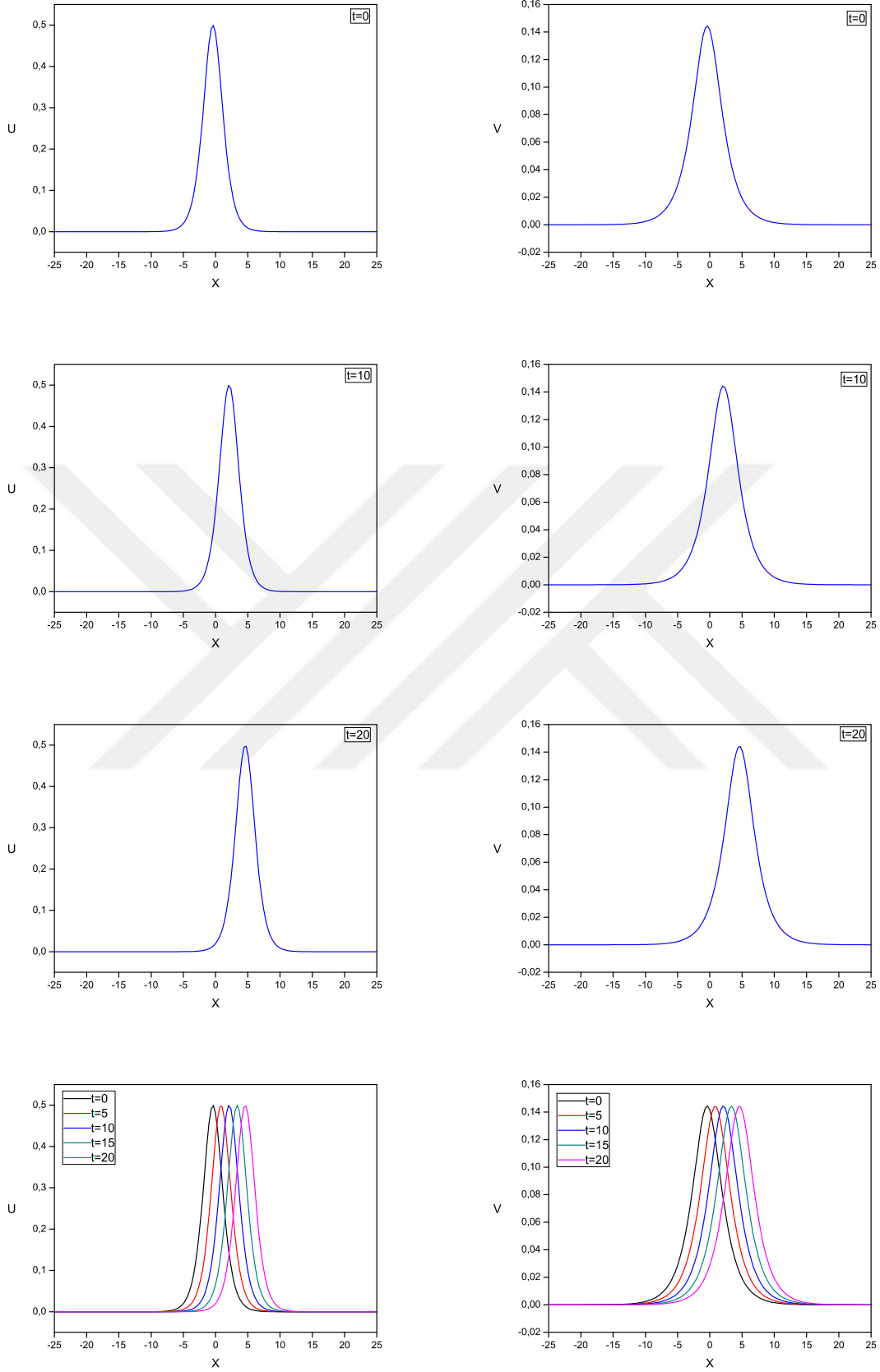


Şekil 5.1 TipA: Tek soliton dalganın  $-25 \leq x \leq 25$  aralığında  $t = 0 - t = 20$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 149$  için elde edilen çözüm grafikleri.



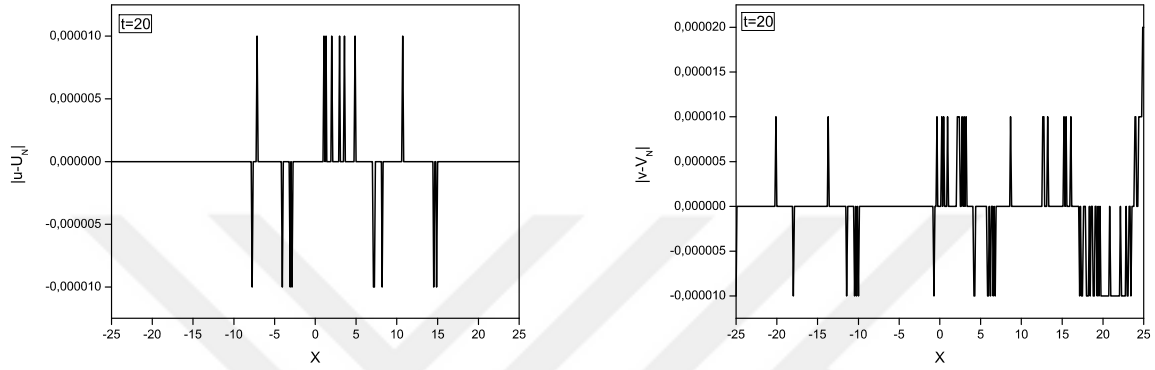
Şekil 5.2 TipB: Tek soliton dalganın  $-25 \leq x \leq 25$  aralığında  $t = 0 - t = 20$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 149$  için elde edilen çözüm grafikleri.



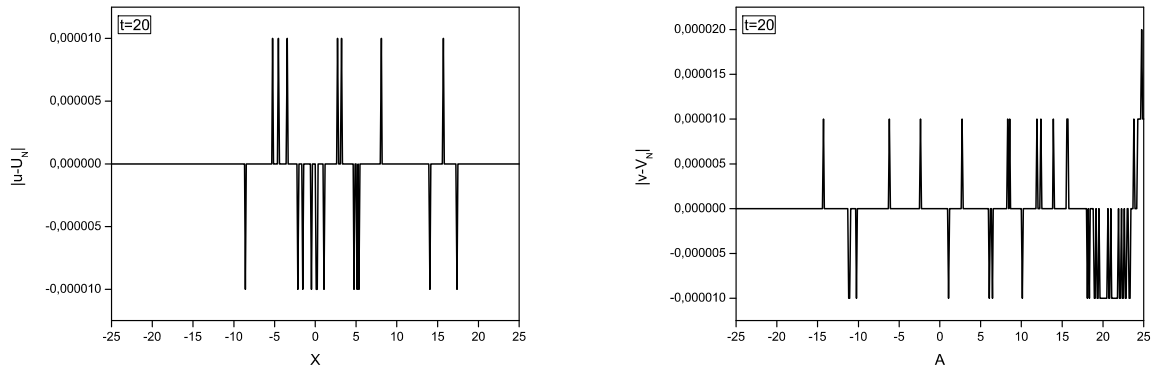


Şekil 5.3 TipC: Tek soliton dalganın  $-25 \leq x \leq 25$  aralığında  $t = 0 - t = 20$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 149$  için elde edilen çözüm grafikleri.

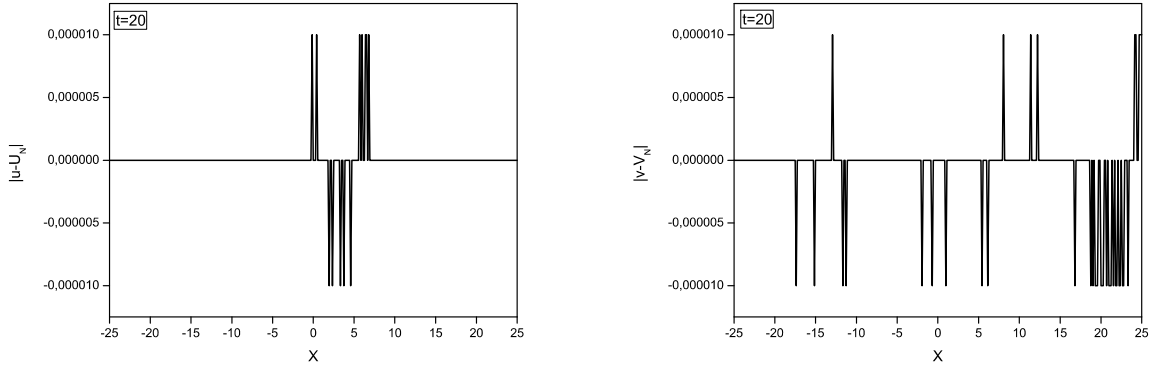
Yukarıdaki TipA, TipB ve TipC için elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözüm grafiklerinden açıkça görülür ki; soliton dalga  $t=0$ ' dan  $t=20$  zamanına çıkarken neredeyse değişmeyen genlikle sağa doğru hareket etmektedir. Ayrıca TipA, TipB ve TipC için tek soliton dalganın  $t=20$  zamanında ki hata normlarının grafikleri Şekil 5.4–Şekil 5.6' da verilmiştir.



Şekil 5.4 TipA: Tek soliton dalganın  $t = 20$  zamanında  $\Delta t = 0.0001$ ,  $N = 421$  için elde edilen hata norm grafikleri.



Şekil 5.5 TipB: Tek soliton dalganın  $t = 20$  zamanında  $\Delta t = 0.0001$ ,  $N = 421$  için elde edilen hata norm grafikleri.



Şekil 5.6 TipC: Tek soliton dalgasının  $t = 20$  zamanında  $\Delta t = 0.0001$ ,  $N = 361$  için elde edilen hata norm grafikleri.

## 5.2 MODEL PROBLEM 2: İKİ DALGANIN GİRİŞİMİ

Bu bölümde Model Problem 2 için modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur metot ile nümerik çözümler elde edildi.

Soliton dalga çiftinin girişimine ait nümerik çözümler,  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 30$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = -3$  değerleri ile  $-10 \leq x \leq 120$  aralığında elde edilmiştir.  $t = 0 - t = 100$  zaman aralığında, farklı  $N$  düğüm noktaları ve  $\Delta t$  zaman adımlarında hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ve bağıl değişimleri Çizelge 5.7 ve Çizelge 5.8'de verilmiştir. Çizelgelerden,  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin değerlerindeki değişimin azaldığı görülür.

Çizelge 5.7' de,  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 801$  ile  $\Delta t = 0.0001$  ve  $N = 1301$  değerleri ile hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ve bağıl değişimleri verilmiştir. Korunum sabitlerinin  $t = 100$ ' deki bağıl değişimleri,  $\Delta t = 0.001$  zaman adımı ve  $N = 801$  düğüm noktası için sırasıyla  $1.2 \times 10^{-5}$  ve  $-3.0 \times 10^{-6}$  olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 5.7 İki soliton dalga girişiminin  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ve bağıl değişimleri

$t$	$\Delta t = 0.001$		$N = 801$	
	$I_1$	$I_2$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$
0.0	6.399998	-3.242665	-	-
10.0	6.400012	-3.242662	$2.1 \times 10^{-6}$	$-0.9 \times 10^{-6}$
20.0	6.400033	-3.242654	$5.4 \times 10^{-6}$	$-3.3 \times 10^{-6}$
30.0	6.400041	-3.242647	$6.7 \times 10^{-6}$	$-5.5 \times 10^{-6}$
40.0	6.399754	-3.242651	$-3.8 \times 10^{-5}$	$-4.3 \times 10^{-6}$
50.0	6.399984	-3.242651	$-2.1 \times 10^{-6}$	$-4.3 \times 10^{-6}$
60.0	6.400202	-3.242563	$3.1 \times 10^{-5}$	$-3.1 \times 10^{-5}$
70.0	6.399948	-3.242635	$-7.8 \times 10^{-6}$	$-9.2 \times 10^{-6}$
80.0	6.400078	-3.242619	$1.2 \times 10^{-5}$	$-1.4 \times 10^{-5}$
90.0	6.400477	-3.242580	$7.4 \times 10^{-5}$	$-2.6 \times 10^{-5}$
100.0	6.400076	-3.242664	$1.2 \times 10^{-5}$	$-0.3 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.8' de verilen  $t = 0$  ve  $t = 100$  zaman aralığındaki  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ve bağıl değişimleri verilmiştir. Korunum sabitlerinin  $t = 100$ ' deki bağıl değişimleri,  $\Delta t = 0.0001$  zaman adımı ve  $N = 1301$  düğüm noktası için sırasıyla  $1.4 \times 10^{-6}$  ve  $-0.3 \times 10^{-6}$  olarak hesaplanmıştır. Çizelge 5.7 ve Çizelge 5.8' den,  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülür.

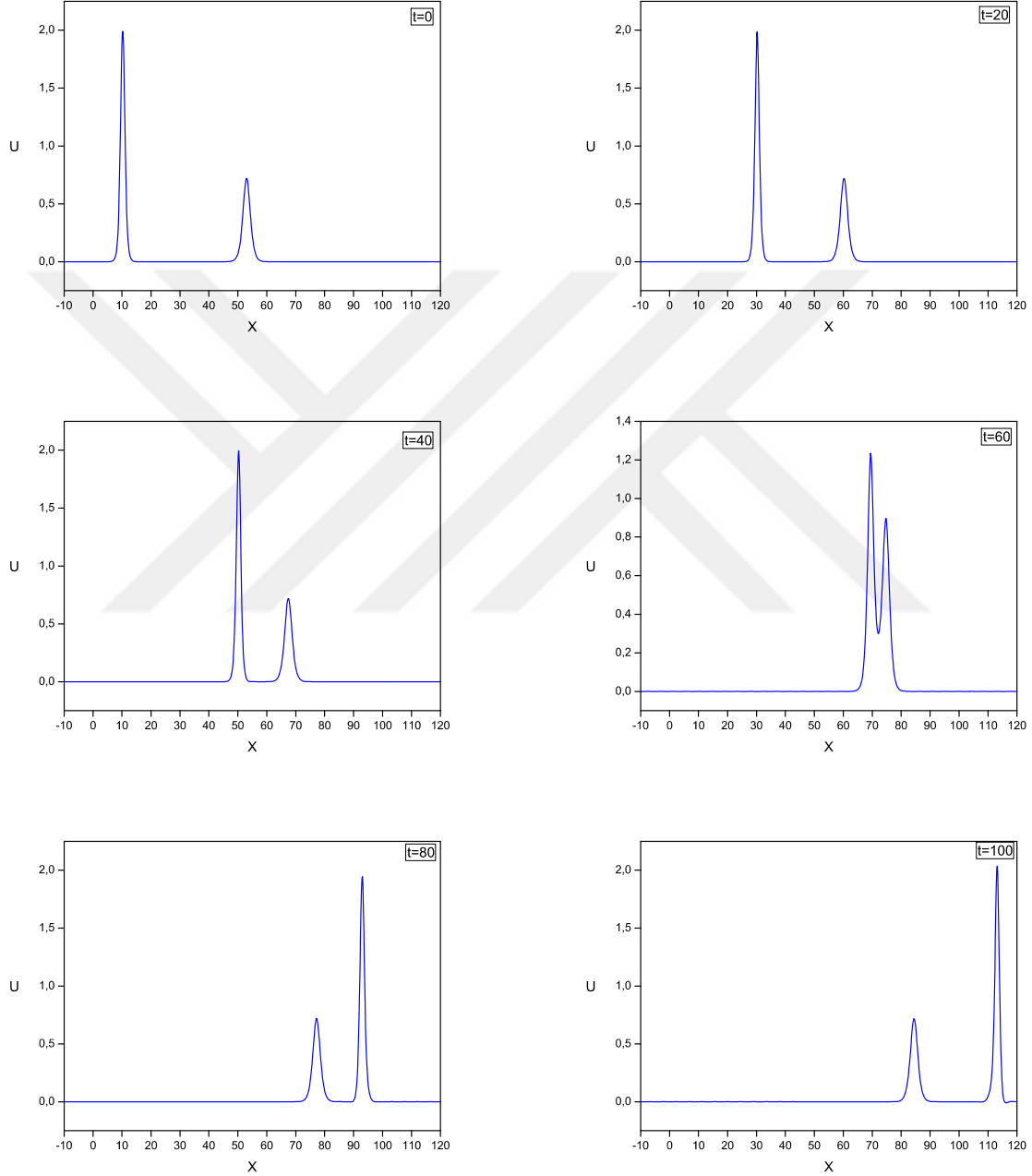
Çizelge 5.8 İki soliton dalga girişiminin  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ve bağıl değişimleri

$t$	$\Delta t = 0.0001$		$N = 1301$	
	$I_1$	$I_2$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$
0.0	6.399994	-3.242667	-	-
10.0	6.400002	-3.242666	$1.2 \times 10^{-6}$	$-0.3 \times 10^{-6}$
20.0	6.399998	-3.242659	$0.6 \times 10^{-6}$	$-2.4 \times 10^{-6}$
30.0	6.400006	-3.242651	$1.8 \times 10^{-6}$	$-4.9 \times 10^{-6}$
40.0	6.399983	-3.242644	$-1.7 \times 10^{-6}$	$-7.0 \times 10^{-6}$
50.0	6.400005	-3.242636	$1.7 \times 10^{-6}$	$-9.5 \times 10^{-6}$
60.0	6.400015	-3.242622	$3.2 \times 10^{-6}$	$-1.3 \times 10^{-5}$
70.0	6.400002	-3.242623	$1.2 \times 10^{-6}$	$-1.3 \times 10^{-5}$
80.0	6.400019	-3.242622	$3.9 \times 10^{-6}$	$-1.3 \times 10^{-5}$
90.0	6.400041	-3.242613	$7.3 \times 10^{-6}$	$-1.6 \times 10^{-5}$
100.0	6.400003	-3.242666	$1.4 \times 10^{-6}$	$-0.3 \times 10^{-6}$

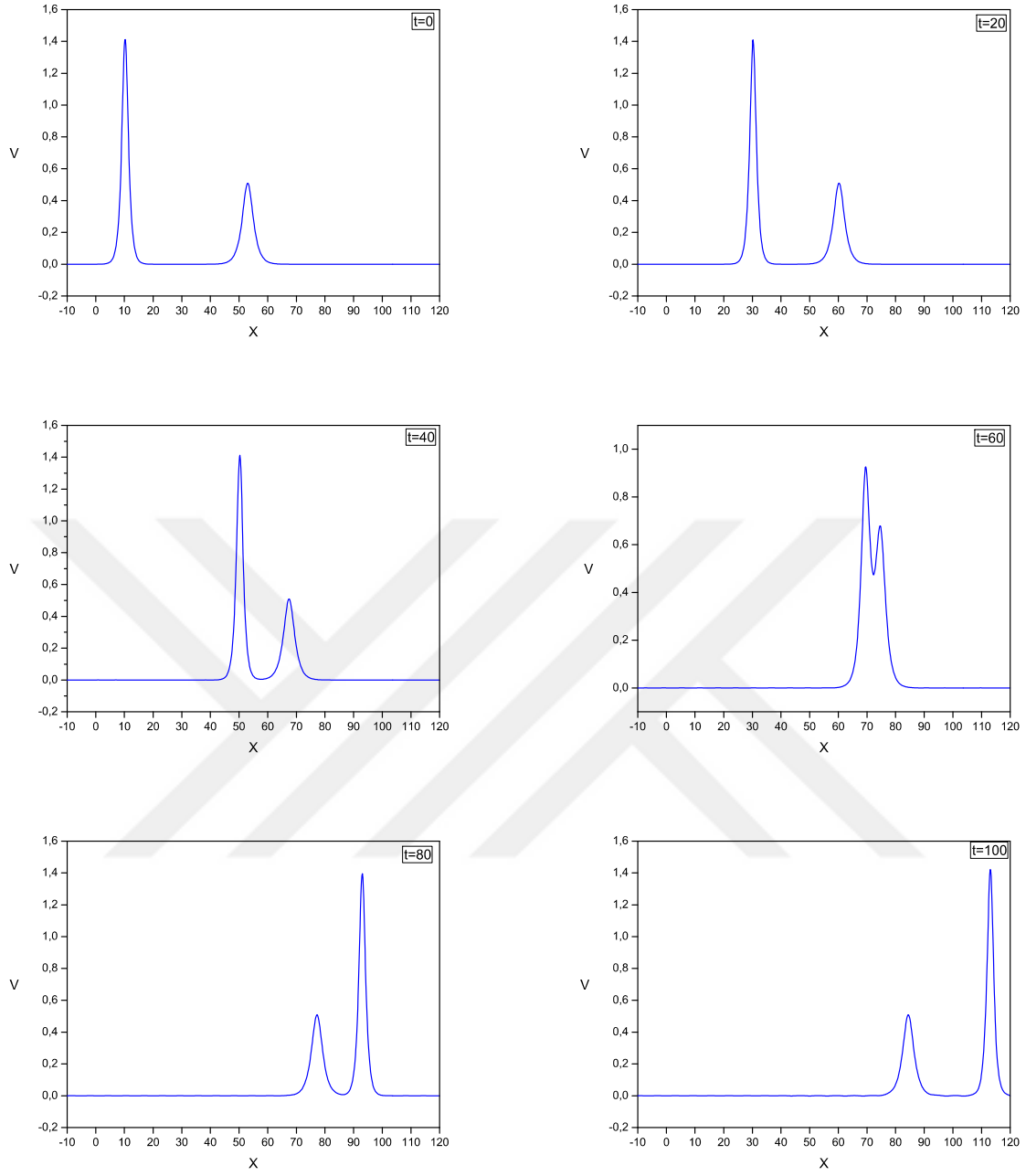
İki soliton dalga girişiminin,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = -3$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 801$  değerleri ve  $t = 0 - t = 100$  için elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 5.7 ve Şekil 5.8' de verilmiştir.

$U_N$  için verilen çözüm grafiği Şekil 5.7' den görülür ki;  $t = 0$  anında büyük genlikli soliton dalga, küçük genlikli soliton dalganın solundadır. Zaman ilerledikçe iki soliton dalga sağa doğru hareket eder. Büyük genlikli soliton dalganın hızı yüksek olduğundan zaman arttıkça küçük genlikli soliton dalgayı yakalar. Yaklaşık  $t = 60$  anında iki soliton dalganın girişi başlar ve büyük soliton dalganın, küçük soliton dalgayı içerdiği görülür.

$t = 80$  anında ise büyük soliton dalganın, küçük soliton dalgadan ayrılarak yer değiştirdiği ve iki soliton dalganın özelliklerini koruyarak ilerlemeye devam ettiği görülür.



Şekil 5.7 İki soliton dalganın  $-10 \leq x \leq 120$  aralığında  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 801$ ,  $t = 0 - 100$ ,  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 30$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = -3$  için  $U_N$  çözüm grafikleri.



Şekil 5.8 İki soliton dalganın  $-10 \leq x \leq 120$  aralığında  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 801$ ,  $t = 0 - 100$ ,  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 30$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = -3$  için  $V_N$  çözüm grafikleri.

$V_N$  için verilen çözüm grafiği Şekil 5.8' den görülür ki;  $t = 0$  anında büyük genlikli soliton dalga, küçük genlikli soliton dalganın solundadır. Zaman ilerledikçe iki soliton dalga sağa doğru hareket eder. Büyük genlikli soliton dalganın hızı yüksek olduğundan dolayı zaman arttıkça küçük genlikli soliton dalgayı yakalar. Yaklaşık  $t = 60$  anında iki soliton dalganın girişimi başlar ve büyük soliton dalganın, küçük soliton dalgayı içerdği görülür.  $t = 80$  anında ise büyük soliton dalganın, küçük soliton dalgadan ayrılarak yer değiştirdiği ve iki soliton dalganın ilerlemeye devam ettiği görülür.

Sonuç olarak  $U_N$  ve  $V_N$  için verilen çözüm grafikleri Şekil 5.7 ve Şekil 5.8; aynı zamanda farklı genliğe sahip iki soliton dalganın girişimini göstermektedir.

### 5.3 MODEL PROBLEM 3: DALGA OLUŞUMU

Bu bölümde Model Problem 3 için modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur metot ile nümerik çözümler elde edildi.

Soliton dalga oluşumuna ait nümerik çözümler,  $-50 \leq x \leq 150$  aralığında  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = -3$  değerleri için elde edilmiştir. Farklı  $N$  düğüm noktaları ve  $\Delta t$  zaman adımlarında hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin  $t=0$ –  $t=50$  zaman aralığındaki karşılaştırılması ve korunum sabitlerinin bağıl değişimleri Çizelge 5.9' da verilmiştir.

Çizelge 5.9 Soliton dalga oluşumunun  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ve bağıl değişimleri

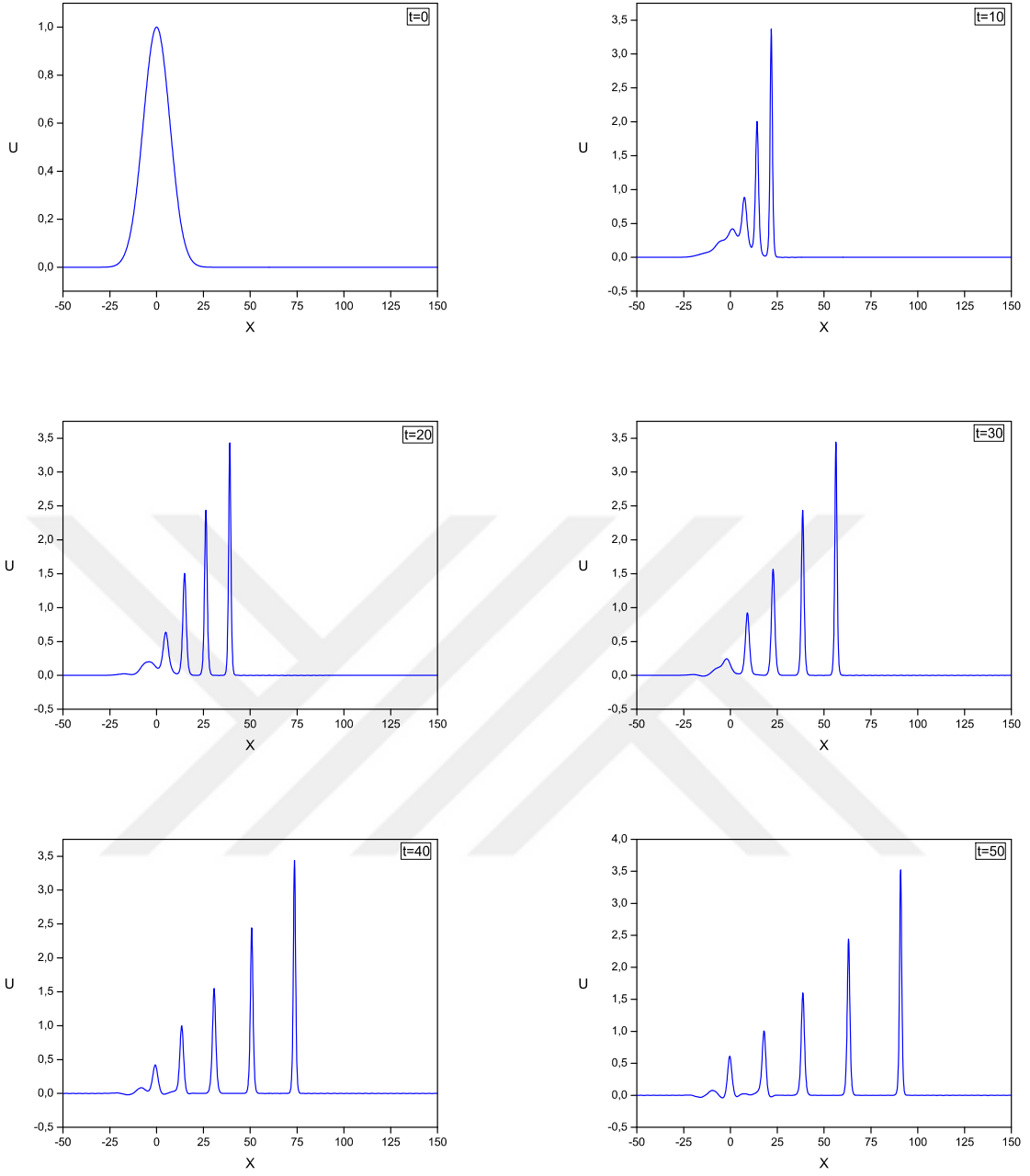
$\Delta t$	$N$	$t$	$I_1$	$I_2$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$
0.001	1271	0.0	17.724540	-12.533140	–	–
		10.0	17.724550	-12.533550	$0.5 \times 10^{-6}$	$3.2 \times 10^{-5}$
		20.0	17.724540	-12.533580	$0.0 \times 10^{-6}$	$3.5 \times 10^{-5}$
		30.0	17.724770	-12.533480	$1.2 \times 10^{-5}$	$2.7 \times 10^{-5}$
		40.0	17.726600	-12.533310	$1.1 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-5}$
		50.0	17.725560	-12.533080	$5.7 \times 10^{-5}$	$-4.7 \times 10^{-6}$
0.0001	1751	0.0	17.724520	-12.533140	–	–
		10.0	17.724540	-12.533260	$1.1 \times 10^{-6}$	$9.5 \times 10^{-6}$
		20.0	17.724540	-12.533300	$1.1 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-5}$
		30.0	17.724580	-12.533310	$3.3 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-5}$
		40.0	17.724730	-12.533290	$1.1 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-5}$
		50.0	17.724520	-12.533160	$0.0 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.9' da,  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 1271$  ile  $\Delta t = 0.0001$  ve  $N = 1751$  değerleri ile hesaplanan  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin karşılaştırılması ve  $t = 0$  ve  $t = 50$  zaman aralığındaki  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin bağıl değişimleri verilmiştir. Korunum sabitlerinin bağıl değişimleri,  $\Delta t = 0.001$  zaman adımı ve  $N = 1271$  düğüm noktası için sırasıyla  $5.7 \times 10^{-5}$  ve  $-4.7 \times 10^{-6}$ ;  $\Delta t = 0.0001$  zaman adımı ve  $N = 1751$  düğüm noktası için sırasıyla  $0.0 \times 10^{-6}$  ve  $1.5 \times 10^{-6}$  olarak hesaplanmıştır. Bu sonuçlardan;  $\Delta t$  zaman adımı küçüldükçe  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerindeki değişimin azaldığı açıkça görülür.

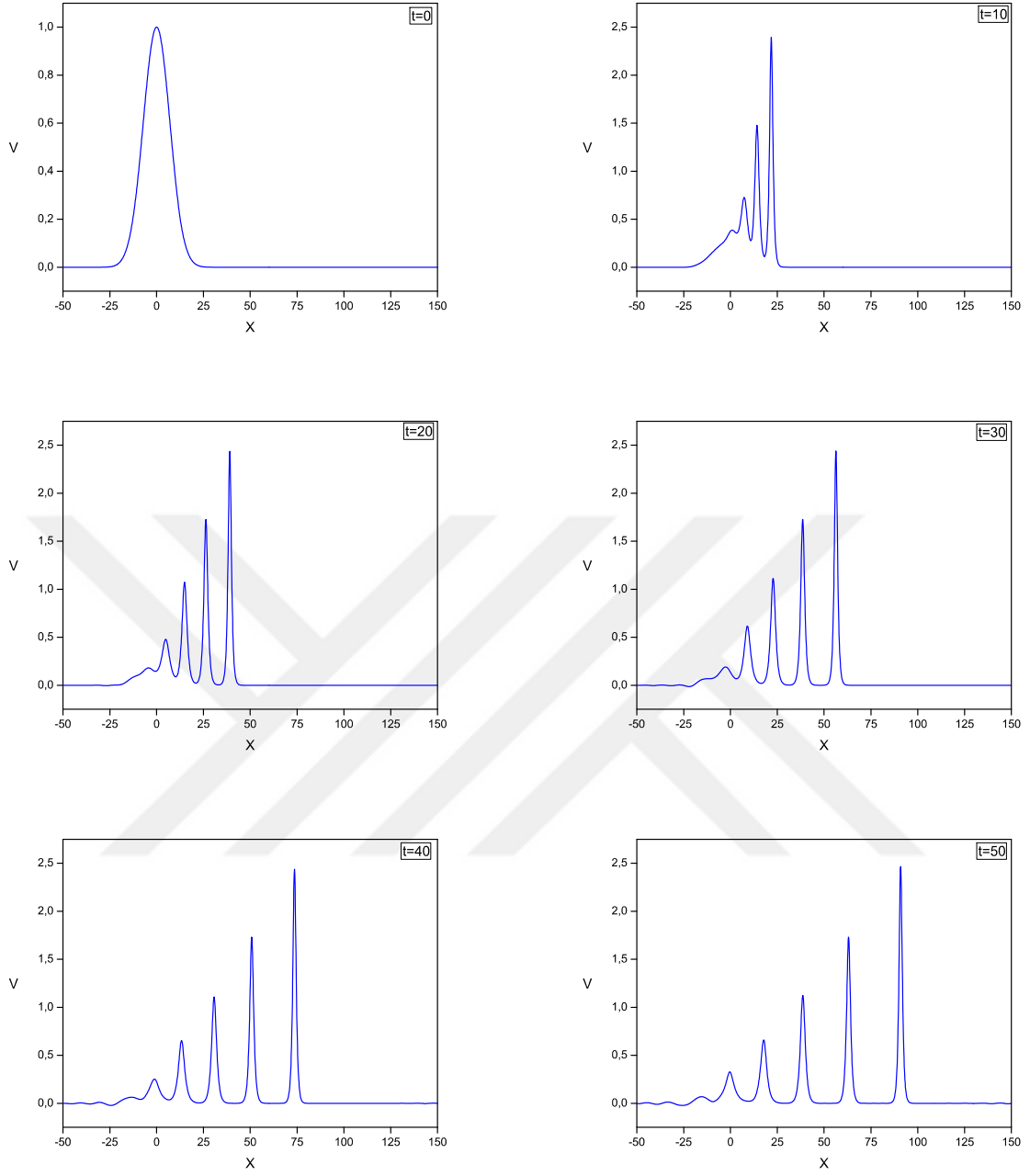
Soliton dalga oluşumunun,  $t=0$  dan  $t=50$ ' ye,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = -3$ ,  $\Delta_t = 0.001$ ,  $N = 1271$  değerleri için elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 5.9 ve Şekil 5.10' da verilmiştir.

$U_N$  için verilen çözüm grafiği Şekil 5.9'dan görülür ki;  $t = 0$  anında tek bir soliton dalga bulunmaktadır. Zaman ilerledikçe, başlangıçtaki tek soliton dalga, geride dalga oluşturarak sağa doğru hareket etmektedir.  $t = 50$  anında ise tek soliton dalganın, farklı genliklere sahip 5 tane yeni dalga oluşturarak sağa doğru ilerlemeye devam ettiği görülür.





Şekil 5.9 Soliton dalga oluşumunun,  $-50 \leq x \leq 150$  aralığında  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 1271$ ,  $t = 0 - 50$ ,  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = -3$  için  $U_N$  çözüm grafikleri.



Şekil 5.10 Soliton dalga oluşumunun,  $-50 \leq x \leq 150$  aralığında  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 1271$ ,  $t = 0 - 50$ ,  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = -3$  için  $V_N$  çözüm grafikleri.

$V_N$  için verilen çözüm grafiği Şekil 5.10' dan görülür ki;  $t = 0$  anında tek bir soliton dalga bulunmaktadır. Zaman ilerledikçe başlangıçtaki tek soliton dalga, yeni dalgalar oluşturarak sağa doğru hareket etmektedir.  $t = 50$  anında ise tek soliton dalganın, farklı genliklere sahip beş yeni dalga oluşturarak sağa doğru ilerlemeye devam ettiği görülür.

Çizelge 5.10 Soliton dalga oluşumunun  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 1271$  için konum ve genlikleri

	Konum( $x$ )	Genlik( $U_N$ )	Konum( $x$ )	Genlik( $V_N$ )
Birinci Dalga	90.94	3.52052	90.94	2.46561
İkinci Dalga	63.07	2.44374	63.07	1.73104
Üçüncü Dalga	38.66	1.59937	38.66	1.12490
Dördüncü Dalga	18.03	1.00496	18.03	0.65972
Beşinci Dalga	-0.39	0.61228	-0.39	0.32870

Soliton dalga oluşumunun,  $t= 50$  zamanında oluşturduğu ardışık beş dalganın konumları ve genlikleri Çizelge 5.10' da verilmiştir.



## BÖLÜM 6

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde modifiye edilmiş kübik B-spline Diferansiyel Kuadratur Metodu (DKM) ile Korteweg-de Vries denklem çiftinin (coupled KdV) nümerik çözümleri elde edildi. Modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratur metot (MKB-DKM), farklı başlangıç şartları ile üç model probleme uygulandı. Farklı  $\Delta t$  zaman adımları ve  $N$  düğüm noktaları kullanılarak nümerik çözümler elde edildi. Yöntemin performansı ve doğruluğu;  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile en düşük iki korunum sabiti  $I_1$  ve  $I_2$  hesaplanarak çizelgeler halinde sunuldu. Ayrıca  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitlerinin bağıl değişimleri de hesaplanarak çizelgeler halinde verildi. Üç model problemin MKB-DKM ile elde edilen nümerik çözümleri, farklı  $t$  zamanlarında dalganın hareketini gösteren grafiklerle verildi. Elde edilen sonuçlar ile coupled KdV denkleminin nümerik çözümlerini yüksek doğrulukta sağlamak için MKB-DKM' nin kullanılabileceği söylenebilir.

Sonuç olarak MKB-DKM' nin başka lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılabileceği söylenebilir.



## KAYNAKLAR

- [1] **Reddy J N** (2004) An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. *Oxford University Press Inc.*, New York.
- [2] **Korteweg D J and de Vries G** (1895) On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a new type of Long Stationary Waves. *Philos. Mag.*, 39: 422-443.
- [3] **Hirota R and Satsuma J** (1981) Soliton solution of the coupled KdV system. *Phys. Lett. A.*, 85: 407-408.
- [4] **Bellman R, Kashef B and Casti J** (1972) Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear differential equations. *Journal of Computational Physics*, 40-52.
- [5] **Bellman R, Kashef B, Lee E S and Vasudevan R** (1976) Differential Quadrature and Splines. *Computers and Mathematics with Applications*, 371-376.
- [6] **Bonzani I** (1997) Solution of non-linear evolution problems by parallelized collocation-interpolation methods. *Computers & Mathematics and Applications*, 34:71-79.
- [7] **Korkmaz A and Dağ I** (2011) Shock wave simulations using Sinc Differential Quadrature Method. *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, 28:654-674.
- [8] **Cheng J, Wang B and Du S** (2005) A theoretical analysis of piezoelectric/composite laminate with larger-amplitude deflection effect, Part II: Hermite differential quadrature method and application. *International Journal of Solids and Structures*, 42: 6181-6201.
- [9] **Quan J R and Chang C T** (1989) New sightings in involving distributed system equations by the quadrature methods-I. *Comput. Chem. Eng.*, 13: 779-788.

- [10] **Quan J R and Chang C T** (1989) New sightings in involving distributed system equations by the quadrature methods-II. *Comput. Chem. Eng.*, 13: 1017-1024.
- [11] **Korkmaz A** (2010) Numerical algorithms for solutions of Korteweg-de Vries equation. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 26: 1504-1521.
- [12] **Shu C and Wu Y L** (2007) Integrated radial basis functions-based differential quadrature method ana its performance. *Int. J. Numer. Math. Fluids*, 53: 969-984.
- [13] **O'Mahoney D C** (2003) A Differential Quadrature solution of the two-dimensional inverse heat conduction problem. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 30: 1061-1070
- [14] **Striz A G, Wang X and Bert C W** (1995), Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111: 85-94.
- [15] **Zhong H** (2004) Spline-based differential quadrature for fourth order equations and its application to Kirchhoff plates. *Applied Mathematical Modelling*, 28: 353-366.
- [16] **Korkmaz A and Dağ I** (2012) Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 22: 1021-1036.
- [17] **Korkmaz A and Dağ I** (2013) Numerical Simulations of Boundary-Forced RLW Equation with Cubic B-Spline-based Differential Quadrature Methods. *Arab J Sci Eng.*, 38: 1151-1160.
- [18] **Korkmaz A and Dağ I** (2013) Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers' equation. *Engineering Computations*, 3: 320-344.
- [19] **Korkmaz A and Dağ I** (2016) Quartic and quintic B-spline methods for advection-diffusion equation. *Appl. Math. Comput.*, 274: 208-219.
- [20] **Karakoç S B G, Başhan A and Geyikli T** (2014) Two different methods for numerical solution of the modified Burgers' equation. *The Scientific World Journal*, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/780269>.



- [21] **Başhan A** (2015) Numerical solutions of some partial differential equations with B-spline differential quadrature method. *PhD*, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye.
- [22] **Başhan A, Karakoç S B G and Geyikli T** (2015) Approximation of the KdVB equation by the quintic B-spline differential quadrature method. *Kuwait J. Sci.*, 42: 67-92.
- [23] **Başhan A, Karakoç S B G and Geyikli T** (2015) B-spline Differential Quadrature Method for the Modified Burgers' Equation. *CUJSE*, 12: 001-013.
- [24] **Başhan A, Uçar Y, Yağmurlu N M and Esen A** (2016) Numerical solution of the complex modified Korteweg-de Vries equation by DQM. *Journal of Physics*, 766: 1. doi:10.1088/1742-6596/766/1/012028.
- [25] **Başhan A, Uçar Y, Yağmurlu N M and Esen A** (2018) A new perspective for quintic B-spline based Crank-Nicolson-differential quadrature method algorithm for numerical solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Eur. Phys. J. Plus*, 133: 12.
- [26] **Başhan A** (2019) A novel approach via mixed Crank–Nicolson scheme and differential quadrature method for numerical solutions of solitons of mKdV equation. *Pramana – J. Phys.*, 92:84.
- [27] **Başhan A** (2019) Quartic B-spline Differential Quadrature Method for Solving the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 12(1): 56-62.
- [28] **Başhan A, Yağmurlu N M, Uçar Y and Esen A** (2017) An effective approach to numerical soliton solutions for the Schrödinger equation via modified cubic B-spline differential quadrature method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 100: 45-56.
- [29] **Başhan A** (2018) An effective application of differential quadrature method based on modified cubic B-splines to numerical solutions of the KdV equation. *Turk J. Math.*, 42: 373-394.

- [30] **Başhan A, Yağmurlu N M, Uçar Y and Esen A** (2018) A new perspective for the numerical solutions of the cmKdV equation via modified cubic B-spline differential quadrature method, *International Journal of Modern Physics C*, 29: 17.
- [31] **Başhan A, Yağmurlu N M, Uçar Y and Esen A** (2018) Numerical solutions for the fourth order extended Fisher-Kolmogorov equation with high accuracy by differential quadrature method. *Sigma J Eng & Nat Sci*, 9(3): 273-284.
- [32] **Başhan A** (2019) An Efficient Approximation to Numerical Solutions for the Kawahara Equation Via Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature Method. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 16:14.
- [33] **Uçar Y, Yağmurlu N M and Başhan A** (2019) Numerical Solutions and Stability Analysis Of Modified Burgers Equation Via Modified Cubic B-spline Differential Quadrature Methods. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 37 (1): 129-142.
- [34] **Arora G and Singh B K** (2013) Numerical solution of Burgers equation with modified cubic B-spline differential quadrature method, *Appl. Math. Comput.*, 224: 166–177.
- [35] **Mittal R C and Bhatia R** (2014) A numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation by modified B-spline differential quadrature method. *Appl. Math. Comput.*, 244: 976-997.
- [36] **Mittal R C and Dahiya S** (2015) Numerical simulation on hyperbolic diffusion equations using modified cubic B-spline differential quadrature methods. *Computers & Mathematics with Applications*, 70: 737-749.
- [37] **Mittal R C and Dahiya S** (2015) Numerical Solutions of Differential Equations Using Modified B-spline Differential Quadrature Method, *Mathematical Analysis and its Applications*, 143: 509-523.

- [38] **Mittal R C and Rohila R** (2016) Numerical simulation of reaction-diffusion systems by modified cubic B-spline differential quadrature method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 92: 9-19.
- [39] **Jiwari R** (2015) Lagrange interpolation and modified cubic B-spline differential quadrature methods for solving hyperbolic partial differential equations with Dirichlet and Neumann boundary conditions. *Computer Physics Communications*, 193: 55-65.
- [40] **Shukla H S, Tamsir M, Srivastava V K and Kumar J** (2014) Numerical solution of two dimensional coupled viscous Burger equation using modified cubic B-spline differential quadrature method. *AIP Advances* 4, <https://doi.org/10.1063/1.4902507>.
- [41] **Shukla H S, Tamsir M and Srivastava V K** (2015) Numerical simulation of two dimensional sine-Gordon solitons using modified cubic B-spline differential quadrature method. *AIP Advances* 5, 5: 1. <https://doi.org/10.1063/1.4906256>
- [42] **Shukla H S, Tamsir M, Srivastava V K and Rashidi M M** (2016) Modified cubic B-spline differential quadrature method for numerical solution of three-dimensional coupled viscous Burger equation. *Modern Physics Letters B*, 30: 11. <https://doi.org/10.1142/S0217984916501104>.
- [43] **Tamsir M, Srivastava V K and R Jiwari** (2016) An algorithm based on exponential modified cubic B-spline differential quadrature method for nonlinear Burgers' equation. *Appl. Math. Comput*, 290: 111-124.
- [44] **Tamsir M, Srivastava V K and Mishra P D** (2016) Numerical simulation of three dimensional advection-diffusion equations by using modified cubic B-spline differential quadrature method. *Asia Pacific Journal of Engineering Science and Technology*, 7: 1-13.
- [45] **Crawford F** (1968) Waves: Berkeley Physics Course. *Mcgraw-Hill College*, 3: 600.
- [46] **Falkovic G** (2007) Soliton: A brief history of. <http://www.weizmann.ac.il/home/fnfal/soliton.pdf>.

- [47] **Wadati M** (2001) Introduction to solitons. *Pramana Journal of Physics*, 57: 841-847.
- [48] **Geyikli T** (1994) Finite element studies of the modified KdV equation. *Ph. D. Thesis*, University College of North Wales, Bangor, (U.K.).
- [49] **Schoenberg I J** (1946) Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.* 4: 45-99.
- [50] **Ahlberg J H, Nilson E N and Walsh J L** (1967) The Theory of Splines and Their Applications. *Academic Press.*, New York.
- [51] **Cheney W and Kincaid D** (2004, 2008) Numerical Mathematics and Computing. (*Sixth Edition*), Thomson.
- [52] **Schumaker L L** (1981) Spline Function: Basic Theory. *John Wiley and Sons*, New York.
- [53] **Dağ I** (1994) Studies of B-spline Finite Elements. *Ph. D. Thesis*, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd (U.K.).
- [54] **Prenter P M** (1975) Splines and variational methods. *Wiley, New York, NY*.
- [55] **Miles J W** (1980) Elements of Soliton Theory. *G. L. Lamb, Jr.*
- [56] **Debnath L** (2011) Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers. *Springer Science and Business Media*.
- [57] **Russel J S** (1844) "Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science". *London: BAAS*.
- [58] **Zabusky N J and Kruskal M D** (1965) Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett.*, 15: 240-243.
- [59] **Chaohao G** (1995) Soliton theory and its applications. *Springer*, 403.

- [60] **Ali A H A** (1989) Finite Element Studies of Korteweg de Vries Equation, *Ph. D. Thesis*, University College of North Wales, Bangor, UK, 1-2.
- [61] **Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D and Miura R M** (1974) Korteweg-de Vries equation and generalizations VI. Methods for exact solution. *Commun., Pure Appl., Math.*, 27: 97–133.
- [62] **Lax P D** (1968) “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”. *Commun., Pure Appl., Math.*, 21, 467– 490.
- [63] **Saka B** (2009) Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40: 2181-2190.
- [64] **Vliegenthart A C** (1971) On finite-difference methods for The Korteweg-de Vries equation. *J. Eng. Math.*, 5: 137- 155
- [65] **Goda K** (1975) On stability of some finite difference schemes for the Korteweg– de Vries equation. *Phys. Soc. Jpn.*, 39: 229- 236.
- [66] **Greig I S and Morris J L** (1976), A Hopscotch method for the Korteweg– de Vries equation. *J. Comput. Phys.*, 20: 64- 80.
- [67] **Alexander M E and Morris J L** (1979) Galerkin methods for some model equations for nonlinear dispersive wave. *J. Comput. Phys.*, 30: 428- 451.
- [68] **Gardner L R T and Ali A H A** (1988) A numerical solutions for the Korteweg-de Vries equation using Galerkins method with Hermite polynomial shape functions, in: Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation, *İstanbul*, 81–93.
- [69] **Dağ I and Dereli Y** (2008), Numerical solutions of KdV equation using radial basis functions. *Applied Mathematical Modelling*, 32: 535-546.
- [70] **Kaya D** (2003) An explicit and numerical solutions of some fifth-order KdV equation by decomposition method. *Applied Mathematical and Computation*, 144: 353-363.

- [71] **Hirota R and Satsuma J** (1981) Soliton solution of the coupled KdV system. *Phys.Lett. A*, 85:407-408.
- [72] **Satsuma J and Hirota R** (1982) A coupled KdV equations one case of the four-reduction of the KP hierarchy. *Journal of the Physical Society of Japan*, 5110: 3390-3397.
- [73] **Hirota R** (1973) Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equations. *J. Math. Phys.* 14: 805-809.
- [74] **Hirota R and Satsuma J** (1981) Soliton solution of the coupled KdV system. *Phys.Lett. A.*, 85: 407-408.
- [75] **Tam H W, Ma W, Hu X B and Wang D** (2000) The Hirota-Satsuma coupled KdV equation and coupled Ito system Revisited. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 69:45-52.
- [76] **Fan E and Zhang H** (1998) New exact solutions to a system of coupled KdV equations. *Phys. Lett. A*, 245: 389-392.
- [77] **Tian B and Gao Y T** (1995) Exact solutions for the Bogoyavlenskii coupled KdV equations. *Phys. Lett. A.*, 208: 193-196.
- [78] **Bo Cao D, Ren Yan J and Zhang Y** (2002) Exact solutions for a new coupled MKdV equations and a coupled KdV equations. *Phys. Lett. A.*, 297: 68-74.
- [79] **Karasu (Kalkanlı) A and Kılıç T** (2004) Integrability of a Nonautonomous Coupled KdV System. *IJMPC*, 15:5: 609-617.
- [80] **Zhou Y, Wang M and Wang Y** (2003) Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients. *Phys. Lett. A.*, 308: 31-36.
- [81] **Roy P K** (1998) On coupled KdV equations. *Phys. Lett. A.*, 249: 55-58.
- [82] **Qian S and Tian L** (2007) Nonlocal Lie-Bäcklund symmetries of the coupled KdV system. *Phys. Lett. A.*, 364: 235-238.

- [83] **Zhu S** (1999), A Difference Scheme for the Coupled KdV Equation. *Comm. Non-linear Sci. Numer. Simulat.*, 4: 60-63.
- [84] **Inan I E** (2007) Exact solutions for coupled KdV equation and KdV equations. *Phys. Lett. A.*, 371: 90-95.
- [85] **Al-Khaled K, Al-Refai M and Alawneh A** (2008) Traveling wave solutions using the variational method and the tanh method for nonlinear coupled equations. *Appl. Math. Comput.*, 202: 233-242.
- [86] **Ma Z and Zhu J** (2007) Jacobian elliptic function expansion solutions for the Wick-type stochastic coupled KdV equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 32: 1679-1685.
- [87] **Assas L M B** (2008) Variational iteration method for solving coupled-KdV equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38: 1225-1228.
- [88] **Khater A H, Temsah R S and Callebaut D K** (2008) Numerical solutions for some coupled nonlinear evolution equations by using spectral collocation method. *Mathematical and Computer Modelling*, 48: 1237–1253.
- [89] **Fan E** (2002) Traveling Wave Solutions for Nonlinear Equations Using Symbolic Computation. *Comput. Math. Appl.*, 43: 671-680.
- [90] **Kaya D and Inan I E** (2004) Exact and numerical traveling wave solutions for nonlinear coupled equations using symbolic computation. *Appl. Math. Comput.*, 151: 775-787.
- [91] **Halim A A, Kshevetskii S P and Leble S B** (2003) On numerical integration of coupled Korteweg-de Vries System. *Comput. Math. Appl.*, 45: 581-591.
- [92] **Halim A A and Leble S B** (2004) Analytical and numerical solution of coupled KdV-MKdV system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 19: 99-108.
- [93] **Alvarez-Samaniego B and Carvajal X** (2008) On the local well-posedness for some systems of coupled KdV equations. *Nonlinear Anal.*, 69: 692-715.

- [94] **Rady A S, Osman E S and Khalfallah M** (2009) Multi soliton solution for the system of Coupled Korteweg-de Vries equations. *Appl. Math. Comput.*, 210: 177-181.
- [95] **Ismail M S** (2008) Numerical Solution of a Coupled Korteweg-de Vries Equations by Collocation Method. *Numer. Meth. Part. Diff. Equ.*, 25: 275-291.
- [96] **Siraj-ul-Islam, Haq S and Uddin M** (2009) A meshfree interpolation method for the numerical solution of the coupled nonlinear partial differential equations. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 33: 399-409.
- [97] **Ismail M S and Ashi H** (2014) A Numerical Solution for Hirota-Satsuma Coupled KdV Equation. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/819367>
- [98] **Rashid A and Ismail A I B M** (2011) Error Estimates of Spectral Collocation Method for the Coupled Korteweg-de Vries Equations. *Journal of Applied Functional Analysis*, 6: 17-25.
- [99] **Biswas A and Ismail M S** (2010) 1-Soliton solution of the coupled KdV equation and Gear–Grimshaw model. *Applied Mathematics and Computation*, 216: 3662-3670.
- [100] **Kutluay S and Uçar Y** (2012) A Quadratic B-Spline Galerkin Approach for Solving a Coupled KdV Equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, 18:1:103-121, DOI:10.3846/13926292.2013.760011
- [101] **Atangana A and Secer A** (2013) The Time-Fractional Coupled-Korteweg-de-Vries Equations. *Abstract and Applied Analysis*, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/947986>.
- [102] **Seadawy A R and El-Rashidy K** (2013) Traveling wave solutions for some coupled nonlinear evolution equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 57: 1371-1379.



- [103] **Raslan K R, El-Danaf T S and Ali K K** (2016) Collocation method with quintic B-spline method for solving Hirota-Satsuma coupled KdV equation. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 5: 123-131.
- [104] **Bhrawy A H, Doha E H, Ezz-Eldien S S and Abdelkawy M A** (2016) A numerical technique based on the shifted Legendre polynomials for solving the time-fractional coupled KdV equations, *Calcolo*, 53: 1-17.
- [105] **Esfahani A and Levandosky S** (2018) Solitary waves of a coupled KdV system with a weak rotation. *Journal of Differential Equations*, 265: 4835-4872.
- [106] **Wang Y and Wang H** (2018) A coupled KdV system: Consistent tanh expansion, soliton-cnoidal wave solutions and nonlocal symmetries. *Chinese Journal of Physics*, 56: 598-604.
- [107] **Oruç O, Bulut F and Esen A** (2017) A Numerical Treatment Based on Haar Wavelets for Coupled KdV Equation. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 7: 195-204.
- [108] **Başhan A** (2019) A mixed algorithm for numerical computation of soliton solutions of the coupled KdV equation: Finite difference method and differential quadrature method. *Applied Mathematics and Computation*, 360: 42-57.
- [109] **Hussain M, Haq S and Ghafoor A** (2019) Meshless spectral method for solution of time-fractional coupled KdV equations. *Applied Mathematics and Computation*, 341: 321-334.
- [110] **Shu C** (2000) *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. UK: Springer-Verlag, London.
- [111] **Mittal R C and Jain R K** (2012) Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic b-splines collocation method. *Appl Math Comp*, 218: 7839-55. doi: 10.1088/1742-6596/766/1/012028.
- [112] **Spiteri J R and Ruuth S J** (2002) A new class of optimal high-order strong stability-preserving time-stepping schemes. *Siam J Numer Anal*, 40: 469-491.



## ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Bursa'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Bursa'da, lisans eğitimimi ise Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde tamamladım. Halen kamuda matematik öğretmenliği yapmaktayım. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans yapmaktayım.

### **ADRES BİLGİLERİ**

Adres : Panayır mah. Pelit sok. No:7 Osmangazi/BURSA

Tel : 05365563830

E-Posta : basak2416@gmail.com