ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAKAN BEKLEVİÇ

TEMMUZ 2019

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hakan BEKLEVİÇ**

**DANIŞMAN: Prof. Dr. Yüksel SOYKAN**

**ZONGULDAK**

**Temmuz 2019**

**KABUL:**

Hakan BEKLEVİÇ tarafından hazırlanan "Matrislerin Kuvvetleri Yardımıyla Fark Denklem Sistemlerinin Çözümü" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 05/07/2019

**Danışman:** Prof. Dr. Yüksel SOYKAN ..........................
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

**Üye:** Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN ..........................
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi Melih GÖCEN ..........................
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

---

**ONAY:**

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. .../.../2019

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."*

Hakan BEKLEVİÇ

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ**

**Hakan BEKLEVİÇ**

**Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yüksel SOYKAN**
**Temmuz 2019, 169 sayfa**

Fark Denklemleri, biyoloji, ekoloji, psikoloji, fizik ve ekonomide sıklıkla kullanılır. Son zamanlarda, Fark denklemlerinin çözümleri de birçok matematikçi tarafından merak edilmiş ve üzerinde çalışılmıştır.

Bu tezde Fark denklemlerinin, matrisler yardımıyla çözümünü inceliyoruz.

Birinci bölümde, gerekli tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, köşegenleştirilebilir 2x2 tipinde matrisleri ve kuvvetlerini ele alacağız.

Üçüncü bölümde, köşegenleştirilebilir 3x3 tipinde matrisleri ve kuvvetlerini inceleyeceğiz.

Dördüncü bölümde, köşegenleştirilemeyen 2x2 tipinde matrisleri ve kuvvetlerini araştıracağız.

## ÖZET (devam ediyor)

Beşinci bölümde, köşegenleştirilemeyen 3x3 tipinde matrisleri ve kuvvetlerini inceleyeceğiz.

Altıncı bölümde, köşegenleştirilebilir 2x2 tipinde matrislerin kuvvetleri yardımıyla Fark Denklem Sistemlerinin çözümünü vereceğiz.

Yedinci bölümde, köşegenleştirilebilir 3x3 tipinde matrislerin kuvvetleri yardımıyla Fark Denklem Sistemlerinin çözümünü inceleyeceğiz.

Sekizinci bölümde, köşegenleştirilemeyen 2x2 tipinde matrislerin kuvvetleri yardımıyla Fark Denklem Sistemlerinin çözümünü ele alacağız.

Dokuzuncu bölümde, köşegenleştirilemeyen 3x3 tipinde matrislerin kuvvetleri yardımıyla Fark Denklem Sistemlerinin çözümünü elde edeceğiz.



**Anahtar Kelimeler:** Fark Denklemleri, Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri

**Bilim Kodu:** 403.06.01

# ABSTRACT

**M. Sc. Thesis**

**THE SOLUTION OF DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS WITH THE HELP OF THE POWER OF MATRICES**



**Hakan BEKLEVİÇ**

**Zonguldak Bülent Ecevit University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Prof. Dr. Yüksel SOYKAN**


**July 2019, 169 pages**



Difference equations are often used in biology, ecology, psychology, physics, and economics. The solutions of difference equations have also been wondered by most of the mathematicians recently and they have been worked on.

In this thesis, we analyse the solution of difference equations with the help of matrices.

In chapter one, the necessary definitions and theorems are given.

In chapter two, we consider diagonalisable matrices of type 2x2 and their powers.

In chapter three, we investigate diagonalisable matrices of type 3x3 and their powers.

In chapter four, we present non-diagonalisable matrices of type 2x2 and their powers.

In chapter five, we investigate non-diagonalisable matrices of type 3x3 and their powers.

**ABSTRACT (continued)**

In chapter six, we give the solutions of difference equation systems with the help of the powers of diagonalisable matrices of type 2x2.

In chapter seven, we investigate the solutions of difference equation systems with the help of the powers of diagonalisable matrices of type 3x3.

In chapter eight, we consider the solutions of difference equation systems with the help of the powers of non-diagonalisable matrices of type 2x2.

In chapter ninth, we obtain the solutions of difference equation systems with the help of the powers of non-diagonalisable matrices of type 3x3.

**Key words:** Difference equations, the solutions of difference equation systems.

**Science Code:** 403.06.01

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni araştırmacı ruhuna bürüyen, her daim eğiten ve geliştiren, tezimin her aşamasında özveri ve sabırla desteğini esirgemeyen, örnek aldığım ve yolunda ilerlemekten gurur duyduğum, sayın danışmanım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Yüksel SOYKAN' a

Eğitimim sırasında beni yetiştiren, üzerimde emeği geçen, özveri ile bizlere bilgilerini aktaran Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma

Beni bu günlere getiren, beni yetiştiren, aldığım her kararda yanımda olan çok değerli ailem; annem Hatice BEKLEVİÇ, babam Hacı BEKLEVİÇ' e, kardeşlerim Gülsüm BEKLEVİÇ, Muammer BEKLEVİÇ, Yunus BEKLEVİÇ' e, maddi ve manevi her zaman yanımda olan, çok değerli dayılarım Ramazan BEKLEVİÇ, Ali BEKLEVİÇ, Hazret BEKLEVİÇ, Ahmet BEKLEVİÇ' e,

Desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Arzum Çelik BEKLEVİÇ' e, varlıklarından güç aldığım kızlarım, Efsa Zeycen BEKLEVİÇ ve Ekin Nisa BEKLEVİÇ' e

Sonsuz Teşekkürler

**İÇİNDEKİLER**

**İÇİNDEKİLER (devam ediyor)**

**İÇİNDEKİLER (devam ediyor)**

**İÇİNDEKİLER (devam ediyor)**

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

## SİMGELER

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | : Tamsayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}_0$ | : Doğal sayılar kümesi |

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

Bu bölümde tez boyunca gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölümde (Soykan Y., 2017) ve (Soykan Y., Göcen M. ve Gümüş M., 2017) kaynaklarından yararlanılmıştır.

## 1.1 LİNEER CEBİR VE MATRİS TEORİSİ: TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

Bu altkısımda lineer cebir ve özellikle de matris teorisi ile ilgili bilgiler vereceğiz.

Bir $A$ matrisinin transpozunu $A^T$ ile göstereceğiz. $A^T$, $A$ matrisinin bütün satırlarının sütun olarak yazılması ile elde edilen matristir.
$k \times k$ tipinde bir $A$ matrisi için $AB = BA = I$ olacak şekilde $k \times k$ tipinde bir $B$ matrisi varsa $A$ terslenebilirdir (ya da regülerdir) denir ve $A$ nın tersi $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Burada $I$, $k \times k$ tipindeki birim matristir. Terslenemeyen bir kare matrise singüler matris denir. Bir $A$ kare matrisinin determinantını $\det A$ ile ya da $|A|$ ile göstereceğiz.

**Tanım 1.1.1** *$n \geq n_0$ için tanımlı $\phi_1(n), \phi_2(n), ..., \phi_k(n)$ fonksiyonları verilsin. Her*

$n \geq n_0 \geq 0$

*için, $c_1, c_2, ..., c_k$ lar sabit olmak üzere,*

$$c_1\phi_1(n) + c_2\phi_2(n) + ... + c_k\phi_k(n) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_k = 0 \tag{1.1}$$

*gerektirmesi doğru ise $Z = \{\phi_1(n), \phi_2(n), ..., \phi_k(n)\}$ kümesi $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır denir. Aksi takdirde, yani $c_1\phi_1(n) + c_2\phi_2(n) + ... + c_k\phi_k(n) = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_k$ sabitleri var ise, $Z$ kümesi $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımlıdır denir.*

$Z$ kümesinin hangi anlamda kullanıldığını görmek için Uyarı 1.2.9 a bakılabilir. Üstteki tanımda her bir $i = 1, 2, ..., k$ için $\phi_{1i} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{F}$ bir fonksiyon olmak üzere

$\phi_i(n) = (\phi_{1i}(n), \phi_{2i}(n), ..., \phi_{ki}(n))^T,$

$(\phi_i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{F}^k)$, bir sütun vektörü (fonksiyonu) olarak alınabilir ve bu durumda

$\{\phi_1(n), \phi_2(n), ..., \phi_k(n)\}$

kümesi $k \times k$ tipinde bir $A$ kare matrisini verir.
$m \times n$ tipinde bir $A$ matrisi aşağıdaki gibi satır vektörleri ile ya da sütun vektörleri ile gösterilebilir:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

burada $r_i$, $\mathbb{R}^n$ içinde $A$ nın $i-$inci satır vektörüdür ve $\xi_j$, $\mathbb{R}^m$ içinde $A$ nın $j-$ inci sütun vektörüdür.

**Tanım 1.1.2** *$V$ bir vektör uzay olsun ve $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $V$ içindeki vektörlerin bir kümesi olsun. $c_1, c_2, ..., c_n$ skalerler olmak üzere,*

$v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$

*formuna sahip $V$ içindeki bir $v$ vektörüne $v_1, v_2, ..., v_n$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu denir.*

**Teorem 1.1.3** *$v_1, v_2, ..., v_n$ bir $V$ vektör uzayı içinde vektörler olsun. Bu durumda*

$v_1, v_2, ..., v_n$

*nin tüm lineer kombinasyonlarının*

$W = \{c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n : c_i \quad skaler\}$

*kümesi $V$ nin bir alt vektör uzayıdır. $W = sp\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gösterimini kullanacağız.*

**Tanım 1.1.4** *$v_1, v_2, ..., v_n$ bir $V$ vektör uzayı içinde vektörler olsun. $V$ nin*

$sp\{v_1, v_2, ..., v_n\} = \{c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n : c_i \quad skaler\} = W$

*alt vektör uzayına $v_1, v_2, ..., v_n$ nin gerdiği (ürettiği) alt uzay denir ya da $v_1, v_2, ..., v_n$ bir $W$ alt uzayını gerer denir.*

**Örnek 1.1.5 (Sütun uzayı)** *$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ler sütunlar olmak üzere $m \times n$ tipinde bir matris $A = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ olsun. Bu durumda $\xi_i$ ler $\mathbb{R}^m$ içindedir ve $Ax$ matris çarpımı $\xi_i$ sütun vektörlerinin lineer kombinasyonunu temsil eder, burada katsayılar*

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

*nin bileşenleridir; yani*

$Ax = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)(x_1, x_2, ..., x_n)^T = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$

*dir ve $x_j\xi_j = x_j(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{nj})^T$ dir. Buna göre $A$ nın sütun vektörlerinin tüm lineer kombinasyonlarının*

$W = \{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$

*kümesi $\mathbb{R}^m$ nin bir alt vektör uzayıdır ve $A$ nın sütun uzayı olarak adlandırılır. Sonuç olarak $Ax = b$ nin $\mathbb{R}^n$ içinde bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ çözümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul $b$ vektörünün $A$ nın sütun uzayına ait olmasıdır.*

Benzer şekilde satır uzayı da tanımlanır.

**Tanım 1.1.6** *$V$ bir vektör uzay olsun ve $Z = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $V$ içindeki vektörlerin bir kümesi olsun. Eğer $c_1, c_2, ..., c_n$ ler sabit olmak üzere,*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0 \tag{1.2}$$

*gerektirmesi doğru ise yani (1.2) vektör denklemi sadece*

$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

*çözümüne sahip ise $Z$ kümesi lineer bağımsızdır denir. Aksi takdirde; yani*

$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$

*olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri var ise, $Z$ kümesi lineer bağımlıdır denir.*

Lineer bağımsızlık bir kümenin bir özelliği olmasına rağmen bazen "$v_1, v_2, ..., v_n$ vektörleri lineer bağımsızdır" denmesi daha uygundur.

**Tanım 1.1.7** *$V$ bir vektör uzay olsun. $V$ yi geren lineer bağımsız vektörlerin bir kümesine $V$ için bir taban denir.*

O halde $Z = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $V$ içindeki lineer bağımsız vektörlerin bir kümesi olmak üzere $spZ = V$ ise $Z$, $V$ nin bir tabanıdır denir.

**Teorem 1.1.8** *Eğer bir $V$ vektör uzayının bir tabanı $n$ tane vektörden oluşursa, bu durumda $V$ nin diğer tüm tabanları da $n$ tane vektörden oluşur.*

**Tanım 1.1.9** *Bir $V$ vektör uzayının boyutu $V$ nin bir tabanındaki eleman sayısıdır ve $\dim V$ ile gösterilir; eğer $V$ nin bir tabanındaki eleman sayısı $n$ ise $\dim V = n$ ile gösterilir. Eğer $V$ sonlu sayıda vektörden oluşan bir tabana sahip ise $V$ ye sonlu boyutludur denir.*

**Tanım 1.1.10** *$m \times n$ tipinde bir $A$ matrisinin satır vektörlerinin kümesi*

$\{r_1, r_2, ..., r_m\}$

*ve sütun vektörlerinin kümesi*

$\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$

*olsun.*

**(a)** *$A$ nın satır uzayı, $\{r_1, r_2, ..., r_m\}$ satır vektörlerinin gerdiği $\mathbb{R}^n$ içindeki alt uzaydır ve $\mathcal{R}(A)$ ile gösterilir.*

**(b)** *$A$ nın sütun uzayı, $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sütun vektörlerinin gerdiği $\mathbb{R}^m$ içindeki alt uzaydır ve $\mathcal{C}(A)$ ile gösterilir.*

**(c)** *$Ax = 0$ homojen denkleminin çözüm kümesine $A$ nın sıfır (null) uzayı ya da çekirdeği denir ve $\ker A$ ya da $\mathcal{N}(A)$ ile gösterilir. $\dim(\ker A)$ ya $\ker A$ nın sıfırlılığı denir.*

Tanıma göre $\ker A = \{x : Ax = 0\}$ dır.

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{C}(A^T),\ \mathcal{C}(A) = \mathcal{R}(A^T)$

ve

$$\mathcal{C}(A) = \{Ax = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

dir. Buna göre bir $b \in \mathbb{R}^m$ vektörü için $Ax = b$ sistemi bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $b \in \mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ dir; yani $b$, $A$ nın sütunlarının bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bir başka ifade ile $\mathcal{C}(A)$ sütun uzayı, $Ax = b$ sisteminin bir çözüme sahip olduğu $b \in \mathbb{R}^m$ vektörlerinin kümesidir.
Aşağıdaki teorem lineer cebir içinde verilen en temel sonuçlardan birisidir.

**Teorem 1.1.11** *$m \times n$ tipinde bir $A$ matrisinin satır ve sütun uzaylarının boyutu eşittir yani* $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$ *dır.*

**Tanım 1.1.12** *$m \times n$ tipinde bir $A$ matrisinin* rank*'ı satır uzayının (ya da sütun uzayının) boyutu olarak tanımlanır ve* $\operatorname{rank} A = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$ *ile gösterilir.*

**Tanım 1.1.13** *$A = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde bir reel matris olsun. Bir $\lambda$ reel ya da kompleks sayısı için*

$$A\xi = \lambda\xi \tag{1.3}$$

*olacak şekilde sıfırdan farklı bazı $\xi \in \mathbb{C}^n$ vektörü varsa $\lambda$ sayısına $A$ nın bir özdeğeri ve $\xi$ vektörüne de $A$ nın ($\lambda$ ya karşılık gelen) bir özvektörü denir.*

$A$ nın özdeğerlerinin kümesine $A$ nın spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir; yani

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda,\ A \text{ nın bir özdeğeridir}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{bazı } \xi \in \mathbb{C}^n \text{ için } A\xi = \lambda\xi\}$$

dir. Bir $\lambda$ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerin tamamı ile 0 vektörünün oluşturduğu kümeye $\lambda$ nın bir öz uzayı denir ve $E_\lambda(A)$ ile ya da kısaca $E_\lambda$ ile gösterilir.

$$E_\lambda(A) = \{\xi \in \mathbb{C}^n : A\xi = \lambda\xi\} = \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)\xi = 0\} = \ker(A - \lambda I)$$

öz uzayı $\mathbb{C}^n$ nin bir alt uzayıdır.

$A\xi = \lambda\xi$ den $A\xi = \lambda I\xi$ bulunur ve böylece bir özdeğer/özvektörün alternatif bir formu olarak (1.3),

$$(A - \lambda I)\xi = 0 \tag{1.4}$$

formunda yazılabilir. (1.4) denkleminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.5}$$

ya da bir başka ifade ile

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n I = 0 \tag{1.6}$$

olmasıdır. Bunu

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ singülerdir} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 = \det(\lambda I - A)$$

olarak da ifade edebiliriz. (1.6) ya da (1.5) denklemine $A$ nın karakteristik denklemi denir ve $\lambda$ kökleri $A$ nın özdeğerleridir.
$A(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$ anlamında $E_\lambda$, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineer dönüşümü altında değişmezdir (invaryanttır). Böyle bir alt uzaya $A$ nın bir değişmez alt uzayı denir.

**Teorem 1.1.14** *Her $A$ kare matrisi için aşağıdakiler denktir:*

**(a)** $\lambda_0$, *$A$ nın bir özdeğeridir.*

**(b)** $\det(A - \lambda_0 I) = 0$ *dır ya da $\lambda_0$ karakteristik polinomun bir sıfırıdır.*

**(c)** $A - \lambda I$ *singülerdir (yani terslenemez).*

**(d)** $(A - \lambda_0 I)x = 0$ *homojen sistemi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir; yani*

$$\dim\ker(A - \lambda_0 I) = \dim E_{\lambda_0}(A) \geq 1$$

*dir.*

**Uyarı 1.1.15** *Bir $\lambda$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü bulurken*

$$(A - \lambda I)\xi = 0 \tag{1.7}$$

*sistemi çözülmelidir ve $\xi$ bulunmalıdır. Burada özellikle belirtmeliyiz ki $\xi$ bulunurken ters matrisi bularak (1.7) çözülemez çünkü $(A-\lambda I)$ terslenebilir matris değildir. Gerçekten de, ters matris tekniği ya da Cramer kuralı hiç bir zaman kullanılamaz çünkü burada $\lambda$ bir özdeğer olduğundan $(A-\lambda I)$ terslenebilir değildir. Fakat (1.7) yi çözmek için direkt denklem çözme yöntemleri kullanılabilir.*

**Tanım 1.1.16**

**(a)** *Bir $\lambda$ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörlerin sayısına $\lambda$ nın geometrik katlılığı denir.*

**(b)** *Bir $\lambda$ özdeğerinin tekrarlanma sayısına $\lambda$ nın cebirsel katlılığı denir. Eğer $\lambda$ nın cebirsel katlılığı 1 (yani $\lambda$ tekrar etmiyor) ise $\lambda$ ya basit özdeğer denir.*

**(c)** *$\lambda$ nın geometrik katlılığı cebirsel katlılığına eşit ise o zaman $\lambda$ ya yarı basit özdeğer denir.*

Eğer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, $A$ nın özdeğerleri (bunlardan bazıları tekrar edebilir; yani birbirlerine eşit olabilirler) ise o zaman (1.6) denklemi

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j)$$

olarak yazılabilir.
Terslenebilir matrislerin denk olduğu durumları bir teorem olarak verebiliriz.

**Teorem 1.1.17 (Terslenebilir Matrislerin Temel Teoremi)**

$$A = (a_{ij}), n \times n$$

*tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir (yani ya hepsi aynı anda doğrudur ya da hepsi aynı anda yanlıştır):*

**(a)** *$A$ terslenebilirdir (yani $A^{-1}$ vardır, yani $A$ singüler değildir).*

**(b)** *$A$ nın sütun vektörleri lineer bağımsızdır.*

**(c)** *$A$ nın sütun vektörleri $\mathbb{R}^n$ yi gerer.*

**(d)** *$A$ nın sütun vektörleri $\mathbb{R}^n$ için bir taban oluşturur.*

**(e)** *$A$ nın satır vektörleri lineer bağımsızdır.*

**(f)** *$A$ nın satır vektörleri $\mathbb{R}^n$ yi gerer.*

**(g)** *$A$ nın satır vektörleri $\mathbb{R}^n$ için bir taban oluşturur.*

**(h)** $\det A \neq 0$.

**(i)** $0$, *$A$ nın bir özdeğeri değildir.*

**(j)** $\operatorname{rank} A = n$.

**Teorem 1.1.18 (Cayley-Hamilton Teoremi)** *Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar, yani*

$$p(A) = \prod_{j=1}^{n}(A - \lambda_j) = 0$$

*ya da*

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + ... + a_{n-1}A + a_n = 0$$

*dır.*

### 1.1.1 KÖŞEGENLEŞTİRME

**Tanım 1.1.19** *$k \times k$ tipinde $A$ ve $B$ matrisleri için $P^{-1}AP = B$ olacak şekilde singüler olmayan (yani terslenebilir) bir $P$ matrisi varsa, $A$ ve $B$ matrislerine benzerdir denir.*

**Önerme 1.1.20** *Benzer matrisler aynı özdeğerlere sahiptir.*

**Tanım 1.1.21** *Bir $A$ matrisi bir* $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$ *köşegen matrisine benzer ise yani $P^{-1}AP = D$ ise, $A$ ya köşegenleştirilebilir matris denir. Bu durumda $D$ nin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ köşegen elemanları aynı zamanda $A$ nın özdeğerleridir. Köşegenleştirilebilir olmayan bir matrise arızalı (defective) matris denir.*

$P^{-1}AP = D$ nin $P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$ ve böylece $A = PDP^{-1}$ ye denk olduğunu görürüz.

Köşegenleştirilebilir bir $A$ matrisi için $A^n$ matrisi kolaylıkla hesaplanabilir.

**Önerme 1.1.22** *$A$ köşegenleştirilebilir bir matris ise, yani*

$$P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$$

*ise, o zaman*

$$A^n = PD^nP^{-1} \tag{1.8}$$

*dir.*

Burada

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$$

olduğundan (1.8), açık olarak

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{1.9}$$

olarak yazılır.

Eğer $P$ yi iyi belirleyebilirsek $A^n$ yi kolayca hesaplamak için (1.9) formülü yararlı olabilir. $P$ matrisi bize bu imkanı sağlar ve böyle bir $P$ matrisinin sütunları daima $A$ nın lineer bağımsız özvektörleridir.

**Teorem 1.1.23** *$k \times k$ tipinde bir $A$ matrisi için aşağıdakiler denktir.*

**(a)** *$A$ köşegenleştirilebilirdir.*

**(b)** *$A$, $k$ tane lineer bağımsız özvektöre sahiptir.*

**Uyarı 1.1.24** *Bir matrisi köşegenleştirme yöntemi:*

- *$A$ nın $k$ tane lineer bağımsız özvektörü (eğer varsa) bulunur, bunları $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ ile gösterelim.*

- *Sütun vektörleri olarak $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ ye sahip olan $P$ matrisi oluşturulur.*

- *Bu durumda, $i = 1, 2, 3, ..., k$ için $\lambda_i$, $\xi_i$ ye karşılık gelen özvektör olmak üzere, $P^{-1}AP$ matrisi köşegen girişleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ olan köşegen (diyagonal) matristir.*

### 1.1.2 JORDAN KANONIK FORMU

Bir önceki altkısımda bir $A$ matrisinin köşegenleştirilmesi durumunda bu matrisin özdeğerleri ve bunlara karşılık gelen özvektörler yardımı ile $A^n$ kuvvet matrisini hesapladık. $k \times k$ tipinde bir $A$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için bir yeter koşul onun $k$ tane farklı özdeğere sahip olmasıdır. Bu altkısımda $A$ nın köşegenleştirilebilir olmadığı durumu da (böyle bir durum $A$ nın tekrarlı özdeğerlere sahip olduğu ve bu nedenle $k$ tane lineer bağımsız özvektör bulunmadığı zaman ortaya çıkar) içeren durumları göz önüne alacağız ve $A^n$ kuvvet matrisini genelleştirilmiş özvektörler adını vereceğimiz vektörleri kullanarak (Jordan Kanonik Formu teoremini de kullanarak) elde edeceğiz.

**Teorem 1.1.25 (Jordan Kanonik Formu Teoremi)** *$k \times k$ tipindeki her $A$ matrisi*

$$J = diag(J_1, J_2, ..., J_r) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_r \end{pmatrix}_{k\times k}, \qquad 1 \le r \le k \tag{1.10}$$

*formülü ile verilen bir Jordan formuna benzerdir, yani $P^{-1}AP = J$ dir. Burada*

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, ...r$$

*dir, her bir* $J_i$*,* $s_i \times s_i$ *tipinde bir matristir ve* $\sum\limits_{i=1}^{r} s_i = k$ *dır ve ayrıca*

$$\sum_{\lambda_i} \dim E_{\lambda_i}(A) = r$$

*dir.*

Üstteki teoremde her bir $J_i$ matrisine bir Jordan bloğu, $J$ ye Jordan kanonik formu ve $P$ ye geçiş (transit) matrisi denir. $s_i$, $i.-$inci Jordan bloğunun mertebesidir ve $r$ bir Jordan formu içindeki Jordan bloklarının sayısıdır. Literatürde bir $J$ Jordan kanonik formu aşağıdaki verilen isimlerle de anılır:

- Jordan normal formu
- Jordan formu
- Jordan blok matrisi
- Jordan kanonik matrisi.

Üstteki teorem $k \times k$ tipindeki her $A$ matrisi için doğru olduğundan köşegenleştirilemeyen matrisler içinde doğrudur ve eğer $A$ bir köşegenleştirilemeyen matris ise bu durumda $A$ matrisi, (1.10) ile verilen bir Jordan formuna benzerdir, yani $P^{-1}AP = J$ dir.

$J_i$ ler (alt üçgen matris olarak) $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, ...r$ olarak alınırsa benzer bir teorem geçerlidir, fakat biz bu tür Jordan bloklarını göz önüne almayacağız.

**Uyarı 1.1.26**

**(a)** *A nın bir* $\lambda$ *özdeğerinin geometrik katlılığı* $\lambda$ *ya karşılık gelen Jordan bloklarının sayısına eşittir. Bir başka ifade ile herbir* $\lambda$ *özdeğeri* $r_\lambda = \dim E_\lambda(A)$ *Jordan* *bloğunda ortaya çıkar. Buna göre bir Jordan kanonik formu içindeki Jordan bloklarının toplam sayısı lineer bağımsız özvektörlerin maksimal sayısıdır yani*

$$r = \sum_{\lambda_i} \dim E_{\lambda_i}(A)$$

*dır.*

**(b)** $i = 1, 2, ...r$ *olmak üzere* $J_i$, $A$ *nın bir* $\lambda$ *özdeğeri için* $E_\lambda(A)$ *nın bir taban vektörüne karşılık gelir.*

**(c)** $A$, $k$ *tane lineer bağımsız vektörlerin kümesine sahiptir ancak ve ancak* $A$ *nın Jordan bloklarının sayısı* $k$ *dır ancak ve ancak her bir Jordan bloğu* $1{\times}1$ *tipinde bir matristir. Yani köşegen bir matris Jordan kanonik formunun belirli bir özel durumudur.*

**(d)** $A$ *nın bir* $\lambda$ *yarı basit özdeğerine sadece* $1 \times 1$ *tipinde Jordan blokları karşılık gelir.*

**(e)** $P$ *ye geçiş matrisini oluştururken özdeğerler kullanılır ve eksik olan özdeğerler genelleştirilmiş özvektör adını vereceğimiz özvektörler ile doldurulur.*

Önerme 1.1.22 keyfi bir matrise genelleştirilebilir. Böylece köşegenleştirilemeyen bir $A$ matrisi için de $A^n$ matrisinin kolaylıkla hesaplanabileceğini göreceğiz.

**Önerme 1.1.27**

**(a)** $A$, $k \times k$ *tipinde bir matris ise (bu durumda Teorem 1.1.25 den*

$$P^{-1}AP = J = diag(J_1, J_2, ..., J_r),\ 1 \le r \le k$$

*dir) o zaman*

$$\begin{aligned} A^n &= (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} J_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_r^n \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad 1 \le r \le k \end{aligned} \tag{1.11}$$

*dir.*

**(b)** *$A$, $k \times k$ tipinde bir matris ise herhangi bir $i = 1, 2, ..., r$ için $A$ nın bir $\lambda_i$ özdeğerine ait $s_i \times s_i$ tipinde bir $J_i$ Jordan bloğunun $n$.-inci kuvveti*

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & ... & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & ... & \binom{n}{s_i-3}\lambda_i^{n-s_i+3} & \binom{n}{s_i-2}\lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i^n \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

*dir.*

## 1.2 FARK DENKLEMLERİ

Bu kısımda skaler fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

### 1.2.1 TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR

**Tanım 1.2.1** $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ *bağımsız değişken ve $x$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere*

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \quad (1.13)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.
$f$ bir fonksiyon olmak üzere (1.13) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1))$$

formunda ise, normal fark denklemi adını alır. Normal fark denklemi, $g$ ve $h$ fonksiyon olmak üzere,

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), ..., \Delta^{k-1} x(n))$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = h(n, x(n).x(n+1), ..., x(n+k-1))$$

formlarında da yazılabilir.

**Tanım 1.2.2** *Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi denir.*

**Tanım 1.2.3** $\mathbb{N}_0$ *üzerinde tanımlı bir* $x(n)$ *fonksiyonu her* $n \in \mathbb{N}_0$ *için (1.13) denklemini sağlıyorsa, bu durumda* $x(n)$ *fonksiyonuna* $\mathbb{N}_0$ *üzerinde (1.13) denkleminin bir çözümü denir.* $k$ *ıncı mertebeden bir fark denkleminin,* $\Phi$ *ve* $\Psi$ *fonksiyonlar olmak üzere,*

$$\Phi(n, x(n), c_1, c_2, ..., c_k) = 0$$

*veya*

$$x(n) = \Psi(n, c_1, c_2, ..., c_k)$$

*şeklinde* $k$ *tane* $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ *keyfi sabit içeren çözümüne genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir.*

**Tanım 1.2.4** $n \geq n_0$ *için tanımlı reel değerli*

$$a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$$

*katsayı fonksiyonları ve reel değerli* $g(n)$ *fonksiyonu verilsin ve*

$$[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}$$

*üzerinde* $a_k(n) \neq 0$ *olsun.*

$$x(n + k) + a_1(n)x(n + k - 1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \tag{1.14}$$

*normal formundaki bir denkleme* $k$ *ıncı mertebeden bir lineer fark denklemi denir. Eğer* $g(n) \equiv 0$ *ise (1.14) denklemine yani*

$$x(n + k) + a_1(n)x(n + k - 1) + ... + a_k(n)x(n) = 0 \tag{1.15}$$

*denklemine homojen denklem denir. Eğer* $g(n) \neq 0$ *ise (1.14) denklemine homojen olmayan denklem denir. Ayrıca, bütün* $a_i(n)$ *katsayıları* $a_i(n) \equiv \alpha_i$ *şeklinde sabitse, (1.14) denklemine sabit katsayılı, aksi durumda değişken katsayılı fark denklemi denir.*

Bir operatörün lineerliği ile fark denkleminin lineerliği kavramları farklıdır. Örneğin bir operatör (fonksiyon) olarak $x(n) = 2^n$ lineer değildir fakat bunu bir çözüm olarak kabul eden $x(n + 1) - 2x(n) = 0$ fark denklemi lineerdir.

(1.14) denklemi

$$x(n+k) = -a_1(n)x(n+k-1) - a_2(n)x(n+k-2) - ... - a_k(n)x(n) + g(n) \tag{1.16}$$

formunda yazılabilir. (1.16) içinde $n = 0$ alınırsa $x(k)$ yı

$x(k-1), x(k-2), ..., x(1), x(0)$

ın terimleri cinsinden elde ederiz. Daha açık ifade edersek

$$x(k) = -a_1(0)x(k-1) - a_2(0)x(k-2) - ... - a_k(0)x(0) + g(0)$$

dır. $x(k)$ yı hesapladıktan sonra bir sonraki aşamaya geçebiliriz ve (1.16) içinde $n = 0$ alarak $x(k+1)$ i hesaplayabiliriz. Bunu yaptığımızda

$$x(k+1) = -a_1(1)x(k) - a_2(1)x(k-1) - ... - a_k(1)x(1) + g(1)$$

bulunur. Bu işlem yinelendiğinde $n \geq k$ için her $x(n)$ yi hesaplamak mümkündür.
(1.14) denklemini tekrar göz önüne alalım. Eğer bir $\{x(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ dizisi ya da basitçe $x(n)$ dizisi (1.14) denklemini sağlıyorsa bu diziye (1.14) denkleminin bir çözümüdür denir (bakınız: Tanım 1.2.3). Eğer denklemin başlangıç verilerini (datalarını) belirlersek, $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ reel olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n)$$

$$x(n_0) = \alpha_0,\ x(n_0+1) = \alpha_1, ...,\ x(n_0+k-1) = \alpha_{k-1}$$

başlangıç değer problemine ulaşırız. Benzer şekilde böyle bir yöntemi sadece $k$. mertebeden lineer fark denklemlerine değil genel $k$-ıncı mertebeden fark denklemlerine uygulayabiliriz.
Buna göre aşağıdaki tanımı yapabiliriz ve Teorem 1.2.6 ile Teorem 1.2.7 yi verebiliriz.

**Tanım 1.2.5** *$n_0 \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ reel sabitler olmak üzere $k$ ıncı mertebeden bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüm ile ilişkili*

$$x(n_0+i) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1 \tag{1.17}$$

*veya*

$$\Delta^i x(n_0) = \alpha_i, \quad 0 \leq i \leq k-1 \tag{1.18}$$

*formunda ilk $k$ tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir. (1.17) ya da (1.18) koşullarına başlangıç koşulları adı verilir. $k$-ıncı mertebeden bir fark denklemi ve (1.17) ya da (1.18) başlangıç koşullarından oluşan probleme bir başlangıç değer problemi denir.*

**Teorem 1.2.6** *$n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli*

$a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$

*katsayı fonksiyonları ve reel değerli $g(n)$ fonksiyonu verilsin ve $[n_0, \infty)$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olsun.*

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n), \tag{1.19}$$

$$x(n_0) = \alpha_0,\ x(n_0+1) = \alpha_1, ...,\ x(n_0+k-1) = \alpha_{k-1} \tag{1.20}$$

*başlangıç değer problemi $n \geq n_0$ için tanımlı olan bir tek $x(n)$ çözümüne sahiptir.*

**Teorem 1.2.7** *$k$ ıncı mertebeden lineer olmayan skaler normal*

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.21}$$

*fark denklemi ve*

$$x(0) = \alpha_0,\ x(1) = \alpha_1, ..., x(k-1) = \alpha_{k-1} \tag{1.22}$$

*başlangıç koşulları verilsin. $f$ fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlere göre tanımlı ise, bu durumda (1.21)-(1.22) başlangıç değer probleminin bir tek çözümü vardır.*

### 1.2.2 LİNEER BAĞIMSIZLIK, CASORATYAN VE GENEL ÇÖZÜM

Tanım 1.1.1 i yeniden verelim.

**Tanım 1.2.8** *$n \geq n_0$ için tanımlı $x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ fonksiyonları verilsin.*

$$c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + ... + c_rx_r(n) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_r = 0 \tag{1.23}$$

*gerektirmesi doğru ise $Z = \{x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)\}$ kümesi $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır denir. Aksi takdirde, yani $c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + ... + c_rx_r(n) = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_r$ sabitleri var ise, $Z$ kümesi $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımlıdır denir.*

**Uyarı 1.2.9** *$x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ fonksiyonları sıralı olarak düşünülebileceğinden dolayı bu fonksiyonların ailesine liste diyebiliriz. Özellikle bu listedeki her bir girişin (yani fonksiyonun) tekrarı oldukça önemlidir. Dolayısıyla burada $Z$ kümesi derken aslında verilen fonksiyonların bir listesi anlaşılmalıdır. Örneğin, $x_1(n) = n + 1, x_2(n) = n^2 - 3$,*

*$x_3(n) = n+1$ fonksiyonları lineer bağımlıdır çünkü $x_1$ ve $x_3$ fonksiyonları aynıdır ve bu nedenle $c_1 = -c_3 \neq 0$ ve $c_2 = 0$ seçilebilir. Dikkat edilirse bu örnekte listede üç fonksiyon vardır fakat alışılmış anlamda küme olarak düşünüldüğünde (bir kümede bir eleman yalnız bir kez bulunacağından) iki elemanlıdır. O halde, üstteki tanımı kullanırken, biz küme derken liste anlamında olanı alacağız ve verdiğimiz örnekte listemiz (kümemiz) üç elemanlıdır.*

**Tanım 1.2.10** *(1.15) homojen denkleminin $k$ tane lineer bağımsız çözümünün kümesine bir temel küme denir.*

**Tanım 1.2.11** *$x_1(n), x_2(n), ..., x_r(n)$ fonksiyonları için $W(n)$,*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

*ile tanımlanır ve buna verilen fonksiyonların Casoratyan'ı denir.*

Aşağıdaki teorem Abel önermesi olarak adlandırılır.

**Teorem 1.2.12 ( Abel önermesi )** *$x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ fonksiyonları (1.15) homojen denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda bu fonksiyonların $W(n)$ Casoratyan'ı $n \geq n_0$ için*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i) \right) W(n_0)$$

*ile verilir.*

Üstteki teoremin ispatı için [3] kaynağında sayfa 68 e bakılabilir.

**Önerme 1.2.13** *$x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ fonksiyonları (1.15) homojen denkleminin çözümleri olsun ve her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $W(n) \neq 0$ dır ancak ve ancak $W(n_0) \neq 0$ dır.*

**Önerme 1.2.14** *$x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ fonksiyonları (1.15) homojen denkleminin çözümleri olsun ve*

$$V = \{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$$

*diyelim. $V$ bir temel kümedir ancak ve ancak herhangi bir $n_0$ için $W(n_0) \neq 0$ dır.*

**Teorem 1.2.15** *Her $n \geq n_0$ için $a_k(n) \neq 0$ olsun. Buna göre (1.15) lineer homojen fark denklemi $[n_0, \infty)$ üzerinde bir temel kümeye sahiptir.*

**Teorem 1.2.16** *(1.15) homojen denkleminin $k$ tane lineer bağımsız çözümü*

$x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$

*olsun. Bu durumda, $c_1, c_2, ..., c_k$ keyfi sabitler olmak üzere, (1.15) in genel çözümü*

$x(n) = c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + ... + c_k x_k(n)$

*dir.*

**Teorem 1.2.17** *(1.15) homojen denkleminin genel çözümü $x_h(n)$ ve homojen olmayan (1.14) denkleminin bir özel çözümü $x_p(n)$ ise o zaman (1.14) denkleminin genel çözümü*

$x(n) = x_h(n) + x_p(n)$

*dir.*

## 1.3 FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde fark denklem sistemleri ele alınacak, konu ile ilgili temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

### 1.3.1 BİRİNCİ MERTEBEDEN $k$ BOYUTLU FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

İlk olarak birinci mertebeden sabit katsayılı fark denklem sistemlerini ele alacağız. Sabit katsayılı iki fark denkleminin bir homojen sistemi ile başlayacağız. Sistemi

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n), \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) \end{aligned}$$

olarak yazacağız. Bu sistem matris formunda

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

olarak yazılabilir.

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

notasyonlarını kullanırsak (1.24) denklem sistemini, bir

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

vektör-matris denklemi olarak yazabiliriz. Bu formda yazıldığında birinci mertebeden denklemle aynı forma sahiptir. Buradan

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0), \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

çözümü elde edilir. Burada özellikle belirtilmelidir ki, $A^n$ bir matrisin bir kuvvetidir. Kabulden $I$ birim matris olmak üzere $A^0 = I$ dır.

Şimdi genel denklem sistemlerini ele alalım.

$k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 1$ olmak üzere $k$ tane fark denkleminin bir $k$ boyutlu lineer homojen fark denklem sistemi

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}(n)x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \cdots + a_{1k}(n)x_k(n), \\ x_2(n+1) &= a_{21}(n)x_1(n) + a_{22}(n)x_2(n) + \cdots + a_{2k}(n)x_k(n), \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \cdots + a_{kk}(n)x_k(n), \end{aligned}$$

ile verilir. Verilen vektör ve matris notasyonlarını kullanarak lineer homojen fark denklem sistemi

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) \tag{1.25}$$

olarak yazılabilir. Burada her bir $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ için $a_{ij} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyondur. Açıkça ifade etmek istersek, burada $n$ bağımsız değişkendir;

$$\mathbf{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \cdots, x_k(n))^T = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix}$$

bilinmeyen vektör değerli fonksiyondur; $A(n) = (a_{ij}(n))_{k\times k}$, $n \geq n_0$ için singüler olmayan (yani tersi var olan, yani $n \geq n_0$ için $\det A(n) \neq 0$ olan) bir katsayı matrisidir.

(1.25) denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliğini oluşturacağız.

**Tanım 1.3.1** *(1.25) sistemi ile*

$\mathbf{x}(n_0) = x_0$

*başlangıç koşullarından oluşan probleme bir başlangıç değer problemi denir.*

Burada $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0})$ bir sabit vektördür. Böyle bir başlangıç değer probleminin çözümü $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n, n_0, x_0)$ ile gösterilir.

**Teorem 1.3.2** *Her bir $x_0 \in \mathbb{R}^k$ ve $n_0 \in \mathbb{N}_0$ için*

$$\mathbf{x}(n+1) = A(n)\mathbf{x}(n), \quad x(n_0) = x_0 \tag{1.26}$$

*başlangıç değer probleminin bir tek $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n, n_{0,}x_0)$ çözümü vardır.*

**Sonuç 1.3.3**

$$\mathbf{x}(n+1) = A(n)\mathbf{x}(n), \quad \mathbf{x}(n_0) = x_0 \tag{1.27}$$

*başlangıç değer probleminin bir tek olan (biricik) çözümü*

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) x_0 \tag{1.28}$$

*dir. Eğer $A(n) = A$ sabit katsayılı bir matris ise (1.27) başlangıç değer probleminin bir tek olan (biricik) çözümü*

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 \tag{1.29}$$

*dır.*

**Önerme 1.3.4** *$\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$, (1.25) in çözümleri olsun ve $\Psi(n)$, sütunları bu çözümlerden oluşan $k \times k$ tipinde bir matris olsun yani*

$\Psi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n))$

*olsun. Buna göre $\Psi(n)$,*

$$\Psi(n+1) = A(n)\Psi(n) \tag{1.30}$$

*matris fark denkleminin bir çözümüdür.*

Üstteki önermeyi göz önüne alarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

**Tanım 1.3.5** *Eğer* $\Psi(n)$, $n \geq n_0$ *için singüler olmayan (yani, terslenebilir) bir matris ise ve (1.30) eşitliğini sağlar ise bu durumda* $\Psi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n))$ *matrisine (1.25) denklem sisteminin bir temel matrisidir denir ve*

$\{\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)\}$

*kümesine (1.30) un temel çözümler kümesi denir.*

Önerme 1.3.6 (e) den, (1.30) denkleminin temel çözümler kümesi lineer bağımsızdır. $n \geq n_0 \geq 0$ için (1.30) un bir $\Psi(n)$ çözüm matrisinin lineer bağımsızlığını kontrol etmek oldukça zahmetli bir iştir. Fakat aşağıdaki önermenin $(f)$ şıkkınınn gösterdiği gibi lineer bağımsızlığı göstermek için sadece $n = n_0$ durumunu göz önüne almak yeterlidir.

**Önerme 1.3.6** $\Psi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n))$, *(1.30) denkleminin bir çözüm matrisi olsun.*

**(a)** *(Abel Formülü)* $n \geq n_0 \geq 0$ *için*

$$\det \Psi(n) = \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} \det A(i) \right) \det \Psi(n_0) \tag{1.31}$$

*dır.*

**(b)** *(1.25) fark denklem sisteminde verilen* $A(n)$ *katsayı matrisi singüler olmayan bir sabit matris ise; yani her bir* $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ *için* $a_{ij}$ *sabit reel sayı olmak üzere* $A(n) = A = (a_{ij})_{k \times k}$ *formunda ise, ve* $\det A \neq 0$ *ise o zaman*

$$\det \Psi(n) = (\det A)^{n-n_0} \det \Psi(n_0)$$

*dir.*

**(c)** $\Psi(n)$ *çözüm matrisinin* $[n_0, \infty)$ *üzerinde (yani her* $n \geq n_0$ *için) singüler olmaması için gerek ve yeter koşul* $\Psi(n_0)$ *matrisinin singüler olmamasıdır. Bir başka ifade ile*

$$\textit{her } n \geq n_0 \textit{ için } \det \Psi(n) \neq 0 \textit{ dır} \Leftrightarrow \det \Psi(n_0) \neq 0 \textit{ dır.}$$

**(d)** *Eğer* $\det \Psi(\widetilde{n}) \neq 0$ *olacak şekilde bir* $\widetilde{n} \in \mathbb{N}_{n_0}$ *var ise* $\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ *vektörleri lineer bağımsızdır.*

**(e)** *$\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ çözümleri $n \geq n_0$ için lineer bağımsızdır ancak ve ancak $\Psi(n)$ matrisi $n \geq n_0$ için singüler değildir (yani $\det \Psi(n) \neq 0$ dır).*

**(f)** *$\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)$ çözümlerinin $n \geq n_0$ için lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul $\Psi(n_0)$ ın singüler olmamasıdır (yani $\det \Psi(n_0) \neq 0$ dır).*

(1.25) denklem sisteminin özel bir temel matrisini oluşturabiliriz.

**Önerme 1.3.7** **(a)** *$\Psi(n_0) = I$ olmak üzere*

$$\Psi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$$

*matrisi (1.25) denklem sistemi için bir temel matristir.*

**(b)** *Eğer $A$ (singüler olmayan, yani terslenebilir) bir sabit matris ise (yani sistem otonom ise) bu durumda*

$$\Psi(n) = A^{n-n_0}$$

*dır ve özel olarak $n_0 = 0$ ise*

$$\Psi(n) = A^n$$

*matrisi (1.25) denklem sistemi için bir temel matristir.*

Aşağıdaki Önerme 1.3.8 (a) dan göreceğimiz gibi aslında (1.25) denklem sisteminin sonsuz sayıda temel matrisi vardır.

**Önerme 1.3.8** *$\Psi(n)$, (1.25) denklem sisteminin bir temel matrisi olsun.*

**(a)** *Eğer $H$ singüler olmayan herhangi bir sabit matris ise o zaman*

$$\Phi(n) = \Psi(n)H$$

*matrisi de (1.25) denklem sisteminin bir temel matrisidir.*

**(b)** *$\Psi(n)\Psi^{-1}(n_0)$ matrisi (1.25) in bir temel matrisidir.*

Üstteki önermede ki (b) yi göz önüne alarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

**Tanım 1.3.9** $\Psi(n)$, *(1.25) denklem sisteminin herhangi bir temel matrisi olsun. (1.25) in* $\Psi(n)\Psi^{-1}(n_0)$ *temel matrisine konum geçiş matrisi (state transition matrix) denir ve* $\Psi(n,n_0) := \Psi(n)\Psi^{-1}(n_0)$ *ile gösterilir.*

Üstteki tanım, $n$ ile $m$ pozitif tamsayılar ve $n \geq m$ olmak üzere

$$\Psi(n,m) = \Psi(n)\Psi^{-1}(m)$$

formuna genişletilebilir ve $\Psi(n,m)$, (1.25) in bir temel matrisidir. Ayrıca, $I$ birim matris olmak üzere her $n \geq n_0$ için $\Psi(n,n) = I$ dir. $\Psi(n,m)$ nin bazı özelliklerini aşağıdaki önermede vereceğiz.

**Önerme 1.3.10** *(1.25) denklem sisteminin bir* $\Psi(n,m)$ *temel matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar.*

**(a)** $\Psi(n,m)$ *matrisi*

$$\Psi(n+1,m) = A(n)\Psi(n,m)$$

*matris fark denklemini sağlar (yani denklemin bir çözümüdür).*

**(b)** $\Psi^{-1}(n,m) = \Psi(m,n)$ *dir.*

**(c)** $\Psi(n,m) = \Psi(n,u)\Psi(u,m)$ *dir.*

**(d)** $\Psi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$ *dir ve özellikle* $A(n) = A$ *bir sabit matris ise*

$$\Psi(n,m) = A^{n-m}$$

*dir.*

**Sonuç 1.3.11** $x(n_0) = x_0$ *olmak üzere (1.25) fark denklem sisteminin bir tek olan*

$$x(n,n_0,x_0)$$

*çözümü*

$$x(n,n_0,x_0) = \Psi(n,n_0)x_0 = \Psi(n)\Psi^{-1}(n_0)x_0$$

*ile verilir.*

Aşağıdaki önermenin gösterdiği gibi, (1.25) sisteminin çözümlerinin önemli bir özelliği toplama ve skalerle çarpım altında kapalı olmasıdır.

**Önerme 1.3.12** *Eğer* $\varphi_1(n), \varphi_2(n)$ *(1.25) in çözümleri ise ve* $c \in \mathbb{R}$ *ise o zaman*

**(a)** $\varphi_1(n) + \varphi_2(n)$, *(1.25) in bir çözümüdür.*

**(b)** $c\varphi_1(n)$, *(1.25) in bir çözümüdür.*

*(a) ve (b) ye lineerlik prensibi denir.*

**Uyarı 1.3.13** *Önerme 1.3.12 genelleştirilebilir:*

$\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_u(n)$

*fonksiyonları* $[n_0, \infty)$ *üzerinde (1.25) sisteminin çözümleri ise ve* $1 \leq i \leq u$ *için* $c_i$ *ler keyfi sabitler ise o zaman*

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{u} c_i \varphi_i(n)$$

*toplamı da* $[n_0, \infty)$ *üzerinde (1.25) sisteminin bir çözümüdür çünkü*

$$\varphi(n+1) = \sum_{i=1}^{u} c_i \varphi_i(n+1) = \sum_{i=1}^{u} c_i A(n) \varphi_i(n) = A(n) \sum_{i=1}^{u} c_i \varphi_i(n) = A(n)\varphi(n)$$

*bulunur.* ■

**Sonuç 1.3.14** *(1.25) fark denklem sisteminin bütün çözümlerinin oluşturduğu küme bir vektör uzaydır.*

**Teorem 1.3.15** *(1.25) sisteminin* $[n_0, \infty)$ *üzerinde bir temel çözümler kümesi*

$\{\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)\}$

*olsun. Bu durumda* $c_1, c_2, ..., c_k$ *lar belirli sabitler olmak üzere (1.25) nin keyfi bir* $\varphi(n)$, $n \geq n_0$ *çözümü için*

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(n)$$

*dir. Bir başka ifade ile, (1.25) in keyfi bir* $\varphi(n)$ *çözümü (1.25) sisteminin keyfi bir* $\{\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)\}$ *temel çözümler kümesinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.*

Aşağıdaki önerme (1.25) in $k$ tane lineer bağımsız çözümünün varlığını belirtmektedir.

**Önerme 1.3.16** *(1.25) fark denklem sisteminin $n \geq n_0$ için $k$ tane lineer bağımsız çözümü vardır.*

NOT: Yine Önerme 1.3.6 nın (d) şıkkından istenilen elde edilir çünkü $\widetilde{n} = n_0$ olmak üzere $\det \Psi(\widetilde{n}) = \det I \neq 0$ dır. ■

Teorem 1.3.15 de, (1.25) in keyfi bir $\varphi(n)$ çözümünün (1.25) sisteminin keyfi bir

$$\{\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)\}$$

temel çözümler kümesinin lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini gösterdik. Aşağıdaki önermede belirli $\varphi_i(n), 1 \leq i \leq k$ lar için Teorem 1.3.15 in özel durumunu vereceğiz.

**Önerme 1.3.17** *(1.25) fark denklem sisteminin bütün çözümlerinin oluşturduğu $S$ kümesinin her bir elemanı Önerme 1.3.16 nın ispatında verilen*

$$\{\varphi_1(n), \varphi_2(n), ..., \varphi_k(n)\}$$

*çözümler kümesinin elemanlarının bir kombinasyonu olarak yazılabilir; yani $\varphi \in S$ elemanı*

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(n)$$

*olarak yazılabilir.*

**Teorem 1.3.18** *(1.25) fark denklem sisteminin bütün çözümlerinin oluşturduğu küme $k$ boyutlu bir vektör uzaydır.*

NOT: Önerme 1.3.17 kullanılarak da ispat verilebilir. ■

Teorem 1.3.15 den dolayı aşağıdaki tanımı verebiliriz.

**Tanım 1.3.19** *$n \geq n_0$ olmak üzere $\{\varphi_i(n) : 1 \leq i \leq k\}$, (1.25) sisteminin bir temel çözümler kümesi (bir başka ifade ile (1.25) in çözümlerinin lineer bağımsız herhangi bir kümesi) olsun. Bu durumda, $c_1, c_2, ..., c_k$ lar keyfi reel sabitler ve en az bir $i$ için $c_i \neq 0$ olmak üzere, $[n_0, \infty)$ üzerinde (1.25) sisteminin genel çözümü*

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(n) \tag{1.32}$$

*ile tanımlanır.*

(1.32) formülü, $\Psi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots \varphi_k(n))$ bir temel matris ve

$c = (c_1, c_2, ..., c_k)^T \in \mathbb{R}^k$

olmak üzere,

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)c \tag{1.33}$$

olarak yazılabilir.

**Uyarı 1.3.20** *Teorem 1.3.18 den (1.25) fark denklem sisteminin bütün çözümlerinin oluşturduğu $S$ kümesinin $k$ boyutlu bir vektör uzay olduğunu biliyoruz ve sonucun ispatında da belirtildiği gibi çözümlerin herhangi bir*

$(\varphi_1(n), \varphi_2(n), \cdots \varphi_k(n))$

*temel kümesi $S$ nin bir tabanıdır (Teorem 1.3.15). Bu taban (1.25) denkleminin tüm çözümlerini gerer (Teorem 1.3.15). Bu nedenle (1.25) denkleminin herhangi bir çözümü (1.32) formunda ya da (1.33) formunda yazılabilir. Bu (1.32) çözümüne neden bir genel çözüm dendiğini açıklamaktadır.*

## 1.4 BİRİNCİ MERETEBEDEN $k$ BOYUTLU SABİT KATSAYILI FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bir önceki kısımda değişken katsayılı genel $A(n)$ matrisi için sonuçlar vermiştik. Bu kısımda $A(n)$ nin sabit katsayılı $A$ matrisi olduğu durum için bazı sonuçlar elde edeceğiz. Bu kısım boyunca sabit katsayılı $A$ matrisleri ile ilgileneceğiz.
$k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 1$ olmak üzere $k$ tane fark denkleminin bir $k$ boyutlu sabit katsayılı lineer homojen fark denklem sistemi

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n), \\
x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n), \\
&\vdots \\
x_k(n+1) &= a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n),
\end{aligned}$$

şeklindedir. Verilen vektör ve matris notasyonlarını kullanarak lineer homojen fark denklem sistemi

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{x}(n) = (x_1(n), x_2(n), \cdots, x_k(n))^T$ bilinmeyen vektör değerli fonksiyondur, her bir $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$ için $a_{ij}$ (sabit) reel sayı olmak üzere $A = (a_{ij})_{k \times k}$, $n \geq n_0$ için singüler olmayan (yani tersi var olan) bir katsayı matrisidir.
Homojen sistem için bazı sonuçlar elde edelim.
Sabit katsayılı homojen fark denkleminin çözümünü Sonuç 1.3.3 te vermiştik. Konu bütünlüğü için burada bir kez daha verelim.

**Sonuç 1.4.1**

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n), \quad \mathbf{x}(n_0) = x_0 \tag{1.34}$$

*başlangıç değer probleminin bir tek olan (biricik) çözümü*

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} x_0 \tag{1.35}$$

*dir.*

Önerme 1.3.7 de homojen sistemin bir temel matrisinin $\Psi(n) = A^{n-n_0}$ olduğunu ve özel olarak $n_0 = 0$ ise $\Psi(n) = A^n$ olduğunu görmüştük. Eğer $A$ köşegenleştirilebilir bir matris ise daha basit olan başka bir temel matrisi aşağıdaki önermede vereceğiz.

**Önerme 1.4.2** *$A$ köşegenleştirilebilir bir matris ise (yani $D$ nin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ köşegen elemanları $A$ nın özdeğerleri olmak üzere $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ ise) bu durumda*

$$\Psi(n) = A^n P = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

*$A$ nın bir temel matrisidir (yani $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$ sisteminin bir çözümüdür) ve*

$$A^n = \Psi(n)\Psi^{-1}(0) \tag{1.37}$$

*dir.*

Homojen sistemin genel çözümünü aşağıdaki formda da verebiliriz.

**Teorem 1.4.3** *$k \times k$ tipindeki $A$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,}\lambda_{2,}..., \lambda_k$ ve bunlara karşılık gelen $k$ tane lineer bağımsız özvektörler $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ olsun. Bu durumda*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) \tag{1.38}$$

*homojen sisteminin genel çözümü, $c_1, c_2, ..., c_k$ lar keyfi sabitler olmak üzere*

$$x(n) = c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + ... + c_k\lambda_k^n\xi_k \tag{1.39}$$

*dir.*

NOT: $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, ..., \lambda_k^n\xi_k)$, $A$ nın bir temel matrisidir.

**Teorem 1.4.4** *$k \times k$ tipindeki $A$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,}\lambda_{2,}..., \lambda_k$ ve bunlara karşılık gelen $k$ tane lineer bağımsız özvektörler $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ olsun. Bu durumda $\mathbf{x}(n_0) = x_0$ başlangıç koşullu*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) \tag{1.40}$$

*homojen sisteminin genel çözümü, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, ..., \lambda_k^n\xi_k)$ olmak üzere,*

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(n_0)\mathbf{x}(n_0) \tag{1.41}$$

*dır. Özellikle $n_0 = 0$ için $\mathbf{x}(0) = x_0$ başlangıç koşullu homojen sistemin genel çözümü*

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) \tag{1.42}$$

*dır.*

**Uyarı 1.4.5** *Eğer $k \times k$ tipinde (singüler olmayan) bir $A$ matrisi köşegenleştirilebilir ise ve $A$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırası ile $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ ise o zaman*

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, ..., \lambda_k^n\xi_k)$$

*olmak üzere*

$$A^n = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)$$

*dır.*

**Uyarı 1.4.6** *Jordan kanonik formunu kullanarak*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n) \tag{1.43}$$

*homojen sisteminin genel çözümünü verebiliriz. Biliyoruz ki* $A^n$*, (1.43) sisteminin temel matrisidir.* $k \times k$ *tipinde bir* $A$ *matrisi için Önerme 1.1.27 den (1.43) sisteminin genel çözümü,* $c = (c_1, c_2, ..., c_k)^T \in \mathbb{R}^k$ *keyfi olmak üzere,*

$$x(n) = A^n c = PJ^n P^{-1} c \tag{1.44}$$

*ya da* $\widetilde{c} = P^{-1}c$ *olmak üzere*

$$x(n) = PJ^n \widetilde{c} \tag{1.45}$$

*formunda yazılabilir. Buradan veya sayfa 12 içinde verilen (1.11) den (1.43) sisteminin bir başka temel matrisi*

$$\Psi(n) = A^n P$$

*ya da*

$$\Psi(n) = PJ^n$$

*dir. Ayrıca bu durumda* $\Psi(n, n_0)$ *konum geçiş matrisi*

$$\Psi(n, n_0) = PJ^{n-n_0} P^{-1}$$

*formunda verilebilir. Böylece (1.43) sisteminin* $x_0 = x(n_0)$ *başlangıç koşullu çözümü*

$$x(n, n_0, x_0) = PJ^{n-n_0} P^{-1} x_0 \tag{1.46}$$

*dır.*

# BÖLÜM 2

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR 2x2 TİPİNDE MATRİSLER VE KUVVETLERİ

## 2.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 2x2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 2.1.1** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.1.2** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.
$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.1.3** $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 14$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.
$P = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 14^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{13}14^n + \frac{7}{13} & \frac{7}{13}14^n - \frac{7}{13} \\ \frac{6}{13}14^n - \frac{6}{13} & \frac{7}{13}14^n + \frac{6}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

## 2.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 2x2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 2.2.1** $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-2)^n + \frac{4}{5}3^n & \frac{4}{5}(-2)^n - \frac{4}{5}3^n \\ \frac{1}{5}(-2)^n - \frac{1}{5}3^n & \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.2.2** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -6$ dır ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 \\ 0 & -6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & \frac{5}{9}3^n - \frac{5}{9}(-6)^n \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.2.3** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n & \frac{1}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}2^n & \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.2.4** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ tir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}5^n - \frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{2}{3}5^n - \frac{2}{3}(-1)^n & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.2.5** $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}8^n & \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}8^n \\ \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}8^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}8^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 2.2.6** $A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $2 \times 2$ matris ve $A$ lineer bağımsız iki özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 ten, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{3}{2}(-2)^n - \frac{3}{2}4^n \\ \frac{1}{6}(-2)^n - \frac{1}{6}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

# BÖLÜM 3

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR 3x3 TİPİNDE MATRİSLER VE KUVVETLERİ

## 3.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 3x3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 3.1.1** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 3$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{3}{4}3^n - \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4}3^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.2** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ve bunlara karşılık gelen özvektör olarak sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dir ve

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D
\end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ (-2)^n - 1 & 2(-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.3** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 10$ dur ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$ dir ve

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = D
\end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & -2^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{18}10^n - \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^n - \frac{1}{3} & \frac{1}{2}2^n + \frac{5}{18}10^n + \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6}2^n + \frac{7}{18}10^n - \frac{2}{9} & \frac{1}{3}10^n + \frac{2}{3} & \frac{5}{18}10^n - \frac{1}{6}2^n - \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2}2^n + \frac{7}{18}10^n + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^n - \frac{1}{3} & \frac{5}{18}10^n - \frac{1}{2}2^n + \frac{2}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.4** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 21$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 21^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \\ \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \\ \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n & \frac{1}{19}2^n + \frac{18}{19}21^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.5** $A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -27 \\ 3 & -2 & 9 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ dir ve

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 9 & -27 \\ 3 & -2 & 9 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(-2)^n - 2 & 3 - 3(-2)^n & 9(-2)^n - 9 \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n & 3 - 3(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n - 1 & 4 - 3(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.6** $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dir ve

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & \frac{3}{2}2^n - \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{3} & \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{2}2^n - \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}4^n \\ 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}4^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.1.7** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ dir ve

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}3^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^n & \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}3^n & \frac{2}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n \\ \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^n & \frac{1}{6}3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

## 3.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 3x3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 3.2.1** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ tir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dir ve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}5^n & 0 & \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2}3^n \\ 5^n - 3^n & 3^n & 5^n - 3^n \\ \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2}3^n & 0 & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.2** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n & \frac{3}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & (-2)^n - 4^n & 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.3** $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n + \frac{3}{4}4^n & \frac{3}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{9}{4}4^n \\ \frac{5}{4}4^n - 2^n & \frac{5}{2}4^n & \frac{15}{4}4^n - 2^n \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{3}{4}4^n & -\frac{3}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{9}{4}4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.4** $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$ tir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{5}{8}\\-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}\text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{5}{8}\\-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&1&-6\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{pmatrix}=D\end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned}A^n &= PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^n&0&0\\0&(-3)^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{5}{8}\\-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{7}{8}(-3)^n+\frac{1}{8}5^n&\frac{1}{4}5^n-\frac{1}{4}(-3)^n&\frac{3}{8}(-3)^n-\frac{3}{8}5^n\\\frac{1}{4}5^n-\frac{1}{4}(-3)^n&\frac{1}{2}(-3)^n+\frac{1}{2}5^n&\frac{3}{4}(-3)^n-\frac{3}{4}5^n\\\frac{1}{8}(-3)^n-\frac{1}{8}5^n&\frac{1}{4}(-3)^n-\frac{1}{4}5^n&\frac{5}{8}(-3)^n+\frac{3}{8}5^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.5** $A=\begin{pmatrix}-7&3&4\\4&-6&2\\5&3&-8\end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-9$, $\lambda_3=12$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ve $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$ dir. $A$, $3\times3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18}\\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix}\frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18}\\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 3 & 4\\ 4 & -6 & 2\\ 5 & 3 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & -12\end{pmatrix} = D
\end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & (-9)^n & 0\\ 0 & 0 & (-12)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18}\\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{9}(-9)^n+\frac{1}{2}(-12)^n & -\frac{1}{3}(-9)^n & \frac{2}{9}(-9)^n-\frac{1}{2}(-12)^n\\ -\frac{2}{9}(-9)^n-\frac{1}{6}(-12)^n & \frac{2}{3}(-9)^n & \frac{1}{6}(-12)^n-\frac{4}{9}(-9)^n\\ \frac{1}{9}(-9)^n-\frac{1}{2}(-12)^n & -\frac{1}{3}(-9)^n & \frac{2}{9}(-9)^n+\frac{1}{2}(-12)^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.6** $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=9$ dur ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$ ve $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ dir. $A$, $3\times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{3} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{7}{18}9^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{5}{18}9^n - \frac{1}{2}(-3)^n \\ \frac{7}{18}9^n - \frac{1}{6}(-3)^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{18}9^n \\ \frac{7}{18}9^n - \frac{1}{2}(-3)^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{5}{18}9^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.7** $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=3$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3\times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-3)^n + \frac{1}{3}3^n & \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n \\ \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n & \frac{1}{6}(-3)^n - \frac{1}{6}3^n \\ \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{6}(-3)^n - \frac{1}{6}3^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.2.8** $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ *matrisinin köşegenleştirilebilir olduğunu gösterelim ve Önerme 1.1.22 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 15$ tir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir. $A$, $3 \times 3$ matris ve $A$ lineer bağımsız üç özvektöre sahip olduğundan, Teorem 1.1.23 den, $A$ köşegenleştirilebilirdir. Bunu direkt olarak da bulabiliriz.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \text{ dir ve}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

olduğundan $A$ köşegenleştirilebilirdir ve Önerme 1.1.22 kullanıldığında

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 15^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n & \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n & \frac{2}{9}15^n - \frac{4}{9}3^n \\ \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n & \frac{1}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n & -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n \\ \frac{2}{9}15^n - \frac{4}{9}3^n & -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n & \frac{4}{9}3^n + \frac{1}{9}15^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

# BÖLÜM 4

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN 2x2 TİPİNDE MATRİSLER VE KUVVETLERİ

## 4.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 2x2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 4.1.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisi için* $A = PJP^{-1}$ *olacak şekilde bir* $J$ *Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir* $P$ *matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 1^n & n \times 1^{n-1} \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 4.1.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$ *matrisi için* $A = PJP^{-1}$ *olacak şekilde bir* $J$ *Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir* $P$ *matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 1^n & n \times 1^{n-1} \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3n+1 & n \\ -9n & 1-3n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

## 4.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 2x2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 4.2.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *matrisi için* $A = PJP^{-1}$ *olacak şekilde bir* $J$ *Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir* $P$ *matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 2 \times 2^{n-1}n & -4 \times 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 4.2.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ *matrisi için* $A = PJP^{-1}$ *olacak şekilde bir* $J$ *Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir* $P$ *matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n \times (-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & n\,(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & n\,(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\,(-2)^{n-1}\,n + (-2)^n & -5\,(-2)^{n-1}\,n \\ 5\,(-2)^{n-1}\,n & (-2)^n - 5\,(-2)^{n-1}\,n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

# BÖLÜM 5

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN 3x3 TİPİNDE MATRİSLER VE KUVVETLERİ

## 5.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 3x3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 5.1.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$A = PJP^{-1}$$

*olacak şekilde bir $J$ Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir $P$ matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$\begin{aligned} J &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & n \times 1^{n-1} \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n+1 & 2n & 3n \\ n & 2n+1 & 3n \\ -n & -2n & 1-3n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**Örnek 5.1.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$A = PJP^{-1}$

*olacak şekilde bir $J$ Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir $P$ matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & n \times 1^{n-1} \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

:

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-3n & 2n & n \\ 3n-10 & 6-2n & 3-n \\ 20-15n & 10n-10 & 5n-5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 5.1.3** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$A = PJP^{-1}$

*olacak şekilde bir $J$ Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir $P$ matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ tür. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$\begin{aligned} J &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 1^n & n \times 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{3}{2} & 2n & \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{5}{2} \\ 3^n - 1 & 1 & 3^n - 1 \\ 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{3}{2} & -2n & 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur.

**Örnek 5.1.4** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$A = PJP^{-1}$

*olacak şekilde bir $J$ Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir $P$ matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1}n + 1 & 2^n - 1 & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 2^n & -2^{n-1}n \\ 4 \times 2^{n-1}n - 2 \times 2^n + 2 & 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$$

bulunur.

## 5.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 3x3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLER VE KUVVETLERİ

**Örnek 5.2.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$A = PJP^{-1}$

*olacak şekilde bir J Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir P matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak* $A^n$ *kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ tür. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \times 3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \times 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n \times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n - 3^{n-1}n & -3^{n-1}n & a(n) \\ 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & 2 \times 3^{n-1}n + 3^n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & b(n) \\ \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & c(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

$a(n) = 3^{n-1}n$

$b(n) = -2 \times 3^{n-1}n - \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

$c(n) = 3^n - 3^{n-1}n - \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

**Örnek 5.2.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$A = PJP^{-1}$$

*olacak şekilde bir $J$ Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir $P$ matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n - (-1)^n + 2^n & (-1)^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 5.2.3** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$A = PJP^{-1}$$

*olacak şekilde bir $J$ Jordan kanonik formu ve terslenebilir bir $P$ matrisi bulalım ve Önerme 1.1.27 den yararlanarak $A^n$ kuvvet matrisini bulalım.*

**Çözüm.** $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir. $A$ köşegenleştirilebilir değildir. $A$ nın Jordan formu

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 2^{n-1}n & -3 \times 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 3 \times 2^{n-1}n + 2^n & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 6 \times 2^{n-1}n & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

# BÖLÜM 6

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR 2x2 TİPİNDE MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

## 6.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 2X2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 6.1.1** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 31 örnek 2.1.1 de $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1 1^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c_1 - 2^n c_2 \\ c_1 + 2^n c_2 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.1) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}c_1 - c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -4, c_2 = 1$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.1) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2-2^n \\ 2^n-4 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2) = \left(1^n\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, 2^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n \\ 2^n-4 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 31 örnek 2.1.1 de

$$A^n = \begin{pmatrix} 2\times 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2-2\times 2^n & 2-2^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2\times 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2-2\times 2^n & 2-2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n \\ 2^n-4 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-n_0}-1 & 2^{n-n_0}-1 \\ 2-2\times 2^{n-n_0} & 2-2^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_2\left(2^{n-n_0}-1\right)+d_1\left(2\times 2^{n-n_0}-1\right) \\ -d_2\left(2^{n-n_0}-2\right)-d_1\left(2\times 2^{n-n_0}-2\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.1.2** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(1) = (1, 2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 32 örnek 2.1.2 de $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1 1^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n c_2 - c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.2) formülü ile verilen çözümde $n = 1$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 2c_2 - c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
2c_2 - c_1 &= 1 \\
c_1 &= 2
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 2, c_2 = \frac{3}{2}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.2) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(1)\mathbf{x}(1)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2) = \left( 1^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $n = 1$ için

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(1)\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} -1 & 2^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 32 örnek 2.1.2 de

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-1}\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^{n-1} - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} 2^{n-n_0} & 2^{n-n_0}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_2\left(2^{n-n_0}-1\right) + 2^{n-n_0} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 1$, $\mathbf{x}(1) = x_0 = (1, 2)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.1.3** $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 32 örnek 2.1.3 te $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 14$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1 1^n \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 14^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14^n c_2 - \frac{7}{6}c_1 \\ c_1 + 14^n c_2 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.3) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_2 - \frac{7}{6}c_1 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
-\frac{7}{6}c_1 + c_2 &= 1 \\
c_1 + c_2 &= -3
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{24}{13}, c_2 = -\frac{15}{13}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.3) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{28}{13} - \frac{15}{13}14^n \\ -\frac{15}{13}14^n - \frac{24}{13} \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2) = \left(1^n \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix}, 14^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 14^n \\ 1 & 14^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\,(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & 14^n \\ 1 & 14^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{28}{13} - \frac{15}{13}14^n \\ -\frac{15}{13}14^n - \frac{24}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 32 örnek 2.1.3 te

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{6}{13}14^n + \frac{7}{13} & \frac{7}{13}14^n - \frac{7}{13} \\ \frac{6}{13}14^n - \frac{6}{13} & \frac{7}{13}14^n + \frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{6}{13}14^n + \frac{7}{13} & \frac{7}{13}14^n - \frac{7}{13} \\ \frac{6}{13}14^n - \frac{6}{13} & \frac{7}{13}14^n + \frac{6}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{13} - \frac{15}{13}14^n \\ -\frac{15}{13}14^n - \frac{24}{13} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} \frac{6}{13}14^{n-n_0} + \frac{7}{13} & \frac{7}{13}14^{n-n_0} - \frac{7}{13} \\ \frac{6}{13}14^{n-n_0} - \frac{6}{13} & \frac{7}{13}14^{n-n_0} + \frac{6}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{6}{13}14^{n-n_0} + \frac{7}{13}\right) + d_2\left(\frac{7}{13}14^{n-n_0} - \frac{7}{13}\right) \\ d_1\left(\frac{6}{13}14^{n-n_0} - \frac{6}{13}\right) + d_2\left(\frac{7}{13}14^{n-n_0} + \frac{6}{13}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

## 6.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 2X2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 6.2.1** $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 33 örnek 2.2.1 de $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 3^n \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n c_1 - 4 \times 3^n c_2 \\ (-2)^n c_1 + 3^n c_2 \end{pmatrix} \qquad (6.4)\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.4) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 - 4c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 - 4c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{11}{5}, c_2 = -\frac{4}{5}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.4) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5}(-2)^n + \frac{16}{5} \times 3^n \\ -\frac{11}{5}(-2)^n - \frac{4}{5}3^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2) = \left( (-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 3^n \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (-2)^n & -4 \times 3^n \\ (-2)^n & 3^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} (-2)^n & -4 \times 3^n \\ (-2)^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{16}{5}3^n - \frac{11}{5}(-2)^n \\ -\frac{11}{5}(-2)^n - \frac{4}{5}3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 33 örnek 2.2.1 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-2)^n + \frac{4}{5}3^n & \frac{4}{5}(-2)^n - \frac{4}{5}3^n \\ \frac{1}{5}(-2)^n - \frac{1}{5}3^n & \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-2)^n + \frac{4}{5}3^n & \frac{4}{5}(-2)^n - \frac{4}{5}3^n \\ \frac{1}{5}(-2)^n - \frac{1}{5}3^n & \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{16}{5}3^n - \frac{11}{5}(-2)^n \\ -\frac{11}{5}(-2)^n - \frac{4}{5}3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-2)^{n-n_0} + \frac{4}{5}3^{n-n_0} & \frac{4}{5}(-2)^{n-n_0} - \frac{4}{5}3^{n-n_0} \\ \frac{1}{5}(-2)^{n-n_0} - \frac{1}{5}3^{n-n_0} & \frac{4}{5}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{5}3^{n-n_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{1}{5}(-2)^{n-n_0} + \frac{4}{5}3^{n-n_0}\right) + d_2\left(\frac{4}{5}(-2)^{n-n_0} - \frac{4}{5}3^{n-n_0}\right) \\ d_1\left(\frac{1}{5}(-2)^{n-n_0} - \frac{1}{5}3^{n-n_0}\right) + d_2\left(\frac{4}{5}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{5}3^{n-n_0}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.2.2** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 33 örnek 2.2.2 de $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -6$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 (-6)^n \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n c_1 - \frac{5}{9}(-6)^n c_2 \\ (-6)^n c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.5}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.5) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 - \frac{5}{9}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{5}{9}c_2 &= 1 \\ c_2 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{2}{3}, c_2 = -3$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.5) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}3^n + \frac{5}{3}(-6)^n \\ -3(-6)^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2) = \left(3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (-6)^n \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3^n & -\frac{5}{9}(-6)^n \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3^n & -\frac{5}{9}(-6)^n \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3}(-6)^n - \frac{2}{3}3^n \\ -3(-6)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 33 örnek 2.2.2 de

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \frac{5}{9}3^n - \frac{5}{9}(-6)^n \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3^n & \frac{5}{9}3^n - \frac{5}{9}(-6)^n \\ 0 & (-6)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}(-6)^n - \frac{2}{3}3^n \\ -3(-6)^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} 3^{n-n_0} & \frac{5}{9}3^{n-n_0} - \frac{5}{9}(-6)^{n-n_0} \\ 0 & (-6)^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n-n_0}d_1 + d_2\left(\frac{5}{9}3^{n-n_0} - \frac{5}{9}(-6)^{n-n_0}\right) \\ (-6)^{n-n_0}d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.2.3** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 34 örnek 2.2.3 te $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1(-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n c_1 + \frac{1}{4}2^n c_2 \\ (-1)^n c_1 + 2^n c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.6}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.6) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{1}{4}c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{1}{4}c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = \frac{7}{3}, c_2 = -\frac{16}{3}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.6) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}2^n \\ \frac{7}{3}(-1)^n - \frac{16}{3}2^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2) = \left((-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (-1)^n & \frac{1}{4}2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0)=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} (-1)^n & \frac{1}{4}2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(-1)^n-\frac{4}{3}2^n \\ \frac{7}{3}(-1)^n-\frac{16}{3}2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 34 örnek 2.2.3 te

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}2^n & \frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{4}{3}(-1)^n-\frac{4}{3}2^n & \frac{4}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}2^n & \frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{4}{3}(-1)^n-\frac{4}{3}2^n & \frac{4}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{3}(-1)^n-\frac{4}{3}2^n \\ \frac{7}{3}(-1)^n-\frac{16}{3}2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0)=x_0=(d_1,d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-1)^{n-n_0}-\frac{1}{3}2^{n-n_0} & \frac{1}{3}2^{n-n_0}-\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} \\ \frac{4}{3}(-1)^{n-n_0}-\frac{4}{3}2^{n-n_0} & \frac{4}{3}2^{n-n_0}-\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_2\left(\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0}-\frac{1}{3}2^{n-n_0}\right)-d_1\left(\frac{1}{3}2^{n-n_0}-\frac{4}{3}(-1)^{n-n_0}\right) \\ d_1\left(\frac{4}{3}(-1)^{n-n_0}-\frac{4}{3}2^{n-n_0}\right)-d_2\left(\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0}-\frac{4}{3}2^{n-n_0}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

NOT: $n_0=0$, $\mathbf{x}(0)=x_0=(1,-3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.2.4** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,-3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 35 örnek 2.2.4 te $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1(-1)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 5^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}5^n c_2 - (-1)^n c_1 \\ (-1)^n c_1 + 5^n c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.7}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.7) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_2 - c_1 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_2 - c_1 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{5}{3}, c_2 = -\frac{4}{3}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.7) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}5^n + \frac{5}{3}(-1)^n \\ -\frac{5}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}5^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2) = \left( (-1)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 5^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -(-1)^n & \frac{1}{2}5^n \\ (-1)^n & 5^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -(-1)^n & \frac{1}{2}5^n \\ (-1)^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}5^n \\ -\frac{5}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 35 örnek 2.2.4 te

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}5^n - \frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{2}{3}5^n - \frac{2}{3}(-1)^n & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}5^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}5^n & \frac{1}{3}5^n - \frac{1}{3}(-1)^n \\ \frac{2}{3}5^n - \frac{2}{3}(-1)^n & \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}5^n \\ -\frac{5}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{3}5^{n-n_0} & \frac{1}{3}5^{n-n_0} - \frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} \\ \frac{2}{3}5^{n-n_0} - \frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} & \frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{2}{3}5^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{3}5^{n-n_0}\right) - d_2\left(\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} - \frac{1}{3}5^{n-n_0}\right) \\ d_2\left(\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{2}{3}5^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} - \frac{2}{3}5^{n-n_0}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.2.5** $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 35 örnek 2.2.5 te $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1(-1)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 8^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n c_1 - 8^n c_2 \\ (-1)^n c_1 + 8^n c_2 \end{pmatrix} \qquad (6.8)\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.8) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c_1 - c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -3\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{4}{3}, c_2 = -\frac{5}{3}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.8) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{5}{3}8^n \\ -\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{5}{3}8^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2) = \left( (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, 8^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n & -8^n \\ (-1)^n & 8^n \end{pmatrix}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n & -8^n \\ (-1)^n & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3}8^n - \frac{2}{3}(-1)^n \\ -\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{5}{3}8^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 35 örnek 2.2.5 te

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}8^n & \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}8^n \\ \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}8^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}8^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}8^n & \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}8^n \\ \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}8^n & \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{3}8^n - \frac{2}{3}(-1)^n \\ -\frac{4}{3}(-1)^n - \frac{5}{3}8^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{2}{3}8^{n-n_0} & \frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} - \frac{1}{3}8^{n-n_0} \\ \frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} - \frac{2}{3}8^{n-n_0} & \frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{3}8^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{2}{3}8^{n-n_0}\right) + d_2\left(\frac{1}{3}(-1)^{n-n_0} - \frac{1}{3}8^{n-n_0}\right) \\ d_1\left(\frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} - \frac{2}{3}8^{n-n_0}\right) + d_2\left(\frac{2}{3}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{3}8^{n-n_0}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

**Örnek 6.2.6** $A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulunuz ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, -3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulunuz.*

**Çözüm.** Sayfa 36 örnek 2.2.6 da $A$ nın özdeğerleri olarak $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ ve bunlara karşılık gelen özvektörler, sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen formülü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 = c_1(-2)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 4^n \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(-2)^n c_1 - 3 \times 4^n c_2 \\ (-2)^n c_1 + 4^n c_2 \end{pmatrix} \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (6.9) formülü ile verilen çözümde $n=0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3c_1 - 3c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} 3c_1 - 3c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= -3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{4}{3}, c_2 = -\frac{5}{3}$ bulunur ve bulunan bu değerler (6.9) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -4\left(-2\right)^n + 5 \times 4^n \\ -\frac{4}{3}\left(-2\right)^n - \frac{5}{3}4^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\left(n\right) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2) = \left( \left(-2\right)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, 4^n \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3\left(-2\right)^n & -3 \times 4^n \\ \left(-2\right)^n & 4^n \end{pmatrix}$$

ve $n=0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\left(n\right) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3\left(-2\right)^n & -3 \times 4^n \\ \left(-2\right)^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 4^n - 4\left(-2\right)^n \\ -\frac{4}{3}\left(-2\right)^n - \frac{5}{3}4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 36 örnek 2.2.6 da

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{3}{2}(-2)^n - \frac{3}{2}4^n \\ \frac{1}{6}(-2)^n - \frac{1}{6}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{3}{2}(-2)^n - \frac{3}{2}4^n \\ \frac{1}{6}(-2)^n - \frac{1}{6}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 4^n - 4(-2)^n \\ -\frac{4}{3}(-2)^n - \frac{5}{3}4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{2}4^{n-n_0} & \frac{3}{2}(-2)^{n-n_0} - \frac{3}{2}4^{n-n_0} \\ \frac{1}{6}(-2)^{n-n_0} - \frac{1}{6}4^{n-n_0} & \frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{2}4^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{2}4^{n-n_0}\right) + d_2\left(\frac{3}{2}(-2)^{n-n_0} - \frac{3}{2}4^{n-n_0}\right) \\ d_2\left(\frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{2}4^{n-n_0}\right) + d_1\left(\frac{1}{6}(-2)^{n-n_0} - \frac{1}{6}4^{n-n_0}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, -3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir.

# BÖLÜM 7

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR 3x3 TİPİNDE MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

## 7.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 3X3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 7.1.1** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 2)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 37 örnek 3.1.1 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 3$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\
&= c_1(-1)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 1^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n c_3 - (-1)^n c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ (-1)^n c_1 - c_2 + 3^n c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (7.1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.1) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_3 - c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_1 - c_2 + c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_3 - c_1 - \frac{1}{2}c_2 &= 0 \\
c_1 - c_2 + c_3 &= 1 \\
c_2 &= 2
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 2$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.1) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 3^n c_3 - (-1)^n c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ (-1)^n c_1 - c_2 + 3^n c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - (-1)^n - 1 \\ 2 \times 3^n + (-1)^n - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned}\Psi(n) &= (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3) = \left( (-1)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -(-1)^n & -\frac{1}{2} & 3^n \\ (-1)^n & -1 & 3^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -(-1)^n & -\frac{1}{2} & 3^n \\ (-1)^n & -1 & 3^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - (-1)^n - 1 \\ (-1)^n + 2 \times 3^n - 2 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 37 örnek 3.1.1 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{3}{4}3^n - \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4}3^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{3}{4}3^n - \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4}3^n - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 3^n - (-1)^n - 1 \\ (-1)^n + 2\times 3^n - 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{2}3^{n-n_0} & \frac{1}{2}3^{n-n_0} - \frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} & a \\ \frac{1}{2}3^{n-n_0} - \frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} & \frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{2}3^{n-n_0} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada,

$a = \frac{3}{4}3^{n-n_0} - \frac{1}{4}(-1)^{n-n_0} - \frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{4}(-1)^{n-n_0} + \frac{3}{4}3^{n-n_0} - 1$

$c = d_1\left(\frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{2}3^{n-n_0}\right) - d_2\left(\frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} - \frac{1}{2}3^{n-n_0}\right)$

$-d_3\left(\frac{1}{4}(-1)^{n-n_0} - \frac{3}{4}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}\right)$

$d = d_2\left(\frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} + \frac{1}{2}3^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{1}{2}(-1)^{n-n_0} - \frac{1}{2}3^{n-n_0}\right)$

$+d_3\left(\frac{1}{4}(-1)^{n-n_0} + \frac{3}{4}3^{n-n_0} - 1\right)$

$e = d_3$ tür.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 2)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.1.2** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (0,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 38 örnek 3.1.2 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\ &= c_1 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3(-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 - (-2)^n c_2 - (-2)^n c_3 \\ (-2)^n c_2 - c_1 \\ c_1 + (-2)^n c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.2}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.2) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 \\ c_2 - c_1 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_3 &= 0 \\ c_2 - c_1 &= 1 \\ c_1 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = -1$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.2) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} c_1 - (-2)^n c_2 - (-2)^n c_3 \\ (-2)^n c_2 - c_1 \\ c_1 + (-2)^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-2)^n \\ 2(-2)^n - 1 \\ 1 - (-2)^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3) = \left( 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -(-2)^n & -(-2)^n \\ -1 & (-2)^n & 0 \\ 1 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -(-2)^n & -(-2)^n \\ -1 & (-2)^n & 0 \\ 1 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(-2)^n \\ 2\,(-2)^n - 1 \\ 1-(-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 38 örnek 3.1.2 de

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ (-2)^n - 1 & 2\,(-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1 \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ (-2)^n - 1 & 2\,(-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(-2)^n \\ 2\,(-2)^n - 1 \\ 1-(-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1-(-2)^{n-n_0} & 1-(-2)^{n-n_0} \\ (-2)^{n-n_0}-1 & 2(-2)^{n-n_0}-1 & (-2)^{n-n_0}-1 \\ 1-(-2)^{n-n_0} & 1-(-2)^{n-n_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 - d_2\left((-2)^{n-n_0}-1\right) - d_3\left((-2)^{n-n_0}-1\right) \\ d_1\left((-2)^{n-n_0}-1\right) + d_3\left((-2)^{n-n_0}-1\right) + d_2\left(2(-2)^{n-n_0}-1\right) \\ d_3 - d_1\left((-2)^{n-n_0}-1\right) - d_2\left((-2)^{n-n_0}-1\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.1.3** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(1) = (-1, 1, -2)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 39 örnek 3.1.3 te $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 10$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\ &= c_1 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 10^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 - (-2)^n c_2 + 10^n c_3 \\ \frac{1}{3}(-2)^n c_2 - 2c_1 + 10^n c_3 \\ c_1 + (-2)^n c_2 + 10^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (7.3)\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.3) formülü ile verilen çözümde $n = 1$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 + 10c_3 \\ 10c_3 - \frac{2}{3}c_2 - 2c_1 \\ c_1 - 2c_2 + 10c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 10c_3 &= -1 \\ 10c_3 - \frac{2}{3}c_2 - 2c_1 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 + 10c_3 &= -2 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{8}{9}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = -\frac{11}{180}$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.3) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} c_1 - (-2)^n c_2 + 10^n c_3 \\ \frac{1}{3}(-2)^n c_2 - 2c_1 + 10^n c_3 \\ c_1 + (-2)^n c_2 + 10^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(-2)^n - \frac{11}{180}10^n - \frac{8}{9} \\ \frac{1}{12}(-2)^n - \frac{11}{180}10^n + \frac{16}{9} \\ \frac{1}{4}(-2)^n - \frac{11}{180}10^n - \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(1)\mathbf{x}(1)$$

ile verilen (1.41) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned}
\Psi(n) &= (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3) = \left(1^n\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, (-2)^n\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}, 10^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}1 & -(-2)^n & 10^n\\ -2 & \frac{1}{3}(-2)^n & 10^n\\ 1 & (-2)^n & 10^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ve $n = 1$ için

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 10\\ -2 & -\frac{2}{3} & 10\\ 1 & -2 & 10\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(1) = \begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{7}{180} & \frac{1}{30} & \frac{1}{36}\end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(1)\mathbf{x}(1) \\
&= \begin{pmatrix}1 & -(-2)^n & 10^n\\ -2 & \frac{1}{3}(-2)^n & 10^n\\ 1 & (-2)^n & 10^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{7}{180} & \frac{1}{30} & \frac{1}{36}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}(-2)^n - \frac{11}{180}10^n - \frac{8}{9}\\ \frac{1}{12}(-2)^n - \frac{11}{180}10^n + \frac{16}{9}\\ \frac{1}{4}(-2)^n - \frac{11}{180}10^n - \frac{8}{9}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 39 örnek 3.1.3 te

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{7}{18}10^n - \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^n - \frac{1}{3} & \frac{1}{2}2^n + \frac{5}{18}10^n + \frac{2}{9}\\ \frac{1}{6}2^n + \frac{7}{18}10^n - \frac{2}{9} & \frac{1}{3}10^n + \frac{2}{3} & \frac{5}{18}10^n - \frac{1}{6}2^n - \frac{4}{9}\\ \frac{1}{2}2^n + \frac{7}{18}10^n + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^n - \frac{1}{3} & \frac{5}{18}10^n - \frac{1}{2}2^n + \frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-1}\mathbf{x}(1) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{18}10^{n-1} - \frac{1}{2}2^{n-1} + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^{n-1} - \frac{1}{3} & \frac{1}{2}2^{n-1} + \frac{5}{18}10^{n-1} + \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6}2^{n-1} + \frac{7}{18}10^{n-1} - \frac{2}{9} & \frac{1}{3}10^{n-1} + \frac{2}{3} & \frac{5}{18}10^{n-1} - \frac{1}{6}2^{n-1} - \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2}2^{n-1} + \frac{7}{18}10^{n-1} + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^{n-1} - \frac{1}{3} & \frac{5}{18}10^{n-1} - \frac{1}{2}2^{n-1} + \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}2^{n-1} - \frac{11}{18}10^{n-1} - \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6}2^{n-1} - \frac{11}{18}10^{n-1} + \frac{16}{9} \\ \frac{1}{2}2^{n-1} - \frac{11}{18}10^{n-1} - \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}2^{n} - \frac{11}{180}10^{n} - \frac{8}{9} \\ \frac{1}{12}2^{n} - \frac{11}{180}10^{n} + \frac{16}{9} \\ \frac{1}{4}2^{n} - \frac{11}{180}10^{n} - \frac{8}{9} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{18}10^{n-n_0} - \frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^{n-n_0} - \frac{1}{3} & \frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{5}{18}10^{n-n_0} + \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6}2^{n-n_0} + \frac{7}{18}10^{n-n_0} - \frac{2}{9} & \frac{1}{3}10^{n-n_0} + \frac{2}{3} & \frac{5}{18}10^{n-n_0} - \frac{1}{6}2^{n-n_0} - \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{7}{18}10^{n-n_0} + \frac{1}{9} & \frac{1}{3}10^{n-n_0} - \frac{1}{3} & \frac{5}{18}10^{n-n_0} - \frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$a = d_2\left(\frac{1}{3}10^{n-n_0} - \frac{1}{3}\right) + d_1\left(\frac{7}{18}10^{n-n_0} - \frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{1}{9}\right)$
$+d_3\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{5}{18}10^{n-n_0} + \frac{2}{9}\right)$
$b = d_2\left(\frac{1}{3}10^{n-n_0} + \frac{2}{3}\right) + d_1\left(\frac{1}{6}2^{n-n_0} + \frac{7}{18}10^{n-n_0} - \frac{2}{9}\right)$
$-d_3\left(\frac{1}{6}2^{n-n_0} - \frac{5}{18}10^{n-n_0} + \frac{4}{9}\right)$
$c = d_2\left(\frac{1}{3}10^{n-n_0} - \frac{1}{3}\right) + d_1\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{7}{18}10^{n-n_0} + \frac{1}{9}\right)$
$+d_3\left(\frac{5}{18}10^{n-n_0} - \frac{1}{2}2^{n-n_0} + \frac{2}{9}\right)$ dur.

NOT: $n_0 = 1$, $\mathbf{x}(1) = x_0 = (-1, 1, -2)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.1.4** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (0,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 40 örnek 3.1.4 te $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 21$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\
&= c_1 1^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 21^n \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}21^n c_3 - 3\times 2^n c_2 - c_1 \\ c_1 - 3\times 2^n c_2 + \frac{1}{6}21^n c_3 \\ 2^n c_2 + 21^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.4) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}c_3 - 3c_2 - c_1 \\ c_1 - 3c_2 + \frac{1}{6}c_3 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}c_3 - 3c_2 - c_1 &= 0 \\
c_1 - 3c_2 + \frac{1}{6}c_3 &= 1 \\
c_2 + c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{3}{19}, c_3 = \frac{3}{19}$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.4) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}21^n c_3 - 3 \times 2^n c_2 - c_1 \\ c_1 - 3 \times 2^n c_2 + \frac{1}{6}21^n c_3 \\ 2^n c_2 + 21^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n \\ \frac{1}{2} + \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n \\ -\frac{3}{19}2^n + \frac{3}{19}21^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3) = \left( 1^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 2^n \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, 21^n \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \times 2^n & \frac{1}{6}21^n \\ 1 & -3 \times 2^n & \frac{1}{6}21^n \\ 0 & 2^n & 21^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 1 & -3 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -3\times 2^n & \frac{1}{6}21^n \\ 1 & -3\times 2^n & \frac{1}{6}21^n \\ 0 & 2^n & 21^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{18}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} \\ \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 40 örnek 3.1.4 te

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \\ \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \\ \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n & \frac{1}{19}2^n + \frac{18}{19}21^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \\ \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \\ \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n & \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n & \frac{1}{19}2^n + \frac{18}{19}21^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n - \frac{1}{2} \\ \frac{9}{19}2^n + \frac{1}{38}21^n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{19}21^n - \frac{3}{19}2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} + \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} - \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^{n-n_0} - \frac{3}{19}2^{n-n_0} \\ \frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} - \frac{1}{2} & \frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} + \frac{1}{2} & \frac{3}{19}21^{n-n_0} - \frac{3}{19}2^{n-n_0} \\ \frac{3}{19}21^{n-n_0} - \frac{3}{19}2^{n-n_0} & \frac{3}{19}21^{n-n_0} - \frac{3}{19}2^{n-n_0} & \frac{1}{19}2^{n-n_0} + \frac{18}{19}21^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$a = d_1\left(\frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} + \frac{1}{2}\right) - d_3\left(\frac{3}{19}2^{n-n_0} - \frac{3}{19}21^{n-n_0}\right)$

$+d_2\left(\frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} - \frac{1}{2}\right)$

$b = d_1\left(\frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} - \frac{1}{2}\right) - d_3\left(\frac{3}{19}2^{n-n_0} - \frac{3}{19}21^{n-n_0}\right)$

$+d_2\left(\frac{9}{19}2^{n-n_0} + \frac{1}{38}21^{n-n_0} + \frac{1}{2}\right)$

$c = d_3\left(\frac{1}{19}2^{n-n_0} + \frac{18}{19}21^{n-n_0}\right) - d_2\left(\frac{3}{19}2^{n-n_0} - \frac{3}{19}21^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{3}{19}2^{n-n_0} - \frac{3}{19}21^{n-n_0}\right)$ dır.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.1.5** $A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -27 \\ 3 & -2 & 9 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*nin genel çözümünü ve ayrıca $x(0) = (0, 1, 0)^T$ başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 41 örnek 3.1.5 te $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\
&= c_1 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 1^n \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 (-2)^n \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 - 3(-2)^n c_3 \\ c_1 + (-2)^n c_3 \\ c_2 + (-2)^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.5) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 - 3c_3 \\ c_1 + c_3 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_1 - 3c_2 - 3c_3 &= 0 \\
c_1 + c_3 &= 1 \\
c_2 + c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 1$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.5) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 - 3(-2)^n c_3 \\ c_1 + (-2)^n c_3 \\ c_2 + (-2)^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3(-2)^n \\ (-2)^n \\ (-2)^n - 1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned}
\Psi(n) &= (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3) = \left( 1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1^n \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3\,(-2)^n \\ 1 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 1 & (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3\,(-2)^n \\ 1 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 1 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - 3\,(-2)^n \\ (-2)^n \\ (-2)^n - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 41 örnek 3.1.5 te

$$A^n = \begin{pmatrix} 3\,(-2)^n - 2 & 3 - 3\,(-2)^n & 9\,(-2)^n - 9 \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n & 3 - 3\,(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n - 1 & 4 - 3\,(-2)^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3(-2)^n-2 & 3-3(-2)^n & 9(-2)^n-9 \\ 1-(-2)^n & (-2)^n & 3-3(-2)^n \\ 1-(-2)^n & (-2)^n-1 & 4-3(-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3-3(-2)^n \\ (-2)^n \\ (-2)^n-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} 3(-2)^{n-n_0}-2 & 3-3(-2)^{n-n_0} & 9(-2)^{n-n_0}-9 \\ 1-(-2)^{n-n_0} & (-2)^{n-n_0} & 3-3(-2)^{n-n_0} \\ 1-(-2)^{n-n_0} & (-2)^{n-n_0}-1 & 4-3(-2)^{n-n_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1\left(3(-2)^{n-n_0}-2\right) - d_2\left(3(-2)^{n-n_0}-3\right) + d_3\left(9(-2)^{n-n_0}-9\right) \\ (-2)^{n-n_0}d_2 - d_3\left(3(-2)^{n-n_0}-3\right) - d_1\left((-2)^{n-n_0}-1\right) \\ d_2\left((-2)^{n-n_0}-1\right) - d_1\left((-2)^{n-n_0}-1\right) - d_3\left(3(-2)^{n-n_0}-4\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.1.6** $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca $x(0) = (0,1,0)^T$ başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 41 örnek 3.1.6 da $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\
&= c_1 1^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 4^n \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n c_2 - c_1 + \frac{7}{2}4^n c_3 \\ c_1 - 2\times 4^n c_3 \\ c_1 + 4^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.6) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 + \frac{7}{2}c_3 \\ c_1 - 2c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_2 - c_1 + \frac{7}{2}c_3 &= 0 \\
c_1 - 2c_3 &= 1 \\
c_1 + c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{3}{2}, c_3 = -\frac{1}{3}$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.6) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^n c_2 - c_1 + \frac{7}{2}4^n c_3 \\ c_1 - 2\times 4^n c_3 \\ c_1 + 4^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n - \frac{7}{6}2^{2n} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}2^{2n} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}2^{2n} \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned}\Psi(n) &= (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3) = \left(1^n\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, 2^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, 4^n\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 2^n & \frac{7}{2}4^n\\ 1 & 0 & -2\times 4^n\\ 1 & 0 & 4^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & \frac{7}{2}\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}-1 & 2^n & \frac{7}{2}4^n\\ 1 & 0 & -2\times 4^n\\ 1 & 0 & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{3}{2}2^n - \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}4^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 41 örnek 3.1.6 da

$$A^n = \begin{pmatrix}2^n & \frac{3}{2}2^n - \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{3} & \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{2}2^n - \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}4^n\\ 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}4^n + \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{3}{2}2^n - \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{3} & \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{2}2^n - \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}4^n \\ 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}4^n & \frac{1}{3}4^n + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n - \frac{7}{6}4^n - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}4^n + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-n_0} & \frac{3}{2}2^{n-n_0} - \frac{7}{6}4^{n-n_0} - \frac{1}{3} & \frac{7}{6}4^{n-n_0} - \frac{1}{2}2^{n-n_0} - \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}4^{n-n_0} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}4^{n-n_0} \\ 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}4^{n-n_0} & \frac{1}{3}4^{n-n_0} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-n_0}d_1 - d_2\left(\frac{7}{6}4^{n-n_0} - \frac{3}{2}2^{n-n_0} + \frac{1}{3}\right) - d_3\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0} - \frac{7}{6}4^{n-n_0} + \frac{2}{3}\right) \\ d_2\left(\frac{2}{3}4^{n-n_0} + \frac{1}{3}\right) - d_3\left(\frac{2}{3}4^{n-n_0} - \frac{2}{3}\right) \\ d_3\left(\frac{1}{3}4^{n-n_0} + \frac{2}{3}\right) - d_2\left(\frac{1}{3}4^{n-n_0} - \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.1.7** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 42 örnek 3.1.7 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

Ayrıca Sayfa 42 örnek 3.1.7 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}3^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^n & \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}3^n & \frac{2}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n \\ \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^n & \frac{1}{6}3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}3^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^n & \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}3^n & \frac{2}{3}3^n & -\frac{1}{3}3^n \\ \frac{1}{6}3^n - \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^n & \frac{1}{6}3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}3^n \\ \frac{2}{3}3^n \\ -\frac{1}{3}3^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}3^{n-n_0} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^{n-n_0} & \frac{1}{6}3^{n-n_0} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}3^{n-n_0} & \frac{2}{3}3^{n-n_0} & -\frac{1}{3}3^{n-n_0} \\ \frac{1}{6}3^{n-n_0} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}3^{n-n_0} & \frac{1}{6}3^{n-n_0} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{1}{6}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}\right) + d_3\left(\frac{1}{6}3^{n-n_0} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}3^{n-n_0}d_2 \\ \frac{2}{3}3^{n-n_0}d_2 - \frac{1}{3}3^{n-n_0}d_1 - \frac{1}{3}3^{n-n_0}d_3 \\ d_1\left(\frac{1}{6}3^{n-n_0} - \frac{1}{2}\right) + d_3\left(\frac{1}{6}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}3^{n-n_0}d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

## 7.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 3X3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEBİLİR MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 7.2.1** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (0,1,0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 43 örnek 3.2.1 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\ &= c_1 3^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n c_3 - 3^n c_2 \\ 3^n c_1 + 2 \times 5^n c_3 \\ 3^n c_2 + 5^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (7.7) \end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.7) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_3 - c_2 \\ c_1 + 2c_3 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_3 - c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_3 &= 1 \\ c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.7) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 5^n c_3 - 3^n c_2 \\ 3^n c_1 + 2 \times 5^n c_3 \\ 3^n c_2 + 5^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}\,(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3) = \left( 3^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3^n & 5^n \\ 3^n & 0 & 2 \times 5^n \\ 0 & 3^n & 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -3^n & 5^n \\ 3^n & 0 & 2\times 5^n \\ 0 & 3^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3^n \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 43 örnek 3.2.1 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}5^n & 0 & \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2}3^n \\ 5^n - 3^n & 3^n & 5^n - 3^n \\ \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2}3^n & 0 & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}5^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}5^n & 0 & \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2}3^n \\ 5^n - 3^n & 3^n & 5^n - 3^n \\ \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2}3^n & 0 & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}5^{n-n_0} & 0 & \frac{1}{2}5^{n-n_0} - \frac{1}{2}3^{n-n_0} \\ 5^{n-n_0} - 3^{n-n_0} & 3^{n-n_0} & 5^{n-n_0} - 3^{n-n_0} \\ \frac{1}{2}5^{n-n_0} - \frac{1}{2}3^{n-n_0} & 0 & \frac{1}{2}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}5^{n-n_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left(\frac{1}{2}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}5^{n-n_0}\right) - d_3\left(\frac{1}{2}3^{n-n_0} - \frac{1}{2}5^{n-n_0}\right) \\ 3^{n-n_0}d_2 - d_3\left(3^{n-n_0} - 5^{n-n_0}\right) - d_1\left(3^{n-n_0} - 5^{n-n_0}\right) \\ d_3\left(\frac{1}{2}3^{n-n_0} + \frac{1}{2}5^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{1}{2}3^{n-n_0} - \frac{1}{2}5^{n-n_0}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.2** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (0,1,1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 44 örnek 3.2.2 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\
&= c_1(-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 4^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-2)^n c_1 - (-2)^n c_2 + \frac{1}{2}4^n c_3 \\ (-2)^n c_1 + \frac{1}{2}4^n c_3 \\ (-2)^n c_2 + 4^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (7.8)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.8) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_1 - c_2 + \frac{1}{2}c_3 &= 0 \\
c_1 + \frac{1}{2}c_3 &= 1 \\
c_2 + c_3 &= 1
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.8) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} (-2)^n c_1 - (-2)^n c_2 + \frac{1}{2}4^n c_3 \\ (-2)^n c_1 + \frac{1}{2}4^n c_3 \\ (-2)^n c_2 + 4^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-2)^n \\ (-2)^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3) = \left( (-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (-2)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 4^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & -(-2)^n & \frac{1}{2}4^n \\ (-2)^n & 0 & \frac{1}{2}4^n \\ 0 & (-2)^n & 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} (-2)^n & -(-2)^n & \frac{1}{2}4^n \\ (-2)^n & 0 & \frac{1}{2}4^n \\ 0 & (-2)^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ (-2)^n \\ (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 44 örnek 3.2.2 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n & \frac{3}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & (-2)^n - 4^n & 4^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n & \frac{3}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ 4^n - (-2)^n & (-2)^n - 4^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ (-2)^n \\ (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} + \frac{1}{2}4^{n-n_0} & \frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} - \frac{1}{2}4^{n-n_0} & a \\ \frac{1}{2}4^{n-n_0} - \frac{1}{2}(-2)^{n-n_0} & \frac{3}{2}(-2)^{n-n_0} - \frac{1}{2}4^{n-n_0} & b \\ 4^{n-n_0} - (-2)^{n-n_0} & (-2)^{n-n_0} - 4^{n-n_0} & 4^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$a=\frac{1}{2}4^{n-n_0}-\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}$

$b=\frac{1}{2}4^{n-n_0}-\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}$

$c=d_1\left(\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}+\frac{1}{2}4^{n-n_0}\right)+d_2\left(\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}-\frac{1}{2}4^{n-n_0}\right)$

$-d_3\left(\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}-\frac{1}{2}4^{n-n_0}\right)$

$d=d_2\left(\frac{3}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}-\frac{1}{2}4^{n-n_0}\right)-d_3\left(\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}-\frac{1}{2}4^{n-n_0}\right)$

$-d_1\left(\frac{1}{2}\left(-2\right)^{n-n_0}-\frac{1}{2}4^{n-n_0}\right)$

$e=d_2\left(\left(-2\right)^{n-n_0}-4^{n-n_0}\right)-d_1\left(\left(-2\right)^{n-n_0}-4^{n-n_0}\right)+4^{n-n_0}d_3$ tür.

NOT: $n_0=0$, $\mathbf{x}(0)=x_0=(0,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.3** $A=\begin{pmatrix}4&6&10\\3&10&13\\-2&-6&-8\end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}\left(n+1\right)=A\mathbf{x}\left(n\right)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0)=(0,1,0)^T=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 45 örnek 3.2.3 te $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ve $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{5}{3}\\1\end{pmatrix}$ bulunmuştu.

Ayrıca Sayfa 45 örnek 3.2.3 te

$$A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}2^n+\frac{3}{4}4^n&\frac{3}{2}4^n&\frac{1}{2}2^n+\frac{9}{4}4^n\\\frac{5}{4}4^n-2^n&\frac{5}{2}4^n&\frac{15}{4}4^n-2^n\\\frac{1}{2}2^n-\frac{3}{4}4^n&-\frac{3}{2}4^n&\frac{1}{2}2^n-\frac{9}{4}4^n\end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n+\frac{3}{4}4^n & \frac{3}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n+\frac{9}{4}4^n \\ \frac{5}{4}4^n-2^n & \frac{5}{2}4^n & \frac{15}{4}4^n-2^n \\ \frac{1}{2}2^n-\frac{3}{4}4^n & -\frac{3}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n-\frac{9}{4}4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}4^n \\ \frac{5}{2}4^n \\ -\frac{3}{2}4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^{n-n_0}+\frac{3}{4}4^{n-n_0} & \frac{3}{2}4^{n-n_0} & \frac{1}{2}2^{n-n_0}+\frac{9}{4}4^{n-n_0} \\ \frac{5}{4}4^{n-n_0}-2^{n-n_0} & \frac{5}{2}4^{n-n_0} & \frac{15}{4}4^{n-n_0}-2^{n-n_0} \\ \frac{1}{2}2^{n-n_0}-\frac{3}{4}4^{n-n_0} & -\frac{3}{2}4^{n-n_0} & \frac{1}{2}2^{n-n_0}-\frac{9}{4}4^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}4^{n-n_0}d_2 + d_1\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0}+\frac{3}{4}4^{n-n_0}\right) + d_3\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0}+\frac{9}{4}4^{n-n_0}\right) \\ \frac{5}{2}4^{n-n_0}d_2 - d_3\left(2^{n-n_0}-\frac{15}{4}4^{n-n_0}\right) - d_1\left(2^{n-n_0}-\frac{5}{4}4^{n-n_0}\right) \\ d_1\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0}-\frac{3}{4}4^{n-n_0}\right) - \frac{3}{2}4^{n-n_0}d_2 + d_3\left(\frac{1}{2}2^{n-n_0}-\frac{9}{4}4^{n-n_0}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.4** $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(1) = (1,-1,2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 46 örnek 3.2.4 te $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\
&= c_1(-3)^n\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2(-3)^n\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + c_3 5^n\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}3(-3)^n c_2 - 2(-3)^n c_1 - 5^n c_3\\ (-3)^n c_1 - 2\times 5^n c_3\\ (-3)^n c_2 + 5^n c_3\end{pmatrix} \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.9) formülü ile verilen çözümde $n = 1$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix}6c_1 - 9c_2 - 5c_3\\ -3c_1 - 10c_3\\ 5c_3 - 3c_2\end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
6c_1 - 9c_2 - 5c_3 &= 1\\
-3c_1 - 10c_3 &= -1\\
5c_3 - 3c_2 &= 2
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{1}{4}, c_2 = -\frac{3}{8}, c_3 = \frac{7}{40}$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.9) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix}3(-3)^n c_2 - 2(-3)^n c_1 - 5^n c_3\\ (-3)^n c_1 - 2\times 5^n c_3\\ (-3)^n c_2 + 5^n c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{8}(-3)^n - \frac{7}{40}5^n\\ -\frac{1}{4}(-3)^n - \frac{7}{20}5^n\\ \frac{7}{40}5^n - \frac{3}{8}(-3)^n\end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$
\begin{aligned}
\Psi(n) &= (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3) = \left( (-3)^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (-3)^n \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 5^n \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -2\,(-3)^n & 3\,(-3)^n & -5^n \\ (-3)^n & 0 & -2\times 5^n \\ 0 & (-3)^n & 5^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ve $n = 1$ için

$$
\Psi(1) = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ -3 & 0 & -10 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}
$$

olduğundan

$$
\Psi^{-1}(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{24} \\ -\frac{1}{40} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{40} \end{pmatrix}
$$

bulunur. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(1)\mathbf{x}(1) \\
&= \begin{pmatrix} -2\,(-3)^n & 3\,(-3)^n & -5^n \\ (-3)^n & 0 & -2\times 5^n \\ 0 & (-3)^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{5}{24} \\ -\frac{1}{40} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{8}\,(-3)^n - \frac{7}{40}5^n \\ -\frac{1}{4}\,(-3)^n - \frac{7}{20}5^n \\ \frac{7}{40}5^n - \frac{3}{8}\,(-3)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 46 örnek 3.2.4 te

$$
A^n = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\,(-3)^n + \frac{1}{8}5^n & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4}\,(-3)^n & \frac{3}{8}\,(-3)^n - \frac{3}{8}5^n \\ \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4}\,(-3)^n & \frac{1}{2}\,(-3)^n + \frac{1}{2}5^n & \frac{3}{4}\,(-3)^n - \frac{3}{4}5^n \\ \frac{1}{8}\,(-3)^n - \frac{1}{8}5^n & \frac{1}{4}\,(-3)^n - \frac{1}{4}5^n & \frac{5}{8}\,(-3)^n + \frac{3}{8}5^n \end{pmatrix}
$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-1}\mathbf{x}(1) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{8}(-3)^{n-1}+\frac{1}{8}5^{n-1} & \frac{1}{4}5^{n-1}-\frac{1}{4}(-3)^{n-1} & \frac{3}{8}(-3)^{n-1}-\frac{3}{8}5^{n-1} \\ \frac{1}{4}5^{n-1}-\frac{1}{4}(-3)^{n-1} & \frac{1}{2}(-3)^{n-1}+\frac{1}{2}5^{n-1} & \frac{3}{4}(-3)^{n-1}-\frac{3}{4}5^{n-1} \\ \frac{1}{8}(-3)^{n-1}-\frac{1}{8}5^{n-1} & \frac{1}{4}(-3)^{n-1}-\frac{1}{4}5^{n-1} & \frac{5}{8}(-3)^{n-1}+\frac{3}{8}5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{15}{8}(-3)^{n-1}-\frac{7}{8}5^{n-1} \\ \frac{3}{4}(-3)^{n-1}-\frac{7}{4}5^{n-1} \\ \frac{9}{8}(-3)^{n-1}+\frac{7}{8}5^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{8}(-3)^{n-n_0}+\frac{1}{8}5^{n-n_0} & \frac{1}{4}5^{n-n_0}-\frac{1}{4}(-3)^{n-n_0} & a \\ \frac{1}{4}5^{n-n_0}-\frac{1}{4}(-3)^{n-n_0} & \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0}+\frac{1}{2}5^{n-n_0} & b \\ \frac{1}{8}(-3)^{n-n_0}-\frac{1}{8}5^{n-n_0} & \frac{1}{4}(-3)^{n-n_0}-\frac{1}{4}5^{n-n_0} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$a = \frac{3}{8}(-3)^{n-n_0} - \frac{3}{8}5^{n-n_0}$

$b = \frac{3}{4}(-3)^{n-n_0} - \frac{3}{4}5^{n-n_0}$

$c = \frac{5}{8}(-3)^{n-n_0} + \frac{3}{8}5^{n-n_0}$

$d = d_1\left(\frac{7}{8}(-3)^{n-n_0} + \frac{1}{8}5^{n-n_0}\right) - d_2\left(\frac{1}{4}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{4}5^{n-n_0}\right)$
$+d_3\left(\frac{3}{8}(-3)^{n-n_0} - \frac{3}{8}5^{n-n_0}\right)$

$e = d_2\left(\frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} + \frac{1}{2}5^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{1}{4}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{4}5^{n-n_0}\right)$
$+d_3\left(\frac{3}{4}(-3)^{n-n_0} - \frac{3}{4}5^{n-n_0}\right)$

$f = d_2\left(\frac{1}{4}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{4}5^{n-n_0}\right) + d_1\left(\frac{1}{8}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{8}5^{n-n_0}\right)$
$+d_3\left(\frac{5}{8}(-3)^{n-n_0} + \frac{3}{8}5^{n-n_0}\right)$ dır.

NOT: $n_0 = 1, \mathbf{x}(1) = x_1 = (1, -1, 2)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.5** $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (0,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 47 örnek 3.2.5 te $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 12$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

Ayrıca Sayfa 47 örnek 3.2.5 te

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(-9)^n + \frac{1}{2}(-12)^n & -\frac{1}{3}(-9)^n & \frac{2}{9}(-9)^n - \frac{1}{2}(-12)^n \\ -\frac{2}{9}(-9)^n - \frac{1}{6}(-12)^n & \frac{2}{3}(-9)^n & \frac{1}{6}(-12)^n - \frac{4}{9}(-9)^n \\ \frac{1}{9}(-9)^n - \frac{1}{2}(-12)^n & -\frac{1}{3}(-9)^n & \frac{2}{9}(-9)^n + \frac{1}{2}(-12)^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(-9)^n + \frac{1}{2}(-12)^n & -\frac{1}{3}(-9)^n & \frac{2}{9}(-9)^n - \frac{1}{2}(-12)^n \\ -\frac{2}{9}(-9)^n - \frac{1}{6}(-12)^n & \frac{2}{3}(-9)^n & \frac{1}{6}(-12)^n - \frac{4}{9}(-9)^n \\ \frac{1}{9}(-9)^n - \frac{1}{2}(-12)^n & -\frac{1}{3}(-9)^n & \frac{2}{9}(-9)^n + \frac{1}{2}(-12)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-9)^n \\ \frac{2}{3}(-9)^n \\ -\frac{1}{3}(-9)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(-9)^{n-n_0} + \frac{1}{2}(-12)^{n-n_0} & -\frac{1}{3}(-9)^{n-n_0} & a \\ -\frac{2}{9}(-9)^{n-n_0} - \frac{1}{6}(-12)^{n-n_0} & \frac{2}{3}(-9)^{n-n_0} & b \\ \frac{1}{9}(-9)^{n-n_0} - \frac{1}{2}(-12)^{n-n_0} & -\frac{1}{3}(-9)^{n-n_0} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$a = \frac{2}{9}(-9)^{n-n_0} - \frac{1}{2}(-12)^{n-n_0}$

$b = \frac{1}{6}(-12)^{n-n_0} - \frac{4}{9}(-9)^{n-n_0}$

$c = \frac{2}{9}(-9)^{n-n_0} + \frac{1}{2}(-12)^{n-n_0}$

$d = d_1\left(\frac{1}{9}(-9)^{n-n_0} + \frac{1}{2}(-12)^{n-n_0}\right) - \frac{1}{3}(-9)^{n-n_0} d_2$

$-d_3\left(\frac{1}{2}(-12)^{n-n_0} - \frac{2}{9}(-9)^{n-n_0}\right)$

$e = \frac{2}{3}(-9)^{n-n_0} d_2 - d_1\left(\frac{2}{9}(-9)^{n-n_0} + \frac{1}{6}(-12)^{n-n_0}\right)$

$+d_3\left(\frac{1}{6}(-12)^{n-n_0} - \frac{4}{9}(-9)^{n-n_0}\right)$

$f = d_3\left(\frac{2}{9}(-9)^{n-n_0} + \frac{1}{2}(-12)^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{1}{2}(-12)^{n-n_0} - \frac{1}{9}(-9)^{n-n_0}\right)$

$-\frac{1}{3}(-9)^{n-n_0} d_2$ dir.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.6** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca $x(0) = (0, 1, 0)^T$ başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 48 örnek 3.2.6 da $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 9$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

Ayrıca Sayfa 48 örnek 3.2.6 da

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{7}{18}9^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{5}{18}9^n - \frac{1}{2}(-3)^n \\ \frac{7}{18}9^n - \frac{1}{6}(-3)^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{18}9^n \\ \frac{7}{18}9^n - \frac{1}{2}(-3)^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{5}{18}9^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{7}{18}9^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{5}{18}9^n - \frac{1}{2}(-3)^n \\ \frac{7}{18}9^n - \frac{1}{6}(-3)^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{18}9^n \\ \frac{7}{18}9^n - \frac{1}{2}(-3)^n & \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{5}{18}9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}9^n \\ \frac{1}{3}9^n \\ \frac{1}{3}9^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} + \frac{7}{18}3^{2n-2n_0} & \frac{1}{3}3^{2n-2n_0} & \frac{5}{18}3^{2n-2n_0} - \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} \\ \frac{7}{18}3^{2n-2n_0} - \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} & \frac{1}{3}3^{2n-2n_0} & \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{18}3^{2n-2n_0} \\ \frac{7}{18}3^{2n-2n_0} - \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} & \frac{1}{3}3^{2n-2n_0} & \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{18}3^{2n-2n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}3^{2n-2n_0}d_2 + d_1\left(\frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} + \frac{7}{18}3^{2n-2n_0}\right) + d_3\left(\frac{5}{18}3^{2n-2n_0} - \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0}\right) \\ \frac{1}{3}3^{2n-2n_0}d_2 + d_1\left(\frac{7}{18}3^{2n-2n_0} - \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0}\right) + d_3\left(\frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{18}3^{2n-2n_0}\right) \\ \frac{1}{3}3^{2n-2n_0}d_2 + d_1\left(\frac{7}{18}3^{2n-2n_0} - \frac{1}{2}(-3)^{n-n_0}\right) + d_3\left(\frac{1}{2}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{18}3^{2n-2n_0}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.7** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (1, 1, 2)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 49 örnek 3.2.7 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 3$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

**I. Yöntem.** Teorem 1.4.3 te verilen (1.39) formülünü kullanarak, verilen fark denklem sisteminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= c_1\lambda_1^n\xi_1 + c_2\lambda_2^n\xi_2 + c_3\lambda_3^n\xi_3 \\ &= c_1(-3)^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 3^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 3^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n c_2 - 2(-3)^n c_1 + \frac{1}{2}3^n c_3 \\ (-3)^n c_1 + 3^n c_2 \\ (-3)^n c_1 + 3^n c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.10}$$

bulunur.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (7.10) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2}c_3 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 + c_3 &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{5}{6}, c_3 = \frac{11}{6}$ bulunur ve bulunan bu değerler (7.10) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n c_2 - 2(-3)^n c_1 + \frac{1}{2}3^n c_3 \\ (-3)^n c_1 + 3^n c_2 \\ (-3)^n c_1 + 3^n c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n \\ \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n \\ \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{11}{6}3^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem (özel çözüm için).** Verilen başlangıç koşullu çözümü Teorem 1.4.4 te, $\Psi(n) = (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3)$ olmak üzere

$\mathbf{x}(n) = \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0)$

ile verilen (1.42) formülünü kullanarak bulacağız.

$$\begin{aligned}
\Psi(n) &= (\lambda_1^n \xi_1, \lambda_2^n \xi_2, \lambda_3^n \xi_3) = \left( (-3)^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 3^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 3^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -2(-3)^n & \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n \\ (-3)^n & 3^n & 0 \\ (-3)^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ve $n = 0$ için

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= \Psi(n)\Psi^{-1}(0)\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} -2(-3)^n & \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}3^n \\ (-3)^n & 3^n & 0 \\ (-3)^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n \\ \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n \\ \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{11}{6}3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir.

**III. Yöntem.** Sayfa 49 örnek 3.2.7 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-3)^n + \frac{1}{3}3^n & \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n \\ \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n & \frac{1}{6}(-3)^n - \frac{1}{6}3^n \\ \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{6}(-3)^n - \frac{1}{6}3^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-3)^n + \frac{1}{3}3^n & \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n \\ \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n & \frac{1}{6}(-3)^n - \frac{1}{6}3^n \\ \frac{1}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n & \frac{1}{6}(-3)^n - \frac{1}{6}3^n & \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}3^n - \frac{1}{3}(-3)^n \\ \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{5}{6}3^n \\ \frac{1}{6}(-3)^n + \frac{11}{6}3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-3)^{n-n_0} + \frac{1}{3}3^{n-n_0} & \frac{1}{3}3^{n-n_0} - \frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} & a \\ \frac{1}{3}3^{n-n_0} - \frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} & \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{6}3^{n-n_0} & b \\ \frac{1}{3}3^{n-n_0} - \frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} & \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{6}3^{n-n_0} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$a = \frac{1}{3}3^{n-n_0} - \frac{1}{3}(-3)^{n-n_0}$

$b = \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{6}3^{n-n_0}$

$c = \frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{6}3^{n-n_0}$

$d = d_1\left(\frac{2}{3}(-3)^{n-n_0} + \frac{1}{3}3^{n-n_0}\right) - d_2\left(\frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{3}3^{n-n_0}\right)$

$-d_3\left(\frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{3}3^{n-n_0}\right)$

$e = d_3\left(\frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{6}3^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{3}3^{n-n_0}\right)$

$+d_2\left(\frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{6}3^{n-n_0}\right)$

$f = d_2\left(\frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{6}3^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{1}{3}(-3)^{n-n_0} - \frac{1}{3}3^{n-n_0}\right)$

$+d_3\left(\frac{1}{6}(-3)^{n-n_0} + \frac{5}{6}3^{n-n_0}\right)$ dır.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, 1, 2)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

**Örnek 7.2.8** $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ *olmak üzere*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*nin genel çözümünü ve ayrıca* $x(0) = (0,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Sayfa 50 örnek 3.2.8 de $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 15$ olarak ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu.

Ayrıca Sayfa 50 örnek 3.2.8 de

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n & \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n & \frac{2}{9}15^n - \frac{4}{9}3^n \\ \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n & \frac{1}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n & -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n \\ \frac{2}{9}15^n - \frac{4}{9}3^n & -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n & \frac{4}{9}3^n + \frac{1}{9}15^n \end{pmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre, Sonuç 1.4.1 de verilen (1.35) formülünü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n & \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n & \frac{2}{9}15^n - \frac{4}{9}3^n \\ \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n & \frac{1}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n & -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n \\ \frac{2}{9}15^n - \frac{4}{9}3^n & -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n & \frac{4}{9}3^n + \frac{1}{9}15^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{9}3^n - \frac{4}{9}15^n \\ \frac{1}{9}3^n + \frac{4}{9}15^n \\ -\frac{2}{9}3^n - \frac{2}{9}15^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 1.4.1 den keyfi $\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$ başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0)\\
= &\begin{pmatrix} \frac{4}{9}3^{n-n_0} + \frac{4}{9}15^{n-n_0} & \frac{2}{9}3^{n-n_0} - \frac{4}{9}15^{n-n_0} & \frac{2}{9}15^{n-n_0} - \frac{4}{9}3^{n-n_0} \\ \frac{2}{9}3^{n-n_0} - \frac{4}{9}15^{n-n_0} & \frac{1}{9}3^{n-n_0} + \frac{4}{9}15^{n-n_0} & -\frac{2}{9}3^{n-n_0} - \frac{2}{9}15^{n-n_0} \\ \frac{2}{9}15^{n-n_0} - \frac{4}{9}3^{n-n_0} & -\frac{2}{9}3^{n-n_0} - \frac{2}{9}15^{n-n_0} & \frac{4}{9}3^{n-n_0} + \frac{1}{9}15^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}\\
= &\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada
$a = d_2\left(\frac{2}{9}3^{n-n_0} - \frac{4}{9}15^{n-n_0}\right) + d_1\left(\frac{4}{9}3^{n-n_0} + \frac{4}{9}15^{n-n_0}\right)$
$-d_3\left(\frac{4}{9}3^{n-n_0} - \frac{2}{9}15^{n-n_0}\right)$
$b = d_1\left(\frac{2}{9}3^{n-n_0} - \frac{4}{9}15^{n-n_0}\right) + d_2\left(\frac{1}{9}3^{n-n_0} + \frac{4}{9}15^{n-n_0}\right)$
$-d_3\left(\frac{2}{9}3^{n-n_0} + \frac{2}{9}15^{n-n_0}\right)$
$c = d_3\left(\frac{4}{9}3^{n-n_0} + \frac{1}{9}15^{n-n_0}\right) - d_1\left(\frac{4}{9}3^{n-n_0} - \frac{2}{9}15^{n-n_0}\right)$
$-d_2\left(\frac{2}{9}3^{n-n_0} + \frac{2}{9}15^{n-n_0}\right)$ dır.
NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (0, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. ■

# BÖLÜM 8

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN 2x2 TİPİNDE MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

## 8.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 2X2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 8.1.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,1)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 4.1.1 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_2 = (0,1)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

- $J^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$, keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} 1 & n-n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + d_2\,(n-n_0) \\ d_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_1 + d_2\,(n-n_0) \\ d_2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + nc_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.1}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.1) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1$, bulunur ve bulunan bu değerler (8.1) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + nc_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.2}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.2) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1$ bulunur ve bulunan bu değerler (8.2) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 8.1.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}\left(n+1\right) = A\mathbf{x}\left(n\right)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,-1)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 4.1.2 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.
- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_2 = (0,1)^T$ dir.
- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ dir.
- $J^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $A^n = \begin{pmatrix} 3n+1 & n \\ -9n & 1-3n \end{pmatrix}$.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3n+1 & n \\ -9n & 1-3n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 \\ -6n-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) = \begin{pmatrix} 3(n-n_0)+1 & n-n_0 \\ -9(n-n_0) & 1-3(n-n_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_2\,(n-n_0) + d_1\,(3n-3n_0+1) \\ d_2\,(3n_0-3n+1) + d_1\,(9n_0-9n) \end{pmatrix}$$
bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,-1)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = -1$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ -6n-1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 3n+1 & n \\ -9n & 1-3n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1\,(3n+1) + nc_2 \\ -c_2\,(3n-1) - 9nc_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.3}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.3) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = -1$ bulunur ve bulunan bu değerler (8.3) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ -6n-1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c_1 - c_2\left(n+\frac{1}{3}\right) \\ 3c_1 + 3nc_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.4}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.4) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -c_1 - \frac{1}{3}c_2 \\ 3c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} -c_1 - \frac{1}{3}c_2 &= 1 \\ 3c_1 &= -1 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = -2$ bulunur ve bulunan bu değerler (8.4) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ -6n-1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

## 8.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 2X2 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 8.2.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,2)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 4.2.1 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_2 = (1, 0)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dir.

- $J^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

- $A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 2 \times 2^{n-1}n & -4 \times 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \end{pmatrix}$.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= A^n \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^n - 2 \times 2^{n-1}n & -4 \times 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - 10 \times 2^{n-1}n \\ 5 \times 2^{n-1}n + 2 \times 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-n_0} - 2 \times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & -4 \times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) \\ 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & 2 \times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) + 2^{n-n_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1\left(2^{n-n_0} - 2 \times 2^{n-n_0-1}(n-n_0)\right) - 4 \times 2^{n-n_0-1} d_2 (n-n_0) \\ d_2\left(2^{n-n_0} + 2 \times 2^{n-n_0-1}(n-n_0)\right) + 2^{n-n_0-1} d_1 (n-n_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,2)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 2$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^n - 10 \times 2^{n-1} n \\ 5 \times 2^{n-1} n + 2 \times 2^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 2 \times 2^{n-1} n & -4 \times 2^{n-1} n \\ 2^{n-1} n & 2 \times 2^{n-1} n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \left(2^n - 2 \times 2^{n-1} n\right) - 4 \times 2^{n-1} n c_2 \\ c_2 \left(2 \times 2^{n-1} n + 2^n\right) + 2^{n-1} n c_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.5}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.5) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 2$ bulunur ve bulunan bu değerler (8.5) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^n - 10 \times 2^{n-1} n \\ 5 \times 2^{n-1} n + 2 \times 2^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_2\left(2^n - 2\times 2^{n-1}n\right) - 2\times 2^n c_1 \\ 2^n c_1 + 2^{n-1}nc_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.6}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.6) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_2 - 2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_2 - 2c_1 &= 1 \\ c_1 &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 2, c_2 = 5$ bulunur ve bulunan bu değerler (8.6) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^n - 10\times 2^{n-1}n \\ 5\times 2^{n-1}n + 2\times 2^n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 8.2.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}\left(n+1\right) = A\mathbf{x}\left(n\right)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (-1,3)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 4.2.2 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_2 = (\frac{1}{5}, 0)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla
$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

- $A^n = \begin{pmatrix} 5(-2)^{n-1} n + (-2)^n & -5(-2)^{n-1} n \\ 5(-2)^{n-1} n & (-2)^n - 5(-2)^{n-1} n \end{pmatrix}$.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= A^n \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 5(-2)^{n-1} n + (-2)^n & -5(-2)^{n-1} n \\ 5(-2)^{n-1} n & (-2)^n - 5(-2)^{n-1} n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20(-2)^{n-1} n - (-2)^n \\ 3(-2)^n - 20(-2)^{n-1} n \end{pmatrix}\end{aligned}$$
bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak
$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\ &= \begin{pmatrix} 5(-2)^{n-n_0-1}(n-n_0) + (-2)^{n-n_0} & a \\ 5(-2)^{n-n_0-1}(n-n_0) & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1\left((-2)^{n-n_0} + 5(-2)^{n-n_0-1}(n-n_0)\right) - 5(-2)^{n-n_0-1} d_2 (n-n_0) \\ d_2\left((-2)^{n-n_0} - 5(-2)^{n-n_0-1}(n-n_0)\right) + 5(-2)^{n-n_0-1} d_1 (n-n_0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$
bulunur. Burada,

$a = -5(-2)^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$b = (-2)^{n-n_0} - 5(-2)^{n-n_0-1}(n-n_0)$ dır.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (-1, 3)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = -1, d_2 = 3$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak
$$\mathbf{x}(n) = A^n \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -20(-2)^{n-1} n - (-2)^n \\ 3(-2)^n - 20(-2)^{n-1} n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 5(-2)^{n-1}n + (-2)^n & -5(-2)^{n-1}n \\ 5(-2)^{n-1}n & (-2)^n - 5(-2)^{n-1}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1\left(5(-2)^{n-1}n + (-2)^n\right) - 5(-2)^{n-1}nc_2 \\ c_2\left((-2)^n - 5(-2)^{n-1}n\right) + 5(-2)^{n-1}nc_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.7}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.7) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= -1 \\ c_2 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -1, c_2 = 3$, bulunur ve bulunan bu değerler (8.7) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -20(-2)^{n-1}n - (-2)^n \\ 3(-2)^n - 20(-2)^{n-1}n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n c_1 + c_2\left((-2)^{n-1}n + \frac{1}{5}(-2)^n\right) \\ (-2)^n c_1 + (-2)^{n-1}nc_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.8}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (8.8) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{1}{5}c_2 &= -1 \\ c_1 &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 3, c_2 = -20$ bulunur ve bulunan bu değerler (8.8) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} -20\,(-2)^{n-1}\,n - (-2)^n \\ 3\,(-2)^n - 20\,(-2)^{n-1}\,n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

# BÖLÜM 9

# KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN 3x3 TİPİNDE MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

## 9.1 ÖZDEĞERLERİNDEN EN AZ BİRİSİ 1 OLAN 3X3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 9.1.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.1.1 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (0,0,1)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & 2n & 3n \\ n & 2n+1 & 3n \\ -n & -2n & 1-3n \end{pmatrix}$.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} n+1 & 2n & 3n \\ n & 2n+1 & 3n \\ -n & -2n & 1-3n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n+1 \\ -3n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0)$$

$$= \begin{pmatrix} n-n_0+1 & 2(n-n_0) & 3(n-n_0) \\ n-n_0 & 2(n-n_0)+1 & 3(n-n_0) \\ -(n-n_0) & -2(n-n_0) & 1-3(n-n_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1(n-n_0+1) - d_2(2n_0-2n) - d_3(3n_0-3n) \\ d_1(n-n_0) + d_2(2n-2n_0+1) - d_3(3n_0-3n) \\ d_2(2n_0-2n) - d_1(n-n_0) + d_3(3n_0-3n+1) \end{pmatrix}$$

bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n+1 \\ -3n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
x(n) &= A^n c \\
&= \begin{pmatrix} n+1 & 2n & 3n \\ n & 2n+1 & 3n \\ -n & -2n & 1-3n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2nc_2 + 3nc_3 + c_1(n+1) \\ c_2(2n+1) + nc_1 + 3nc_3 \\ -c_3(3n-1) - nc_1 - 2nc_2 \end{pmatrix} \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.1) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= 1 \\
c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.1) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n+1 \\ -3n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3c_2 + 3nc_3 \\ c_1 + 3c_2 + 3nc_3 \\ -\frac{2}{3}c_1 - 3c_2 - c_3\,(3n-1) \end{pmatrix} \qquad (9.2)
\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.2) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3c_2 \\ c_1 + 3c_2 \\ c_3 - 3c_2 - \frac{2}{3}c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
3c_2 &= 1 \\
c_1 + 3c_2 &= 1 \\
c_3 - 3c_2 - \frac{2}{3}c_1 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = 1$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.2) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 3n+1 \\ 3n+1 \\ -3n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 9.1.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}\,(n+1) = A\mathbf{x}\,(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.1.2 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (1, 2, 0)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- $A^n = \begin{pmatrix} 1-3n & 2n & n \\ 3n-10 & 6-2n & 3-n \\ 20-15n & 10n-10 & 5n-5 \end{pmatrix}.$

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1-3n & 2n & n \\ 3n-10 & 6-2n & 3-n \\ 20-15n & 10n-10 & 5n-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-n \\ n-4 \\ 10-5n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0)$$
$$= \begin{pmatrix} 1-3(n-n_0) & 2(n-n_0) & n-n_0 \\ 3(n-n_0)-10 & 6-2(n-n_0) & 3-(n-n_0) \\ 20-15(n-n_0) & 10(n-n_0)-10 & 5(n-n_0)-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_3(n-n_0) - d_2(2n_0-2n) + d_1(3n_0-3n+1) \\ d_3(n_0-n+3) + d_2(2n_0-2n+6) - d_1(3n_0-3n+10) \\ d_1(15n_0-15n+20) - d_2(10n_0-10n+10) - d_3(5n_0-5n+5) \end{pmatrix}$$
bulunur.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1-n \\ n-4 \\ 10-5n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 1-3n & 2n & n \\ 3n-10 & 6-2n & 3-n \\ 20-15n & 10n-10 & 5n-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2nc_2 - c_1(3n-1) + nc_3 \\ c_1(3n-10) - c_2(2n-6) - c_3(n-3) \\ c_3(5n-5) + c_2(10n-10) - c_1(15n-20) \end{pmatrix} \qquad (9.3) \end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.3) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 6c_2 - 10c_1 + 3c_3 \\ 20c_1 - 10c_2 - 5c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ 6c_2 - 10c_1 + 3c_3 &= 1 \\ 20c_1 - 10c_2 - 5c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.3) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 1-n \\ n-4 \\ 10-5n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3c_2 + 3nc_3 \\ c_1 + 3c_2 + 3nc_3 \\ -\frac{2}{3}c_1 - 3c_2 - c_3\,(3n-1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.4}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.4) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3c_2 \\ c_1 + 3c_2 \\ c_3 - 3c_2 - \frac{2}{3}c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} 3c_2 &= 1 \\ c_1 + 3c_2 &= 1 \\ c_3 - 3c_2 - \frac{2}{3}c_1 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = 1$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.4) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 1-n \\ n-4 \\ 10-5n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 9.1.3** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.1.3 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (-5, 2, 3)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$

- $A^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{3}{2} & 2n & \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{5}{2} \\ 3^n - 1 & 1 & 3^n - 1 \\ 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{3}{2} & -2n & 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{3}{2} & 2n & \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{5}{2} \\ 3^n - 1 & 1 & 3^n - 1 \\ 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{3}{2} & -2n & 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - \frac{3}{2} \\ 3^n \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}3^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^{n-n_0} - 2(n-n_0) - \frac{3}{2} & 2(n-n_0) & \frac{5}{2}3^{n-n_0} - 2(n-n_0) - \frac{5}{2} \\ 3^n - 1 & 1 & 3^n - 1 \\ 2(n-n_0) - \frac{3}{2}3^{n-n_0} + \frac{3}{2} & -2(n-n_0) & 2(n-n_0) - \frac{3}{2}3^{n-n_0} + \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ d_2 + d_1(3^n - 1) + d_3(3^n - 1) \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$a = d_1\left(2n_0 - 2n + \frac{5}{2}3^{n-n_0} - \frac{3}{2}\right) - d_2(2n_0 - 2n) + d_3\left(2n_0 - 2n + \frac{5}{2}3^{n-n_0} - \frac{5}{2}\right)$

$b = d_2(2n_0 - 2n) - d_1\left(2n_0 - 2n + \frac{3}{2}3^{n-n_0} - \frac{3}{2}\right) - d_3\left(2n_0 - 2n + \frac{3}{2}3^{n-n_0} - \frac{5}{2}\right)$ dir.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1, 1, 0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - \frac{3}{2} \\ 3^n \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}3^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{3}{2} & 2n & \frac{5}{2}3^n - 2n - \frac{5}{2} \\ 3^n - 1 & 1 & 3^n - 1 \\ 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{3}{2} & -2n & 2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2nc_2 - c_3\left(2n - \frac{5}{2}3^n + \frac{5}{2}\right) - c_1\left(2n - \frac{5}{2}3^n + \frac{3}{2}\right) \\ c_2 + c_1\left(3^n - 1\right) + c_3\left(3^n - 1\right) \\ c_1\left(2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{3}{2}\right) + c_3\left(2n - \frac{3}{2}3^n + \frac{5}{2}\right) - 2nc_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.5}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.5) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.5) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - \frac{3}{2} \\ 3^n \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}3^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - 5 \times 3^n c_3 \\ -\frac{1}{2}c_2 - 2 \times 3^n c_3 \\ c_1 + c_2 + 3 \times 3^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (9.6)
\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.6) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - 5c_3 \\ -\frac{1}{2}c_2 - 2c_3 \\ c_1 + c_2 + 3c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
-c_1 - c_2 - 5c_3 &= 1 \\
-\frac{1}{2}c_2 - 2c_3 &= 1 \\
c_1 + c_2 + 3c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = 0, c_3 = -\frac{1}{2}$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.6) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}3^n - \frac{3}{2} \\ 3^n \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}3^n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 9.1.4** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.1.4 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

- $A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1}n + 1 & 2^n - 1 & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 2^n & -2^{n-1}n \\ 4 \times 2^{n-1}n - 2 \times 2^n + 2 & 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1}n + 1 & 2^n - 1 & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 2^n & -2^{n-1}n \\ 4 \times 2^{n-1}n - 2 \times 2^n + 2 & 2 \times 2^n - 2 & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \\ 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \\ 4 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0)$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0)+1 & 2^{n-n_0}-1 & a \\ 2\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & 2^{n-n_0} & b \\ 4\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0)-2\times 2^{n-n_0}+2 & 2\times 2^{n-n_0}-2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$
bulunur. Burada,

$a = -2^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$b = -2^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$c = 2^{n-n_0} - 2\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$d = d_2\left(2^{n-n_0}-1\right) + d_1\left(2\times 2^{n-n_0-1}\left(n-n_0\right)+1\right) - 2^{n-n_0-1}d_3\left(n-n_0\right)$

$e = 2^{n-n_0}d_2 + 2\times 2^{n-n_0-1}d_1\left(n-n_0\right) - 2^{n-n_0-1}d_3\left(n-n_0\right)$

$f = d_1\left(4\times 2^{n-n_0-1}\left(n-n_0\right) - 2\times 2^{n-n_0}+2\right)$

$+d_3\left(2^{n-n_0} - 2\times 2^{n-n_0-1}\left(n-n_0\right)\right) + d_2\left(2\times 2^{n-n_0}-2\right)$ dir.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-1}n+2^n \\ 2\times 2^{n-1}n+2^n \\ 4\times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-1}n+1 & 2^n-1 & -2^{n-1}n \\ 2\times 2^{n-1}n & 2^n & -2^{n-1}n \\ 4\times 2^{n-1}n-2\times 2^n+2 & 2\times 2^n-2 & 2^n-2\times 2^{n-1}n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1\left(2\times 2^{n-1}n+1\right)+c_2\left(2^n-1\right)-2^{n-1}nc_3 \\ 2^nc_2+2\times 2^{n-1}nc_1-2^{n-1}nc_3 \\ a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.7}$$

bulunur. Burada,

$a = c_3\left(2^n - 2\times 2^{n-1}n\right) + c_2\left(2\times 2^n - 2\right) + c_1\left(4\times 2^{n-1}n - 2\times 2^n + 2\right)$ dir.

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.7) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.7) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-1}n + 2^n \\ 2\times 2^{n-1}n + 2^n \\ 4\times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + 2^n c_2 + c_3\left(2^{n-1}n + \frac{1}{2}2^n\right) \\ 2^n c_2 + c_3\left(2^{n-1}n + \frac{1}{2}2^n\right) \\ 2c_1 + 2\times 2^n c_2 + 2\times 2^{n-1}nc_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.8}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.8) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ 2c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{2}c_3 &= 1 \\ c_2 + \frac{1}{2}c_3 &= 1 \\ 2c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 2$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.8) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \\ 2 \times 2^{n-1}n + 2^n \\ 4 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

## 9.2 ÖZDEĞERLERİ 1 DEN FARKLI OLAN 3X3 TİPİNDE KÖŞEGENLEŞTİRİLEMEYEN MATRİSLERİN KUVVETLERİ YARDIMIYLA FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

**Örnek 9.2.1** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.2.1 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ tür ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (1, 0, 0)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$

- $A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 3^{n-1}n & -3^{n-1}n & a \\ 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & 2 \times 3^{n-1}n + 3^n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & b \\ \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & c \end{pmatrix}.$

Burada,

$a = 3^{n-1}n$

$b = -2 \times 3^{n-1}n - \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

$c = 3^n - 3^{n-1}n - \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$ dir.

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) \\ &= \begin{pmatrix} 3^n - 3^{n-1}n & -3^{n-1}n & a \\ 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & 2 \times 3^{n-1}n + 3^n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & b \\ \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n - 2 \times 3^{n-1}n \\ 3 \times 3^{n-1}n + 3^n + 3^{n-2}n\,(n-1) \\ 3^{n-1}n + 3^{n-2}n\,(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0)$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n-n_0} - 3^{n-n_0-1}(n-n_0) & -3^{n-n_0-1}(n-n_0) & 3^{n-n_0-1}(n-n_0) \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$$

bulunur.

Burada,

$d = 3^{n-n_0-1}(n-n_0) + \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n-n_0-1)$

$e = 2 \times 3^{n-n_0-1}(n-n_0) + 3^{n-n_0} + \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n-n_0-1)$

$f = -2 \times 3^{n-n_0-1}(n-n_0) - \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n-n_0-1)$

$g = \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n-n_0-1)$

$h = 3^{n-n_0-1}(n-n_0) + \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n-n_0-1)$

$j = 3^{n-n_0} - 3^{n-n_0-1}(n-n_0) - \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n-n_0-1)$

$k = d_1\left(3^{n-n_0} - 3^{n-n_0-1}(n-n_0)\right) - 3^{n-n_0-1}d_2(n-n_0) + 3^{n-n_0-1}d_3(n-n_0)$

$l = d_2\left(3^{n-n_0} + 2 \times 3^{n-n_0-1}(n-n_0) - \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n_0-n+1)\right)$

$+d_1\left(3^{n-n_0-1}(n-n_0) - \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n_0-n+1)\right)$

$-d_3\left(2 \times 3^{n-n_0-1}(n-n_0) - \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n_0-n+1)\right)$

$m = d_3\left(3^{n-n_0} - 3^{n-n_0-1}(n-n_0) + \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n_0-n+1)\right)$

$+d_2\left(3^{n-n_0-1}(n-n_0) - \frac{1}{2}3^{n-n_0-2}(n-n_0)(n_0-n+1)\right)$

$-\frac{1}{2}3^{n-n_0-2}d_1(n-n_0)(n_0-n+1)$ dir.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3^n - 2 \times 3^{n-1}n \\ 3 \times 3^{n-1}n + 3^n + 3^{n-2}n(n-1) \\ 3^{n-1}n + 3^{n-2}n(n-1) \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c=(c_1,c_2,c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& x(n) \\
= \; & A^n c \\
= \; & \begin{pmatrix} 3^n - 3^{n-1}n & -3^{n-1}n & 3^{n-1}n \\ 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & a & c \\ \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) & b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
= \; & \begin{pmatrix} 3^{n-1}nc_3 - 3^{n-1}nc_2 - c_1\left(3^{n-1}n - 3^n\right) \\ e \\ f \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.9}$$

bulunur. Burada,

$a = 2 \times 3^{n-1}n + 3^n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

$b = 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

$c = -2 \times 3^{n-1}n - \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

$d = 3^n - 3^{n-1}n - \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)$

$e = c_2\left(2 \times 3^{n-1}n + 3^n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)\right) + c_1\left(3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)\right)$

$-c_3\left(2 \times 3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)\right)$

$f = c_2\left(3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)\right) - c_3\left(3^{n-1}n - 3^n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)\right) + \frac{1}{2}3^{n-2}nc_1\,(n-1)$

Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.9) formülü ile verilen çözümde $n=0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= 1 \\
c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.9) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 3^n - 2 \times 3^{n-1}n \\ 3 \times 3^{n-1}n + 3^n + 3^{n-2}n\,(n-1) \\ 3^{n-1}n + 3^{n-2}n\,(n-1) \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1) \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n c_2 - c_3\,(3^{n-1}n - 3^n) \\ c_2\,(3^{n-1}n + 3^n) + 3^n c_1 + c_3\left(3^{n-1}n + \frac{1}{2}3^{n-2}n\,(n-1)\right) \\ 3^n c_1 + 3^{n-1}nc_2 + \frac{1}{2}3^{n-2}nc_3\,(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.10}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.10) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_3 - c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_3 - c_2 &= 1 \\ c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.10) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 3^n - 2 \times 3^{n-1}n \\ 3 \times 3^{n-1}n + 3^n + 3^{n-2}n\,(n-1) \\ 3^{n-1}n + 3^{n-2}n\,(n-1) \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 9.2.2** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1,1,0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.2.2 de aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir.

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (0,1,1)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$

- $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n - (-1)^n + 2^n & (-1)^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}.$

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n-(-1)^n+2^n & (-1)^n-2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}n-(-1)^n+2\times 2^n \\ 2^n \\ 2^n-(-1)^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}(n) \\ = \; & A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0) \\ = \; & \begin{pmatrix} 2^{n-n_0} & 2^{n-n_0-1}(n-n_0)-(-1)^{n-n_0}+2^{n-n_0} & (-1)^{n-n_0}-2^{n-n_0} \\ 0 & 2^{n-n_0} & 0 \\ 0 & 2^{n-n_0}-(-1)^{n-n_0} & (-1)^{n-n_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ 2^{n-n_0}d_2 \\ (-1)^{n-n_0}d_3 - d_2\left((-1)^{n-n_0}-2^{n-n_0}\right) \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada,
$a = d_3\left((-1)^{n-n_0}-2^{n-n_0}\right) + d_2\left(2^{n-n_0}-(-1)^{n-n_0}+2^{n-n_0-1}(n-n_0)\right) + 2^{n-n_0}d_1$ dir.
NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^{n-1}n-(-1)^n+2\times 2^n \\ 2^n \\ 2^n-(-1)^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n - (-1)^n + 2^n & (-1)^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_3\left((-1)^n - 2^n\right) + c_2\left(2^{n-1}n - (-1)^n + 2^n\right) + 2^n c_1 \\ 2^n c_2 \\ (-1)^n c_3 - c_2\left((-1)^n - 2^n\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.11}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.11) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.11) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^{n-1}n - (-1)^n + 2 \times 2^n \\ 2^n \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n c_1 + 2^n c_2 + 2^{n-1} n c_3 \\ 2^n c_3 \\ (-1)^n c_1 + 2^n c_3 \end{pmatrix} \qquad (9.12)
\end{aligned}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.12) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 1 \\
c_3 &= 1 \\
c_1 + c_3 &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 1$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.12) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^{n-1}n - (-1)^n + 2 \times 2^n \\ 2^n \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

**Örnek 9.2.3** *Köşegenleştirilemeyen* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *matrisi için*

$$\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$$

*sisteminin genel çözümünü bulalım ve ayrıca* $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)^T$ *başlangıç koşullu çözümü bulalım.*

**Çözüm.** Örnek 5.2.3 te aşağıdakiler bulunmuştu:

- $A$ nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ve } \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- Genelleştirilmiş özvektör $\xi_3 = (0,0,1)^T$ dir.

- $A$ nın $J$ Jordan formu, terslenebilir $P$ matrisi ve onun $P^{-1}$ tersi sırasıyla
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

- $J^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$

- $A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 2^{n-1}n & -3 \times 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 3 \times 2^{n-1}n + 2^n & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 6 \times 2^{n-1}n & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix}.$

**I. Yöntem.** Eğer başlangıç koşullu çözümü genel çözümü bulmadan elde etmek istersek, Sonuç 1.4.1 de verilen formülü kullanırsak, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^n - 2^{n-1}n & -3 \times 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 3 \times 2^{n-1}n + 2^n & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 6 \times 2^{n-1}n & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 4 \times 2^{n-1}n \\ 4 \times 2^{n-1}n + 2^n \\ 8 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 1.4.1 den, $d_1, d_2, d_3$ keyfi sabitler olmak üzere, keyfi

$\mathbf{x}(n_0) = x_0 = (d_1, d_2, d_3)^T$

başlangıç koşulu ile verilen homojen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^{n-n_0}\mathbf{x}(n_0)$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n-n_0} - 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & -3\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & a \\ 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & 3\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) + 2^{n-n_0} & b \\ 2\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & 6\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0) & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$
bulunur. Burada

$a = 2^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$b = -2^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$c = 2^{n-n_0} - 2\times 2^{n-n_0-1}(n-n_0)$

$d = d_1\left(2^{n-n_0} - 2^{n-n_0-1}\left(n-n_0\right)\right) - 3\times 2^{n-n_0-1}d_2\left(n-n_0\right)$

$+2^{n-n_0-1}d_3\left(n-n_0\right)$

$e = d_2\left(2^{n-n_0} + 3\times 2^{n-n_0-1}\left(n-n_0\right)\right) + 2^{n-n_0-1}d_1\left(n-n_0\right)$

$-2^{n-n_0-1}d_3\left(n-n_0\right)$

$f = d_3\left(2^{n-n_0} - 2\times 2^{n-n_0-1}\left(n-n_0\right)\right) + 2\times 2^{n-n_0-1}d_1\left(n-n_0\right)$

$+6\times 2^{n-n_0-1}d_2\left(n-n_0\right)$ dır.

NOT: $n_0 = 0$, $\mathbf{x}(0) = x_0 = (1,1,0)^T$ için özel çözüm, genel çözümde bu değerler yerlerine yazılarak da bulunabilir. Buna göre, genel çözümde $n_0 = 0$ ve $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 0$ alınırsa, verilen başlangıç koşullu çözüm olarak

$$\mathbf{x}(n) = A^n\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2^n - 4\times 2^{n-1}n \\ 4\times 2^{n-1}n + 2^n \\ 8\times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**II. Yöntem.**

Uyarı 1.4.6 da verilen (1.44) formülünü kullanarak, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak, $c = (c_1, c_2, c_3)^T \in \mathbb{R}^k$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n c \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 2^{n-1}n & -3 \times 2^{n-1}n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-1}n & 3 \times 2^{n-1}n + 2^n & -2^{n-1}n \\ 2 \times 2^{n-1}n & 6 \times 2^{n-1}n & 2^n - 2 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}nc_3 - 3 \times 2^{n-1}nc_2 - c_1 \left(2^{n-1}n - 2^n\right) \\ c_2 \left(3 \times 2^{n-1}n + 2^n\right) + 2^{n-1}nc_1 - 2^{n-1}nc_3 \\ c_3 \left(2^n - 2 \times 2^{n-1}n\right) + 2 \times 2^{n-1}nc_1 + 6 \times 2^{n-1}nc_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.13}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.13) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.13) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^n - 4 \times 2^{n-1}n \\ 4 \times 2^{n-1}n + 2^n \\ 8 \times 2^{n-1}n \end{pmatrix}$$

bulunur.

**III. Yöntem.** Uyarı 1.4.6 da verilen (1.45) formülünü kullanarak, $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ keyfi sabitler olmak üzere, verilen fark denkleminin genel çözümü olarak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= PJ^n\widetilde{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n c_2 + 2^{n-1} n c_3 \\ 2^n c_1 - 2^n c_2 - 2^{n-1} n c_3 \\ c_3\left(2^n - 2 \times 2^{n-1} n\right) + 3 \times 2^n c_1 - 2 \times 2^n c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.14}$$

bulunur. Verilen başlangıç koşullu çözümü bulmak için (9.14) formülü ile verilen çözümde $n = 0$ yazacağız. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 3c_1 - 2c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 \\ c_1 - c_2 &= 1 \\ 3c_1 - 2c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülürse $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -4$ bulunur ve bulunan bu değerler (9.14) formülünde yerlerine yazılırsa başlangıç değer probleminin çözümü olarak

$$\mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} 2^n - 4 \times 2^{n-1} n \\ 4 \times 2^{n-1} n + 2^n \\ 8 \times 2^{n-1} n \end{pmatrix}$$

elde edilir. ■

# KAYNAKLAR

**[1] Soykan Y** (2017) *Lineer Fark Denklemleri Çözümlü Alıştırmaları*. 1, ISBN: 6053207054, Nobel Akademik Yayıncılık, Zonguldak, 448.

**[2] Soykan Y, Göcen M ve Gümüş M** (2017) *Lineer Fark Denklemleri*. 1, ISBN: 6053207047, Nobel Akademik Yayıncılık, Zonguldak, 240.

**[3] Elaydi S** (2005) *An Introduction to Difference Equations*. 3, ISBN: 9781441920010, Springer, New York, 540.

**[4] Jordan canonical form** (t.y) *Wolframalpha*. Adres: https://www.wolframalpha.com/input/?i=jordan+canonical+form

## ÖZGEÇMİŞ

1980 yılı Şereflikoçhisar/ANKARA doğumlu olan Hakan BEKLEVİÇ, ilk ve orta eğitimini Aksaray ili Ağaçören ilçesinde tamamladıktan sonra 2003 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2003-2013 yılları arasında özel öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2013 yılında Millî Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak Zonguldak ilinde başladığı Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği görevine halen devam etmektedir.

### ADRES BİLGİLERİ

Adres : Bahçelievler Mah. Funda sok. No:43 Kat:4
Merkez/ZONGULDAK

Tel : 0545 292 21 60
E-Posta : beklevic68@hotmail.com