ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUYLA ÇÖZÜMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YASEMİN GENCER

TEMMUZ 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUYLA ÇÖZÜMLERİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yasemin GENCER

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL

ZONGULDAK
Temmuz 2019

KABUL:

Yasemin GENCER tarafından hazırlanan "Sturm Liouville Probleminin Green Fonksiyonuyla Çözümleri" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 26/07/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Melih GÖCEN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Özge GÜN ....
Bartın Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2019

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim"

Yasemin GENCER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONUYLA ÇÖZÜMLERİ

Yasemin GENCER

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL
Temmuz 2019, 87 sayfa

Bu çalışmada Sturm-Liouville problemlerinin Green fonksiyonu ile çözümleri ele alınmıştır. Birinci bölümde, tarihsel bir bakış açısı ile problemin ortaya çıkışı ve gelişim süreci özetlenmiştir. İkinci bölümde temel tanımlar ve teoremler, sınır şartları, Green fonksiyonunun tanıtımı ve özellikleri, fiziksel anlamı ve bir özfonksiyon serisi olarak açılımı incelenmiştir. Üçüncü bölümde, Sturm-Liouville sınır değer problemleri için Green fonksiyonları, Önemli bazı diferansiyel denklemlerin Sturm – Liouville formuna dönüşümü, Sturm-Liouville problemlerinin asimptotik davranışları, ağaç grafikleri için Green fonksiyonun oluşturulması da yer almaktadır. Dördüncü bölümde, Sturm-Liouville problemlerinin fizik, mekanik ve kuantum gibi birçok alanda uygulamaları yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Problemi, Diferansiyel operatör, Green fonksiyonu, Sınır değer problemi.

Bilim Kodu:403.06.00

ABSTRACT

M. Sc.Thesis

SOLUTIONS OF STURM-LIOUVILLE PROBLEMS WITH GREEN FUNCTIONS

Yasemin GENCER

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist Prof. Sedat ÇEVİKEL

July 2019, 87 pages

In this study, solutions of Sturm-Liouville problems with Green function are discussed. In the first chapter, the emergence and development process of the problem is summarized with a historical perspective. In the second chapter, basic definitions and theorems, boundary conditions, introduction of Green function and its properties, physical meaning and its expansion as an eigenfunction series are examined. In the third chapter, Green functions for Sturm-Liouville boundary value problems, transformation of some important differential equations into Sturm - Liouville form, asymptotic behaviors of Sturm-Liouville problems, and Green function for tree graphics are included. In the fourth chapter, applications of Sturm-Liouville problems in many fields such as physics, mechanics and quantum are included.

Keywords: Sturm-Liouville Problem, Differential operator, Green function, Boundary value problem

Science Code: 403.06.00

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında görüş ve önerileriyle bana desteğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL e, eğitim hayatımın mimarları babam Selami SAĞLAM ve annem Emine SAĞLAM a, yoğun çalıştığım günlerde yanımda olan eşim Ahmet Hakan GENCER e ve son olarak varlığıyla bana güç veren canım oğlum Emir Vasıf GENCER e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

D	: Diferansiyel operatör
L(D)	: Polinom şeklinde diferansiyel operatör
L[y]	: Sturm-Liouville (SL) operatörü
$\delta(x)$	: Dirac delta fonksiyonu
G(x, t)	: Green fonksiyon
L^{-1}	: Invers operatör
∇	: Gradiyent operatörü
$\nabla^2 = \Delta$	: Laplasiyen

KISALTMALAR

SL	: Sturm-Liouville denklemi
SL-SDP	: Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi
RSL-SDP	: Regular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi
W(u, v)	: Wronskian determinantı
λ	: Özdeğer

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 STURM-LIOUVILLE TEORİSİNİN TARİHÇESİ

18.yüzyılın başlarında titreşimli hareketler konusu ortaya çıkan problemlerden en önemlisidir. 1747'den itibaren d'Alambert ve Euler; titreşen yayları, zincirleri ve yüzeyleri tanımlayan kısmi diferansiyel denklemleri özdeğer problemini değişkenlerine ayırarak elde ettiler. Özdeğer fonksiyonlarının çakışması ile tam bir çözüm elde edebileceklerine inanmamış olmalarına rağmen, bu tekniği kullanarak (1.5) - (1.7) denklemlerinin bir çok özel durumunu incelediler (Truesdell 1960). 1807 den itibaren ısı teorisinde değişkenlerin ayrıştırılması metodu, ilk olarak Fourier tarafından olmak üzere yaygın olarak genç Fransız matematikçileri tarafından kullanıldı.

1830'dan önce, matematikçiler (1.1)-(1.3) denklemlerinin bazı özel durumları üzerine çalışarak sonlu ya da sonsuz serilerde açık bir çözüm buldular. Buna karşın Sturm ve Liouville, genel durum için herhangi bir çözüm bulamayıp sonuçlarını doğrudan doğruya (1.1) - (1.3) denklemlerinden çıkarmak zorunda kalmaları Sturm-Liouville teorisinin karekteristik özelliğini olarak ortaya çıkardı.

Sturm-Liouville teorisindeki genel teoremleri Sturm ve Liouville'den önce ispatlayan tek matematikçi Simeon-Denis Poisson(1781-1840) idi. Poisson 1823'de özdeğerlerin gerçekliğini ispatlamak için "önsel" bir yöntemin bilinmediğini kabul etti. (Poisson 1823b, p.382) Fakat 3 yıl sonra Poisson bütün özdeğerlerin reel olması gerektiğinin ispatını ve ortogonalliğin ispatını sundu. 1835'te Poisson ispatını daha da genelleştirerek Sturm'un (1.5)-(1.7) probleminin üç boyutlu halinin ispatını da yapmış oldu. Bu durum için ortogonalliği de çalışmasında sundu. Bununla birlikte, Poission'un araştırmaları, Poission'un son sonuçlarının yayınlanmasından iki yıl sonra Sturm ve Liouville tarafından yapılan bu alandaki ilerlemelere kıyasla sınırlı bir kapsamdadır (Lützen 1982).

1.2 STURM-LİOUVİLLE TEORİSİNİN GELİŞİMİ

1829-1830 yıllarında Sturm ve Liouville lineer diferansiyel denklemler hakkındaki çalışmalarıyla ilk düşüncelerini oluşturup ayrı ayrı yayınladılar. Devam eden yıllarda Sturm iki kapsamlı çalışma yazdı(Sturm 1836a, 1836b). Bu çalışmaları 1836-1837 yıllarında ilk ünlü çalışmasını yapan Liouville ile eş zamanlı olarak yayınladılar. 1835'te Liouville teorisini yüksek mertebeden denklemlere genelleştirmeye başladı.Fakat onun bu alandaki son çalışması 1838 ile 1840 yılları arasındadır.

İkilinin 1836 -1837 yıllarında üst üste yayınladıkları makalelerle matematiğe kazandırdıkları tamamen yeni bir konu olan teori daha sonraları Sturm – Lioville teorisi olarak adlandırılmıştır. Bu teori ikinci mertebeden genel lineer diferansiyel denklemlerle uğraşmaktadır. Bu denklemler

$$x = \alpha \; için \;\; k(x)V'(x) - hV(x) = 0 \tag{1.2}$$

$$x = \beta \; için \;\; k(x)V'(x) + HV(x) = 0 \tag{1.3}$$

şeklinde sınır şartlarına tabii olan,

$$x \in (\,\alpha, \beta) \; olmak \; \text{üzere} \quad \big(k(x)V'(x)\big)' + \big(g(x)r - l(x)\big)V(x) = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde verilen denklemlerdir. Bu yazılışlarda k, g ve l verilen pozitif fonksiyonlar, h ve H verilen pozitif sabitler ve r bir parametredir. (Akça, 1986) Sınır değer problemi, belirli bir transandantal denklemin kökleri olarak düşünülebilecek r'nin belirli değerleri (özdeğerleri) için aşikar olmayan

$$\Pi(r) = 0 \tag{1.4}$$

şeklindeki çözümlere (özdeğer fonksiyonları) sahip olmaktadır. Bu çözümler (1.1) ve (1.2) denkleminin genel çözümünün (1.3) te yerine yerine konulmasıyla elde edilmektedir.

Sturm ve Liouville tarafından incelenen problemler genel üç başlıkta toplanabilmektedir:

I) Özdeğerlerin özellikleri

II) Özdeğer fonksiyonların nitel davranışları

III) Özdeğer fonksiyonların bir sonsuz serisine keyfi fonksiyonların açılımı.

Sturm bu başlıklardan I ve II yi, Liouville ise III ü araştırdı. Sturm (1836b) ikinci çalışmasında kısmi türevli denklemlerin problemlerde nasıl ortaya çıktığını açıkladı. Bu denklemlerin değişkenlerin ayrıştırılıp bir parametreye bağlı genel bir ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem olarak ifade edilmesini ve çözüm yollarını detaylı olarak verdi. Parametrenin belirli sınır koşullarının sağlanmasını garanti edecek şekilde seçilmesinin gerekliliği üzerinde durdu.

Bu eserinde bir örnek olarak ısı iletiminin homojen olmayan ince bir çubuk üzerinde nasıl gerçekleşeceğini tartıştı. Bu örnekte sıcaklık aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir:

$$g\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (k\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} - lu \tag{1.5}$$

Burada *u(x, t)* fonksiyonu *t* zamanında *x* noktasındaki sıcaklığı göstermektedir. *g, k* ve *l* ifadeleri x'in pozitif fonksiyonlarıdır. Eğer çubuğun çevresindeki ortam sıfır derece sıcaklıkta sabitlenirse *u* sıcaklığı *α* ve *β* uç noktalarında sınır değerlerini sağlamalıdır:

$$x = \alpha \; için \;\; k\frac{\partial u}{\partial x} - hu = 0 \tag{1.6}$$

$$x = \beta \; için \;\; k\frac{\partial u}{\partial x} + Hu = 0 \tag{1.7}$$

Burada *h* ve *H* pozitif sabitlerdir. Sıcaklık *t*=0 olduğunda

$$u(x, 0) = f(x) \tag{1.8}$$

başlangıç koşuluna yükseltmeyi vermektedir. Sturm önce (1.8)'i ihmal ederek (1.5) ve (1.7) nin çözümlerini

$$u = V(x)e^{-rt} \tag{1.9}$$

formunda araştırdı. Bu çözüm (1.5)-(1.7) ye yerleştirildiğinde e^{-rt} çarpanı sadeleştirilir ve (1.1)-(1.3) sınır değer problemi *V*' ye bağlı olur. Eğer V_1, V_2, V_3, ..., V_n , ... fonksiyonları (1.1)-(1.3) denklemlerinin r_1, $r_2, ..., r_n$, ... özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları ise,

$$u = \sum_n A_n V_n(x) e^{-r_n t}$$

şeklinde verilen doğrusal kombinasyon (1.5)-(1.7) denklemlerinin bir çözümüdür. (1.8) ile gösterilen başlangıç koşulu böylece A_n leri belirleme problemini ortaya çıkarır.

$$\sum_n A_n V_n(x) = f(x) \tag{1.10}$$

Bu problem Liouville tarafından ele alınmıştır. Sturm'un tekniğini kullanarak

$$A_m(r_m - r_1)V_m + A_{m+1}(r_{m+1} - r_1)V_{m+1} + \ldots + A_n(r_n - r_1)V_n$$

ifadesinin (α, β) içinde en az

$$A_m V_m + A_{m+1} V_{m+1} + \ldots + A_n V_n$$

ifadesi kadar kökünün olduğunu gösterdi. Sturm bu ispattan esinlenerek benzer bir ispatı ikinci çalışmasına ekledi (Sturm 1836b). Bu ispat Sturm–Liouville Teoremin gelişim aşamalarında son adım olarak görüldü.

Sturm-Liouville teorisi üzerinde daha sonraki yıllarda ve günümüzde oldukça kapsamlı çalışmalar yapılmaktadır. Bunlar genelleştirme şeklinde ya da yöntemi daha karmaşık problemlere uygulama şeklinde ortaya çıkmaktadır. Bu konuda çalışmalar yapan belli başlı bilim adamları olarak Hermann Weyl(1910), A.C. Dixon(1912), M.H.Stone(1932) ve E.C.Titchmarsh(1940-1950) sayılabilir. Weyl ve Titchmarsh'ın sonuçları temel olarak klasik, gerçek ve kompleks matematiksel analizden elde edilmektedir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 STURM-LIOUVILLE DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

Diferansiyel operatörler diferansiyel alma işleminin genelleştirilmesinde kullanılmaktadır. Bir *y* fonksiyonu üzerinde hareket eden en basit diferansiyel operatör *D*, bu fonksiyonun birinci türevini göstermektedir :

$$Dy(x) = y'(x)$$

n-inci mertebeden lineer diferansiyel denklemler genel olarak aşağıdaki formdadır:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = q(x) \tag{2.1}$$

D, diferansiyel operatörünü kullanarak (2.1) denklemi,

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n) y(x) = q(x) \tag{2.2}$$

formunda yazılır. Veya daha basit olarak $L(D)y(x) = q(x)$ olarak yazılabilir.

$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n$ ile gösterimidir.

L(D) polinom şeklindeki diferansiyel operatördür (Naimark1967). Diğer bir deyişle operatör *L(D), D*’nin değişken rolü oynadığı cebirsel bir polinomdur.

Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörü

A(x) bir pozitif sürekli fonksiyon olmak üzere herhangi bir ikinci derece lineer diferansiyel denklem

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y + \lambda D(x)y = 0$$

biçimindedir. Burada λ sınır koşullarının belirlediği bir parametredir. Bu denklemi *A(x)* ile bölünürse

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{B(x)}{A(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{C(x)}{A(x)}y + \lambda\frac{D(x)}{A(x)}y = 0$$

elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibi de yazılır:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + \lambda d(x)y = 0$$

Bu denklem aşağıdaki gibi yazıldığında

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda d(x)y = 0$$

y fonksiyonu için Sturm-Liouville (*SL*) operatörü

$$L[y] = \frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + q(x)y$$

olarak tanımlanır(Richards 2002). Örneğin bir *u(x)* fonksiyonu için *SL* operatörü:

$$L[u] = \frac{d}{dx}[p(x)\frac{du}{dx}] + q(x)u$$

şeklindedir.

Özellikler

1. Diferansiyel Operatörlerde Toplama kuralı

Eğer $L(D)$ ve $M(D)$ iki operatör ise herhangi bir türevlenebilir u fonksiyonu için

$[L(D) + M(D)]u(x)= L(D)u(x) + M(D)u(x)$

2. Diferansiyel Operatörlerde Doğrusallık Kuralı

u_1 ve u_2 iki fonksiyon ve c_i sabit sayılar ise

$L(D)(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(D)u_1 + c_2L(D)u_2$

3. Diferansiyel Operatörlerde Çarpım Kuralı

$[L(D).M(D)]u(x) = L(D).[M(D)u(x)]$

Not: Çarpım kuralı sadece sabit katsayılı diferansiyel operatörler için geçerlidir.

4. Diferansiyel Operatörlerde Yerine Koyma Kuralı

$L(D)e^{ax} = L(a)e^{ax}$

2.2 SINIR ŞARTLARI

Matematiğin diferansiyel denklemler alanındaki sınır değer problemi bir diferansiyel denklemin sağlaması gereken ek koşullarla beraber verilmesini ifade etmektedir. Bu sınırlamaları gösteren denklemlere Sınır Şartları denir(Url 2019).

Sınır koşulu, denklemin istenen çözümü ve onun türevleri için tayin edilmiş birden fazla noktada bazı değer kombinasyonlarının şart olarak belirlenmesi anlamına gelir.

Örneğin bir (a,b) aralığında sürekli p, q, ve r fonksiyonları için tanımlanmış ikinci dereceden lineer homojen olmayan diferansiyel denklem :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

olmak üzere; bu denklem için önemli kabul edilen dört çeşit lineer sınır şartları aşağıdaki gibidir:

Drichlet ya da Birinci tür şartlar : $y(a) = \eta_1$, $y(b) = \eta_2$

Neumann ya da İkinci tür şartlar: $y'(a) = \eta_1$, $y'(b) = \eta_2$
Robin ya da Üçüncü tür
yada Karışık tür şartlar : $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \eta_1, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \eta_2$

Periyodik tür şartlar : $y(a) = y(b)\,, y'(a) = y'(b)$

Sınır değer problemleri başlangıç değer problemleri kadar kolay çözülememektedir. Çözümü olmayan ya da birden çok çözüme sahip olan problemler oldukça yaygındır. Bu nedenle sınır değer problemleri için varlık ve teklik söz konusu değildir.

2.3 LAGRANGE ÖZDEŞLİĞİ

Ardışık türevlenebilir u ve v fonksiyonları için Lagrange Özdeşliği :

$$uLv - vLu = -\frac{d}{dx}[p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)]$$

şeklinde tanımlanır. [0,1] aralığında tanımlı adi diferansiyel denklemler için Lagrange özdeşliği bir integral form olarak yazılabilir(Loney 2007, Gwaiz 2008, Teschl 2012) :

$$\int_a^b dx\,(uLv - vLu) = \left[p(x)\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]_a^b$$

Bu yazılışta $p = p(x)$, $q = q(x)$, $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonları [0, 1] aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir ve sürekli fonksiyonlardır. Periyodik sınır şartlarına sahip denklemlerde $u(a) = u(b)\,, u'(a) = u'(b)$ olduğundan

$$u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx} = 0$$

dır. Bu durumda Lagrange özdeşliği

$$\int_a^b dx\,(uLv - vLu) = 0$$

olur.

2.4 DIRAC DELTA FONKSİYONU

Aslında fonksiyon olmayıp kolaylık sağlamak için fonksiyon olarak kabul edilmektedir. Delta fonksiyonunun birçok yoldan tanımı yapılabilmektedir.

2.4.1 Delta Fonksiyonunun Limit Olarak Tanımı

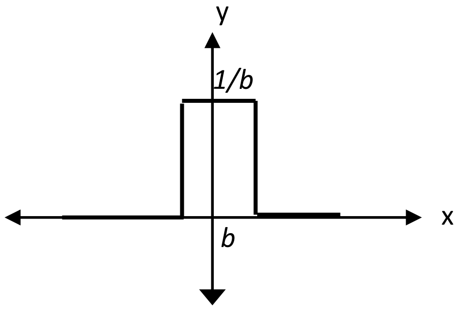
Dirac Delta fonksiyonu için uygun bir tanım aşağıdaki gibi olur (Vladimir 2001):

$$-\frac{1}{h} \leq x \leq \frac{1}{2h} \quad için\ \delta(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}$$

Diğer durumlarda

$$\delta(x) = 0$$

Bu durumda Delta fonksiyonu boyu çok büyük bir sayı, eni ise oldukça küçülen bir boyutta olmaktadır. Bu sıska ve uzun bir kutu şeklinde düşünülebilir. Tabanı b ve yüksekliği 1/b olan bir dikdörtgen şeklinde düşünülen Dirac delta fonksiyonu aşağıdaki şekilde gibidir (Nasser, 2013):



Alan = $b(1/b) = 1$

Şekil 2.1 Dirac delta fonksiyonunun gösterimi.

$\delta(x) = \lim(b \rightarrow 0) Dikdörtgen\,(x, b)$ Delta fonksiyonunun integralidir, eğri altındaki alanı vermektedir ve bu alan limit durumunda 1 e eşittir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Parabollerde $y = x^2$ yerine $y = (x\text{-}x_0)^2$ yazılarak orjinden ötelenmesi gibi Delta fonksiyonu da orjinden kaydırılırsa, yani $\delta(x - x_0)$ şeklinde yazılırsa, bu durumda eğri altındaki alan değişmemektedir. Yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

Fiziksel olarak Delta fonksiyonu, orjindeki bir noktada yoğunlaşan bir kütle yoğunluğunu temsil etmede faydalı olur. Delta işlevinin gücü, üzerinde integraller yapılmasıdır. *f(x)* orijinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$a \leq 0 \leq b \; için \; \int_a^b f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

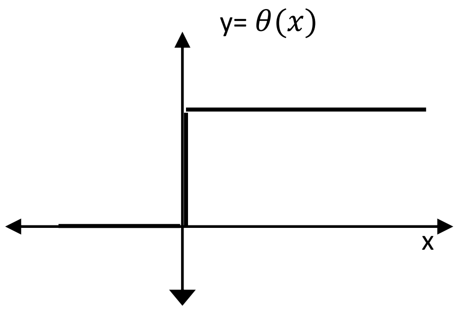
olur. Eğer kütle noktası orjinden uzakta, örneğin bir x_0 da yerleştirilirse $\delta(x - x_0)$ olmalıdır. Kutu temsilinin yanı sıra, örneğin standart sapması sıfıra yaklaşan bir gaussian gibi, eşdeğer bir çok gösterim vardır. Delta fonksiyonunun türevinin kolaylığı gibi başka birçok yararlı özellikleri vardır:

$$\int_a^b f(x)\delta'\,(x - x_0) dx = -f'(x_0)$$

2.4.2 Delta Fonksiyonun Adım Fonksiyonun Türevi Olarak Tanımı

Adım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır(Nasser 2013):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \;\; ; x > 0 \\ 0 \;\; ; x \leq 0 \end{cases}$$



Şekil 2.2 Adım fonksiyonu grafiği.

Adım fonksiyonun tek özelliği orjinde 0’ dan 1’e bir adım yapmasıdır. Bu fonksiyonun türevini eğim olarak tanımlanırsa $x > 0$ ve $x < 0$ olduğunda eğim sıfırdır. $x = 0$ iken türev sonsuzdur. Sonuç olarak Adım fonksiyonun türevi orjin hariç her yerde sıfır, orjinde sonsuzdur. Tersine türev fonksiyonun integrali de “1 ” olmak zorundadır. O halde

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$$

olur.

Delta Dirac Fonksiyonunun Özellikleri (Roach 1970)

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = 1$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)f(x)dx = f(x_0)$
4. $x_0 = 0 \; ise \; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$
5. $\delta(x) = \delta(-x)$
6. $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
7. $\delta(x - a) = 0 \, , x \neq a \quad \int_{a-}^{a+} dx\delta(x - a) = 1$
8. $\delta(x - a)f(x) = \delta(x - a)f(a)$
9. $\int_{0-}^{0+} dx\, f(x)[x \frac{d}{dx}\delta(x)] = \int_{0-}^{0+} dx\, f(x)\delta(x) = f(0)$
10. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$
11. $\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{1}{x}\delta(x)$

2.5 GREEN FONKSİYONUN OLUŞUMU

Green fonksiyonları kendi kendini eğitmiş, matematiksel bir usulle elektrik ve manyetizma konularında araştırmalar yapan İngiliz matematikçi George Green(1793-1841) tarafından bulunmuştur. Green, 1828'de, Green fonksiyonu olarak adlandırılan şeyin tanıtımını yapan bir kitapçığı "Matematiksel Analizin Elektrik ve Manyetizma Kuramlarına Uygulanmasına İlişkin Bir Deneme" yazmıştır. Bu kitapçıkta modern Green teoremine özdeş bir teoremin yanında daha birçok önemli kavram örneğin bugünkü anlamda fizikte kullanılan potansiyel fonksiyon kavramı tanıtılıyordu. Bernhard Riemann, bu fonksiyona "Green fonksiyon" adını verdi (Nasser 2013).

Matematiksel anlamda Green fonksiyonları diferansiyel denklemlerin çözümünde yardımcı olan fonksiyonlardır. Green fonksiyon metotları, bir integral operatör ile ilişkili homojen olmayan terim içeren (genellikle bir kaynak terim olarak adlandırılır) diferansiyel denklemlerin çözümünü sağlamaktadır. Hem kısmi hem de tam diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılabilmektedir. Green fonksiyon metodu homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinde bir metod olarak düşünülmektedir. Green fonksiyonlarının ilginç yönlerinden biri, çözümün çok genel bir biçimde yazılmasını sağlamasıdır. Bu yöntemin sabitlerin değişimi yönteminin bir genelleştirilmesi olduğunu söyleyen matematikçiler de vardır. Green fonksiyon bir sonlu fonksiyonla ya da sonsuz bir seriyle çoğu zaman da bir integralle temsil edilebilmektedir. Genel anlamda Green fonksiyonu sınır ya da başlangıç değerleri verilen çok çeşitli türde adi ya da kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan bir integral çekirdeği olarak kabul edilmektedir. Green fonksiyonunun temelde Sturm Liouville operatörünün tersi olduğu düşünülmektir. Matrisler teorisinde bir matris denkleminin u ve f vektörler ve L bir tersi alınabilir kare matris olmak üzere $Lu = f$ denkleminin çözümü $u = L^{-1}f$ dir. Burada L^{-1} ters matristir. Ters matris $\lambda = 0$ 'ın L' nin özdeğeri olmadığı durumda vardır veya L matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması durumunda vardır. Buradan hareketle $Lu = f$ denkleminin çözümü benzer şekilde $u = L^{-1}f$ şeklinde yazılabilmektedir. Burada L^{-1} operatörü L'nin ters operatörüdür. L bir diferansiyel operatör olduğu için onun ters operatörünün

$$(L^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi) d\xi \tag{2.3}$$

formunda, çekirdeği G olan bir integral operatör olması gerekmektedir. Matris teorisinden hareketle $\lambda = 0$ değeri L' nin bir özdeğeri olmadığında tersinin mevcut olabildiğini göstermektedir. Diğer bir deyişle $Lu = 0$ diferansiyel denkleminin aşikar olmayan çözümlerinin olmadığı zaman tersi mevcuttur. Eğer $Lu = 0$ denkleminin aşikar olmayan çözümleri varsa, L bire-bir dönüşüm olmaz ($u = 0$ daima bir çözümdür.) ve L^{-1} mevcut değildir.

Eğer L diferansiyel operatörünün L^{-1} ters operatörü mevcut ise (2.3) denkleminin çekirdek fonksiyonu olan $G(x,\xi)$ fonksiyonu L denklemine eşlik eden Green fonksiyondur.Bu tanım Green fonksiyonun matematiksel karakterini yansıtır.

Burada Green fonksiyonun nasıl elde edileceği gösterilmektedir.

Aşağıdaki gibi verilmiş bir *SL* sınır değer problemi olmak üzere:

$$Lu(x) = f(x) \quad a < x < b$$
$$B_1u(a) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$$
$$B_2u(b) = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

$\lambda = 0$ değeri L operatörünün bir özdeğeri olmadığında L^{-1} mevcuttur ve

$$(L^{-1}f)(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, f(\xi) d\xi$$

denklemiyle elde edilmektedir. Burada

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{u_2(\xi)u_1(x)}{p(\xi)W(\xi)} & ; x < \xi \\ -\dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(\xi)W(\xi)} & ; x > \xi \end{cases}$$

$G(x,\xi)$, Green fonksiyon; u_1, u_2 homojen denklemin ($Lu = 0$) verilen sınır şartlarını sağlayan bağımsız çözümleri; $W = u_1u'_2 - u'_1u_2$ eşitliği de u_1 *ve* u_2 nin Wronskianıdır. Green fonksiyon yardımıyla homojen olmayan denklem ile sınır şartlarının belirlediği *SL-SDP* nin çözümü aşağıdaki *u(x)* fonksiyonudur:

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

Green Fonksiyonun Özellikleri(Roach 1970)

i. Green fonksiyon $x \neq \xi$ $için$ $LG(x,\xi) = 0$ homojen denklemini sağlar.

Yani bir [a, b] aralığında tanımlı $Ly = f(x)$ diferansiyel operatörü için hem $G_I(x,\xi)$ ve hem de $G_{II}(\xi,x)$ için

$LG_I(x,\xi) = 0$ $yani$ $LG_I(x,\xi) = \delta(x-\xi)$ $\quad ; a \leq x < \xi$

$LG_{II}(\xi,x) = 0$ $yani$ $LG_{II}(x,\xi) = \delta(x-\xi)$ $\quad ; \xi < x \leq b$

ii. Green Fonksiyon simetriktir.

$G(x,\xi) = G(\xi,x)$

iii. $G_I(x,\xi)$fonksiyonu $x = a$ da sınır koşulunu sağlar. Benzer şekilde $G_{II}(x,\xi)$ fonksiyonu $x = b$ de sınır koşulunu sağlar.

iv. Green fonksiyonu $[a, b]$ de süreklidir, özellikle de $x = \xi$ için süreklidir.

$\lim_{x\to\xi} G_I(x,\xi) = \lim_{x\to\xi} G_{II}(x,\xi)$

v. Green fonksiyon $x = \xi$ için türevlenebilir değildir. Bu noktadaki türevin $G'(\xi^+,\xi) - G'(\xi^-,\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}$ şeklinde bir sıçraması vardır. Bu nedenle Green fonksiyon $x = \xi$ de köşe noktası olan sürekli bir eğridir.

vi. $\frac{dG(x,\xi)}{dx}$ bir süreksizliğe sahiptir ve bu süreksizlik aşağıdaki gibi verilir:

$$\left.\frac{dG_{II}}{dx}\right|_{x=\xi} - \left.\frac{dG_I}{dx}\right|_{x=\xi} = 1$$

vii. Green fonksiyon genel zorlama fonksiyonları altında çözüm için bir süperpozisyon (çakıştırma) prensibi üretir:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x') f(x') dx'$$

Teorem:Bir *SL* operatörü için Green fonksiyonu Dirac delta yardımıyla tanımlanışı:

$$Ly(x) = f(x) \tag{2.4}$$

denklemini çözmek için *G(x, t)* Green fonksiyonu

$LG(x,t) = \delta(x-t)$

şeklinde tanımlanır. Eğer *y(x)* fonksiyonu

$$y(x) = \int G(x,t)f(t)dt$$

şeklinde tanımlanırsa (2.4) denkleminin elde edileceğini göstermek gerekmektedir.

İspat: $y(x) = \int G(x,t)f(t)dt$ eşitliği $Ly(x)$ de yerine yazılır.

$$Ly(x) = L\int G(x,t)f(t)dt$$

İntegral alma ile diferansiyel yer değiştirilirse;

$$= \int LG(x,t)f(t)dt$$

Şimdi integral altında $LG(x,t) = \delta(x-t)$ yazılırsa,

$$Ly(x) = \int \delta(x-t)f(t)dt$$

Dirac delta fonksiyonunun $\int \delta(x-t)f(t)dt = f(x)$ özelliği kullanılırsa,

$Ly(x) = f(x)$ bulunur.

Örnek 1 (Logan 1997):

$u''(x) = f(x)$ denkleminin $0 < x < 1$ $için\ \ Green\ fonksiyonu$:

Çözüm:

Homojen denklem $u''_H(x) = 0$ olur. Homojen kısmın çözümü için iki kez integral alındığında $c_1 + c_2 x$ bulunur. Sabitlerin değişimi yöntemi ile:
$u_I(x) = c_1(x) + c_2(x)x$

olur. Türev alınırsa:

$$u'_I(x) = c'_1(x) + c'_2(x)x + c_2(x)$$

$u_I(x) = c_2$ olması koşulu gereği;

$$c'_1(x) + c'_2(x)x = 0 \tag{2.5}$$

dır. İkinci türev alınır, orjinal denklem kullanılır:

$$u''_I(x) = c'_2 = f$$

olur. İntegral alınarak

$$c_2(x) = \int_0^x f(y)dy$$

bulunur. Bu ifadeyi (2.5) eşitliğinde yerine konulup gereken işlemleri yapılır:

$$c_1(x) = \int_x^1 yf(y)dy$$

bulunur. c_1 ve c_2 kullanılarak $u_I(x)$ oluşturulur:

$$u_I(x) = \int_0^x xf(y)dy + \int_x^1 yf(y)dy = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy$$

Bu gösterimde G fonksiyonu

$$G(x,y) = \begin{cases} x\,; & 0 < y < x \\ y\,; & x < y < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve bir Green fonksiyon örneğidir.

Örnek 2 (Logan 1997)**:**

$-u''(x) = f(x)$, $0 < x < 1$; $u(0) = u(1) = 0$ olmak üzere sınır değer probleminin çözümünü veren Green fonksiyonun bulunuşu:

Önce $Lu = 0$ denkleminin çözümü

$u(x) = ax + b$

dir (a ve b sabitler).

$u(0) = 0$ şartını sağlayan $u_1(x) = ax$ olur.

$u_1(t) = at$ ve $u_1'(x) = a$

$u(1) = 0$ şartını sağlayan $u_2(x) = b$ olur.

$u_2(t) = b$ ve $u_2'(x) = 0$

$p = 1$ ve Wronskian $W = -ab$ olur.

$x < t$ için $G_1(x,t) = \frac{axb}{-ab} = -x$

$x > t$ için $G_2(x,t) = \frac{atb}{-ab} = -t$

Green fonksiyon aşağıdaki şekilde bulunur.

$$G(x,t) = \begin{cases} -t\,; & 0 < t < x \\ -x\,; & x < t < 1 \end{cases}$$

2.6 GREEN FONKSİYONUN FİZİKSEL YORUMU

George Green, elektrik ve magnetizma konularını matematiksel kuramlarla araştırıp bir teori oluşturan ilk kişidir. Onun teorisi James Clerk Maxwell, William Thomson ve diğer bilim adamlarının çalışmalarına temel oluşturmaktadır.

Green fonksiyonunun fiziksel yorumu için *SL-SDP* nin çözümü olan aşağıdaki integral göz önüne alınırsa:

$$\mathrm{y}(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

ifadesini bireysel kaynak nokta etkilerinin bir toplamı veya integrali olarak düşünülür. Burada $f(\xi)$ her bir kuvveti, $G(x,\xi)$ fonksiyonuda ξ de yerleşmiş birim nokta kaynağının bir x deki etkisini tanımlar.

Bunu bir fiziksel örnekle açıklamak için uç noktaları $x = 0$ ve $x = L$ olan horizantal elastik bir yayda dalga denklemini ele alınırsa:

Eğer $y(x, t)$ çapraz küçük dikey yer değiştirmeyi temsil ederse, düşey yöndeki yer çekimi de dahil edilirse, $x \epsilon [0,L]$, $y(0) = y(L) = 0$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu g = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Burada T yaydaki sabit gerilme ve μ ise birim uzunluktaki kütle yoğunluğudur ve x değiştikçe değişir. $x = \xi$ de noktasal yük durumunda kütle yoğunluğu $\mu(x) = m\delta(x-\xi)$ olur ve kararlı durum denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{mg}{T}\ \delta(x-\xi)$$

Bu yazılışta sol taraf bir öz-eşlenik operatörüdür. $G(x, \xi)$ şeklindeki Green fonksiyonu

$$G(0, \xi) = G(L, \xi) = 0$$

sınır şartları ile

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - \xi)$$

şartını sağlamalıdır. Bu şartları sağlayan Green fonksiyon aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(\xi - L)}{L} & ; \quad 0 \leq x < \xi \\ \dfrac{\xi(x - L)}{L} & ; \xi < x \leq L \end{cases}$$

Diğer bir örnek olarak elektrodinamikte Poisson denkleminin çözümünü ararken:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

ya da onun homojen versiyonu olan Laplace denklemini çözerken Green fonksiyonu hacim ve yüzey integrallerinden elektrostatik potansiyeli belirlenmesine olanak tanımaktadır:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(r') G(r, r')$$

Bu genel form 1,2 ya da 3 boyutlu olarak kullanılabilir. Genel olarak Green fonksiyonları uygun sınır koşullarını sağlamak için inşa edilir. Bazı durumlarda doğru sınır koşullarını sağlayan Green fonksiyonu yazmak zor ya da uygunsuz olabilmektedir. Bu durumlarda yukarıdaki genel form kullanılır. Önce Possion denkleminin bir çözümü elde eldilir. Sonra çözümlerin uygun doğrusal kombinasyonları sınır değerlerini ayarlamak için Laplace denklemine eklenir.

2.7 HOMOJEN OLMAYAN SINIR ŞARTLARI İÇİN GREEN FONKSİYONLARI

Homojen olmayan sınır şartları için Green fonksiyonların inşasında aşağıdaki aşamalar uygulanır:

i. $Ly = 0$ homojen denklemin verilen sınır şartlarını sağlayan $\varphi_0(x)$gibi her hangi bir özel çözümü bulunur. Bu aşama kolaylıkla çözülür çünkü istenen genel bir çözüm değil özel bir çözümdür.

ii. L diferansiyel operatörü doğrusal olduğundan $Ly(x) = f(x)$ denkleminin homojen olmayan sınır şartlarına uyan genel çözümü $\varphi_0(x)$ e bağlı olarak aşağıdaki gibi verilir:

$$f(x) = \varphi_0 + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.6}$$

Teorem 2.7.1 (Nasser 2013): $Ly(x) = f(x)$ homojen olmayan denklemin çözümü

$$f(x) = \varphi_0 + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

ile verilir. Burada φ_0 fonksiyonu $L\varphi_0(x) = 0 \;\; ve \;\; LG(x,\xi) = \delta(x-\xi)$ denklemlerinin ikisinin de çözümüdür.

İspat:

$$f(x) = \varphi_0 + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

denkleminin her iki yanında diferansiyel operatörü uygulanır:

$$Lf(x) = L\varphi_0 + \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

$$\mathrm{Ly}(x) = 0 + \int_a^b [\delta(x,\xi)]f(\xi)d\xi$$

$$\mathrm{Ly}(x) = f(x)$$

Örnek 3 (Nasser 2013):

$-y'' - y = f(x)$ denkleminin [0, 1] aralığında $y(0) = 0$ ve $y(1) = 1$ sınır şartlarında çözümü:

Önce $-y'' - y = 0$ homojen denkleminin sınır şartlarını sağlayan çözümü bulunur. Bu denklemin homojen kısmının genel çözümü $y = c_1 cosx + c_2 sinx$ dir. İkinci olarak bu genel çözümünün sınır şartlarını sağlayan bir çözümü bulunur. Sınır şartlarını uygularsak $x = 0$ için $c_1 = 0$ olur. $x = 1$ için ve $c_2 = 1/\sin 1$ bulunur. O zaman sınır şartlarını sağlayan çözüm: $\varphi_0(x) = sinx/sin1$

Buna bağlı olarak genel çözüm (2.6) yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$y(x) = \frac{sinx}{sin1} + \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

2.8 ÖZDEĞER FONKSİYON SERİSİ OLARAK GREEN FONKSİYONU

$\phi_n(x)$ bir özdeğer fonksiyon ve λ_n özdeğer olmak üzere Sturm-Liouville operatörü:

$$L\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

dır. Green fonksiyonunun özdeğer fonksiyonlar türünden yazılışı:

$$G(x,t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(x)$$

Burada $\phi_n(x)$ fonksiyonları ortogonal özdeğer fonksiyonlardır ve $c_n(x)$ bilinmeyen fonksiyon olup bulunacaktır.

$$LG(x,t) = \delta(x - t)$$

Denkleminde G' yi yerine konulursa;

$$L\sum_n c_n(t)\phi_n(x) = \sum_n c_n(t)L\phi_n(x)$$

$$\delta(x-t) = \sum_n c_n(t)\lambda_n\phi_n(x)$$

Her iki taraf $\phi *_m (x)$ ile çarpılır, x'e göre integre edilirse:

$$\int \phi_m^*(x)\,\delta(x-t)dt = \sum_n c_n(t)\lambda_n \int \phi_m^*(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

$$\phi_m^*(t) = \sum_n c_n(t)\lambda_n\delta_{nm}$$

$$\phi_m^*(t) = c_m(t)\lambda_m$$

bulunur. Bunun sonucunda

$$c_m(t) = \frac{\phi_m^*(t)}{\lambda_m}$$

veya

$$c_n(t) = \frac{\phi_n^*(t)}{\lambda_n}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$G(x,t) = \sum_n \frac{\phi_n^*(t)\phi_n\,(x)}{\lambda_n}$$

şeklinde özdeğer fonksiyonlarının açılımı olarak Green fonksiyon bulunur.

BÖLÜM 3

STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN TANITIMI VE ÖZELLİKLERİ

3.1 STURM-LIOUVILLE DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Lineer ikinci dereceden bir diferansiyel denklem :

$$A(x)\frac{d^2x}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y + \lambda D(x)y = 0 \qquad (3.1)$$

Bu yazılışta λ sınır koşullarının belirlediği bir parametre, *A(x)* pozitif sürekli bir fonksiyon olsun. Denklem *A(x)* ile bölünürse;

$$\frac{d^2x}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y + \lambda d(x)y = 0 \qquad (3.2)$$

Bu yazılışta

$b(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$, $c(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$, $d(x) = \frac{D(x)}{A(x)}$, dir.

Bir *p(x)* integral çarpanı aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$p(x) = exp\left\{\int_a^x b(\xi)d\xi\right\}$$

(3.2) denklemi *p(x)* ile çarpılarak aşağıdaki denklem bulunur:

$$p(x)\frac{d^2x}{dx^2} + p(x)b(x)\frac{dy}{dx} + p(x)c(x)y + \lambda p(x)d(x)y = 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\int_a^x b(\xi)d\xi}\right) = e^{\int_a^x b(\xi)d\xi}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x b(\xi)d\xi\right) = p(x)b(x)$$

Ve

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] = p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)b(x)z$$

olduğundan (3.3) denklemini *q(x) = p(x)c(x)* ve *r(x) = p(x)d(x)* olmak üzere aşağıdaki

şekilde yazılır:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \tag{3.4}$$

Bu denklem Sturm-Liouville denklemi (*SL* denklemi) olarak bilinir. λ belirlenmediğinden temel olarak *SL* diferansiyel denklemi bir özdeğer problemidir. Denklemin çözümü λ ve *y*' nin bulunmasını gerektirir.

Bazı Önemli Denklemlerin Sturm-Lioville Denklemi Olarak Yazılması

i. Legendre Polinomları (Courant ve Hilbert1966)

Aşağıdaki Legendre denklemi ele alınırsa:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

$c_0(x) = 1 - x^2$, $c_1(x) = -2x$ ve $c'_0(x) = -2x$ olduğundan bu denklem *SL* formuna dönüşebilir. Ağırlık fonksiyonu *p(x)* bulunur:

$$p(x) = \frac{1}{|c_0(x)|}e^{\int\frac{c_1(x)}{c_0(x)}dx} = \left(\frac{1}{|1 - x^2|}\right)e^{\int\frac{-2x}{|1-x^2|}dx}$$

$$p(x) = \frac{1}{|1-x^2|} e^{ln|1-x^2|} = \left(\frac{1}{|1-x^2|}\right)|1-x^2| = 1$$

$p(x) = 1$ olarak bulunur. Bunu kullanarak *SL* denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0$$

ii. Laguerre Polinomları (Chakrabarti 1996)

Aşağıdaki Laguerre denklemi düşünülürse:

$$xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$$

$c_0(x) = x$, $c_1(x) = (1-x)$ ve $c'_0(x) = 1$

$c'_0(x) \neq c_1(x)$ olduğundan Laguerre denklemi *SL* formunda değildir. Bu nedenle Ağırlık fonksiyonu *p(x)* bulunmalıdır:

$$p(x) = \frac{1}{|c_0(x)|} e^{\int \frac{c_1(x)}{c_0(x)} dx} = \left(\frac{1}{|x|}\right) e^{\int \frac{1-x}{x} dx}$$

$$p(x) = \frac{1}{|x|} e^{\int (\frac{1}{x}-1) dx} = \left(\frac{1}{|x|}\right) e^{\int \frac{1}{x} dx} . e^{\int -dx}$$

$$p(x) = \frac{1}{|x|} e^{ln|x|} . e^{-x} = e^{-x}$$

Laguerre denklemi $p(x) = e^{-x}$ ile çarpılır:

$$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' - \lambda e^{-x}y = 0$$

$c_0(x) = xe^{-x}$ ve $c'_0(x) = (1-x)e^{-x} = c_1(x)$

olduğuna dikkat edilerek *SL* denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right] - \lambda e^{-x} y = 0$$

iii. Hermite Polinomları (Sharma ve Gupta 2010)

Aşağıdaki Hermite denklemi göz önüne alınırsa:

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

Yukarıdaki denklemde

$$c_0(x) = 1 \text{ ve } c'_0(x) = 0\,, c_1(x) = -2x$$

olmak üzere $c'_0(x) \neq c_1(x)$ olduğundan Hermite denklemi *SL* formunda değildir. Bu nedenle Ağırlık fonksiyonu *p(x)* bulunur:

$$p(x) = \frac{1}{|c_0(x)|} e^{\int \frac{c_1(x)}{c_0(x)} dx} = \left(\frac{1}{1}\right) e^{\int \frac{-2x}{1} dx}$$

$$p(x) = e^{-2\int x dx} = e^{-x^2}$$

Verilen Hermite denklemi $p(x) = e^{-x^2}$ ile çarpılırsa:

$$e^{-x^2} y'' - 2xe^{-x^2} y' + 2\lambda e^{-x^2} y = 0$$

elde edilir. Denklemin *SL* formunda yazılışı aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right] + 2\lambda e^{-x^2} y = 0$$

iv. Karışık Hipergeometrik Denklem (Andrews ve Askey 1999)

Söz konusu denklem aşağıdaki gibidir:

$$xy'' + (z - x)y' - \lambda y = 0$$

denklemde

$c_0(x) = x$ ve $c'_0(x) = 1$, $c_1(x) = (z - x)$ dir.

Verilen denklemde $c'_0(x) \neq c_1(x)$ olduğundan bu denklem *SL* formunda değildir. Bu nedenle Ağırlık fonksiyonu *p(x)* :

$$p(x) = \frac{1}{|c_0(x)|} e^{\int \frac{c_1(x)}{c_0(x)} dx} = \left(\frac{1}{|x|}\right) e^{\int \frac{z-x}{x} dx} = \left(\frac{1}{|x|}\right) e^{\int (\frac{z}{x} - 1) dx}$$

$$p(x) = \frac{1}{|x|} e^{z \int (\frac{1}{x} dx} . e^{-\int 1 dx} = \frac{1}{|x|} e^{z ln|x|} . e^{-x}$$

$$p(x) = \frac{1}{|x|} |x|^z e^{-x}$$

$p(x) = |x|^{z-1} e^{-x}$ şeklinde düzenlenir. *p(x)* ile sözkonusu denklem çarpılırsa:

$$x|x|^{z-1} e^{-x} y'' + (z - x)|x|^{z-1} e^{-x} y' - \lambda |x|^{z-1} e^{-x} y = 0$$

Bu yazılışta :

$$C_0(x) = x|x|^{z-1} e^{-x}$$

$$c_1(x) = (z - x)|x|^{z-1} e^{-x} = c'_0(x)$$

Söz konusu denklemin *SL* formunda yazılışı aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dx}\left[x|x|^{z-1} e^{-x} \frac{dy}{dx}\right] + \lambda |x|^{z-1} e^{-x} \quad y = 0$$

v. Chebyshev Polinomları(Birkhoff ve Rota 1989)

Örnek bir Chebyshev denklemi aşağıdaki gibidir:

$$(1-x^2)y''-xy'-\lambda y=0$$

Benzer şekilde :

$c_0(x)=(1-x^2)$ ve $c_1(x)=-x$ ve $c'_0(x)=-2x$ ve $c'_0(x)\neq c_1(x)$ olduğundan bu denklem bir *SL* formunda denklem değildir.

$$p(x)=\frac{1}{|c_0(x)|}e^{\int\frac{c_1(x)}{c_0(x)}dx}=\left(\frac{1}{|1-x^2|}\right)e^{\int\frac{-x}{1-x^2}dx}$$

Yazılıp $p(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ olarak bulunur. Chebyshev denklemi *p(x)* ile çarpılır:

$c_0(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ve $c_1(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=c'_0(x)$ bulunur. Chebyshev denklemi *SL* formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}y=0$$

Örnek 4: Hidrojen Atomu(Adkins 2014)

Erwin Schrödinger (1887-1961) bir Planck ölçeğinde ($\hbar$), karşılaştırılabilir parçacıkların durumunu modellemek için aşağıdaki gibi bir denklem oluşturdu:

$$H\phi=(-\frac{h^2}{2m}\Delta+V(x,t))\phi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)$$

Burada *m* parçacıkların kütlesi ve *V(x,t)* sistemin potansiyelidir. Parçacıkların hidrojen atomu olma durumunda R^3te bir eloktrostatik potansiyel sözkonusudur:

$$V(x,t)=V(|x|)=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{|x|}$$

Burada $q,\in_0 \in R$ dir. Denklemin çözümü değişkenlerine ayrılabilir $\phi(x,t)=\Psi(x)\varphi(t)$ olarak düşünülür. Böyle bir varsayım ile, çok parametreli denklem tek parametreli denkleme ayrılır, böylece bir kısmi türevli diferansiyel denklem aşağıdaki gibi iki adi diferansiyel denkleme indirgenir:

$$\frac{d\varphi}{dt}=-i\lambda\varphi(t)$$

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(|x|))\psi(x)=\lambda\psi(x)$$

Burada λ bir spektral değişkendir. Alttaki denklem zamandan bağımsız Schröndinger denklemi olarak adlandırılır. *V(x,t) =V(x)* Problemin çözümü için ikinci denklem dikkate alınır. Potansiyelin radyal simetrisi nedeniyle değişkenler tekrar ayrılır:

$$\psi(x)=R(r)Y(\theta,\vartheta)$$

Aynı yöntemle, küresel Laplacian'ı genişletmek, denklemleri bir kez daha ayırmayı sağlar:

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r)-\lambda)R(r)=\ell(\ell+1)R(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta})+\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\vartheta^2}=-\ell(\ell+1)\,sin\,\theta Y(\theta,\vartheta)$$

Literatür ile tutarlı olmak için ayırma sabiti $\ell(\ell+1)\in \mathrm{C}$ olarak seçilir. Sonuç olarak problem iki tane Sturm-Liouville denkleminin çözümüne indirgenmiştir. Açısal denklemin Legendre polinomlarından kaynaklanan çözümlere sahip olduğu ortaya çıkar. Radyal denklem, küresel Bessel ve Neumann fonksiyonları biçiminde çözümlere sahiptir. Λ özdeğeri, enerji özdeğeri olarak adlandırılır ve genellikle *E* harfi ile gösterilir.

3.2 STURM-LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEM TÜRLERİ

a) Regular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

$p(a) \neq 0$, $p(b) \neq 0$ *ve* $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

ile verilen Sturm-Liouville denklemi

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y$$

ile gösterilen *SL* operatörü kullanılarak

$$L[y] = \lambda r(x)y$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem ve bu denkleme eşlik eden

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a) = 0$$

ve

$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b) = 0$$

sınır şartları verilirse Regular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi (*RSL-SDP*) oluşturulmuş olur.

Yani :

$$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 \neq 0$$

$$\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 \neq 0$$

p >0 , r ≥ 0 ve *p, q, r* kapalı bir $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere *RSL-SDP*:

$$L[y] = \lambda r(x) y$$
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \,,$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Problemin(sistemin) çözümünde amaç y_λ şeklinde bir aşikar olamayan çözümün var olması için λ' nın tüm özdeğerlerini bulmaktır. Burada y_λ ve onun türevlerinin kapalı $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğu kabul edilir ki bu aynı zamanda sınırlı olmaları anlamına da gelir. Sınır değer problemi bir özdeğer problemidir. Bu nedenle λ değerine y_λ aşikar olmayan çözümüne karşılık gelen özdeğer denir. λ özdeğeri *SL* operatöründen aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lambda = \frac{-1}{r(x)} \{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y\}$$

Denklemi ve sınır koşullarını sağlayan aşikar olmayan çözümler özfonksiyon adını alır. Bu nedenle, Sturm-Liouville probleminin, fonksiyon alanı için tüm ortogonal taban kümelerinden gelen özfonksiyonu, ağırlık fonksiyonunun *r(x)* olduğu durumdur.

b) Singular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

Aşağıdaki durumlardan biri varsa

i. $[a, b]$ ‘ de $r \geq 0$ ve (a, b) üzerinde *p*> 0 olmak üzere ya *p(a)* = 0 veya *p(b)* = 0 ya da *p(a)* = *p(b)* = 0 ise
ii. Ya da (*a*,*b*) sınırsız bir aralık ise

$$L[y] + \lambda r(x) y = 0$$

denklemi singular olarak adlandırılır ve *SSL-SDP* olarak gösterilir.

c) Periyodik Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

Bir $[a,\ b]$ üzerinde *p(a) = p(b), p*> 0 , *r*> 0 ve *p, q, r* sürekli fonksiyonlar olmak üzere *y(a) = y(b)* , $y'(a) = y'(b)$ sınır şartlarıyla verilen

$$L[y] + \lambda r(x) y = 0$$

denklemi periyodik olarak adlandırılır ve *PSL-SDP* olarak kısaltılır.

3.3 STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ İÇİN GREEN FONKSİYONLARI

$L[y] = \lambda r(x) y$ şeklinde verilen bir Sturm–Liouville diferansiyel denklemi için Green fonksiyonu aşağıdaki denklemin çözümü olan *G(x, s)* fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG}{dx}\right] + q(x)G + \lambda r(x)G = \delta(x-s)$$

SL denklemi ile verilen sınır şartlarının beraberce oluşturdukları sınır değer problemi için Green fonksiyonun belirlenmesinde bir yöntem aşağıdaki gibidir:

Her $x \in [\,a, b]$ için
$L[y] = f(x)$
$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$
$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$

Şeklinde verilen homojen olmayan *SL-SDP* için:

Öyle bir $G(x,\xi)$ fonksiyonu belirlenmeli ki *SL-SDP*'nin genel çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds \qquad (3.5)$$

şeklinde bir integral alınarak bulunabilir. Bunu sağlayan fonksiyon Green fonksiyon olarak adlandırılır. Green fonksiyonun tanımlaması problemin çözümünde büyük kolaylık getirir. Çünkü Green fonksiyon sayesinde *SL –SDP*'nin (denklem sistemi) çözülmesi işi sadece bir tek integralin (3.5) çözümünün bulunması işine indirgenmiştir. Böyle bir fonksiyonu bulmak için aşağıdaki özellikleri sağlayan *G(x,s)* şeklindeki fonksiyonu araştırılır:

i. $\left[\frac{d}{ds}(p(s)\frac{d}{ds}) - q(s)\right] G(x,s) = 0$, $s \neq x$ olmak üzere $\forall s \epsilon [a,b]$

ii. $a_1 G(x,a) + a_2 \frac{\partial}{\partial s} G(x,s)_{s=a} = 0$

iii. $b_1 G(x,b) + b_2 \frac{\partial}{\partial s} G(x,s)_{s=b} = 0$

iv. $\lim_{s\to x_+} G(x,s) - \lim_{s\to x_-} G(x,s) = 0$

v. $\lim_{x\to x_+} \frac{\partial}{\partial s} G(x,s) - \lim_{s\to x_-} \frac{\partial}{\partial s} G(x,s) = -\frac{1}{p(x)}$

i-v denklemlerini sağlayan bir *G(x, s)* fonksiyonunun

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds$$

içine konulmasıyla elde edilen *y(x)*fonksiyonu *SL-SDP* sisteminin çözümü olur.

Problemin çözümünde $(i), (ii)\ ve\ (iii)$ denklemlerinin çözümünü sağlayan bir fonksiyon inşa etmek göreceli olarak daha kolaydır. Genel olarak homojen olan doğrusal adi diferansiyel denklem ve genel çözümü aşağıdaki gibi verilir:

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dy}{ds}\right) - q(s)y = 0$$

$$y(s) = c_1 y_1(s) + c_2 y_2(s)$$

Bu *y(s)* genel çözüme birinci sınır şartı $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$ uygulanarak *y(s)* çözümü 1-boyutlu olarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$y(s) = c_1 u_1(s)$$

Benzer şekilde

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

sınır şartını sağlayan genel çözüm,

$$u_2(s) = b_2\big(y_2(b) + y'_2(b)\big)\, y_1(s) - b_1\big(y_1(b) + y'_1(b)\big) y_2(s)$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$y(s) = c_2 u_2(s)$$

$c_1(x)$ ve $c_2(x)$ parametresinin fonksiyonları olarak kabul edilerek Green fonksiyonu inşa edilir:

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(\mathrm{x})u_1(\mathrm{s})\,; & a < s < x \\ c_2(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})\,; & x < s < b \end{cases}$$

G fonksiyonunun (*iv)* ve (*v)* şartlarını sağlaması gerekir. *G* fonksiyonuna bu şartlar uygulanırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$c_1(\mathrm{x})u_1(\mathrm{s}) - c_2(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s}) = 0$$
$$c_1(\mathrm{x})u'_1(\mathrm{s}) - c_2(\mathrm{x})u'_2(\mathrm{s}) = \frac{-1}{p(x)}$$

Bu denklem sistemi c_1 ve c_2 ye göre çözülerek :

$$c_1(\mathrm{x}) = \frac{u_2(\mathrm{x})}{p(x)W[u_1,u_2](x)}$$

$$c_2(\mathrm{x}) = \frac{u_1(\mathrm{x})}{p(x)W[u_1,u_2](x)}$$

Burada $W[u_1,u_2](x) = u_1 u'_2 - u_2 u'_1$ olarak kısaltılmıştır ve Wronskian olarak adlandırılır. Bu eşitlikler *G* de yerine konularak Green fonksiyon elde edilir :

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{u_1(\mathrm{s})u_2(\mathrm{x})}{p(x)W[u_1,u_2](x)} \ ; \ a\le s<x\le b\\ \dfrac{u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})}{p(x)W[u_1,u_2](x)} \ ; a\le x<s\le b\end{cases}$$

Green fonksiyon *i-v* şartlarının tümünü sağlayacaktır.

G(x, s) fonksiyonu sadeleştirilip bir integral olarak gösterilir. u_1 ve u_2 homojen denklemi de sağlayacağı için :

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(p(x)W[u_1,u_2](x)\right)=\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(p(x)u_1(x)\frac{du_2}{dx}\right)-\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(p(x)u_2(x)\frac{du_1}{dx}\right)$$
$$=p(x)u'_1(\mathrm{x})u'_2(\mathrm{x})+u_1(\mathrm{x})\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right)(x)$$
$$-p(x)u'_2(\mathrm{x})u'_1(\mathrm{x})-u_2(\mathrm{x})\frac{\mathrm{d}}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right)(x)$$
$$=-q(x)u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{x})+q(x)u_1(\mathrm{x})u_2(x)=0$$

Bu nedenle;

$$p(x)W[u_1,u_2]=A$$

şeklinde bir sabittir.

Bu değerler *G(x, s)* de yerine konulur :

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{u_1(\mathrm{s})u_2(\mathrm{x})}{A} \ ; \ a\le s<x\le b\\ \dfrac{u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})}{A} \ ; a\le x<s\le b\end{cases}$$

ve

$$G(s,x)=\begin{cases}\dfrac{u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})}{A} \ ; \ a\le x<s\le b\\ \dfrac{u_1(\mathrm{s})u_2(\mathrm{x})}{A} \ ; a\le s<x\le b\end{cases}=G(x,s)$$

bulunur (Parnell 2013). Buradan *G* fonksiyonunun *x* ve *s* için simetrik olduğu yani *G(x, s) = G(s, x)* olduğu elde edilir. Bu sonuç *y(x)* fonksiyonunun bir belirli integralle ifade edilmesini sağlar:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

Bu integral verilen *SL-SDP* nin çözümüdür ve *y(x)* fonksiyonunun verilen *SL-SDP* nin çözümü olduğu yerine konarak ispatlanır:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds = \int_a^x G(x,s)f(s)ds + \int_x^b G(x,s)f(s)ds$$

$$y(x) = \frac{1}{A}\int_a^x u_1(\mathrm{s})u_2(\mathrm{x})f(s)ds + \frac{1}{A}\int_x^b u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})f(s)ds$$

Bu eşitliğin diferansiyeli alınır[1];

$$y'(x) = \frac{1}{A}u_1(s)u_2(x)f(s)\Big|^{s=x_-} + \frac{1}{A}\int_a^x u_1(s)u'_2(x)f(s)ds$$

$$+\frac{1}{\mathrm{A}}\mathrm{u}_1(\mathrm{x})\mathrm{u}_2(\mathrm{s})\mathrm{f}(\mathrm{s})\Big|_{\mathrm{s}=\mathrm{x}_+} + \frac{1}{\mathrm{A}}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{b}} \mathrm{u}'_1(\mathrm{x})\mathrm{u}_2(\mathrm{s})\mathrm{f}(\mathrm{s})\mathrm{ds}$$

$$y'(x) = \frac{1}{A}u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{x})f(x) - \frac{1}{A}u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{x})f(x)$$

$$+\frac{1}{A}\int_a^x u_1(\mathrm{s})u'_2(\mathrm{x})f(s)ds + \frac{1}{A}\int_x^b u'_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})f(s)ds$$

Sonuç olarak

$$y'(x) = \frac{1}{A}\int_a^x u_1(\mathrm{s})u'_2(\mathrm{x})f(s)ds + \frac{1}{A}\int_x^b u'_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})f(s)ds \qquad (3.6)$$

---

[1] İntegral altında türev alma kuralı uygulanırsa
$\frac{d}{dx}\int_c^x f(x,s)ds = F(x,s)\big|_{s=x} + \int_c^x \frac{\partial F}{\partial x}(x,s)ds = F(x,x) + \int_c^x \frac{\partial F}{\partial x}(x,s)ds$

İkinci kez diferansiyel alınırsa;

$$y''(x) = \frac{1}{A} u_1(\mathrm{s}) u'_2(\mathrm{x}) f(s)\Big|^{\,s\,=\,x_-} + \frac{1}{A} u'_1(\mathrm{x}) u_2(\mathrm{x}) f(s)\Big|_{\,s\,=\,x_+}$$

$$+ \frac{u''_2(x)}{A} \int_a^x u_1(\mathrm{s}) f(s) ds + \frac{u''_1(x)}{A} \int_x^b u_2(\mathrm{s}) f(s) ds$$

$$y''(x) = \frac{1}{A} \left(u_1(\mathrm{x}) u'_2(\mathrm{x}) - u'_1(\mathrm{x}) u_2(\mathrm{x})\right) f(x)$$

$$+ \frac{u''_2(x)}{A} \int_a^x u_1(\mathrm{s}) f(s) ds + \frac{u''_1(x)}{A} \int_x^b u_2(\mathrm{s}) f(s) ds$$

$$y''(x) = \frac{W[u_1, u_2](x)}{A} f(x) + \frac{u''_2(x)}{A} \int_a^x u_1(\mathrm{s}) f(s) ds + \frac{u''_1(x)}{A} \int_x^b u_2(\mathrm{s}) f(s) ds$$

Veya $p(x)W[u_1, u_2](x) = A$ eşitliği kullanılarak;

$$\mathrm{y}''(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{p(x)}} + \frac{\mathrm{u''_2(x)}}{\mathrm{A}} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{u_1(s) f(s) ds} + \frac{\mathrm{u''_1(x)}}{\mathrm{A}} \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{b}} \mathrm{u_2(s) f(s) ds} \qquad (3.7)$$

SL operatörü:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\mathrm{p(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right] - \mathrm{q(x)} = \mathrm{p(x)} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} + \mathrm{p'(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} - \mathrm{q(x)}$$

SL diferansiyel operatörünü eşitliğin sağ tarafına uygulanır, (3.6) ile (3.7) eşitlikleri kullanılarak;

$$L[y] = p(x) y''(x) + p'(x) y'(x) - q(x) y(x)$$

$$L[y] = f(x) + \frac{p(x) u''(x)}{A} \int_a^x u_1(s) f(s) ds + \frac{p(x) u''_1(x)}{A} \int_x^b u_2(s) f(s) ds$$

$$+ \frac{p'(x)}{A} \int_a^x u_1(s) u'_2(x) f(s) ds + \frac{p'(x)}{A} \int_x^b u'_1(x) u_2(s) f(s) ds$$

$$-\frac{\mathrm{q(x)}}{\mathrm{A}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\mathrm{u}_1(\mathrm{s})\mathrm{u}_2(\mathrm{x})\mathrm{f(s)ds}+\frac{\mathrm{q(x)}}{\mathrm{A}}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{b}}\mathrm{u}_1(\mathrm{x})\mathrm{u}_2(\mathrm{s})\mathrm{f(s)ds}$$

$$=f(x)+\frac{1}{A}[p(x)u''_2(\mathrm{x})+p'(x)u'_2(x)-q(x)u_2(x)]\int_a^x u_1(s)f(s)ds$$

$$+\frac{1}{A}[p(x)u''_1(\mathrm{x})+p'(x)u'_1(x)-q(x)u_1(x)]\int_x^b u_2(s)f(s)ds$$

$$L[y]=\frac{L[u_2](x)}{A}\int_a^x u_1(s)f(s)ds+\frac{L[u_1](x)}{A}\int_x^b u_2(s)f(s)ds+f(x)$$

$$L[y]=0+0+f(x)$$

$$L[y]=f(x)$$

bulunur. O halde *i-v* şartlarıyla tanımlı

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

fonksiyonu homojen olmayan *SL-SDP* nin çözümüdür.

Özet:

$Her\ x\in[\,a,b]\ için$

$L[y]+f(x)=0$

$a_1y(a)+a_2y'(a)=0$

$b_1y(b)+b_2y'(b)=0$

Sınır değer probleminin çözümü

$$y(x)=\int_a^b G(x,\mathrm{s})f(\mathrm{s})ds$$

şeklindedir. Burada *G(x, s)* ile verilen Green fonksiyonu:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{u_2(\mathrm{x})u_1(\mathrm{s})}{p(x)W[u_1,u_2](x)} \ ; \ 0 < x < \mathrm{s} \\ \dfrac{u_1(\mathrm{x})u_2(\mathrm{s})}{p(x)W[u_1,u_2](x)} \ ; \mathrm{s} < x < b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yazılışta $u_1(\mathrm{s})\ ve\ u_2(\mathrm{s})$ ifadeleri *Ly = 0* denkleminin doğrusal bağımsız çözümleridir ve denklemle verilen şartları sağlar.

Örnek 5: $y'' - y = f(x),\ y(0) = y(1) = 0$ şeklinde verilen *SL –SDP*'nin çözümü(Parnell 2013**)**:

Homojen denklemin çözümü $\{ e^x, e^{-x} \}$ dir. Buna denk olarak $\{cosh(x)\,, sinh(x)\}$ kullanılabilir. *sinh(x)* fonksiyonu *y(0) = 0* şartını sağlar ve *sinh(x-1)* fonksiyonu da *y(1) = 0* şartını sağlar. Bu iki homojen çözümün Wronskianı:

$$W(x) = \begin{vmatrix} sinh\ (x) & sinh\ (x-1) \\ cosh\ (x) & cosh\ (x-1 \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \sinh(x)\cosh(x-1) - \cosh(x)\sinh\ (x-1)$$

$$W(x) = \sinh\ (1)$$

O halde bu problemin Green fonksiyonu:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x},\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(\mathrm{x})\sinh(\xi-1)}{\sinh\ (1)} \ ; \ 0 \le \mathrm{x} \le \xi \\ \dfrac{\sinh(\mathrm{x}-1)\sinh\xi}{\sinh\ (1)} \ ; \ \xi \le \mathrm{x} \le 1 \end{cases}$$

Problemin çözümü olan *y* fonksiyonu ise aşağıdaki gibi olur:

$$y(x) = \frac{sinh\ (x-1)}{sinh\ (1)} \int_0^x sinh(x) f(\xi) d\xi + \frac{sinh\ (x)}{sinh\ (1)} \int_x^1 sinh(\xi-1) f(\xi) d\xi$$

Örnek 6 (Logan 1997):

$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = -e^{-ax}$ denkleminin $y(0) = y'(1) = 0$ koşullarında Green fonksiyon yardımıyla çözümü:

Direk metod kullanılırsa: İlk aşama Homojen kısmın *L(x)y(x) = 0* genel çözümünü bulmaktır. Bunun için $\frac{d^2}{dx^2}y(x) = 0\ yazıp\ y(x) = cx + d$ bulunur.

Bu çözüm $L(x)G(x,\xi) = 0$ denkleminde yerine konulup iki bölge için tanımlı Green fonksiyon örneğin aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_I(x,\xi) = c_1x + d_1\ ; & a \leq x < \xi \\ G_{II}(x,\xi) = c_2x + d_2\ ; & \xi < x \leq b \end{cases}$$

Homojen olmayan denklem $L(x)G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$ şeklinde tanımlanabilir. Bu aşamada sınır şartları kullanılır:

$y(x) = cx + d$ için $y(0) = y'(1) = 0$ kullanılırsa,

$d_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olur. O zaman

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1x\ ; & 0 \leq x < \xi \\ d_2\ ; & \xi < x \leq 1 \end{cases}$$

Ardından Green fonksiyonun sürekliliği kullanılır:

$x = \xi$ noktasında $c_1\xi = d_2$ olmalıdır.

Ve şimdi de $\left.\frac{dG_2}{dx}\right|_{x=\xi} - \left.\frac{dG_1}{dx}\right|_{x=\xi} = 1$ süreksizliğini kullanılır:

$c_1 - 0 = 1$ ve $c_1 = 1$

bulunur.

$c_1\xi = d_2$ eşitliğinde $c_1 = 1$ yazarılıp $\xi = d_2$ bulunur.

Son aşama olarak Green fonksiyonu yeniden yazılır:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_I(x,\xi) = x\,; & 0 \le x < \xi \\ G_{II}(x,\xi) = \xi\,; & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

Aşağıdaki integral hesaplanır:

$$y(x) = \int_a^b G(t,x)f(t)dt = \int_a^x G_I(t,x)f(t)dt + \int_x^b G_{II}(t,x)f(t)dt$$

Problemin $f(x) = -e^{-ax}$ şeklindeki ikinci yanı ve yukarıdaki Green fonksiyon tanımı kullanılıp *y(x)* eşitliği yeniden yazılırsa:

$$y(x) = \int_0^1 G(t,x)f(t)dt = \int_0^x te^{-at}dt + x\int_x^1 e^{-at}dt = -\frac{e^{-ax}}{a^2} - \frac{e^{-a}}{a} + \frac{1}{a^2}$$

Verilen denklemin sınır şartlarını sağlayan çözümü:

$$y(x) = -\frac{e^{-ax}}{a^2} - \frac{e^{-a}}{a} + \frac{1}{a^2}$$

Örnek 7: Bessel fonksiyonunun Green fonksiyonu(Gwaiz2008)

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (k^2x^2 - n^2)y = f(x)$ şeklindeki Bessel fonksiyonunun *y(0)* = sonlu ve *y(a)* = 0 sınır koşullarında Green fonksiyon yardımıyla çözümü:

Bessel denklemini Sturm-Liouville formuna çevrilip çözüm arandığında:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(k^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = \frac{f(x)}{x}\ ;$$

Bu yazılışta *p(x)* = *x* dir. Green fonksiyonun $G_n(x,\xi)$ formunda yukarıdaki denklem için yazılışı:

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dG_n}{dx}\right)+\left(k^2x-\frac{n^2}{x}\right)G_n=-\delta(x-\xi)$$

$c_1 J_n(kx)+c_2N_n(kx)$ gibi bir genel çözüm ile Green fonksiyon:

$$G(x,x')=\begin{cases}d_1 J_n(kx)+d_2N_n(kx)\,; & 0\le x<\xi\\ c_1 J_n(kx)+c_2N_n(kx)\,; & \xi<x\le a\end{cases}$$

Sınır koşulları kullanılır: *y(0)* = sonlu eşitliğinden $d_2\;=0$ ve $u(x)=\;\;J_n(kx)$, *y(a) = 0* sınır şartından $c_1 J_n(ka)+c_2N_n(ka)=0$ bulunur.

Bu ifade c_2' ye göre çözülür:

$c_2=-\frac{J_n(ka)}{N_n(ka)}c_1$ ve v(x) = $\frac{J_n(kx)N_n(ka)-J_n(ka)N_n(kx)}{N_n(ka)}$

u(x) ve *v(x)* in bilinmesiyle

$$W(\xi)=uv'-u'v$$

kullanılır ve Wronskian elde edilir.

Bunu yapmak için örneğin $x\to 0$ gibi bir uygun nokta seçilir.

$$\lim_{x\to 0}J_n(kx)\to\frac{1}{n!}\left(\frac{kx}{2}\right)^n\;,$$

$$\lim_{x\to 0}N_n(kx)\to\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{kx}\right)^n$$

$$W(\xi)=uv'-u'v=\;-\frac{J_n(ka)}{N_n(ka)}(W[J_n(kx)\,,N_n(kx)])$$

$$=-\frac{J_n(ka)}{N_n(ka)}\left(\frac{2}{\pi x}\right)$$

$\mathrm{p}(\xi) = \xi$ olduğundan $A = W(\xi)p(\xi) = -\frac{J_n(ka)}{N_n(ka)}(\frac{2}{\pi\xi})\xi$

bulunur. Bunun sonucunda Green fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır:

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{J_n(k\,\xi)N_n(ka) - J_n(ka)N_n(k\xi)}{N_n(ka)}J_n(kx); & 0 \leq x < \xi \\ \frac{\pi}{2}\frac{J_n(k\,x)N_n(ka) - J_n(ka)N_n(kx)}{N_n(ka)}J_n(k\xi)\ ; & \xi < x \leq a \end{cases}$$

$$y(x) = \int_0^a G(t,x)f(t)dt = \int_0^x G_I(t,x)f(t)dt + \int_x^a G_{II}(t,x)f(t)dt$$

integraliyle Bessel fonksiyonunun çözümü bulunur.

Örnek 8: $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$ denkleminin $y(0) = y(1) = 0$ sınır şartlarıyla Green fonksiyon yardımıyla çözümü(Boyce ve DiPrima. 2001):

Önce homojen kısmın çözümü için iki kez integral alarak $\mathrm{y(x)} = Ax + B$ bulunur. Sınır şartları kullanılır, sabitleri belirlenir:

$y_1(0) = 0\ için$ B = 0 bulunur.

Buradan $y_1(\mathrm{x}) = x$ bulunur.

$y_2(1) = 0\ için\ y_2(1) = 0 = A + B$

Yani

B = -A bulunur.

A= -1 keyfi olarak alınırsa

$y_2(\mathrm{x}) = 1 - x$ olur.

Denklemde *p(x)* = 1 olduğundan

$$p(x)W(x) = y_1(\mathrm{x})y'_2(\mathrm{x}) - y'_1(\mathrm{x})y_2(\mathrm{x}) = x(-1) - 1(1-x) = -1$$

$p(x)W(x) = -1$ konularak Green fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\xi(1-x) & ; \quad 0 \le \xi \le x \\ -x(1-\xi) & ; \quad x \le \xi \le 1 \end{cases}$$

Green fonksiyonun homojen denklemin sınır şartlarını sağlaması gerekir. Bu nedenle alt parçada $\mathrm{G}(0,\xi) = 0$ ve üst parçada $\mathrm{G}(1,\xi) = 0$ olur. Denklemin çözümünün Green fonksiyona bağlı yazılışı:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_0^1 G(x,\xi)f(\xi^2)d\xi$$

$$= -\int_0^x \xi(1-x)\xi^2 d\xi - \int_x^1 x(1-\xi)\xi^2 d\xi$$

$$= -(1-x)\int_0^x \xi^3 d\xi - x\int_x^1 (\xi^2 - \xi^3)d\xi$$

$$= -\frac{1}{4}(1-x)x^4 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}x(4x^3 - 3x^4)$$

$$y(x) = \frac{1}{12}(x^4 - x)$$

Örnek 9(Parnell 2013):

Aşağıdaki sınır değer probleminin Green fonsiyonu:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = f(x), \quad y(0) = a\,, y(1) = b$$

Önce homojen denklemi çözülür. Önceki örnekte homojen denklem çözülmüştü, Green fonksiyon:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_I(x,\xi)= c_1x+d_1\,; & 0\le x<\xi \\ G_{II}(x,\xi)=c_2x+d_2\,; & \xi<x\le 1\end{cases}$$

olarak bulunmuştu. Sınır şartlarını uygulanırsa;

y(0) = 0 ise c_1=0 olur.

y(1) = 0 ise $c_2+d_2=0\ ve\ c_2=-d_2$ olur.

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_I(x,\xi)= d_1 & ; \quad 0\le x<\xi \\ G_{II}(x,\xi)=-d_2x+d_2\,; & \xi<x\le 1\end{cases}$$

$x=\xi$ de süreklilik gereği

$$-d_2\xi+d_2=d_1 \tag{3.8}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\left.\frac{dG_{II}}{dx}\right|_{x=\xi}-\left.\frac{dG_I}{dx}\right|_{x=\xi}=1$$

kullanılırsa

$-d_2-0=1$ ve $d_2=-1$ bulunur.
Bu değerler (3.8) de yazılırsa:

$-(-1)\xi+(-1)=d_1$ve $d_1=\xi-1$

bulunur. O halde;

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_I(x,\xi)= \xi-1; & 0\le x<\xi \\ G_{II}(x,\xi)=x-1 & ; \quad \xi<x\le 1\end{cases}$$

Örnek 10(Birkhoff and Rota 1989):

$y(\pm\infty) = 0$ olmak şartıyla $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = f(x)$ denkleminin Green fonksiyonunun bulunuşu:

$y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ homojen kısmın çözümüdür.

İlk sınır şartını uygulanırsa; $y(+\infty) = 0$ için

$0 = Ae^{\infty} + Be^{-\infty}$ yazılıp $0 = Ae^{\infty}\ \ ve\ \ A = 0$ bulunur.

$u_1(x) = Be^{-kx}$ olur.

$u_1(t) = Be^{-kt}$ ve $\mathrm{u}_1'(\mathrm{t}) = -\mathrm{kBe}^{-\mathrm{kt}}$ bulunur.

$y(-\infty) = 0$ için:

$0 = Ae^{-\infty} + Be^{+\infty}$yazılıp $Be^{-\infty} = 0\ ve\ B = 0$ bulunur.

$u_2(x) = Ae^{-kx}$ olur.

$\mathrm{u}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{Ae}^{-\mathrm{kt}}$ ve $u_2'(t) = -kAe^{-kt}$ olur.

Bu değerlere göre Wronskian *W = 2kAB* bulunur.

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{k(t-x)}}{2k} & ; \quad x < t \\ -\dfrac{e^{k(x-t)}}{2k} & ; \quad t < x \end{cases}$$

3.4 DİRAC DELTA FONKSİYONUNUN GREEN FONKSİYONLA İLİŞKİSİ

Bir [*a*, *b*] aralığındaki $L(u) = f(x)$ *SL-SDP'*nin çözümü:

$$u(x) = \int_a^b f(s)G(x,s)ds$$

Bu yazılışta G, Green fonksiyonu; f kaynak fonksiyonu için bir etki fonksiyonu olarak düşünülsün. x_s noktası $[a, b]$ de bir keyfi sabit iç nokta olsun. Kaynak terimin aşağıdaki gibi bir perturbasyonu (yaklaşığını) olsun:

$$f(x) + \delta_\epsilon(x)$$

Burada $\delta_\epsilon(x)$ aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir fonksiyondur:

1. $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \delta_\epsilon(x)dx = 1$
2. $Eğer\ x \geq x_s + \epsilon \quad veya\ x \ \leq x_s + \epsilon \ \ ise\ \delta_\epsilon(x) = 0$

$\delta_\epsilon(x)$ fonksiyonu için muhtemel bir seçim üç açılı çadır fonksiyonu olabilir:

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad a < x \leq \ x_s - \ \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon^2}(x - x_s + \epsilon) & ; \quad x_s - \ \epsilon < x < x_s \\ -\frac{1}{\epsilon^2}(x - x_s - \epsilon) & ; \quad x_s < x < x_s + \epsilon \\ 0 & ; \quad x_s + \epsilon \leq x < b \end{cases}$$

Aşağıdaki u ile aynı homojen sınır koşullarına sahip yaklaşım probleminin çözümü $u_\epsilon(x)$ fonksiyonu ile gösterilir:

$$L(\ u_\epsilon) = \ f(x) + \delta_\epsilon(x)$$

u içindeki bir $\Delta u = u_\varepsilon - u$ varyasyonu kaynak terimin perturbasyonu nedeniyle aşağıdaki problemi homojen sınır şartlarıyla beraber sağlar:

$$L(\Delta u) = \ \delta_\epsilon(x)$$

Öyleyse;

$$\Delta u(x) = \int_a^b \delta_\epsilon(x_0)G(x, x_0)dx_0$$

$$= \int_{x_s - \varepsilon}^{x_s + \varepsilon} \delta_\epsilon(x_0) G(x, x_0) dx_0$$

$$= G(x, x_0) \int_{x_s - \varepsilon}^{x_s + \varepsilon} \delta_\epsilon(x_0) dx_0$$

Bu yazılışta $x_s\ noktas$ı $(x_s - \varepsilon,\ \ x_s + \varepsilon)$ aralığındadır. Böyle bir noktanın varlığı $G(x, x_0)$ olduğundan ortalama değer teoreminin bir sonucudur.

$$\int_{x_s - \varepsilon}^{x_s + \varepsilon} \delta_\epsilon(x_0) dx_0 = \int_a^b \delta_\epsilon(x_0) dx_0 = 1$$

olduğuna dikkat ederek,

Eğer $\varepsilon \to 0$ yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\Delta u(x) = G(x, x_s)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = \delta(x - x_s)$$

limiti x_s noktasında sonsuz yoğunlukta bir titreşimi temsil eder, yani $x = x_s$ hariç her yerde sıfırdır. Dirac delta fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta(x - x_s) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \neq x_s \\ \infty\ \ , x = x_s \end{cases}$$

Delta operatörü ile sürekli her *f(x)* fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_s) \delta(x - x_s) dx_s$$

Dirac delta fonksiyonu birim alanı verir ve çift fonksiyondur. Bunlar kullanılarak $G(x, x_s)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitliği ve $x = a$ ve $x = b$ homojen sınır şartlarını sağlar:

$$L[G(x, x_s)] = \delta(x - x_s)$$

Bu sonuçlardan sonra aşağıdaki yoruma ulaşılır:

$G(x, x_s)$ Green fonksiyonu x_s gibi yoğun bir kaynak noktasındaki *x* karşılığını ifade eder. Green fonksiyonun simetrik olması x_s yoğun kaynak noktasına *x* karşılığı ile *x* yoğun kaynak noktasına x_s karşılığı aynıdır. Bu Maxwell'in karşılıklılık ilkesi olarak bilinir.

3.5 AĞAÇ GRAFİKLERİ ÜZERİNDEKİ STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ İÇİN GREEN FONKSİYONLARI

Ağaç grafiği sonlu sayıda kenar, her bir kenarın sınırlı bir açık aralık olarak ele alınabileceği, düğümlerle birleştirilen kenarlardan oluşur. Grafik üzerinde iki *x, y* noktası için bu iki noktayı birleştiren sadece bir yol vardır. Grafiğin herbir e kenarının yeterince düzgün parametrelendirmeye izin verdiğini, kendi kendiyle kesişim içermediğini ve sonlu olduğunu, bu nedenle *e* = $(0, l_e)$ gibi bir aralık olarak kabul edilebildiğini varsayılır. Tüm kenarların bir birleşimi Γ ile gösterilir. Kenarların her bir ucunda Γ nın bir düğümü vardır. Bu düğümlerin kümesi $N(\Gamma)$ dir ve bireysel düğümleri göstermek için kalın çizim kullanılır. Grafik düğümlerle beraber

$$\bar{\Gamma} \coloneqq \Gamma \cup N(\Gamma)$$

ile gösterilir. Γ üzerindeki nokta çiftleri *(e, x)* olarak gösterilir. $0 < x < l_e$veya kenarın belirlenmesi önemsiz ise bir tek harflede gösterilebilir. Eğer *n* bir düğüm ise *n*'deki kenarların kümesi *i(n)* ile gösterilir ve *n* bunlar için bir bitiş noktasıdır. Sınır düğümleri *n ≠ i(n) =1* sağlayan *n* lerdir. Γ üzerindeki tüm sınır düğümlerinin kümesi de $\partial T\ dir$. İç düğümlerin kümesi:

$$I\Gamma = N(\Gamma) \backslash \partial T$$

Her bir $e\epsilon i(n)$ için ya *n* = (*e*,0) yada $n = (e, l_e)$ ise *n ≠ i(n)*>1 dir.

$\bar{\Gamma}$üzerindeki noktaların gösterimi bu nedenle kenarlarının parametrelendirme yönüne bağlıdır. $f{:}\,\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere Γ üzerindeki bir noktanın f fonksiyondaki değeri$\mathrm{f_e(x) = f(e, x)}$ ile gösterilir. Yani f_e , f nin e kenarına sınırlamasıdır. $n\epsilon\partial T$ bir e kenarında bulunan düğüm olmak üzere, f_e nin tek yönlü uygun limiti $f(n)$ ile gösterilir. $i(n) = \{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere bir iç düğüm için $f_{e_1}(n)$ değeri f_{e_i} nin *x* noktası e_i bitiş noktasına giderken tek yönlü limitini gösterir. Eğer tüm bu limitler çakışırsa *f*'nin n'de sürekli olduğu söylenir ve *f(n)* ortak değer olarak tanımlanır.

Γ üzerinde verilen fonksiyonlarda türevlenebilir olmalıdır. Bir *(e,x) ϵΓ* noktası için $f'(e,x) = f'_e(x)$ türevi *e*'nin belirli parametrelendirme yönüne göre *x*'deki kısıtlama f_e 'nin olağan türevi olarak hesaplanır. Kenarın parametrelendirilmesi yönündeki bir değişiklik, f_e' deki bir işaret değişikliğini ima eder. e köşesinin bir uç noktasında bulunan bir n düğümü için, sınır türevi f_e' yi, e'nin parametrelenmesi *n = (e , 0)* imiş gibi, "n düğümünün dışından e kenarının içine" olarak tanımlanır.

Sınır türevleri kullanışlıdır çünkü aşağıdaki eşitliği integralin " 0 danl_e " ye, ya da "l_e den 0 " a doğru olmasından bağımsız olarak sağlarlar:

$$\int_e (pf')'\,dx = p(l_e)f'^b(l_e) - p(0)f'^b(0)$$

Γ üzerinde *n*-inci kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı *n*= 0,1,..., ;

$C(\Gamma) \coloneqq C^0(\Gamma)$ olmak üzere $C^n(\Gamma)$ ile gösterilir. $C(\bar{\Gamma})$ kümesi $C(\Gamma)$ içindeki her bir düğümde sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümedir. (Ramirez 2012).

Uygulama(Ramirez 2012)

$(pf')' \in C(\Gamma)$ olmak üzere tüm $f \in C(\Gamma)$ fonksiyonlarının kümesi $D_p^2(\Gamma)$ ile gösterilsin.

$$z \in D_p^2(\Gamma), \quad \mathcal{L}[z] = h, \quad l_i[z] = 0, i = 1, \dots, 2m \tag{3.9}$$

homojen denkleminin çözümünün Green fonksiyon ile oluşturulması:

Problemin çözümü aşağıdaki integralle verilir:

$$f(x) = \int_{\Gamma} G(x,y)h(y)\,dy$$

İlk adım Γ üzerindeki fonksiyonların Wronskian özelliklerini doğrulamaktan ibarettir. Her $f, g \in C^1(\Gamma)$ için Γ nin bir e kenarında Wronskian $W[f, g]$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W[f,g]_e = f_e g_e' - g_e f_e'$$

Ramirez, (3.9) probleminin çakışık olmaması durumunda çözümünün aşağıdaki şekilde var olacağını ispatladı:

Belli bir e kenarı için (3.9) problemi non–dejenere ise, o zaman $\mathcal{L}\psi^{\Gamma(e)} = 0$ denkleminin $\Gamma(e)$ üzerinde $\psi^{\Gamma(e)} \in \varepsilon_0(\Gamma(e))$ ve $\psi^{\Lambda} \in \varepsilon_0(\Lambda(e))$ olmak üzere çözümleri vardır, aynı zamanda $\Lambda(e)$ üzerinde $\mathcal{L}\psi^{\Lambda(e)} = 0$ olur (Ramirez 2012). Bunları kullanarak Green fonksiyonun özel bir formu aşağıdaki teorem yardımıyla bulunur.

Teorem 3.5.1. Varsayalım ki $(pf')' \in C(\Gamma)$ $olmak$ $üzere$ $tüm$ $f \in C(\Gamma)$ fonksiyonlarının kümesi $D_p^2(\Gamma)$ ile gösterilsin.

$$z \in D_p^2(\Gamma), \quad \mathcal{L}[z] = h, \quad l_i[z] = 0, i = 1, \dots, 2m$$

Denklemi non- dejenere ise aşağıdaki fonksiyon $\mathcal{L}$ operatörünün bir Green fonksiyonudur:

$x \epsilon e$ olmak üzere $$G(x,y) = \begin{cases} \psi^{\Gamma(e)}(y)\psi^{\Lambda(e)}(x) & ; \quad y\epsilon\Gamma(e,x) \\ \psi^{\Gamma(e)}(x)\psi^{\Lambda(e)}(y) & ; \quad x\epsilon\Lambda(e,x) \end{cases}$$

Hatta, bu fonksiyon Γ üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfında ilk değişkene göre sürekli olan tek fonksiyondur (Ramirez 2012).

Bu Green fonksiyon kullanılarak (3.9) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathrm{f(x)} = \psi^{\Lambda(e)}(x) \int_{\Gamma(e)\backslash e} \psi^{\Gamma(e)} h d\rho + \psi^{\Gamma(e)}(x) \int_{\Lambda(e)\backslash e} \psi^{\Lambda(e)} h d\rho$$

$$+ \psi^{\Lambda(e)}(x)\int_{e}^{x}\psi^{\Gamma(e)}h d\rho + \psi^{\Gamma(e)}(x)\int_{x}^{l_e}\psi^{\Lambda(e)}h d\rho$$

3.6 REGULAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ İÇİN ÖZFONKSİYON AÇILIMIYLA GREEN FONKSİYON ELDESİ

$x\epsilon[a, b]$ için regular bir Sturm-Liouville sınır değer problemi :

$$L[u] = f(x)$$
$$\alpha_1\phi(a) + \alpha_2\phi'(a) = 0$$
$$\beta_1\phi(b) + \beta_2\phi'(b) = 0$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu denkleme karşılık gelen özdeğer problemi de;

$$Lu = -\lambda\mu(x)u$$

dur. Burada $\mu(x)$ uygun seçilmiş bir fonksiyondur. Sınır değer problemini $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(x)$ formunda bir özfonksiyon genişlemesi oluşturularak çözülür.

Bu toplam terim terime integrallenebilir bu nedenle L operatörünü kullanarak

$$Lu(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n\mu(x)\emptyset_n(x) = f(x)$$

$\emptyset_m(x)$ ile çarpılıp $x\epsilon[a, b]$ üzerinde integrallenir. Özfonksiyonların ortogonalliği ($\mu(x)$ ağırlığına göre) sayesinde aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$-a_n\lambda_n = \frac{\int_a^b \emptyset_n(x)f(x)dx}{\int_a^b \emptyset_n^2\mu(x\,)dx}$$

Bunun sonucunda ;

$$u(x) = \int_a^b f(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\emptyset_n(x)\emptyset_n(x_0)}{\lambda_n \int_a^b \emptyset_n^2 \mu(x_1) dx_1} \right) d\, x_0$$

Bu eşitlik Green fonksiyon özfonksiyonların açılımı şeklinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\emptyset_n(x)\emptyset_n(x_0)}{\lambda_n \int_a^b \emptyset_n^2 \mu(x_1) dx_1} \right)$$

$$u(x) = \int_a^b f(x_0) G(x, x_0) dx_0$$

şeklinde yazılır. Bu yazılışta $G(x, x_0) = G(x_0\,, x)$ dir.

Örnek 11 (Chakrabarti 1996):

$\mathcal{L}u = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$, *u(0)* = *u(L)* = 0 denkleminin çözümü ile ilgili özdeğer problemi :

$$\phi(0) = \phi(L) = 0$$

sınır şartlarında

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$$

denkleminin özfonksiyonlarını bulmaktır.

$\phi_n(x) = sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ve $n = 1,2,3, \ldots için \;\; \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$

olmak üzere çözüm bir Fourier serisi olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n} \phi_\mathrm{n}(\mathrm{x})$$

Bu toplamı integral olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0)dx_0$$

Burada Green fonksiyon aşağıdaki yazılışla verilir (Parnell 2013):

$$G(x, x_0) = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)}{(\frac{n\pi}{L})^2}\right)$$

3.7 ÖZDEĞER VE GREEN FONKSİYON PROBLEMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Kaynak güdümlü bir yapı için genel bir problem Green fonksiyon problemidir. Green fonksiyonu doğrusal bir sistemin bir birim güç kaynağı noktasına cevabıdır.a pozisyonundaki Dirac delta fonksiyonu $\delta(z - a)$ ile temsil edilir. Genel olarak Green fonksiyon problemi sol tarafı ikinci derece homojen olmayan bir diferansiyel ifade ile sağ tarafı delta fonksiyonu olan bir denklem ve ona eşlik eden sınır değerlerinden oluşur. Sol taraftaki diferansiyel ifadenin oluşturduğu homojen denklem ve sınır şartları bir özdeğer problemidir (Kaynaksız olarak ta adlandırılır.) Bir özdeğer problemi problemin geometrisini karakterize eden bir demet tam fonksiyonun bulunmasıdır. Kaynaksız ya da kaynak güdümlü bir çok problem *SL* denklemi ile ifade edilir. λ' nın belirli bir parametre olduğu *SL* denkleminin çözümü Green fonksiyonu verir. Green fonksiyonu özdeğer fonksiyonları ile de inşa edilebilir. Tersine özdeğer fonksiyonları Green fonksiyondan da elde edilebilir (Sevgi 2006).

Kaynaksız Çözümler: Özdeğer problemi

Sınır şartları verilen bir *SL-SDP* nin homojen kısmının çözümleri

$$\frac{d}{dz}\left[p(z)\frac{d}{dz} - q(z) + \lambda W(z)\right]U(z) = 0$$

$U(z) = U_n(z)$ şeklinde sonsuz çözüm ihtiva eder ki bunlar $\lambda = \lambda_n$ özel değerlerine karşılık gelir. $\lambda_n$sayıları özdeğerler ve $U_n(z)$ fonksiyonları özdeğer fonksiyonları olarak adlandırılır. $U_n(z)$ ler sonlu $z_1 < z < z_2$ aralığında ortogonal fonksiyonlardır ve bu ortogonallik aşağıdaki integralle gösterilir:

$$\int_{z_1}^{z_2} w\,(z) U_n(z) U_m(z) = 0$$

$U_n(z)$ ler *W(z)* ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir küme oluşturur. Kümedeki her bir fonksiyon birim enerjiye sahiptir bu nedenle normalizedirler. Bu nedenle ortogonallik şartı aşağıdaki gibi verilir:

$$\int_{z_1}^{z_2} W\,(z) U_n(z) U_m(z) = \begin{cases} 1 & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases}$$

Kaynaksız çözümlerin üst üste çakışması (özfonksiyonlar) eksiksiz bir set oluşturmalıdır. Bir aralıkta tanımlanmış, aralığın uç noktalarında verilen sınır şartlarına maruz olan bir fonksiyon kümesinden herhangi biri bunların doğrusal bir kombinasyonu olarak ifade edilebiliyorsa bu fonksiyon kümesi eksiksiz (tam) olarak adlandırılır. Bu tanıma uyan en özel fonksiyon delta fonksiyonu olduğundan, delta fonksiyonları olarak temsil edilen fonksiyonlar tam fonksiyonlar kümesidir:

$$\frac{\delta(z - z')}{W(z')} = \sum\nolimits_n U_n(z) U_n * (z')$$

Burada (*) kompleks eşleniği gösterir.

Kaynak Güdümlü Çözüm: Green Fonksiyon

$G(z, z', \lambda)$ Green fonksiyonu doğrusal sistemin (Örneğin *SL* denkleminin çözümü) birim kuvvetin nokta kaynağına yanıtıdır. $z = z'$ noktasındaki bir birim kuvvet kaynağı *SL –SDP* nin sağ tarafında verilen Dirac delta fonksiyonu ile gösterilebilir. Green fonksiyon $z \neq z'$ hariç tüm noktalarda homojen denklemi sağlar. $z = z'$ için *G* sürekli olmalı fakat birinci türevi bir birim miktarda süreksiz olmalıdır. Böylelikle delta fonksiyonun ikinci türevinden singüler noktaları elde edilir. Green fonksiyonun özdeğer fonksiyonları açılımıyla ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$G(z, z', \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(z) U_n * (z')}{\lambda - \lambda_n}$$

3.8 STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİĞİ VE GREEN FONKSİYONU

Sturm-Liouville diferansiyel denklemi aşağıdaki formda yazılırsa:

$$u'' + \lambda u = q(x) u$$

$\lambda = s^2$ olmak üzere bu denklemin $u(0) = 0,\ u'(0) = \lambda$ sınır şartlarını sağlayan $\phi_\lambda(x)$ çözümü aşağıdaki integral denklemi sağlar:

$$\phi_\lambda(x) = -cossx + ssinsx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y) q(y)\, \phi_\lambda(y) dy$$

İspat:

$u'' + \lambda u = 0$ homojen denklemin genel çözümü :

$u(x, s) = C_1 \cos sx + C_2 \sin sx$

Sabitlerin değişimi yöntemi ile

$$C_1(x, s) = -\frac{1}{s}\int_0^x \sin sy\, q(y)\, u(y, s) dy + C_1$$

$$C_2(x, s) = -\frac{1}{s}\int_0^x \cos sy\, q(y)\, u(y, s) dy + C_2$$

bulunur. Bu eşitlikler homojen denklemin genel çözümünde yerine konursa;

$$u(x,s) = -\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\,u(y,s)dy + C_1 cossx + C_2 sinsx$$

elde edilir. Sınır şartlarını kullanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa Sturm-Lioville denkleminin $\lambda = s^2$ olmak üzere $u(0) = 0,\ u'(0) = \lambda$ sınır şartlarını sağlayan çözümü :

$$u(x,s) = -cossx + ssinsx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\,u(y,s)dy$$

şeklinde yazılır. Bu yazılış

$$\phi_\lambda(x) = -cossx + ssinsx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\,\phi_\lambda(y)dy$$

şeklinde yazılırsa ispat tamamlanmış olur (Birkhoff 1908).

Benzer şekilde $u'' + \lambda u = q(x)u$ denkleminin $\lambda = s^2$ olmak üzere;

$$u(\pi) = \beta_2 + \lambda\tilde{\beta}_2$$
$$u'(\pi) = \beta_1 + \lambda\tilde{\beta}_1$$

sınır şartlarını sağlayan $\chi_\lambda(x)$ çözümünün aşağıdaki integral denklemi sağladığı gösterilir:

$$\chi_\lambda(x) = \left(\beta_2 + s^2\tilde{\beta}_2\right)coss(x-\pi) + \frac{1}{s}\left(\beta_1 + s^2\tilde{\beta}_1\right)sins(x-\pi)$$
$$-\frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-y)q(y)\,\chi_\lambda(y)dy$$

Büyük" O" Notasyonu

Büyük "O" gösterimi 1892 de Alman matematikçi Paul Bachmann(1873-1920) tarafından bulunmuştur(Dasgupata2014). Bu gösterim 1909 da Edmund Landau (1877-1938) tarafından ünlü hale getirildi. Bu nedenle bu sembol bazen Bachmann-Landau sembolü olarak adlandırılır(Holmes 2013). Büyük "O" sembolü fonksiyonların asimptotik davranışını tanımlamak için bilgisayar bilimlerinde, kompleks teoride ve matematikte kullanılmaktadır. Temel olarak bu gösterim bir fonksiyonun ne kadar hızlı büyüdüğünü ya da küçüldüğünü anlatır.

Tanım 3.8.1. (Rosen 2012)

Eğer *c* gibi bir sabit sayı ve her $x \geq x_0$ için $|f(x)| \leq c|g(x)|$ sağlanıyorsa *g(x)* fonksiyonu *f(x)* in bir üst bağı adını alır ve bu ilişki

$$f(x) \epsilon O\big(g(x)\big) \ ya \ da \ f(x) = O(g(x))$$

ile gösterilir. Burada $O\big(g(x)\big) = f(x)$ yazılışının aynı anlama gelmediğine dikkat edilmelidir.

Teorem 3.8.2. (Fulton 1994)

$\rho > 0$ olsun. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it = \sqrt{\lambda}$ olsun. $x \epsilon [0, \pi]$olmak üzere öyle bir $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır:

i. $|\phi_\lambda(x)| = O(|s|e^{|t|x})$

ii. $|\phi'_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{|t|x})$

iii. $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ ise$|\chi_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)})$

iv. $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ ise$|\chi'_\lambda(x)| = O(|s|^3 e^{|t|(x-\pi)})$

v. $\tilde{\beta}_2 = 0$ ise$|\chi_\lambda(x)| = O(|s| \ \ e^{|t|(x-\pi)})$

vi. $\tilde{\beta}_2 = 0$ ise$|\chi'_\lambda(x)| = O(|s|^2 e^{|t|(x-\pi)})$

vii. $\phi_\lambda(x, \lambda) = \cos(sx) + O(|s|^{-1} e^{|t|x})$

iix. $\chi_\lambda(x, \lambda) = \dfrac{1}{s}\sin(sx) + O(|s|^{-1} e^{|t|x})$

3.8.1 Green Fonksiyonun Kurulması

$$u'' + \lambda u = q(x)u$$

Sturm- Liouville denkleminin aşağıdaki sınır şartlarını sağlayan

$$-[\beta_1 u(\pi) - \beta_2 u'(\pi)] = \lambda[\,\tilde{\beta}_1 u(\pi) - \tilde{\beta}_2 u'(\pi)] \tag{3.10}$$

$$u'(0) = \lambda\, u(0) \tag{3.11}$$

çözümünün Green fonksiyonunun oluşturulması:

Özdeğerlerden farklı her $\lambda \in C$ kompleks sayısı için SL denkleminin $\chi_\lambda(x)$ ve $\phi_\lambda(x)$ çözümleri lineer bağımsız oldukları için bu denklemin çözümü

$$u(x,\lambda\ ) = C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilir. Sabitlerin değişimi yöntemi gereği $C_1(x,\lambda)\, ve\, C_2(x,\lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri gerçekleyecek şekilde seçilmelidir:

$$C_1{}'(x,\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2{}'(x,\lambda)\chi_\lambda(x) = 0$$

$$C_1{}'(x,\lambda)\phi'{}_\lambda(x) + C_2{}'(x,\lambda)\chi_\lambda(x) = f(x)$$

Bu sistemden

$$C_1'(x,\lambda) = \frac{-\chi_\lambda(x)f(x)}{W(\lambda)}$$
$$C_2'(x,\lambda) = \frac{-\phi_\lambda(x)f(x)}{W(\lambda)}$$

elde edilir. İntegral alınarak aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$C_1(x,\lambda) = -\frac{1}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + C_1(\,\lambda)$$
$$C_2(x,\lambda) = -\frac{1}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy + C_2(\,\lambda)$$

Bulunan bu ifadeler

$u(x,\lambda\ ) = \ C_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\lambda)\chi_\lambda(x)$

çözümünde yerine yazılır, düzenlenirse;

$$u(x,\lambda\ ) = \frac{\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + \frac{\chi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy$$
$$+C_1(\ \lambda)\phi_\lambda(x) + C_2(\ \lambda)\chi_\lambda(x) \qquad (3.13)$$

Türev fonksiyonu:

$$u'(x,\lambda\ ) = \frac{\phi'_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + \frac{\chi'_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy + C_1(\ \lambda)\phi'_\lambda(x)$$
$$+ C_2(\ \lambda)\chi'_\lambda(x)$$

Yukarıda bulunan $u(x,\lambda)$ ve $u'(x,\lambda)$ eşitlikleri (3.11) sınır şartında yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lambda\left[\frac{\phi_\lambda(0)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + C_1(\ \lambda)\phi_\lambda(0) + C_2(\ \lambda)\chi_\lambda(0)\right]$$

$$= -\left[\frac{\phi'_\lambda(0)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + C_1(\ \lambda)\phi'_\lambda(0) + C_2(\ \lambda)\chi'_\lambda(0)\right] (3.14)$$

Sınır şartı (3.11)'i kullanılırsa, (3.14) eşitliğinden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$[\ \lambda\chi_\lambda(0) + \chi'_\lambda(0)]C_2(\ \lambda) = 0$$

Wronskian sıfırdan farklı olduğu için

$$-W(\lambda) = \ \lambda\chi_\lambda(0) + \chi'_\lambda(0)\ \neq 0$$

olur. O halde

$$C_2(\ \lambda) = 0$$

olmak zorundadır.

Benzer şekilde sınır şartı (3.10)'u kullanılır, (3.14) eşitliğinden

$$C_1(\lambda) = 0$$

bulunur. O halde *SL* denkleminin (3.10) ve (3.11) şartlarını sağlayan çözümü:

$$u(x,\lambda) = \frac{\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_x^\pi \chi_\lambda(y)f(y)dy + \frac{\chi_\lambda(x)}{W(\lambda)}\int_0^x \phi_\lambda(y)f(y)dy$$

Bu yazılışta Green fonksiyon aşağıdaki gibi alınırsa;

$$G(x,y,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\chi_\lambda(x)\phi_\lambda(y)}{W(\lambda)} & ; \quad 0 \le y \le x \le \pi \\ \dfrac{\chi_\lambda(y)\phi_\lambda(x)}{W(\lambda)} & ; \quad 0 \le x \le y \le \pi \end{cases}$$

Green fonksiyona bağlı olarak denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılır (Fulton 1994):

$$u(x,\lambda) = \int_0^x G(x,y,\lambda)f(y)dy$$

BÖLÜM 4

UYGULAMALAR

Problem 1: (Komech 2007)

Eğik gerilmiş yay probleminin çözümünün bulunuşu:

Enine bir eğme kuvvetine maruz kalan gergin bir yay olduğunu varsayalım. *x* pozisyonunda ve *t* zamanında uygulanan birim uzunluktaki kuvvet *F(x, t)* olursa yaydaki enine yer değiştirme homojen olmayan dalga denkleminin çözümüyle bulunur. Eğme kuvvetinin harmonik olduğu varsayılırsa problem bir *SL-SDP*'ne dönüşür:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u(x) = f(x), \qquad k = \frac{w}{c}$$

Sınır şartları $u(0) = u(L) = 0$

Problemde Green fonksiyonu δ fonksiyon yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,x') + k^2G(x,x') = \delta(x - x')$$

Yukarıdaki denklemin $G(0,x') = G(L,x') = 0$ şartına sahip Green fonksiyonu *SL-SDP* nin çözümüdür. Homojen denklemin genel çözümü

$$u(x) = \left\{\begin{matrix} coskx \\ sinkx \end{matrix}\right\}$$

olsun. Sınır şartları uygulanırsa:

$u_1(x) = sinkx$, $x \geq 0$ ve $u_2(x) = sink(L - x),\ \ x \leq L$

Wronskian = *-sinkx.kcosk(L-x)-kcoskx.sink(L-x)* = *-ksinkL*

Bu durum için *p(x)* =1 olduğundan Green fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır:

$$G(x,x') = \begin{cases} \dfrac{-sinkx.sink(L-x')}{ksinkL} & ; 0 \leq x < x' \\ \dfrac{sinkx'.sink(L-x)}{ksinkL} & ; x' < x \leq L \end{cases}$$

Eğik gerilmiş yay probleminin çözümü:

$$\psi(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}$$

olduğundan *u(x)* fonksiyonu

$$u(x) = \int_0^L G(x,x')f(x')dx'$$

integraliyle çözülür:

$$u(x) = -\frac{sink(L-x)}{ksinkL}\int_0^{x'} sinkx'f(x')dx' - \frac{sinkx}{ksinkL}\int_{x'}^{L} sink(L-x')f(x')dx'$$

Problem 2:(Parnell 2013)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$$

kararlı hal ısı denkleminin gösterdiği *SL-SDP*'nin çözümünün bulunuşu:

Açıktır ki homojen denklemin lineer bağımsız iki çözümü :

$$u_1(x) = x$$

$u_2(x) = L - x$

O zaman

$W = u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = -L$

olur ve

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{-(L-s)x}{L} & ;\ 0 \leq x < s \\ \dfrac{-s(L-x)}{L} & ; s < x \leq L \end{cases}$$

yazılır. *SL-SDP* nin çözümü:

$$u(x) = \int_0^L f(s)G(x,s)ds$$

integrali alınarak bulunur.

Problem 3:(Parnell 2013)

Küresel simetrinin varlığında Dirichlet şartlarında Poisson denklemi için Green fonksiyonun elde edilmesi:

Yarıçapları a ve b olan iki eş merkezli kürede Dirichlet koşullarının sağlandığı varsayılsın. Bunun anlamı aşağıdaki denklemin

$$\nabla^2 G(r,r') = \delta(r - r') \tag{4.1}$$

aşağıdaki sınır şartında çözülmesidir:

$$G(r,r')|_{r=a} = G(r,r')|_{r=b} = 0$$

Küresel koordinatlarda, kısmi türevli denklemlerde delta fonksiyonu aşağıdaki gibi genişletilmiş şekil alır:

$$\delta(r-r') = \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(cos\theta - cos\theta')\delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(Y_l^m\,(\theta',\varphi))^* Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Benzer şekilde Green fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır:

$$G(r,r') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(G_{lm}\,(r,r'))\quad Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{4.2}$$

Bu iki eşitlik (4.1) denkleminde yerine yazılır:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rG_{lm}(r,r') - \frac{l(l+1)}{r^2}G_{lm}(r,r')\right\}Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(Y_l^m\,(\theta',\varphi'))^* Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Denklemleri terim terim düzenlemek için küresel harmoniğin ortogonalliğinden yararlanılır. $G_{lm}(r,r')$ 'nin aşağıdaki gibi faktörlenmesi gerektiği sonucuna varılır:

$$G(r,r') = g_l(r,r')Y_l^m(\theta',\varphi') \tag{4.3}$$

Burada

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}g_l(r,r') + 2r\frac{d}{dr}g_l(r,r') - l(l+1)g_l(r,r') = \delta(r-r')$$

olarak kısaltıldı. Bu ifadenin muadili aşağıdaki Euler denklemidir:

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + 2r\frac{du}{dr} - l(l+1)u(r) = 0$$

Euler denkleminin genel çözümü $\begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix}$ dir. Bu nedenle $u_<(r)$ şeklindeki bir çözümü $u_<(a) = 0$ sınır şartını sağlar:

$$u_<(r) = \left(r' - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right), a \leq r$$

$u_>(b) = 0$ şartı için

$$u_>(r) = \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right), r \leq b$$

$u_<(r)$ile$u_>(r)$ nin Wronskianı aşağıdaki gibi olur:

$$W(r) = u_<(r)u'_>(r) - u_>(r)u'_<(r) = \frac{2l+1}{r^2}[(\frac{a}{b})^{2l+1} - 1]$$

Sturm-Liouville fonksiyonu *p(r)* = *r*^{2} dir. Bir boyutlu fonksiyonlar için Green fonksiyonu veren formül kullanılarak;

$$g_l(r,r') = \frac{(-1)}{(2l+1)[1-(\frac{a}{b})^{2l+1}} \begin{cases} (r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}})(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}}) \ ; \ a \leq r < r' \\ \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)\left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right) ; r' < r \leq b \end{cases}$$

veya Green fonksiyon aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$g_l(r,r') = \frac{(-1)}{(2l+1)[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}} \left(r_>^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

Bu gösterilişte

$r_< \equiv r\ ve\ r' arasında\ küçük\ olan\ değerdir.$
$r_> \equiv r\ ve\ r' arasında\ büyük\ olan\ değerdir.$

Önce (4.3) denkleminde, sonra da (4.2) de yerine konularak Poisson denkleminin $r = a$ ve $r = b$ ile sınırlı küresel kabuk için Green fonksiyonunun yazılışı bulunur:

$$G(r,r') = -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_l^m(\theta,\varphi)\left(Y_l^m(\theta',\varphi')\right)^*}{(2l+1)[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}]}\left(r_>^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}\right)$$

Problem 4:(Parnell 2013)

Uç noktaları $x = 0$ ve $x = L$ olan horizantal elastik bir yayda dalga denkleminin ele alınışı: Eğer *y(x, t)* yaya çapraz küçük dikey yer değiştirmeyi temsil ederse

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

olur. Düşey yöndeki yer çekimi de dahil edilirse $x\epsilon\ [0,L]$, $y(0) = y(L) = 0$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu g = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Burada *T* yaydaki sabit gerilme ve μ ise birim uzunluktaki kütle yoğunluğudur ve *x* değiştikçe değişir. Yay durgun pozisyondayken kararlı hal denklemini sağlar:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu(x)g}{T}$$

Bu denklemin çözümü yer çekimine maruz düzgün olmayan asılı bir yayın şeklini tanımlar. Bu kararlı hal denkleminin üç durumu vardır:

$\mu \neq 0$ olan bir sabit olduğu kadul edilsin. O zaman yukarıdaki denklem kolayca integral alınabilir ve yayın alacağı parabolik şekil $y(0) = y(L) = 0$ sınır şartıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y(x) = \frac{\mu g}{2T} x(x - L)$$

İkinci durumda yayın kendisinin oldukça hafif olduğunu fakat yayın bir $x = \xi$ noktasında bir metal boncuk olduğu düşünülsün. Bu boncuk çok ağır olmayan bir m yükü, boncuğun yerini bulmak için yayın her bir yandan boncukla yaptığı açılar $\theta_1 ve\, \theta_2$ olarak adlandırılsın. Kuvvetleri dikey olarak çözmek için, denge koşulunu m kütlesi yeterince küçük olarak düşünülerek (sin$\theta \approx tan\theta$ kullanarak) yazılırsa:

$$mg = T(sin\theta_1 + sin\theta_2) \approx T(sin\theta_1 + sin\theta_2)$$

Bu nedenle noktasal kütle $(x, y) = (\xi, y(\xi))$ üzerinde bulunmaktadır. Bu noktada

$$\mathrm{y}(\xi) = \frac{mg}{T} \frac{\xi(\xi - L)}{L}$$

eşitliği sağlanır. Yay boncuğun her iki yanında kütlesiz olduğu için yerçekimi orada aktif olmaz, bu nedenle $x \neq \xi$ noktasında yaya etki eden tek güç gerilmedir. Bu nedenle yay noktasal yükün her iki yanında düz olmalıdır ve bu nedenle aşağıdaki denklem yayın kararlı hal şeklini verir:

$$y(x) = \frac{mg}{T} X \begin{cases} \frac{x(\xi - L)}{L} & ; \quad 0 \leq x < \xi \\ \frac{\xi(x - L)}{L} & ; \quad \xi < x \leq L \end{cases} \tag{4.4}$$

Bu sonuç fiziksel yasalardan elde edilir. Şimdi de Green fonksiyon ile çözüm verilirse:

$x = \xi$ deki bir noktasal yük için kütle yoğunluğu $\mu(x) = m\delta(x - \xi)$ olarak alınıp kararlı hal denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{mg}{T} \delta(x - \xi)$$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ diferensiyel operatörü öz-eşleniktir. Öyle bir $G(x,\xi)$ Green fonksiyonu olmalı ki $G(0,\xi) = G(L,\xi) = 0$ sınır şartlarıyla aşağıdaki denklemi sağlamalıdır :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x - \xi)$$

Green fonksiyonu bulmak için uygulanan prosedüre göre noktasal kütlenin her iki yanında aşağıdaki genel çözümler vardır:

$$G(x,\xi) = A(\xi)x + B(\xi) \qquad 0 \leq x < \xi$$
$$G(x,\xi) = C(\xi)(1 - x) + D(\xi) \qquad \xi < x \leq L$$

0 ve L deki sınır şartları B(ξ) $= D(\xi) = 0$ gerektirir.

$x = \xi$ deki süreklilikten $C(\xi) = \frac{A(\xi)\xi}{(\xi - L)}$ olur.

Green fonksiyonun türev sıçrama koşulu da kullanılarak $A(\xi) = \frac{(\xi-L)}{L}$ bulunur.

Bunlar kullanılarak Green fonksiyon aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(\xi - L)}{L} & ; \quad 0 \leq x < \xi \\ \dfrac{\xi(x - L)}{L} & ; \xi < x \leq L \end{cases}$$

Green fonksiyonu veren bu eşitlik *mg/T* ile ölçeklendirilirse (4.4) deki yay profili ile tam bir denklik elde edilir. Kararlı hal denkleminin son durumu olarak m_i şeklinde birçok noktasal yükün $x_i \in [0, L]$ pozisyonlarında olduğunu varsayılır, çözümler toplanarak *y(x)* ‘i elde edilir:

$$y(x) = \sum_i G(x, x_i) \frac{m_i g}{T} d\xi$$

Sonsuz için limit alınarak bu toplam yay üzerindeki $x_i = \frac{iL}{N}$ eşit aralıklarında yerleştirilmiş sonsuz sayıda m_i kütleleri için bulunur:

$$y(x) = \int_0^L \frac{G(x,\xi)g\mu(\xi)}{T}d\xi$$

Problem 5:(Gwaiz 2008)

Green fonksiyon oluşturarak

$y'' + k^2y = -f(x)$, $0 < x < L$ denkleminin y(0) +y(L) = 0 sınır koşullarına sahip çözümünün k ≠ 0 olmak üzere bulunuşu:

Çözüm:

$G(x,\xi)$ problemin Green fonksiyonu olsun, o zaman

$$G(0,\xi) + G(L,\xi) = 0$$

koşuluyla birlikte

$$G'' + k^2G = -\delta(x,\xi)$$

eşitliği yazılır. Homojen denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi verilir:

$y(x) = c_1coskx+c_2sinkx$

$y(0)$ = 0 şartı uygulanırsa;

$y(0) = c_1coskx+c_2(0)$

eşitliğinden c_1 = 0 bulunur.

$y_1(x) = c_2sinkx$ olarak elde edilir.

Benzer şekilde $y(L)=0$ kullanılarak;

$0 = c_1 coskL + c_2 sin\, kL$

yazılır ve

$c_1 = -\frac{c_2 sinkL}{coskL}$ olarak bulunur.

$$y_2(x) = \frac{c_2}{coskL}(coskxsinkL - sinkxcoskL) = \frac{c_2}{coskL} sink(L-x)$$

Wronskian aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{vmatrix} c_2 sinkx & \frac{c_2}{coskL} sink(L-x) \\ c_2 kcoskx & \frac{c_2 k}{coskL} cosk(L-x) \end{vmatrix} = \frac{{c_2}^2 k}{coskL} sinkL$$

O halde Green fonksiyon aşağıdaki gibi verilir:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x) y_2(\xi)}{p(\xi) w(\xi)} \;; & 0 \le x < \xi \\ \frac{y_2(x) y_1(\xi)}{p(\xi) w(\xi)} \;; & \xi < x \le L \end{cases}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{sinkxsink(L-\xi)}{ksinkL} \;; & 0 \le x < \xi \\ -\frac{sink(L-x)sink\xi}{ksinkL} ; & \xi < x \le L \end{cases}$$

Problemin çözümü:

$$y(x) = \int_a^L G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

$$y(x) = -\int_0^{\xi} \frac{sinkxsink(L-\xi)}{ksinkL} f(\xi) d\xi - \int_{\xi}^{L} \frac{sink(L-x)sink\xi}{ksinkL} f(\xi) d\xi$$

Problem 6:(Nasser 2013)

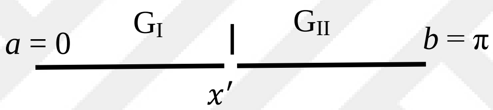
$0 \leq x \leq \pi$ aralığında $y(0) = y(\pi) = 0$ şartlarına sahip olmak üzere

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4}y = sin2x$ denkleminin belirlediği sistemin çözümünün Green fonksiyon yardımıyla bulunuşu:

Önce $G''(x, x') + \frac{1}{4}G(x, x') = \delta(x - x')$ yazılır.

x değişken, x'noktası aralığın sabit bir noktasıdır ve türevler x 'e göre alınır. Bu denklemin ayrık iki bölgede çözümü:

i. $0 \leq x < x'$
ii. $x' < x \leq \pi$



Şekil 4.1 [a, b] aralığında Green fonksiyon.

Her bir bölgede $G'' + \frac{1}{4}G = 0$ denkleminin çözümleri:

$$G(x, x') = A(x')\cos\left(\frac{x}{2}\right) + B(x')\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Burada A ve B sabitleri x' ye bağlıdır.

$y(0) = 0$ olduğundan $G(0, x') = 0$ olmalı.

Bu nedenle $0 \leq x < x'$ bölgesinde cosinüs sıfır olur.

Benzer şekilde $x' < x \leq \pi$ bölgesinde $G(\pi, x') = 0$ olacağından sinüs sıfırdır.

O halde Green fonksiyon:

$$G(x,x') = \begin{cases} B(x')\sin\left(\frac{x}{2}\right); & 0 \le x < x' \\ A(x')\cos\left(\frac{x}{2}\right) & ; x' < x \le \pi \end{cases}$$

Bu yazılışta *A* ve *B* sabitlerinin değerlerinin bulunması gerekir:

İlk kullanılması gereken bağıntı Green fonksiyonun sürekliliği nedeniyle $x = x'$ de sağdan ve soldan limitlerin eşit olmasıdır:

$$B(x')\sin\left(\frac{x'}{2}\right) = A(x')\cos\left(\frac{x'}{2}\right)$$

İkinci kullanılması gereken bağıntı

$$G''(x,x') + \frac{1}{4}G(x,x') = \delta(x - x')$$

denklemini $x' - \varepsilon\ dan\ x' + \varepsilon\ 'a\ kadar$ integral alınıp $\varepsilon \to 0$ için limit alarak *A* ile *B* arasında bir ilişki bulmaktır:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{dG}{dx}\right]\Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} + \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} G(x,x')dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\delta(x - x')dx$$

Devamla :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{dG}{dx}\Big|_{x'+\varepsilon} - \frac{dG}{dx}\Big|_{x'-\varepsilon}\right) + 0 = 1$$

Buradan :

$$\frac{d}{dx}G(x,x') = \begin{cases} \frac{B(x')}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right); & 0 \le x < x' \\ \frac{-A(x')}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) & ; x' < x \le \pi \end{cases}$$

$x = x'de$ $\frac{d}{dx}G(x,x')$ türevin süreksizliği vardır ve sıçrama 1’ e eşittir.

$G'_{II} - G'_{I} = 1$ olduğundan

$$\frac{-A}{2}\sin\left(\frac{x'}{2}\right) - \frac{B}{2}\cos\left(\frac{x'}{2}\right) = 1$$

bulunur. Bu denklemle

$$B(x')\sin\left(\frac{x'}{2}\right) = A(x')\cos\left(\frac{x'}{2}\right)$$

eşitliği beraber çözülürse ;

$$B(x') = -2\cos\left(\frac{x'}{2}\right)$$
$$A(x') = -2\sin\left(\frac{x'}{2}\right)$$

bulunur. Yerine konularak;

$$G(x,x') = \begin{cases} -2\cos\left(\frac{x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right); & 0 \le x < x' \\ -2\sin\left(\frac{x'}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) & ; x' < x \le \pi \end{cases}$$

Problemin çözümü olan *y(x)* fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$y(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\int_0^x sin(x'/2)\, f(x')dx' - 2\sin\,(x/2)\int_x^\pi cos(x'/2)\, f(x')dx'$$

Burada $f(x') = \sin\,(2x')$ dir. Sinüs ve Kosinüs toplam formüllerini kullanılıp integral alınırsa :

$$y(x) = -2\left(\frac{1}{3}\sin 2x\right) + 2\left(\frac{1}{5}\sin 2x\right)$$

$y(x) = \frac{-4}{15} sin2x$

bulunur.

Problem 7: (Von Below 1988)

Green fonksiyonu bularak $u''+\pi^2 u = 2x-1$ denkleminin $u(0) = 0$ ve $u(1) = 0$ koşullarında çözümü:

Green fonksiyonun özfonksiyon yardımıyla oluşturulması:

$$\phi_n'' + \pi^2\phi_n = -\lambda_n\phi_n$$
$$\phi(0) = 0$$
$$\phi(1) = 0$$

Bu sistemin genel çözümü :

$$\phi_n(x) = c_1 \cos\sqrt{\pi^2 + \lambda_n x} + c_2 \sin\sqrt{\pi^2 + \lambda_n x}$$

Sınır koşulları uygulanırsa

$c_1 = 0$ ve $\sqrt{\pi^2 + \lambda_n x} = n\pi$

olur. Bu nedenle özfonksiyon :

$$\emptyset_n(x) = sinn\pi x$$

Ve $n = 1, 2, 3, ...$ olmak üzere özdeğerler:

$$\lambda_n = (n^2 - 1)\pi^2$$

$\lambda_1 = 0$ olduğuna dikkat edilir, Green fonksiyon aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\frac{d^2}{dx^2}G_M(x,\xi)+\pi^2 G_M(x,\xi)=\delta(x-\xi)+c\phi_n(x) \tag{I}$$

Burada

$$c=-\frac{\phi_1(\xi)}{\int_0^1 \phi_1^2(x)\,dx}$$

$$=-\frac{sin\pi\xi}{\int_0^1 sin^2\pi x dx}$$

$c=-2sin\pi\xi$

$G_M(x,\xi)$ yi bulmak için (I) denklemi çözülür. Bunun için sınır koşulları

$G_M(0,\xi)=0$ *ve* $G_M(1,\xi)=0$

olmak üzere (I) denklemi yeniden yazılır:

$$\frac{d^2}{dx^2}G_M(x,\xi)+\pi^2 G_M(x,\xi)=\delta(x-\xi)-2\sin\pi\xi\sin\pi x$$

Özdeğer fonksiyonu açılımı $G_M(x,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n(\xi)\sin n\pi\xi$ olsun

O zaman

$$\delta(x-\xi)-2\sin\pi\xi\sin\pi x=\frac{d^2}{dx^2}G_M(x,\xi)+\pi^2 G_M(x,\xi)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n(\xi)\sin n\pi x$$

Katsayılar aşağıdaki gibi bulunur:

$$-\lambda_n c_n = 2\int_0^1 [\delta(x-\xi) - 2\sin\pi\xi \sin\pi x]\sin\pi x dx$$

$$-\lambda n_n c_n = 2\, sinn\,\pi\xi - 2\sin\pi\xi\delta_{n1}$$

O halde

$c_1 = 0$ ve $n > 1 \Rightarrow c_n = 2\, sin\, n\pi\xi$ olur.

Green fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$G_M(x,\xi) = -2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sinn\,\pi x\; sinn\,\pi\xi}{\lambda_n}$$

Bunlar kullanılarak çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$u(x) = \int_0^1 (2\xi - 1) G_M(x,\xi)\, d\xi$$

$$u(x) = -2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sinn\pi x}{\lambda_n}\int_0^1 (2\xi - 1) sinn\pi\xi d\xi$$

$$u(x) = -2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sinn\,\pi x}{(n^2-1)\pi^2}\left[-\frac{1}{n\pi}(2\xi - 1)\cos n\pi\xi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi\xi\right]_0^1$$

$$u(x) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + cosn\,\pi}{n(n^2-1)\pi^3}\sin n\pi x$$

Problem 8: Çok dağınık bir ortamda ışık yayılımı difüzyon denklemi ile iyi bir şekilde modellenebilir(Martelli et al. 2012):

$$D\nabla^2 U(r,t) + \mu_a U(r,t) = S_0(r,t)$$

Burada *U*, *r* yerindeki ortalama yoğunluktur. S_0, ortamdaki dahili bir ışık kaynağıdır. *D* ve μ_a sırasıyla difüzyon ve absorpsiyon katsayılarıdır. *D*, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D = \frac{1}{(3\mu_s' + \mu_a)}$$, burada μ_s' azaltılmış saçılma katsayısıdır.

Sonsuz bir homojen ortamda ışık dağılımının (*U*) ölçülmesinin ileri algoritması*g*, Green fonksiyon olmak üzere aşağıdaki gibi yazılır(Ntziachristos2006):

$$(\nabla^2 + k^2)\, g(k|r_s - r_d|) = -\delta(r_s - r_d)$$

Burada g ile gösterilen Green fonksiyon aşağıdaki gibidir:

$$\left(G(k|r_s - r_d|) = \frac{e^{ik|r_s - r_d|}}{4\pi|r_s - r_d|} \right)$$

r_s ve r_d sırasıyla kaynağın ve detektörün pozisyonlarıdır. Green fonksiyonun tanımı ile, sonsuz homojen bir ortamda yoğunluğun mekansal dağılımı aşağıdaki şekilde verilir (Stuker et al. 2011):

$$U(r) = \frac{1}{4\pi D} \int_V dV \frac{S(r) e^{-k_0|r_s - r_d|}}{|r_s - r_d|}$$

Difuzyon denkleminin çözülmesi için sınır koşullarının verilmesi gereklidir. Diffüzyon ortamı içindeki tam Green fonksiyonu, Green teorem yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur(Vesperinas 1991):

$$G(r_s, t_d) = g(k|r_s - r_d|) + \frac{1}{4\pi} \int_s [C_{nd} D \frac{\partial g(k|r_s' - r_d|)}{\partial n'} + g(k|r_s - r_d|)] \frac{\partial G(r_s, r')}{\partial n'}$$

$\frac{\partial}{\partial n'} = n'\nabla'$ ve n' dışa normal yüzey birimidir ve yayılmayan ortama işaret eder. C_{nd} katsayısı, her iki ortam arasındaki kırılma uyumsuzluğunu dikkate alır. Tipik doku / hava endeksi değerleri için ($(n_{in} = 1,33\ n = 1)$ $C_{nd} = 5$ alınır (Aronson 1995).

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin uygulamaları başlangıçta ısı iletim problemleriyle kısıtlı iken diferansiyel denklemler alanındaki gelişmelere paralel olarak kuantum mekaniği, hidrodinamik, difüzyon ve mühendislik gibi geniş uygulama alanlarına yayılmıştır. Sturm-Liouville teorisi, 19.yüzyıldan başlayarak önemli gelişmeler kaydetmiş, Green fonksiyon yardımıyla çözüm yöntemi sayesinde kullanım alanları yaygınlaşmıştır. Birçok denkleme Sturm Liouville operatörü yardımıyla çözümyolu aranmıştır. Bu çalışmada kullanım alanlarıyla ilgili gelecek çalışmalar için geniş bir çerçeve sunulmuş, önemli bir kaynak oluşturulmuştur. 1. ve 2. bölümlerde temel yapıları oluşturmakta, 3. ve 4. bölümlerde uygulamalara yer verilmiştir. Sturm-Liouville problemlerinin uygulamalı alanlardaki çözümlerine Green fonksiyonu yardımıyla incelenerek, destek olması bakımında örmekler sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Andrews G E, Askey R and Roy R (1999) *Special Functions*. The Press Syndicate of The University of Cambridge, Cambridge, 188.

Adkins J C (2014) *Sturm-Liouville Theory*. Universty of Toronto, USA.

Aronson R (1995)Boundary Conditions for Diffusion of Light. *JOSA A*, 12: 2532-2539.

Akça H (1986) Sturm-Liouville Arkadaşlığı.*Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Fen Bilimleri Dergisi*,2: 143-154.

Birkhoff G and Rota G (1989) *Ordinary Differential Equations*. 4th Edition, John Wiley & Sons, The United States of America, 302-368.

Boyce E W and DiPrima R C (2001) *Boundary Value Problems and Sturm–Liouville Theory*. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (7th ed.). New York: John Wiley & Sons. 630.

Courant R and Hilbert D (1966) Methods of Mathematical Physics. pp. 1: 325.

Chakrabarti A (1996) *Elements of Ordinary Differential Equations and Special Functions*. 2th Edition, New Age International (P) Ltd Publisher, New Dalhi, 86 s.

Dasgupata S (2014) *It Began with Babbage: The Genesis of Computer Science*. Oxford University Press, Oxford, pp. 253.

Fulton C T (1994) Eigenvalue and Eigenfunction Asymptotics for Regular Sturm-Liouville Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp.188, 297-340.

Gwaiz M A Al (2008) *Sturm-Liouville theory & its Application*. Verlag London Limited.

Hassana, A A (2017) Green's Function Solution of Non-Homogenous Regular Sturm-Liouville Problem. Journal of Applied & Computational Mathematics. *Research Article, J Appl Computat Math*, 6: 362.

Holmes M H (2013) *Introduction to Perturbation Methods*. 2th Edition, Springer Science Business Media, New York, pp. 4.

Komech A (2007)*Book of Practical PDEs*. Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig.

Sevgi L (2006) *Sturm-Liouville Equation: The Bridge between Eigenvalue and Green's Function Problems.* Turkish J. of Electrical Engineering, 14 (2): 293-311

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Loney N W (2007) *"Equation 6.73". Applied mathematical methods for chemical engineers* (2nd ed.). CRC Press. p. 218. ISBN 0-8493-9778-2.

Logan J D (1997) *Applied Mathematics*. John Willey and Sons Inc, New York, (Second Edition).

Lützen J (1982) *Sturm and Liouville's Work on Ordinary Linear Differential Equations*. The Emergence of Sturm-Liouville Theory, Matematisk Institut Odense unuversitet, prepirints No:1.

Martelli F, Bianco S D and Ninni, P Di (2012)"*Perturbative forward solver software for small localized fluorophores in tissue*," Biomedical Optics Express, 3: 26-36

Naimark M A (1967) *Linear Differantial Operators*. Ungar, New York.

Nasser I (2013) Solution of inhomogeneous ordinary differential equations using Green's Functions. *Phys*. 571 Syllabul. 09.Nov.

Ntziachristos N (2006) Fluorescence molecular imaging. *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, vol. 8, pp. 1-33.

Parnell W J (2013) *Greens functions, integral equations and applications*. Lecture Notes, University of Manchester.

Poisson S D (1823b) Second Memoire sur la Distribution de la Chaleur dans les Corps solides. *Journ. Ec. Polytechn*. vol. 12 (19. cab.) (1823), pp. 249-402.

Ramirez J M (2012) Revista Colombiana de Matematicas. Volumen 46 (2012)1, paginas 15-25.

Richards D (2002) "*§10.4 Sturm–Liouville systems". Advanced mathematical methods with Maple*. Cambridge University Press. p. 354. ISBN 0-521-77981-2.

Roach G F (1970) *Green's function introductory theory with Application*. New York Toronto Melbourne.

Rosen K H (2012) *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7th Edition, The McGraw-Hill Compaines, New York, pp. 205-213.

Sharma S K and Gupta V G (2010) *Differential Equations*. 45th Edition, Satyendra Rastogi (Mita), India, pp. 537.

Stuker F, Baltes C, Dikaiou K, Vats D, Carrara L, Charbon E, Member, Ieee, Ripoll J. and Rudin M(2011) Hybrid small animal imaging system combining magnetic resonance imaging with fluorescence tomography using single photon avalanche diode detectors. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, pp. 1-1.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Sturm C (1836) “Memoire sur une classe d'Equations a differences partielles". *Journ.Math. Pures Appl*. vol. 1, pp. 373-444, [P. V. 1833, p. 227].

Teschl G (2012) Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Providence: *American Mathematical Society*. ISBN 978-0-8218-8328-0.

Truesdell C (1960) The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-I788. *Euler's Opera Omnia* (2) vol. 11, Fart 2. Ztirich.

Vladimir A M (2001) Sturm-Liouville Operators and Applications Birhhauser Verlag, Basel, (1986).

Von Below J (1988) Sturm-Liouville Eigenvalue Problems on Networks. *Math*. *Methods Appl*. Sci 10, 383-395.

Vesperinas M N (1991) *Scattering and diffraction in physical optics*. New York

URL-1 (2019) <<https://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_value_problem E.T. 20.08.2018>> Erişim Tarihi:

ÖZGEÇMİŞ

17/02/1988 Zonguldak ta doğdu. İlköğretim ve lise tahsilini Zonguldak ta tamamladı. 2006 yılında Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Matematik bölümünü kazandı ve 2010 yılında mezun oldu. 2012 yılında Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı. 2014 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı ve 2019 yılında tamamladı. 2017 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi İnşaat Mühendisliğini kazandı ve halen devam etmektedir.
Evli ve bir çocuk annesidir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Meşrutiyet mah. Yağcılar cad. Kuzey apt. No:61/3 Merkez/ ZONGULDAK
Tel: (+90) 553 755 36 47

E-posta: saglamyaseminn@gmail.com