

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RADON DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GAMZE SEVİMLİ**

**TEMMUZ 2019**

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RADON DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Gamze SEVİMLİ**

**DANIŞMAN: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU**

**ZONGULDAK**

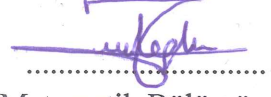
**Temmuz 2019**

**KABUL:**

Gamze SEVİMLİ tarafından hazırlanan “Radon Dönüşümü ve Özellikleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/07/2019

**Danışman:** Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



**ONAY:**

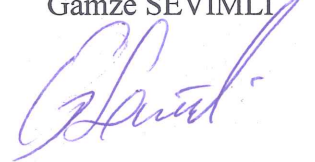
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylım. 22/08/2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”*

Gamze SEVİMLİ



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### RADON DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Gamze SEVİMLİ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Temmuz 2019, 55 sayfa

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Radon dönüşümü ve uygulamaları ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve X-ışınının davranışı için temel bir matematiksel model ifade edilmiştir. İkinci bölümde, Radon dönüşümünün tanımı, temel özellikleri ve bazı fonksiyonların Radon dönüşümünün hesabına yönelik örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde Radon dönüşümünün tersinin elde edilmesine yönelik yöntemler araştırılmıştır. Radon dönüşümünün tersi için öncelikle geri-projeksiyon yöntemi ele alınmış, daha sonra Radon dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki temel ilişki merkezi kesit teoremi (Fourier kesit teoremi) yardımıyla ifade edilmiş ve filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemi incelenmiştir. Ayrıca, Radon dönüşümünün tersinin bulunmasına yönelik çeşitli örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Radon Dönüşümü, Ters Radon Dönüşümü, Geri Projeksiyon.

**Bilim Kodu:** 403.06.01



## **ABSTRACT**

**M. Sc. Thesis**

### **RADON TRANSFORM AND ITS PROPERTIES**

**Gamze SEVİMLİ**

**Zonguldak Bülent Ecevit University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Assoc. Prof. Zekeriya USTAOĞLU**

**July 2019, 55 pages**

This thesis consists of three sections. In the first section some basic information about the Radon transform and its applications are given and a basic mathematical model for the X-ray behavior is introduced. The second section is devoted to the definition and properties of Radon transform and to some examples on the computation of the Radon transform of some functions. In the third section, some methods on the inversion of Radon transform are investigated. In order to obtain the inversion of Radon transform, first, the back-projection method is considered, then the relation between the Radon transform and Fourier transform is given by the central slice theorem (Fourier slice theorem) and the filtered back-projection method is investigated. Moreover, some examples on the inversion of Radon transform are given.

**Keywords:** Radon Transform, Inverse Radon Transform, Back Projection.

**Science Code:** 403.06.01





## TEŞEKKÜR

Tezin tüm aŐamalarında değerli vaktini esirgemeden bana ayıran, gürüŐ ve önerileriyle yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Zekeriya USTAOğLU'na (ZBEÜ) çok teşekkür ederim.

Hayatımın tüm aŐamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma; özellikle benim her zaman daha iyisini yapabileceğimi düşünen ve beni buna inandıran anneme çok teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL .....	ii
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ .....	1
1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ .....	2
1.2 X-IŞINININ DAVRANIŞI VE BEER YASASI.....	3
1.2.1 Hounsfield Birimi .....	5
BÖLÜM 2 RADON DÖNÜŞÜMÜ .....	9
2.1 İKİ BOYUTLU RADON DÖNÜŞÜMÜ .....	9
2.2 YÜKSEK BOYUTLU RADON DÖNÜŞÜMÜ .....	10
2.3 RADON DÖNÜŞÜMÜ ÖRNEKLERİ .....	11
2.4 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ .....	21
2.4.1 Türevlerin Radon Dönüşümü .....	23
2.4.2 Lineer Dönüşümün Radon Dönüşümü .....	25
2.4.3 Hermite Polinomu İçeren Dönüşümler .....	27
2.4.4 Laguerre Polinomu İçeren Dönüşümler.....	30
2.4.5 Radon Dönüşümünün Türevleri.....	33
2.4.6 Konvolüsyon Teoremi .....	36

## İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 3 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ .....	39
3.1 GERİ-PROJEKSİYON .....	39
3.2 MERKEZİ KESİT TEOREMİ .....	43
3.2.1 Merkezi Kesit Teoreminin Genel Hali .....	45
3.3 FİLTRELENMİŞ GERİ PROJEKSİYON .....	47
3.3.1 Hilbert Dönüşümü .....	49
KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ .....	55

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 a) Nonogramın ilk (çözülmemiş) hali, b) nonogramın görüntü oluşturulan hali.....	3
Şekil 1.2 X-ışınlarının absorbe edilmesi şematik gösterimi; (a) Gönderilen ve ölçülen enerji miktarı, (b) Elde edilen görüntü.....	4
Şekil 1.3 Bir X-ışınının homojen bir materyalin içinden geçişi.....	6
Şekil 2.1 $l_{t,0}$ doğrusu.....	9
Şekil 2.2 $f(x,y)$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.1 için).....	12
Şekil 2.3 $f_{\Omega}(x,y)$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.3 için).....	14
Şekil 2.4 $f(x,y)$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.4 için).....	15
Şekil 2.5 Birim kare ve kareden geçen doğru.....	15
Şekil 2.6 $t$ kesikli doğru boyunca değişirken birim kare üzerindeki bölgeler.....	16
Şekil 2.7 $f(x,y)$ fonksiyonunun (Örnek 2.3.6 için).....	17
Şekil 2.8 $f(x,y)$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.7 için).....	20
Şekil 3.1 Shepp-Logan Phantom'un geri-projeksiyon görüntüsü.....	42
Şekil 3.2 $f(x,y)$ fonksiyonunun grafiği (Örnek 3.1.4 için).....	43
Şekil 3.3 Düzgün $f(x,y)$ fonksiyonu için geri-projeksiyon görüntüsü.....	43
Şekil 3.4 Merkezi kesit teoreminin şematik gösterimi.....	45
Şekil 3.5 Radon dönüşümü için Fourier dönüşümü yönteminin şematik gösterimi.....	46
Şekil 3.6 Shepp-Logan Phantom'un filtrelenmiş geri-projeksiyon görüntüsü.....	51
Şekil 3.7 Düzgün $f(x,y)$ fonksiyonu için filtrelenmiş geri-projeksiyon görüntüsü.....	51



## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1 Bazı maddelerin Hounsfield birimleri.....	6
Çizelge 3.1 $C_i(x, y)$ için parametreler. ....	42







## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### SİMGELER

$A(x)$	: Ortamın $x$ noktasındaki azalma katsayısı
$A^T$	: $A$ matrisinin transpozu
$B$	: Geri projeksiyon operatörü
$ds$	: Eğrisel integral için yay uzunluğu elemanı
$\delta(\cdot)$	: Dirac delta
$\Delta I$	: Belirli aralıktaki X-ışınının yoğunluk kaybı
$E$	: Her bir fotonun enerji seviyesi
$\hat{f} = \mathfrak{R}f$	: $f$ fonksiyonunun Radon dönüşümü
$\tilde{f} = Ff$	: $f$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$F_n$	: $n$ boyutlu Fourier dönüşüm operatörü
$F_n^{-1}$	: $n$ boyutlu Ters Fourier dönüşüm operatörü
$\Gamma$	: Gamma Fonksiyonu
$H_k$	: $k$ . Hermite polinomu
$H_{ortam}$	: Ortamın Hounsfield birimi
$I(x)$	: $x$ noktasındaki fotonların yoğunluğu
$\ell_{t,\theta}$	: Düzlemdeki $t, \theta$ parametrelili doğru
$L_k^t(t)$	: Laguerre polinomu
$N(x)$	: Saniyede $x$ noktasından geçen fotonların sayısı
$p(x)$	: $[x, x + \Delta x]$ aralığında absorbe edilen bütün fotonların oranı
$\mathfrak{R}$	: Radon dönüşüm operatörü
$\mathbb{R}^n$	: $n$ -boyutlu Öklid uzayı
$S^1$	: Birim çember
$g * h$	: $g$ ve $h$ fonksiyonunun konvolüsyonu

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

### KISALTMALAR

<b>CT</b>	: Bilgisayarlı Tomografi (Computerized Tomography)
<b>HU</b>	: Hounsfield birimi
<b>BT</b>	: Ters Projeksiyon (Back-Projection)
<b>RT</b>	: Radon dönüşümü



## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Mühendislik, medikal görüntüleme, astronomi, jeofizik ve optik gibi bilimin birçok farklı alanında uygulamalara sahip olan Radon dönüşümü, adını Avusturyalı matematikçi J. K. August Radon'dan (1887 – 1956) almaktadır. "On the determination of functions from their integrals along certain manifolds (Fonksiyonların belli manifoldlar üzerindeki integrallerinden bu fonksiyonların kendilerinin belirlenmesi)" (Radon 1917) adlı çalışmasında Radon, iki değişkenli bir fonksiyonun düzlemdeki tüm doğrular boyunca eğrisel integrallerinden yararlanarak bu fonksiyonun kendisinin elde edilmesi ile ilgili bazı sonuçları ortaya koymuştur. Bu problem rekonstrüksiyon (yeniden yapılandırma) problemi olarak bilinmektedir (Durrani and Bisset 1984, Epstein 2008, Helgason 1999, Kuchment 2014).

Medikal görüntüleme alanında kullanılan bilgisayarlı tomografi (CT - Computerized Tomography) rekonstrüksiyon probleminin en bilinen uygulamalarından biridir. CT taraması bir nesneye veya canlıya zarar vermeden, onu kesmeden veya kırmadan iç yapısını anlamayı amaçlayan bir yöntemdir (Cierniak 2011, Herman 1980, 2009). Nesnenin değişik açılardan çok sayıda X-ışını görüntüleri alınarak o nesnenin iç yapısının görüntüsü elde edilmeye çalışılır. Bilinen yoğunluktaki tek bir X-ışını bir ortamdan geçerken (kemik, kas, beyin dokusu vs.) ışının içinde bulunan enerjinin bir kısmı ortam tarafından absorbe edilir; bir kısmı edilmez. Bu ışının yoğunluğu bir dedektör ile ölçülebilir. İlk ve son yoğunluk arasındaki fark ortamın enerjiyi absorbe edebilme oranını gösterir. Örneğin kırık bir kemiğin röntgen filmi dedektör tarafından ölçülen verilerin sonucu ile elde edilir. Bir makine tarafından paralel, yelpaze veya koni şeklinde X-ışınları yayılır ve kemik tarafından engellenmeyen veya absorbe edilmeyen fotonlar filmi ortaya çıkarır ve ortamın resmini oluşturur. CT taramasının ana fikri farklı yönlerde ortamdan geçen X-ışınlarının yoğunluklarındaki değişikliği ölçerek bu ölçümleri kıyaslamak ve nerede daha fazla nerede daha az absorbe edildiğine karar verebilmektir (Kak and Slaney 2001, Jiang and Wang 2003). Güney Afrikalı fizikçi Allan McLeod Cormack (1924 - 1998) tarafından X-ışını teknolo-

jisi üzerine yapılan çalışmalar ile birlikte Radon'un yaptığı çalışmaların uygulamalar açısından önemi fark edilmiştir. Cormack, (Cormack 1963, 1964) çalışmalarında Radon dönüşümünün radyolojik uygulamalarını ifade etmiş ve CT taramasının temellerinin oluşturulmasında etkili olmuştur. Bu çalışmaları ele alan İngiliz mühendis G. N. Hounsfield (1919 - 2004) ilk CT tarama cihazını icat etmiştir. Hounsfield, "Bir kutunun tüm açılardan X-ışını taraması (röntgen) yapılarak içerisindeki nesnenin ne olduğunu belirlemek mümkün olabilir mi?" sorusu ile CT tarayıcısı üzerinde çalışmaya başlamıştır. Radon'un çalışmalarından yararlanarak meslektaşları ile birlikte Cormack'ın teorik hesaplamalarını gerçek bir uygulamaya taşıyarak ilk CT tarayıcısını oluşturmuşlardır (Hounsfield 1972, 1973). Hounsfield çalışmalarını tıp alanına yöneltmiş ve prototip bir kafa tarayıcısı oluşturmuştur. Bu prototip ilk olarak muhafaza edilmiş bir insan beyni üzerinde denenmiştir. Daha sonra bir inek beyninde ve son olarak kendisi üzerinde denemeler yapmıştır. 1971 yılında İngiltere, Wimbeldon'da bir hastanede yatan serebral kist hastası üzerinde yapılan başarılı bir tarama sonucunda CT taraması tıp alanı ile tanıştırılmıştır. 1975 yılında Hounsfield tüm vücut taramasını geliştirmiştir. Cormack ve Hounsfield, X-ışını temelli CT teknolojisinin geliştirilmesi üzerine yaptıkları çalışmalardan ötürü 1979 yılında Nobel tıp ödülünü almışlardır.

## 1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

Tanım kümesi düzlem olan bir  $f$  fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}f(t, \theta) := \int_{l_{t,\theta}} f ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

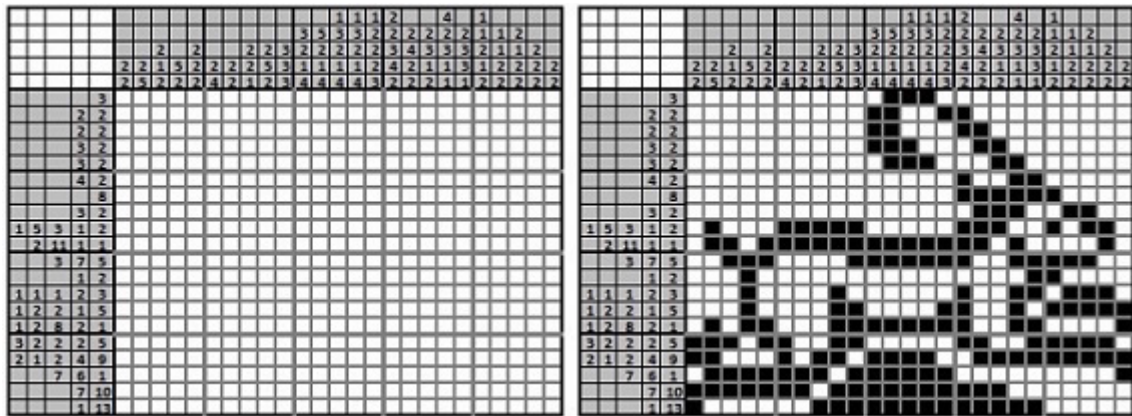
şeklinde tanımlanır.  $\mathfrak{R}f(t, \theta)$  Radon dönüşümü  $f(x, y)$  nin düzlemdeki tüm  $l_{t,\theta}$  doğruları boyunca alınan integralleridir. Radon dönüşümünün tersi ise  $l_{t,\theta}$  doğruları boyunca integralleri alınan  $f(x, y)$  fonksiyonunun kendisinin yeniden elde edilmesidir. Dolayısıyla Radon dönüşümünün tersinin hesaplanması, yani  $\mathfrak{R}f(t, \theta)$  bilindiğinde  $f(x, y)$  fonksiyonunun bulunması önemli bir problemdir. Bunun için kullanılacak yöntemlerden biri geri-projeksiyon (back-projection) yöntemi olup bu yöntem ile  $\mathfrak{R}f(t, \theta)$  verilerinden  $f(x, y)$  fonksiyonu için bir yaklaşım yapmak mümkündür. Ancak bu yöntem  $f(x, y)$  fonksiyonu için düzgünleştirilmiş/bulanık bir yaklaşım sağlar. Bir başka yöntem ise Radon dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilişkiyi ifade eden merkezi kesit teoremi (Fourier kesit

teoremi) yardımıyla ortaya konulan filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemidir. Bu yöntemde  $\Re f(t, \theta)$  fonksiyonun Fourier dönüşümü bir filtre faktörü olarak adlandırılan bir çarpan ile çarpıldıktan sonra ters Fourier dönüşümü hesaplanır ve sonrasında geri-projeksiyon uygulanarak  $f(x, y)$  fonksiyonu elde edilir. Bu yöntem ile bulanıklık bir miktar giderilerek  $f(x, y)$  fonksiyonu için daha net bir yaklaşım elde etmek mümkündür.

Bu bölümün kalan kısmında X-ışınının azalması ile ışının geçtiği maddenin özelliklerini ilişkilendiren Beer yasası yardımıyla X-ışınının davranışı için temel bir matematiksel model ifade edilmiştir. İkinci bölümde, Radon dönüşümünün tanımının iki boyutlu ve yüksek boyutlu formları ifade edilmiş, bazı temel özellikleri verilmiş ve bazı fonksiyonların Radon dönüşümünün hesabı ve özelliklerinin uygulamalarına yönelik örnekler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, Radon dönüşümünün tersinin elde edilmesine yönelik geri-projeksiyon yöntemi ve filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemi araştırılmıştır. Ayrıca, çeşitli örnekler yardımıyla Radon dönüşümünün tersi için geri-projeksiyon ve filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemlerinin uygulaması ve karşılaştırılması yapılmıştır.

## 1.2 X-IŞINININ DAVRANIŞI VE BEER YASASI

Puzzle, bulmaca ve sudoku gibi zeka oyunlarının bir benzeri nonogram (kare karalamaca) olarak adlandırılan resimli mantık bulmacalarıdır. Nonogram, kare bir alan üzerinde oynanır ve bu kare alan küçük karelerden oluşmaktadır. Her satır ve sütunun başında yer alan sayılar o satır ve sütunda kaç siyah kare olduğunu gösterir. Oyunun amacı bu siyah kareleri tamamlamak ve karalanan karelerin meydana getirdiği şekli bulmaktır (Şekil 1.1).

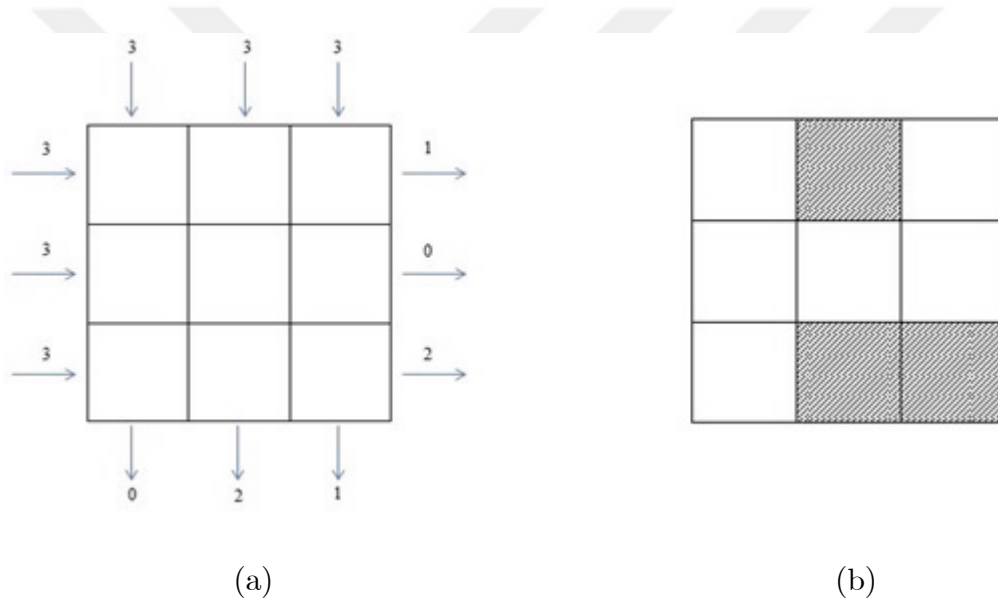


(a)

(b)

Şekil 1.1 a) Nonogramın ilk (çözülmemiş) hali, b) nonogramın görüntü oluşturulan hali.

Medikal alanda sıklıkla kullanılan bilgisayarlı tomografi cihazının çalışma prensibinin benzer şekilde olduğu söylenebilir. Bilgisayarlı tomografide görüntü elde etmek için satır ve sütunlardaki sayılar yerine X-ışınları kullanılır; kare karalamak yerine ise nesnenin içinden geçen her bir ışının yoğunluk durumu araştırılır. Yeterli miktarda X-ışını için yoğunluk değişikliği hesaplanarak bir görüntü elde edilir. Beyaz kareler X-ışınlarının absorbe edildiği bölgeleri gösterirken siyah kareler X-ışınlarının absorbe edilmediği bölgeleri göstermektedir. Yani kemik gibi X-ışınlarını yoğun olarak absorbe eden yüksek atomlu ortamlardan/maddelerden geçen yerlerin beyaz kareleri; hava gibi absorbe etme oranının daha az olduğu ortamlardan/maddelerden geçen yerlerin siyah kareleri ifade ettiği söylenebilir.



Şekil 1.2 X-ışınlarının absorbe edilmesi şematik gösterimi; (a) Gönderilen ve ölçülen enerji miktarı, (b) Elde edilen görüntü.

Bir kaynaktan gönderilen her bir X-ışını, ortamın/maddenin içinden geçtikten sonra diğer tarafta bir dedektör yardımıyla ölçülür. Şekil 1.2'de 9 adet birim kareden oluşan bir kare üzerinde önce bir kaynak tarafından gönderilen ışınlar ve bu ışınların ortamdaki geçtikten sonra ölçülen enerji miktarları; sonra bu verilere göre elde edilen görüntü ifade edilmiştir. Örneğin, 1. satırdan gönderilen 3 birimlik ışın ortamdaki çıktıktan sonra 1 değeri ile ölçülmektedir. Yani ortam tarafından 2 birimlik ışın absorbe edilmiştir. 1. sütundan gönderilen 3 birimlik ışın ortamdaki çıktıktan sonra 0 değeri ile ölçülmektedir. Bu sonuca göre ortam tarafından 3 birimlik ışın absorbe edilmiştir. Birim kareler tarafından absorbe

edilen bölgeler beyaz renkle ifade edilirse bu durumda 1. sütündeki 3 karenin beyaz renkli olması gerekmektedir. 1. satırda 2 birim karenin beyaz olması gerekmektedir ancak diğer hangi karenin beyaz olacağını belirlemek için daha fazla veri yani daha fazla ışının yoğunluk değişimi hakkında bilgi edinilmesi gerekmektedir.

Ölçüm sonuçları sadece siyah ve beyaz ile sınırlandırılmadan bir "gri" renk skalasında değerlendirilir. Örneğin 0-1 arasında numaralandırma yapılırsa 0 siyahı, 1 beyazı ve bu aralıkta kalanlar grinin farklı tonlarını ifade eder. X-ışını objeden geçerken absorbe edilme derecesine göre ışının yoğunluğundaki değişim sebebi ile gri bölgeler oluşturur. İyi bir görüntü elde edebilmek için yeterli miktarda X-ışınının yoğunluk değişiminin bilinmesi gerekir. Bu durumun daha anlaşılır olması için X-ışınının davranışı için temel bir yaklaşım aşağıdaki kısımda (Feeman 2015) çalışmasından yararlanarak ifade edilmiştir.

X-ışınlarının fotonlardan meydana geldiği kabul edilir ve X-ışınının "tek renkli" olduğu, yani her fotonun aynı  $E$  enerji seviyesinde olduğu varsayılırsa,  $N(x)$ , saniyede  $x$  noktadan geçen fotonların sayısı olmak üzere,  $x$  noktasındaki ışın yoğunluğu

$$I(x) = EN(x)$$

şeklinde gösterilebilir. X-ışınının üzerinden geçtiği ortamların/maddelerin her bir milimetresi belli miktarda fotonu absorbe eder ve ortamın fotonu absorbe etme oranı o maddenin "azalma katsayısı (attenuation coefficient)" olarak ifade edilir. Genel olarak azalma katsayısı negatif değildir ve her maddenin azalma katsayısı aynı değildir. Medikal alanda, azalma katsayısı Godfrey Hounsfield tarafından geliştirilen "Hounsfield Birimi (HU)" ile temsil edilir (Hounsfield 1973).

### 1.2.1 Hounsfield Birimi

Hounsfield birimi, bir ortamın azalma katsayısının, suyun azalma katsayısı ile kıyaslanmasıyla belirlenen bir sayı olarak tanımlanmaktadır. Hounsfield birimi, radyoyoğunluğu (radiodensity) tanımlayan nicel bir ölçektir.  $A$ , azalma katsayısını ifade etmek üzere;

$$H_{ortam} = \frac{A_{ortam} - A_{su}}{A_{su}}. \quad (1.1)$$

Bazı maddelerin Hounsfield birimleri Tablo 1.1'de verilmiştir.

Tablo 1.1 Bazı maddelerin Hounsfield birimleri.	
Madde	Hounsfield Birimi
Kemik	1000
Karaciğer	40 - 60
Beyaz Cisim	20 - 30
Gri Cisim	37 - 45
Kan	40
Kas	10 - 40
Böbrek	30
Su	0
Yağ	-100 - -50
Hava	-1000

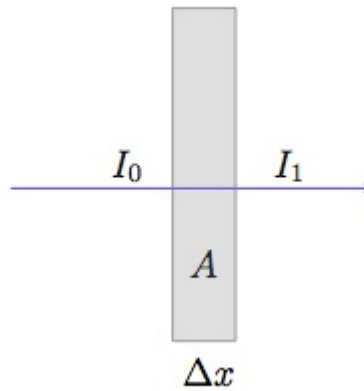
Bir ortamdan geçen X-ışınının,  $x$  ve  $x + \Delta x$  arasında bir yerde olduğu ve  $A(x)$  in ortamın bu yerdeki azalma katsayısı olduğu varsayalım. Bu durumda  $[x, x + \Delta x]$  aralığında absorbe edilen bütün fotonların oranı

$$p(x) = A(x)\Delta x$$

şeklinde gösterilir.  $[x, x + \Delta x]$  aralığında ortam tarafından saniyede absorbe edilen fotonların sayısı

$$p(x)N(x) = A(x)N(x)\Delta x \tag{1.2}$$

olur.



Şekil 1.3 Bir X-ışınının homojen bir materyalin içinden geçişi.



(1.2) eşitliğinin her iki tarafı  $E$  (her bir fotonun enerji seviyesi) ile çarpılırsa bu aralıktaki X-ışınının yoğunluk kaybı

$$\Delta I \approx -A(x)I(x)\Delta x$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda  $\Delta x \rightarrow 0$  için, Beer Yasası olarak da bilinen

$$\frac{dI}{dx} = -A(x)I(x) \quad (1.3)$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Beer Yasası X-ışınının azalması ile ışının geçtiği maddenin özelliklerini ilişkilendirir. Ortamdan geçen X-ışınının yoğunluk değişim oranı bu ışın grubunun yoğunluğu ve ortamın azalma katsayısı ile orantılıdır ve (1.3) denklemi bu durumu ifade etmektedir. Işın  $I_0 = I(x_0)$  yoğunluğu ile  $x_0$  noktasında başlar ve ortamı geçtikten sonra  $I_1 = I(x_1)$  son yoğunluğu ile  $x_1$  noktasında kontrol edilirse

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I} = - \int_{x_0}^{x_1} A(x) dx$$

olur. Buradan

$$\ln(I(x_1)) - \ln(I(x_0)) = - \int_{x_0}^{x_1} A(x) dx$$

veya

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x) dx = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \quad (1.4)$$

olduğu görülür. Sonuçtan görüldüğü üzere, X-ışınının ölçülen yoğunluğundan  $A$  nın kendisinin değeri değil X-ışını boyunca  $A$  nın integralinin değeri hesaplanır.



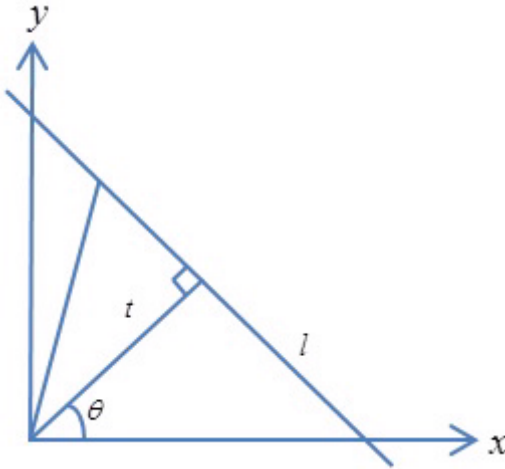
## BÖLÜM 2

### RADON DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde Radon dönüşümünün öncelikle 2–boyutlu temel hali tanımlanacak ve daha sonra bu tanımın yüksek boyutlar için genelleştirilmesi yapılacaktır. Bazı fonksiyonların Radon dönüşümünün hesabına yönelik örnekler incelenecektir. Daha sonra Radon dönüşümünün temel özellikleri verilerek bu özelliklere yönelik örnekler incelenecektir.

#### 2.1 İKİ BOYUTLU RADON DÖNÜŞÜMÜ

İki değişkenli bir fonksiyonun Radon dönüşümü bu fonksiyonun düzlemdeki tüm doğrular boyunca integralleri yardımıyla tanımlanır.



Şekil 2.1  $l_{t,\theta}$  doğrusu.

Şekil 2.1’de gösterildiği üzere  $t$ , orijinden  $l$  ye indirilen dikmenin uzunluğu ve  $\theta$ , bu dikmenin  $x$ -ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı olmak üzere düzlemdeki her bir doğru

$$l_{t,\theta} : (x(s), y(s)) = (t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta), \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

şeklinde verilsin.

$$\begin{cases} x = t \cos \theta - s \sin \theta \\ y = t \sin \theta + s \cos \theta \end{cases}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa  $l_{t,\theta}$  doğrusunun denklemi normal formda

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta$$

olarak yazılabilir.

**Tanım 2.1.1 (Radon dönüşümü)**  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in S^1$  (birim çember) olmak üzere, sürekli bir  $f(x, y)$  fonksiyonunun Radon dönüşümü düzlemdeki tüm  $l_{t,\theta}$  doğruları boyunca

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\}(t, \theta) = \int_{l_{t,\theta}} f(x, y) ds = \int_{l_{t,\theta}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \quad (2.2)$$

integralleri ile tanımlanır; burada  $ds$  yay uzunluğu elemanıdır.

Dirac delta fonksiyonu kullanılarak Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}\{f(x, y)\}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Toft 1996).

## 2.2 YÜKSEK BOYUTLU RADON DÖNÜŞÜMÜ

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere,  $n$ -değişkenli bir  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fonksiyonunun Radon dönüşümü, bu fonksiyonun  $\mathbb{R}^n$  deki tüm hiper düzlemler üzerinde alınan integralleri ile tanımlanır.

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  bir birim vektör olmak üzere,  $\mathbb{R}^n$  de bir hiper düzlem

$$t = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$$

denklemleri ile verilsin.

**Tanım 2.2.1**  $t \in \mathbb{R}$  ve  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  birim vektör olmak üzere,  $n$ -değişkenli bir  $f$  fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}\{f(\mathbf{x})\}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \delta(t - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  dir.

Tanımdan görüldüğü üzere  $f(\mathbf{x})$  in  $\mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})$  Radon dönüşümü,  $\mathbb{R}^n$  deki tüm hiper düzlemler üzerinde tanımlı bir fonksiyondur ve bu fonksiyonun herhangi bir hiper düzlemdeki değeri  $f(\mathbf{x})$  in o düzlem üzerindeki integraline eşittir (Debnath and Bhatta 2015).

## 2.3 RADON DÖNÜŞÜMÜ ÖRNEKLERİ

**Örnek 2.3.1**  $a > 0$  olmak üzere,  $f(x, y) = e^{-a^2(x^2+y^2)}$  fonksiyonunun  $\mathfrak{R}\{e^{-a^2(x^2+y^2)}\}$  Radon dönüşümünü hesaplamak için (2.3) kullanıldığında

$$\mathfrak{R}\{e^{-a^2(x^2+y^2)}\}(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x^2+y^2)} \delta(t - \xi_1 x - \xi_2 y) dx dy$$

olur ve  $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$  birim vektörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ u^2 + v^2 &= (\xi_1 x + \xi_2 y)^2 + (-\xi_2 x + \xi_1 y)^2 \\ &= \xi_1^2 x^2 + 2\xi_1 x \xi_2 y + \xi_2^2 y^2 + \xi_2^2 x^2 - 2\xi_1 x \xi_2 y + \xi_1^2 y^2 \\ &= x^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + y^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Ortogonal lineer dönüşüm ile değişken değişimi yapıldığında

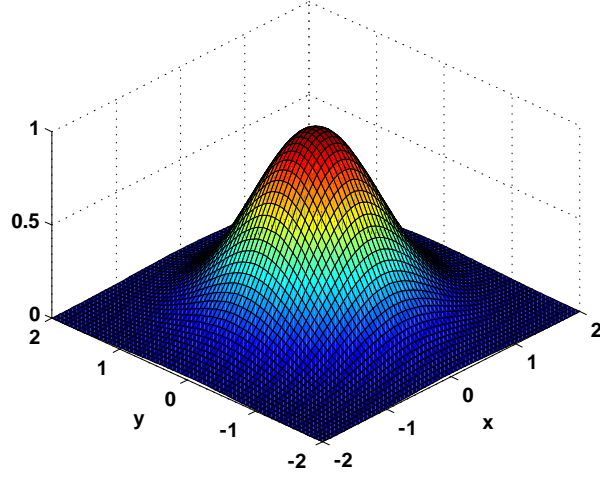
$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{e^{-a^2(x^2+y^2)}\}(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(u^2+v^2)} \delta(t - u) du dv \\ &= e^{-a^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 v^2} dv \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-a^2 t^2}}{a} \end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak  $a = 1$  için  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonunun grafiği Şekil 2.2'de verilmiş olup bu fonksiyonun Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}\{e^{-x^2-y^2}\}(t, \theta) = \sqrt{\pi} e^{-t^2}$$

olur.



Şekil 2.2  $f(x, y)$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.1 için).

(2.2) kullanılarak hesaplama yapıldığında

$$\begin{aligned}\Re f(t, \theta) &= \int_{\ell_{t, \theta}} e^{-x^2-y^2} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t \cos \theta - s \sin \theta)^2 - (t \sin \theta + s \cos \theta)^2} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 \cos^2 \theta + 2ts \cos \theta \sin \theta - s^2 \sin^2 \theta - t^2 \sin^2 \theta - 2ts \cos \theta \sin \theta - s^2 \cos^2 \theta} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - s^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - s^2} ds \\ &= e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\ &= \sqrt{\pi} e^{-t^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek (2.3.1)'de elde edilen sonucu daha yüksek boyutlara genişletmek mümkündür.  $n = 3$  durumu Örnek (2.3.2)'de verilmiştir.

**Örnek 2.3.2 (Deans 1983, s. 61)**  $f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$  fonksiyonunun  $\mathfrak{R}\{e^{-x^2-y^2-z^2}\}$

Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}\{e^{-x^2-y^2-z^2}\}(t, \boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} \delta(t - \xi_1 x - \xi_2 y - \xi_3 z) dx dy dz$$

olup,  $q = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$  ve  $|\boldsymbol{\xi}| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} = 1$  birim vektörü olmak üzere

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 \xi_2 / q & q & -\xi_2 \xi_3 / q \\ -\xi_3 / q & 0 & \xi_1 / q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ortogonal lineer dönüşüm ile değişken değişimi yapıldığında

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{e^{-x^2-y^2-z^2}\}(t, \boldsymbol{\xi}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2-w^2} \delta(t-u) du dv dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2-w^2} dv dw \\ &= e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2-w^2} dv dw \\ &= e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv dw \\ &= \sqrt{\pi} e^{-t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \pi e^{-t^2} \end{aligned}$$

$n = 2$  ve  $n = 3$  durumlarında olduğu gibi pozitif bir  $n$  tam sayısı için ortogonal matris dönüşümünün ilk satırı  $\boldsymbol{\xi}$  nin elemanlarından oluşur ve genel olarak

$$\mathfrak{R}\{e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}\}(t, \boldsymbol{\xi}) = (\sqrt{\pi})^{n-1} e^{-t^2}$$

olur.

**Örnek 2.3.3 (Feeman 2015, s. 15)** Orijin merkezli, yarıçapı  $R > 0$  olan  $\Omega$  kapalı dairesel bölgesinin karakteristik fonksiyonu

$$f_{\Omega}(x, y) := \begin{cases} 1 & , x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 > R^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$|t| > R$  olması durumunda  $\theta$  nın alabileceği her bir değer için  $l_{t,\theta}$  doğrusu  $\Omega$  diskiyle kesişmediğinden  $l_{t,\theta}$  nın her noktasında  $f_\Omega = 0$  olup  $\Re f_\Omega(t, \theta) = 0$  elde edilir.

$|t| \leq R$  olması durumunda ise  $l_{t,\theta}$  doğrusu  $\Omega$  bölgesi ile kesişir. Bu durumda  $l_{t,\theta}$  doğrusunun  $\Omega$  bölgesinin içinde kalan,  $-\sqrt{R^2 - t^2} \leq s \leq \sqrt{R^2 - t^2}$  aralığındaki parametrik değerleri ile tanımlı parçasının uzunluğu  $2\sqrt{R^2 - t^2}$  dir.  $f_\Omega$  nın bu aralıktaki değeri 1; aralık dışındaki değeri ise 0 olduğundan  $\Re f_\Omega(t, \theta)$  bu doğru parçasının uzunluğuna eşit olur.

Böylece

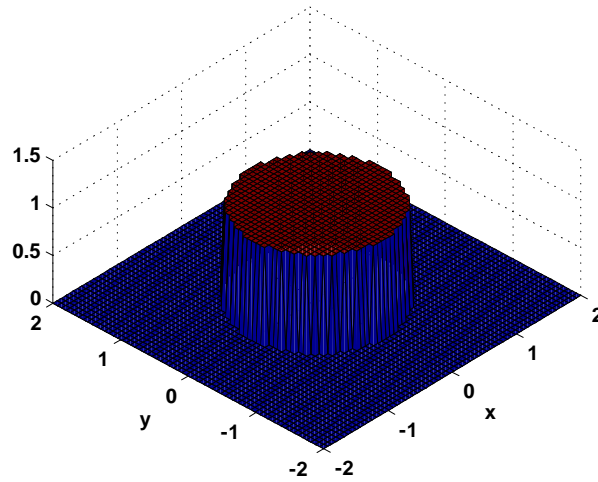
$$\Re f_\Omega(t, \theta) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - t^2} & , |t| \leq R \text{ ise} \\ 0 & , |t| > R \text{ ise} \end{cases}.$$

Bu örneğin özel bir durumu olarak  $R = 1$  seçilirse, grafiği Şekil 2.3'te verilen

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & , x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\Re f(t, \theta) = \begin{cases} 2\sqrt{1 - t^2} & , |t| \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , |t| > 1 \text{ ise} \end{cases}.$$



Şekil 2.3  $f_\Omega(x, y)$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.3 için).



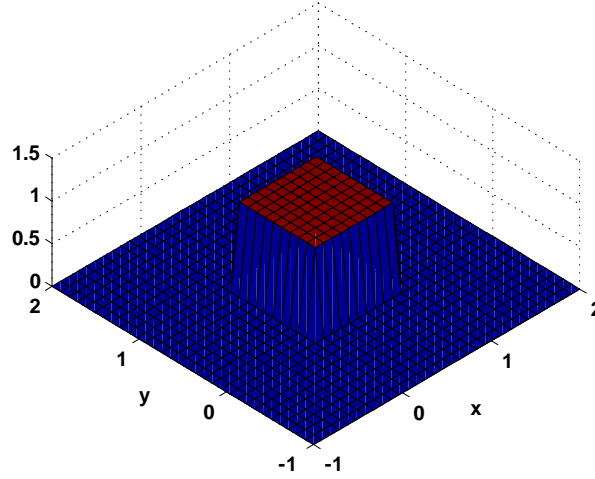
**Örnek 2.3.4 (Deans 1983, s. 62)** Bu örnekte birim kare üzerinde Radon dönüşümü incelenecektir.

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

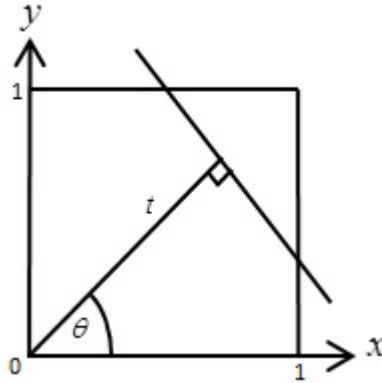
Şekil 2.4'te gösterildiği üzere  $f(x, y)$  fonksiyonu,  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  için birim (unity); diğer durumlarda ise sıfır olarak tanımlanmıştır. Şekil 2.5'te birim kareden geçen bir doğrunun durumu gösterilmektedir. Simetri özelliğinden  $\theta$  yı  $0 < \theta < \pi/4$  aralığında düşünmek yeterli olacaktır. Bu durumda Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}f(t, \theta) = \begin{cases} \frac{t}{\sin \theta \cos \theta}, & 0 < t < \sin \theta & 1. \text{ bölge} \\ \frac{1}{\cos \theta}, & \sin \theta \leq t \leq \cos \theta & 2. \text{ bölge} \\ \frac{\sin \theta + \cos \theta - t}{\sin \theta \cos \theta}, & \cos \theta < t < \sin \theta + \cos \theta & 3. \text{ bölge} \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilebilir.



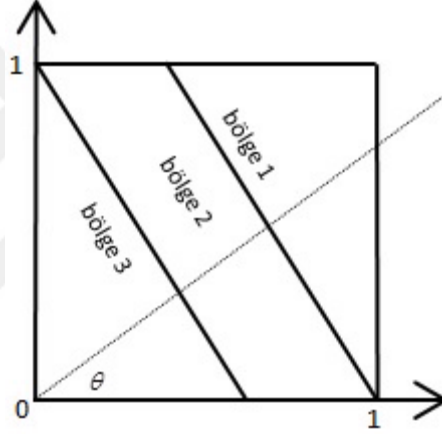
Şekil 2.4  $f(x, y)$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.4 için).



Şekil 2.5 Birim kare ve kareden geçen doğru.

Bölge 3 için hesaplama yöntemi aşağıdaki gibi olup diğer bölgeler için de benzer hesaplama yöntemi kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}f(t, \theta) &= \int \int_{\text{bölge 3}} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \\
&= \frac{1}{\cos \theta} \int \int_{\text{bölge 3}} f(x, y) \delta(t \sec \theta - x - y \tan \theta) dx dy \\
&= \frac{1}{\cos \theta} \int_{t \csc \theta - \cot \theta}^1 f(t \sec \theta - y \tan \theta, y) dy \\
&= \frac{1 - t \csc \theta + \cot \theta}{\cos \theta} \\
&= \frac{\sin \theta + \cos \theta - t}{\sin \theta \cos \theta}, \quad 0 < \theta < \pi/4 \text{ ile bölge 3.}
\end{aligned}$$



Şekil 2.6  $t$  kesikli doğru boyunca değişirken birim kare üzerindeki bölgeler.

**Örnek 2.3.5 (Debnath 2007, s. 544)**  $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$  ve  $g(x, y) = ye^{-x^2-y^2}$  fonksiyonlarının Radon dönüşümleri

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} \left\{ xe^{-x^2-y^2} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (t \cos \theta - s \sin \theta) e^{-t^2-s^2} ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( t \cos \theta e^{-t^2-s^2} - s \sin \theta e^{-t^2-s^2} \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t \cos \theta e^{-t^2-s^2} ds - \int_{-\infty}^{\infty} s \sin \theta e^{-t^2-s^2} ds \\
&= e^{-t^2} t \cos \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds - \int_{-\infty}^{\infty} s \sin \theta e^{-t^2-s^2} ds \\
&= \sqrt{\pi} t \cos \theta e^{-t^2}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\Re \left\{ ye^{-x^2-y^2} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (t \sin \theta + s \cos \theta) e^{-t^2-s^2} ds \\ &= \sqrt{\pi} t \sin \theta e^{-t^2}.\end{aligned}$$

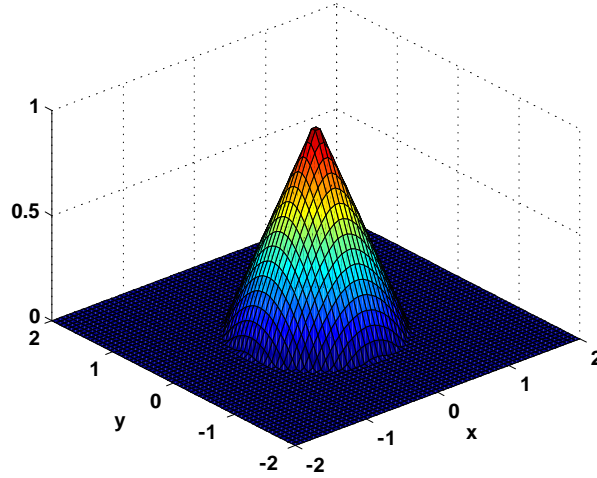
olup, bu iki sonuç yardımıyla

$$\begin{aligned}\Re \left\{ (x+y) e^{-x^2-y^2} \right\} &= \Re \left\{ xe^{-x^2-y^2} \right\} + i \Re \left\{ ye^{-x^2-y^2} \right\} \\ &= \sqrt{\pi} t e^{i\theta} e^{-at^2}.\end{aligned}$$

**Örnek 2.3.6 (Feeman 2015, s. 16)**

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.5)$$

fonksiyonu verilsin.



Şekil 2.7  $f(x, y)$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.6 için).

$\ell_{t,\theta}$  doğrusu üzerinde

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (t \cos \theta - s \sin \theta)^2 + (t \sin \theta + s \cos \theta)^2 \\ &= t^2 \cos^2 \theta - 2ts \cos \theta \sin \theta + s^2 \sin^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta + 2ts \cos \theta \sin \theta + s^2 \cos^2 \theta \\ &= t^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + s^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= t^2 + s^2\end{aligned}$$

olduğundan

$$f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) := \begin{cases} 1 - \sqrt{t^2 + s^2} & , t^2 + s^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , t^2 + s^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Buradan görüldüğü üzere  $\Re f(t, \theta)$  değeri sadece  $t$  ye bağımlı olup  $\theta$  ya bağımlı değildir ve  $|t| > 1$  için  $\Re f(t, \theta) = 0$  dir.  $|t| \leq 1$  olacak şekilde uygun bir  $t$  değeri için  $t^2 + s^2 \leq 1$  koşulu sağlanacaktır. Dolayısıyla herhangi bir  $\theta$  değeri ve  $|t| \leq 1$  olacak şekilde uygun bir  $t$  değeri için

$$f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) := \begin{cases} 1 - \sqrt{t^2 + s^2} & , -\sqrt{1-t^2} \leq s \leq \sqrt{1-t^2} \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumda} \end{cases}$$

olup

$$\int_{\ell_{t,\theta}} f ds = \int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) ds.$$

Trigonometrik değişken değişimi yapılarak integral hesaplandığında

$$\int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) ds = \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}t^2 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 - \sqrt{1-t^2}} \right).$$

Sonuç olarak  $f$  fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\Re f(t, \theta) := \begin{cases} \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}t^2 \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-\sqrt{1-t^2}} \right) & , -1 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , |t| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir.  $\Re f, \theta$  dan bağımsız olup,  $\Re f(t, \theta)$  değeri  $z = f(x, y)$  ile tanımlı koninin uygun bir dikey kesitinin altındaki bölgeye karşılık gelmektedir.

**Örnek 2.3.7 (Deans 1983, s. 63)**  $\lambda > 1$  olmak üzere  $f$  fonksiyonu

$$f(x, y) := \begin{cases} (1 - x^2 - y^2)^{\lambda-1} & , x^2 + y^2 < 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu fonksiyonun Radon dönüşümü birim çember üzerindedir.

(2.2) den

$$\Re f(t, \theta) = \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1-t^2-s^2)^{\lambda-1} ds$$

olup, Beta ve Gamma fonksiyonları kullanılarak bu integral hesaplanabilir;

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (a^2-t^2)^{\lambda-1} dt &= a^{2\lambda-1} B(1/2, \lambda) \\ &= \frac{a^{2\lambda-1} \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1/2)}, \end{aligned}$$

eşitliklerinden yararlanıldığında

$$\Re f(t, \theta) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1/2)} (1-t^2)^{\lambda-1/2}, \quad |t| \leq 1$$

elde edilir.

Özel olarak  $\lambda = 2$  durumu için grafiği Şekil 2.8'de verilen

$$f(x, y) := \begin{cases} (1-x^2-y^2) & , x^2+y^2 < 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2+y^2 \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

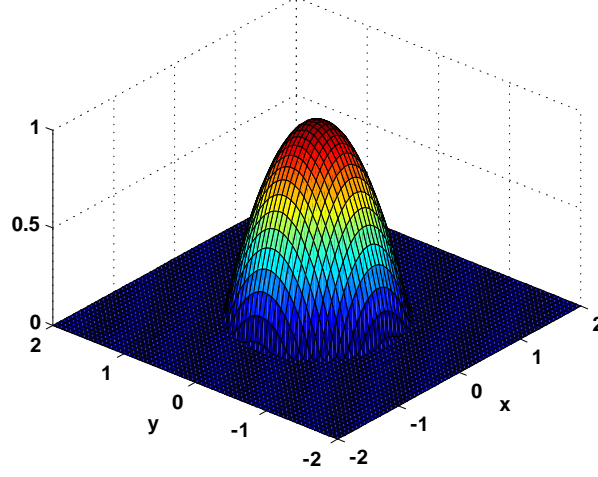
fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\begin{aligned} \Re f(t, \theta) &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1-t^2-s^2) ds \\ &= 2 \left( (1-t^2)s - \frac{s^3}{3} \right)_0^{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \left( (1-t^2)\sqrt{1-t^2} - \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{3} \right) \\ &= 2 \left( (1-t^2)^{3/2} - \frac{(1-t^2)^{3/2}}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} (1-t^2)^{3/2}, \quad |t| \leq 1 \end{aligned}$$

olur ve

$$\Re f(t, \theta) = \begin{cases} \frac{4}{3} (1-t^2)^{3/2} & , |t| \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , |t| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu sonuç  $\lambda = 2$  özel durumu için Gamma fonksiyonunun özellikleri yardımıyla da elde edilebilir. Gamma fonksiyonu için



Şekil 2.8  $f(x, y)$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 2.3.7 için).

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \Re f(t, \theta) &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + 1/2)} (1-t^2)^{\lambda-1/2}, \quad |t| \leq 1 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} (1-t^2)^{3/2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} (1-t^2)^{3/2} \\ &= \frac{4}{3} (1-t^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

**Örnek 2.3.8 (Deans 2000, s.20)**  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonunun Radon dönüşümünün

$\Re\{e^{-x^2-y^2}\} = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$  olduğu bilinmektedir. (2.16) dan  $\lambda = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$  olmak üzere

$$\Re\left\{e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}\right\} = \sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

olur. Bu dönüşüm simetrik Gauss olasılık yoğunluk fonksiyonunun Radon dönüşümüdür.

Daha standart bir formda

$$\Re\left\{\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (2.6)$$

olur.

**Örnek 2.3.9 (Deans 2000, s. 23)**  $\Re f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \Re f(t - \mathbf{a}\cdot\xi, \xi)$  öteleme özelliği (2.6) eşitliğine  $\mathbf{a} = (a, b)$  ve  $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$  olacak şekilde uygulanırsa  $t_0 = a \cos \theta + b \sin \theta$  iken

$$\Re \left\{ \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma^2}\right]} \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(t-t_0)}{2\sigma^2}\right]}$$

olur.

$t = a \cos \theta + b \sin \theta$  denklemi,  $t$  radyal koordinat ve  $\theta$  açıl koordinat olmak üzere merkezi  $(a/2, b/2)$  ve yarıçapı  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  olan bir dairenin denkleminin kutupsal formudur.

## 2.4 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

**Önerme 2.4.1** Radon dönüşümü aşağıdaki temel özelliklere sahiptir.

(1) *Lineerlik:*  $\Re \{af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\} = a\Re \{f(\mathbf{x})\} + b\Re \{g(\mathbf{x})\}$

(2) *Öteleme:*

a.  $\Re \{f(x, y)\} = \Re f(t, \xi_1, \xi_2)$  ise bu durumda  $\Re \{f(x - a, y - b)\} = \Re f(t - a\xi_1 - b\xi_2, \xi)$  olur.

b. Genel olarak  $\Re f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \Re f(t - \mathbf{a}\cdot\xi, \xi)$  olur.

(3) *Ölçekleme:*

a.  $\Re \{f(x, y)\} = \Re f(t, \xi_1, \xi_2)$  ise bu durumda  $\Re \{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} \Re f\left(t, \frac{\xi_1}{a}, \frac{\xi_2}{b}\right)$  olur

b.  $\Re f(a\mathbf{x}) = \frac{1}{a^n} \Re f\left(t, \frac{\mathbf{x}}{a}\right) = \frac{1}{a^{n-1}} \Re f(at, \mathbf{x})$

(4) *Simetri:*

a.  $\Re f(t, \xi) = \Re \{f(x, y)\}$  ise bu durumda  $a \neq 0$  olmak üzere  $\Re f(at, a\xi) = |a|^{-1} \Re f(t, \xi)$  olur.

b.  $\Re f(t, a\xi) = |a|^{-1} \Re f\left(\frac{t}{a}, \xi\right)$

**İspat.**

(1)

$$\begin{aligned} \Re \{af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\} \delta(t - \mathbf{x}\cdot\xi) d\mathbf{x} \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \delta(t - \mathbf{x}\cdot\xi) d\mathbf{x} + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \delta(t - \mathbf{x}\cdot\xi) d\mathbf{x} \\ &= a\Re \{f(\mathbf{x})\} + b\Re \{g(\mathbf{x})\}. \end{aligned}$$

Bu özellik herhangi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  için de sağlanmaktadır.

(2)

$$x - a = u \text{ ve } y - b = v$$

(2.7)

olmak üzere

$$\begin{aligned} \Re\{f(x - a, y - b)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a, y - b) \delta(t - x\xi_1 - y\xi_2) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \delta(t - (a + u)\xi_1 - (b + v)\xi_2) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \delta(t - a\xi_1 - b\xi_2 - u\xi_1 - v\xi_2) du dv \\ &= \Re f(t - a\xi_1 - b\xi_2, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

(3)  $a > 0$ ,  $b > 0$  olsun.  $ax = u$ ,  $by = v$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \Re\{f(ax, by)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax, by) \delta(t - x\xi_1 - y\xi_2) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \delta(t - \frac{\xi_1}{a}u - \frac{\xi_2}{b}v) \frac{du dv}{ab} \\ &= \frac{1}{ab} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \delta(t - \frac{\xi_1}{a}u - \frac{\xi_2}{b}v) du dv \\ &= \frac{1}{ab} \Re f(t, \frac{\xi_1}{a}, \frac{\xi_2}{b}) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, eğer  $a < 0$  ya da  $b < 0$  ise

$$\Re\{f(ax, by)\} = -\frac{1}{ab} \Re f(t, \frac{\xi_1}{a}, \frac{\xi_2}{b})$$

olup,

$$\Re\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} \Re f(t, \frac{\xi_1}{a}, \frac{\xi_2}{b})$$

elde edilir.

(4)

$$\mathbf{a.} \text{ Tanımdan } \Re f(at, a\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(at - ax\xi_1 - ay\xi_2) dx dy \text{ olup}$$

$$\delta(at - ax\xi_1 - ay\xi_2) = \frac{1}{|a|} \delta(t - x\xi_1 - y\xi_2)$$



eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}f(at, a\xi) &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - x\xi_1 - y\xi_2) dx dy \\ &= \frac{1}{|a|} \mathfrak{R}f(t, \xi)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Radon dönüşümü  $-1$ . dereceden bir çift homojen fonksiyondur.

Özel olarak  $a = -1$  alınırsa

$$\mathfrak{R}f(-t, -\xi) = \mathfrak{R}f(t, \xi)$$

olur. Yani  $\mathfrak{R}f$  bir çift fonksiyondur.

**b.**

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}f(t, a\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(t - ax\xi_1 - ay\xi_2) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(\frac{t}{a} - ax\xi_1 - ay\xi_2\right) dx dy \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(\frac{t}{a} - x\xi_1 - y\xi_2\right) dx dy \\ &= \frac{1}{|a|} \mathfrak{R}f\left(\frac{t}{a}, \xi\right).\end{aligned}$$

■

### 2.4.1 Türevlerin Radon Dönüşümü

$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  fonksiyonunun  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  türevinin Radon dönüşümünü hesaplamak için

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f\left(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{\xi_k}\right) - f(\mathbf{x})}{\frac{\varepsilon}{\xi_k}} \quad (2.8)$$

türev tanımından yararlanılacaktır. Burada  $f(\mathbf{x} + \varepsilon/\xi_k) = f(x_1, \dots, x_k + \varepsilon/\xi_k, \dots, x_n)$  ve  $\xi_k$ ,  $\xi$  nin  $k$ . bileşenidir.

$\mathbf{a} = (0, 0, \dots, \varepsilon/\xi_k, \dots, 0)$  olmak üzere, öteleme özelliğinden faydalanarak (2.8) in Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\} = \xi_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathfrak{R}f(t + \varepsilon, \xi) - \mathfrak{R}f(t, \xi)}{\varepsilon} \right]$$

olur. Böylelikle

$$\mathfrak{R} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\} = \xi_k \frac{\partial \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t} \quad (2.9)$$

elde edilir. Lineerlik özelliği kullanılarak  $\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$  nın Radon dönüşümü, keyfi  $a_k$  skaleri için

$$\mathfrak{R} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \mathfrak{R}f(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p} \quad (2.10)$$

şeklindedir.  $n = 3$  için  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ , gradyan operatörü olmak üzere

$$\mathfrak{R} \{ \mathbf{a} \cdot \nabla f \} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}$$

yönlü türevin Radon dönüşümü olarak yorumlanabilir. (2.9) dan görüldüğü üzere  $f$  in  $x_k$  ya göre türevinin Radon dönüşümü,  $f$  in Radon dönüşümünün  $t$  ye göre türevinin  $\xi_k$  ile çarpımıdır. Buna göre

$$\mathfrak{R} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \right\} = \xi_l \xi_k \frac{\partial^2 \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t^2}$$

ve  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  vektörleri için

$$\mathfrak{R} \left\{ \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \right\} = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

genellemeleri yapılabilir.

$L \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  sabit katsayılı lineer bir diferansiyel operatörü ise bu durumda

$$\mathfrak{R}\{Lf\} = L \left( \xi_1 \frac{\partial}{\partial t}, \dots, \xi_n \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})$$

olur (Deans 1983).

**Örnek 2.4.1**  $L = a \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + b \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c \frac{\partial}{\partial x_3}$  lineer operatörü olmak üzere

$$\mathfrak{R}\{Lf\} = \mathfrak{R} \left\{ \left( a \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + b \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + c \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f \right\} = \left( a \xi_1^2 \xi_2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + b \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c \xi_3 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}).$$

**Örnek 2.4.2 (Deans 1983, s. 78)** (2.11) eşitliğinin özel bir durumu olarak  $n = 3$  ve

$$a_l b_k = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & l = k \text{ ise} \\ 0, & l \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu varsayalım. Bu durumda (2.11) eşitliği  $\Delta_x$  veya  $\Delta$  olarak gösterilen  $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  Laplace operatörüne dönüşür ve  $|\xi| = 1$  için

$$\Re\{\Delta_x f(x)\} = |\xi|^2 \frac{\partial^2 \Re f(t, \xi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Re f(t, \xi)}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

haline gelir.

**Örnek 2.4.3 (Deans 1983, s. 79)**  $n = 3$  için  $f = f(x, y, z; \tau)$  olmak üzere  $f$  in bir parametreye bağlı olduğu varsayılarak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

3-boyutlu dalga denklemi verilsin. Bu denklemin her iki tarafına Radon dönüşümü uygulanırsa (2.12) kullanılarak  $\Re f = \Re f(t, \xi; \tau) = \Re f(x, y, z; \tau)$  olmak üzere

$$\frac{\partial^2 \Re f}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Re f}{\partial t^2}$$

olur.

**Örnek 2.4.4**  $f = f(x, y)$  ve  $L = L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 3\frac{\partial^3}{\partial y^3}$  operatörü olsun. Bu durumda

$$\Re\{Lf\} = (2\xi_1^3 + \xi_1^2 \xi_2 - 3\xi_2^3) \frac{\partial^3 \Re f(t, \xi)}{\partial t^3}$$

olur.

## 2.4.2 Lineer Dönüşümün Radon Dönüşümü

Lineer dönüşümün Radon dönüşümünü hesaplamak için öncelikle uygun değişken değişimleri yapılmalıdır.  $\xi, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektörlerinin iç çarpımı

$$\xi \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n,$$

$$\langle \xi, \mathbf{x} \rangle = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

veya matris notasyonunda

$$\xi^T \mathbf{x} = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

olarak ifade edilsin, burada  $\xi^T$ ,  $\xi$  nin transpoznesidir.  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere, reel elemanlı tekil olmayan  $A$  matrisi için  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle \xi, \mathbf{y} \rangle &= \langle \xi, A\mathbf{x} \rangle = \langle A^T \xi, \mathbf{x} \rangle, \\ \xi^T \mathbf{y} &= \xi^T A\mathbf{x} = (A^T \xi)^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

veya

$$\xi \cdot \mathbf{y} = \xi \cdot A\mathbf{x} = A^T \xi \cdot \mathbf{x}$$

yazılabilir.

$A$  tekil olmayan bir matris ve

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

veya  $(k, l = 1, 2, \dots, n)$  için  $A$  nın reel elemanları  $A_{kl}$  için

$$y_k = \sum_{l=1}^n A_{kl} x_l, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere  $\Re\{f(A\mathbf{x})\}$  ele alımsın.

$B = A^{-1}$  olarak alırsa, bu durumda  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = B\mathbf{y}$  olur. Dönüştürmenin Jacobisi  $B$  nin determinantının mutlak değeri olduğundan

$$\begin{aligned}\Re\{f(A\mathbf{x})\} &= \int f(A\mathbf{x}) \delta(t - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= |\det B| \int f(\mathbf{y}) \delta(t - \xi \cdot B\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= |\det B| \int f(\mathbf{y}) \delta(t - B^T \xi \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $B = A^{-1}$  olduğundan

$$\Re\{f(A\mathbf{x})\} = |\det B| \Re f(t, B^T \xi) \tag{2.13}$$

ve buna denk olarak

$$\Re\{f(B^{-1}\mathbf{x})\} = |\det B| \Re f(t, B^T \xi) \tag{2.14}$$

olur. (2.13) eşitliğinde  $B$  ortogonal ise  $B^{-1} = B^T = A$ ,  $|\det B| = 1$  ve

$$\Re\{f(A\mathbf{x})\} = \Re f(t, A\xi) \tag{2.15}$$

olur.

$\lambda \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $A = \lambda I$  ise yani  $A$ , birim matrisin bir katı ise bu durumda

$$\mathfrak{R}f(\lambda \mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^n} \mathfrak{R}f\left(t, \frac{\boldsymbol{\xi}}{\lambda}\right)$$

veya

$$\mathfrak{R}f(\lambda \mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \mathfrak{R}f(\lambda t, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.16)$$

olur.

### 2.4.3 Hermite Polinomu İçeren Dönüşümler

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonunun Radon dönüşümü  $\mathfrak{R}\{e^{-x^2-y^2}\} = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$  olduğundan  $H_k(x)$ ,  $x$  değişkenli  $k$ . Hermite polinomu ve  $H_l(y)$ ,  $y$  değişkenli  $l$ . Hermite polinomu olmak üzere

$$H_k(x)H_l(y)e^{-x^2-y^2}$$

formundaki fonksiyonların Radon dönüşümlerini bulmak için bu sonuçtan yararlanılır.

$\mathfrak{R}\{H_k(x)H_l(y)e^{-x^2-y^2}\}$  dönüşümünü hesaplamak için Hermite polinomları için

$$e^{-t^2} H_k(t) = (-1)^k \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k e^{-t^2}$$

Rodrigues formülü kullanılır (Szegö 1939, Rainville 1960);

$$H_k(x)H_l(y)e^{-x^2-y^2} = (-1)^{k+l} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l e^{-x^2-y^2}.$$

Türevin Radon dönüşümü özelliğinden

$$\mathfrak{R}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(x, y)\right\} = \xi_1^k \xi_2^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+l} \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.17)$$

olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  nin Radon dönüşümü bilindiğinden

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{H_k(x)H_l(y)e^{-x^2-y^2}\} &= (-1)^{k+l} \mathfrak{R}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l e^{-x^2-y^2}\right\} \\ &= (-1)^{k+l} \xi_1^k \xi_2^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+l} \sqrt{\pi} e^{-t^2} \end{aligned}$$

olur. Rodrigues formülünden

$$(-1)^{k+l} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+l} e^{-t^2} = e^{-t^2} H_{k+l}(t)$$

yazılırsa bu durumda  $\xi$  birim vektörü için  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$  formu kullanılarak

$$\Re\{H_k(x)H_l(y)e^{-x^2-y^2}\} = \sqrt{\pi}(\cos \theta)^k(\sin \theta)^l e^{-t^2} H_{k+l}(t) \quad (2.18)$$

hesaplanmış olur (Deans 1983).

**Örnek 2.4.5 (Debnath 2007, s. 553)**  $H_n(x)$  Hermite polinomunun derecesi

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n e^{-x^2}$$

Rodrigues formülü ile tanımlı olmak üzere, Hermite polinomlarının Radon dönüşümü

$$\Re\{H_k(x)H_l(y)e^{-(x^2+y^2)}\} = \sqrt{\pi}(\cos \theta)^k(\sin \theta)^l e^{-t^2} H_{k+l}(t)$$

şeklindedir.

$$e^{-(x^2+y^2)} H_k(x) H_l(y) = (-1)^{k+l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^l e^{-(x^2+y^2)} \quad (2.19)$$

olur. Verilen formüllerden

$$\Re\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(x, y)\right\} = (\cos \theta)^k (\sin \theta)^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+l} \Re f(t, \mathbf{u})$$

olur ve (2.19) un Radon dönüşümünün

$$\Re\{e^{-(x^2+y^2)}\} = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$$

olduğu bilindiğinden

$$\Re\{e^{-x^2-y^2} H_k(x) H_l(x)\} = (\cos \theta)^k (\sin \theta)^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+l} \sqrt{\pi}e^{-t^2}$$

olur.

**Örnek 2.4.6 (Deans 1983, s. 81)**  $H_k(\lambda x)H_l(\lambda y)e^{-\lambda^2(x^2+y^2)}$  fonksiyonunun Radon dönüşümü (2.18) eşitliğinin sağ kısmı  $\Re f(t, \theta)$  ile tanımlı olacak şekilde

$$\Re f(\lambda \mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^n} \Re f\left(t, \frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \Re f(\lambda t, \xi)$$

lineer dönüşümün dönüşüm formülü ile hesaplanabilir. Bu durum (2.18) eşitliğinin sağ kısmının  $\Re f(t, \theta)$  olarak tanımlanması ile (2.16) nin kullanılması sonucu hesaplanabilir;

$$\Re\{H_k(\lambda x)H_l(\lambda y)e^{-\lambda^2(x^2+y^2)}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} (\cos \theta)^k (\sin \theta)^l e^{-\lambda^2 t^2} H_{k+l}(\lambda t). \quad (2.20)$$

$$\aleph_{kl} = \aleph_{kl}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} H_k(\lambda x) H_l(\lambda y) \quad (2.21)$$

olarak tanımlanırsa, Örnek 2.4.6'dan

$$\Re \left\{ \aleph_{kl}(\lambda x, \lambda y) e^{-\lambda^2(x^2+y^2)} \right\} = (\cos \theta)^k (\sin \theta)^l e^{-\lambda^2 t^2} H_{k+l}(\lambda t) \quad (2.22)$$

olur ve (2.22) nin  $t$  ye göre türevinin alınması sonucu

$$\frac{1}{\lambda^m} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right)^m \Re \left\{ \aleph_{kl}(\lambda x, \lambda y) e^{-\lambda^2(x^2+y^2)} \right\} = (\cos \theta)^k (\sin \theta)^l e^{-\lambda^2 t^2} H_{k+l+m}(\lambda t). \quad (2.23)$$

(2.20) nin  $t$  ye göre türevi alındığında

$$\frac{1}{\lambda^m} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right)^m \Re \left\{ \aleph_{kl}(\lambda x, \lambda y) e^{-\lambda^2(x^2+y^2)} \right\} = (\cos \theta)^k (\sin \theta)^l e^{-\lambda^2 t^2} H_{k+l+m}(\lambda t) \quad (2.24)$$

formülü elde edilir.

$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, \dots$

dizisinin her bir terimi Hermite polinomları yardımıyla ifade edilebildiğinden

$x^k y^l e^{-x^2-y^2}$

formundaki fonksiyonların Radon dönüşümü hesaplanabilir.

**Örnek 2.4.7**  $x^k y^l e^{-x^2-y^2}$  formundaki fonksiyonun  $k = 3$  ve  $l = 2$  olmak üzere  $\Re \{x^3 y^2 e^{-x^2-y^2}\}$

Radon dönüşümünü hesaplamak için

$$x^3 = \frac{1}{8}(H_3(x) + 6H_1(x))$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(2H_0(y) + H_2(y))$$

olduğundan

$$\begin{aligned} x^3 y^2 &= \frac{1}{8}(H_3(x) + 6H_1(x)) \frac{1}{4}(2H_0(y) + H_2(y)) \\ &= \frac{1}{32}(2H_3(x)H_0(y) + H_3(x)H_2(y) + 12H_1(x)H_0(y) + 6H_1(x)H_2(y)) \\ &= \frac{1}{16}H_3(x)H_0(y) + \frac{1}{32}H_3(x)H_2(y) + \frac{3}{8}H_1(x)H_0(y) + \frac{3}{16}H_1(x)H_2(y) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{16}\aleph_{30}(x, y) + \frac{\sqrt{\pi}}{32}\aleph_{32}(x, y) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\aleph_{10}(x, y) + \frac{3\sqrt{\pi}}{16}\aleph_{12}(x, y) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Re\{x^3 y^2 e^{-x^2-y^2}\} &= \frac{\sqrt{\pi}}{32} \Re\left\{(2\aleph_{30} + \aleph_{32} + 12\aleph_{10} + 6\aleph_{12}) e^{-x^2-y^2}\right\} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{32} \left(2 \cos^3 \theta \sin^0 \theta e^{-t^2} H_3(t) + \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} H_5(t) \right. \\
&\quad \left. + 12 \cos^1 \theta \sin^0 \theta e^{-t^2} H_1(t) + 6 \cos^1 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} H_3(t)\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{16} \cos^3 \theta e^{-t^2} H_3(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{32} \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} H_5(t) \\
&\quad + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \cos \theta e^{-t^2} H_1(t) + \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \cos \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} H_3(t)
\end{aligned}$$

olur.  $H_1(t) = 2t$ ,  $H_3(t) = 8t^3 - 12t$  ve  $H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t$  Hermite polinomlarının hesaplanması ile

$$\begin{aligned}
\Re\{x^3 y^2 e^{-x^2-y^2}\} &= \frac{\sqrt{\pi}}{16} \cos^3 \theta e^{-t^2} (8t^3 - 12t) + \frac{\sqrt{\pi}}{32} \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} (32t^5 - 160t^3 + 120t) \\
&\quad + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \cos \theta e^{-t^2} (2t) + \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \cos \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} (8t^3 - 12t) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos^3 \theta e^{-t^2} t^3 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cos^3 \theta e^{-t^2} t \\
&\quad + \sqrt{\pi} \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} t^5 - 5\sqrt{\pi} \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} t^3 \\
&\quad + \frac{15\sqrt{\pi}}{4} \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} t + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \cos \theta e^{-t^2} 2t \\
&\quad + \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} t^3 - \frac{9\sqrt{\pi}}{4} \cos \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} t \\
&= \sqrt{\pi} \cos^3 \theta \sin^2 \theta e^{-t^2} t^5 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta e^{-t^2} t^3 (\cos^2 \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) \\
&\quad - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cos \theta e^{-t^2} t (\cos^2 \theta + 5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1 - 3 \sin^2 \theta)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

#### 2.4.4 Laguerre Polinomu İçeren Dönüşümler

$l$  ve  $k$  negatif olmayan tam sayılar ve  $i = \sqrt{-1}$  olmak üzere  $L_k^l(t)$  bir Laguerre polinomu olsun.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y}\right)^l \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k e^{-x^2-y^2} = (-1)^{l+k} 2^{2k+l} k! (x \pm iy)^l e^{-x^2-y^2} L_k^l(x^2 + y^2) \quad (2.25)$$

(2.25) ifadesi, tümevarım ve Rodrigues tipinde formül yardımıyla elde edilebilir (Szegö 1939, Rainville 1960).

$$e^{-t} t^l L_k^l(t) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (e^{-t} t^{l+k})$$



(2.25) in Radon dönüşümü Bölüm 2.4.1’de verilen yöntemlerden elde edilebilir;  
 $H_{l+2k}(t)$ ,  $(l + 2k)$ . dereceden Hermite polinomu olmak üzere

$$\begin{aligned}\Re f(t, \theta) &= \Re \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right)^l \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^k e^{-x^2-y^2} \right\} \\ &= (-1)^{2k+l} \sqrt{\pi} e^{\pm i l \theta} e^{-t^2} H_{l+2k}(t).\end{aligned}\quad (2.26)$$

(2.25) ve (2.26) dan

$$\begin{aligned}&\Re \left\{ \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} (x^2 + y^2)^{l/2} e^{\pm i l \theta} L_k^l(x^2 + y^2) e^{-x^2-y^2} \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}} e^{\pm i l \theta} e^{-t^2} H_{l+2k}(t).\end{aligned}$$

(2.25) teki  $(x \pm iy)$  terimi  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$  olmak üzere

$$(x \pm iy)^l = (x^2 + y^2)^{l/2} e^{\pm i l \theta}$$

olacak şekilde değiştirilmiştir.

$$\begin{aligned}&\Re \left\{ \frac{(-1)^k \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} [\lambda^2 (x^2 + y^2)]^{l/2} e^{\pm i l \theta} L_k^l[\lambda^2 (x^2 + y^2)] e^{-\lambda^2(x^2+y^2)} \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{2k+l}} e^{\pm i l \theta} e^{-\lambda^2 t^2} H_{l+2k}(\lambda t)\end{aligned}$$

$l \geq 0$  olmak üzere  $(l + 2k)$ . dereceden

$$\mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) = \frac{(-1)^k \lambda}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{k!}{(l+k)!} \right]^{1/2} [\lambda^2 (x^2 + y^2)]^{l/2} e^{\pm i l \theta} L_k^l[\lambda^2 (x^2 + y^2)] \quad (2.27)$$

kompleks polinomu tanımlanır ve

$$N_k^l = \left[ \frac{1}{k!(l+k)!} \right]^{1/2} \frac{1}{2^{l+2k}}$$

olarak alınırsa daha kısa ve daha kullanışlı olan

$$\Re \left\{ \mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(\lambda x, \lambda y) e^{-\lambda^2(x^2+y^2)} \right\} = N_k^l e^{\pm i l \theta} e^{-\lambda^2 t^2} H_{l+2k}(\lambda t) \quad (2.28)$$

ifadesi elde edilir. (2.27) nin kompleks eşleniği dikkate alınırsa

$$[\mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}]^* = \mathcal{L}_{l+2k}^{\mp l}, \quad l \geq 0$$

olduğu görülmektedir.

**Örnek 2.4.8 (Deans 1983, s. 89)**  $\lambda = 1$  için (2.28) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\Re \left\{ \mathcal{L}_1^1 e^{-x^2-y^2} \right\} &= N_0^1 e^{\pm i\theta} e^{-t^2} H_1(t) \\ &= \frac{1}{2} e^{i\theta} e^{-t^2} 2t \\ &= e^{i\theta-t^2} t \\ \Re \left\{ \mathcal{L}_3^3 e^{-x^2-y^2} \right\} &= N_0^3 e^{\pm 3i\theta} e^{-t^2} H_3(t) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{6}} e^{3i\theta} e^{-t^2} (8t^3 - 12t) \\ \Re \left\{ \mathcal{L}_3^1 e^{-x^2-y^2} \right\} &= N_1^1 e^{\pm i\theta} e^{-t^2} H_3(t) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} e^{i\theta} e^{-t^2} (8t^3 - 12t).\end{aligned}$$

**Örnek 2.4.9 (Deans 1983, s. 89)**  $f(x, y) = x^2 y e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonunun  $\Re \left\{ x^2 y e^{-x^2-y^2} \right\}$

Radon dönüşümünü hesaplamak için

$$x^2 y = \text{Im} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{L}_1^1 + \frac{\sqrt{6\pi}}{4} \mathcal{L}_3^3 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mathcal{L}_3^1 \right)$$

eşitliğinden yararlanılacaktır. Gerçekten, (2.27) den

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x + iy), \\ \mathcal{L}_3^3 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{6}} (x + iy)^3, \\ \mathcal{L}_3^1 &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} (x + iy) (2 - x^2 - y^2),\end{aligned}$$

olur ve gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{L}_1^1 + \frac{\sqrt{6\pi}}{4} \mathcal{L}_3^3 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mathcal{L}_3^1 = \frac{x^3 - xy^2}{2} + ix^2y$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Re \left\{ x^2 y e^{-x^2-y^2} \right\} &= \Re \left\{ \text{Im} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{L}_1^1 + \frac{\sqrt{6\pi}}{4} \mathcal{L}_3^3 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mathcal{L}_3^1 \right) e^{-x^2-y^2} \right\} \\ &= \text{Im} \Re \left\{ \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{L}_1^1 + \frac{\sqrt{6\pi}}{4} \mathcal{L}_3^3 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mathcal{L}_3^1 \right) e^{-x^2-y^2} \right\}.\end{aligned}$$

Böylece Örnek 2.4.8'den

$$\begin{aligned}\Re \left\{ x^2 y e^{-x^2-y^2} \right\} &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \text{Im} (e^{i\theta}) e^{-t^2} H_1(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{32} \text{Im} (e^{3i\theta}) e^{-t^2} H_3(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{32} \text{Im} (e^{i\theta}) e^{-t^2} H_3(t) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sin \theta e^{-t^2} H_1(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{32} (\sin 3\theta + \sin \theta) e^{-t^2} H_3(t)\end{aligned}$$

olur. Bu örnek

$$x^k y^l e^{-x^2-y^2}, \mathfrak{N}_{kl}(x, y) e^{-x^2-y^2}, \mathcal{L}_{l+2k}^{\pm l}(x, y) e^{-x^2-y^2}$$

formundaki fonksiyonların Radon dönüşümleri arasındaki olası ilişkiyi ortaya koymaktadır.

#### 2.4.5 Radon Dönüşümünün Türevleri

Radon dönüşümünün türevlerini hesaplamak için Dirac delta fonksiyonunun türevlerini içeren

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y} \delta(x-y)$$

özelliklerinden yararlanılacaktır. Bu formülde  $y$  yerine  $by$  yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial (by)} \delta(x-by) = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial y} \delta(x-by) = -\frac{\partial}{\partial x} \delta(x-by)$$

olur. Benzer şekilde  $n$ -boyutlu durum için

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

olur. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta(t-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) = -x_j \frac{\partial}{\partial t} \delta(t-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})$$

elde edilir. Burada  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$  terimindeki  $\boldsymbol{\xi}$  birim vektör olmak zorunda değildir. Formül gösteriyor ki türevler  $\boldsymbol{\xi}$  nin bileşenlerine göre hesaplanmış ve  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}$  için hesaplanmıştır.

Radon dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R}f}{\partial u_k} &= \left[ \frac{\partial \mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} \right]_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}} \\ &= \left[ \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(t-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int x_k f(\mathbf{x}) \delta(t-\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.29)$$

olur. Sonuç olarak Radon dönüşümünün türev formülü

$$\frac{\partial \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u})}{\partial u_k} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_k} \mathfrak{R}\{f(\mathbf{x})\} \right]_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R}\{x_k f(\mathbf{x})\} \quad (2.30)$$

olur. Daha genel olarak Radon dönüşümünün türevleri  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u})}{\partial u_k} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R} \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})\}(t, \mathbf{u}) \quad (2.31)$$

veya  $\mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial u_k}$  gösterimi ile

$$\left( \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathfrak{R} \{f(\mathbf{x})\}(t, \mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R} \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})\}(t, \mathbf{u})$$

şeklinde ifade edilir. Formül daha yüksek mertebeden türevler için

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u})}{\partial u_l \partial u_k} &= (-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{R} \{x_l x_k f(\mathbf{x})\} \\ \frac{\partial^3 \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u})}{\partial u_l \partial^2 u_k} &= (-1)^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \mathfrak{R} \{x_l x_k^2 f(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilebilir. İkinci mertebeden türevler için genel durum

$$\sum_{k,l=1}^n (a_k b_l) \frac{\partial^2 \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u})}{\partial u_k \partial u_l} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{R} \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x})\}.$$

İki değişkenli bir  $f(x, y)$  fonksiyonu için Radon dönüşümünün türev formülü

$$\frac{\partial^{k+l} \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u})}{\partial u_1^k \partial u_2^l} = \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k+l} \mathfrak{R} \{x^k y^l f(\mathbf{x})\}(t, \mathbf{u}). \quad (2.32)$$

Son olarak  $t$  ye göre Radon dönüşümünün integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}f(t, \mathbf{u}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

şeklinde ifade edilir (Deans 1983, Debnath and Bhatta 2015).

**Örnek 2.4.10 (Deans 1983, s. 92)**  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  olmak üzere

$$\mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2} e^{\frac{-t^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$$

olur.  $|\boldsymbol{\xi}| = 1$  için  $\mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\pi} e^{-t^2}$  olur.

Radon dönüşümünün  $\xi_1$  bileşenine göre türevi alınrsa

$$\frac{\partial \mathfrak{R}f}{\partial \xi_1} = \sqrt{\pi} (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-5/2} \xi_1 (2t^2 - 1) e^{\frac{-t^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$$

olur. Bu ifade  $|\boldsymbol{\xi}| = 1$  noktasında  $\boldsymbol{\xi} = (\cos \theta, \sin \theta)$  iken

$$\frac{\partial \mathfrak{R}f}{\partial \xi_1} = \sqrt{\pi} \cos \theta (2t^2 - 1) e^{-t^2}$$

olur.

Bir sonraki örnekte

$$\frac{\partial \Re f}{\partial \xi_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta H_2(t) e^{-t^2}$$

eşitliğinden yararlanılacaktır.

**Örnek 2.4.11 (Deans 1983, s. 92)**  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  olmak üzere (2.30) dan

$$\frac{\partial \Re f}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial}{\partial t} \Re \left\{ x e^{-x^2-y^2} \right\}.$$

Ayrıca (2.21) den

$$x = \frac{1}{2} H_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathfrak{N}_{10}(x, y)$$

ve (2.22) den

$$\Re \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathfrak{N}_{10}(x, y) e^{-x^2-y^2} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta e^{-t^2} H_1(t)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \Re \left\{ x e^{-x^2-y^2} \right\} &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{-t^2} H_1(t) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta (4t^2 - 2) e^{-t^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \theta H_2(t) e^{-t^2} \end{aligned}$$

olur.

**Örnek 2.4.12 (Deans 1983, s. 93)**  $\mathbb{R}^2$  üzerinde  $f(x, y)$  bir fonksiyon olmak üzere (2.32)

eşitliği

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial \xi_1^k \partial \xi_2^l} \Re f(t, \boldsymbol{\xi}) = \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k+l} \Re \left\{ x^k y^l f(x, y) \right\}$$

şeklinde olduğundan, özel olarak  $k = 1$  ve  $l = 1$  için  $f(x, y) = x e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonunun Radon dönüşümü (2.18) den  $\boldsymbol{\xi}$  birim vektörü için

$$\Re f(t, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\pi} \xi_1 t e^{-t^2}$$

olur.  $\boldsymbol{\xi}$  birim vektör değil ise

$$\Re f(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\sqrt{\pi} \xi_1 t e^{-\frac{t^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)}}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}.$$

$|\xi| = 1$  üzerinde  $\frac{\partial^2 \Re f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$  türevi hesaplandığında

$$\left( \frac{\partial^2 \Re f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_{|\xi|=1} = \xi_1^2 \xi_2 (15t - 20t^3 - 4t^5) e^{-t^2} + \xi_2 (2t^3 - 3t) e^{-t^2}.$$

olur. Aynı sonuç  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Re \left\{ x^2 y e^{-x^2-y^2} \right\} \right)$  türevinin hesaplanmasıyla da elde edilir.

**Örnek 2.4.13 (Deans 2000, s. 30)**  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonu için  $\Re \left\{ e^{-x^2-y^2} \right\} = \sqrt{\pi} e^{-t^2}$  olduğundan

$$\eta = s\xi \text{ ve } s = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2}$$

uygulanırsa

$$\Re f(t, \eta) = \Re f(t, s\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{s} e^{-t^2/s^2}$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial \eta_k} = \frac{\partial s}{\partial \eta_k} \frac{\partial}{\partial s}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re f}{\partial \eta_k} &= \sqrt{\pi} \frac{\eta_k}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s^{-1} e^{-t^2/s^2} \right) \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\eta_k}{s^5} (2t^2 - s^2) e^{-t^2/s^2} \end{aligned}$$

olur.  $\eta = \xi$  noktasında ya da ona denk olarak  $s = 1$  için hesaplama yapılırsa istenilen türev

$$\frac{\partial \Re f}{\partial \xi_k} = \sqrt{\pi} \xi_k (2t^2 - 1) e^{-t^2}$$

olarak elde edilir.

## 2.4.6 Konvolüsyon Teoremi

**Teorem 2.4.2**  $\Re g$ ,  $g$  fonksiyonunun Radon dönüşüm operatörü ve  $\Re h$ ,  $h$  fonksiyonunun Radon dönüşüm operatörü olduğu varsayılınsın.  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  ve  $g$  ile  $h$  nin konvolüsyonu

$$f(\mathbf{x}) = (g * h)(\mathbf{x}) = \int g(\mathbf{y}) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

olmak üzere,

$$\Re f = \Re g * \Re h. \tag{2.33}$$

**İspat.** Konvolüsyon ve Radon dönüşümünün tanımlarıyla

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}) &= \mathfrak{R}\{g * h\}(t, \boldsymbol{\xi}) \\
&= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) \\
&= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int d\mathbf{x} h(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda,  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  değişken değişimi yapılarak

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}f(t, \boldsymbol{\xi}) &= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int d\mathbf{z} h(\mathbf{z}) \delta(t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y} - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}) \\
&= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \mathfrak{R}h(t - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \\
&= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathfrak{R}h(t - s, \boldsymbol{\xi}) \delta(s - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathfrak{R}h(t - s, \boldsymbol{\xi}) \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \delta(s - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}g(s, \boldsymbol{\xi}) \mathfrak{R}h(t - s, \boldsymbol{\xi}) ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\mathfrak{R}f = \mathfrak{R}g * \mathfrak{R}h$$

olur. ■

Buradan görüldüğü üzere  $g * h$  konvolüsyonunun Radon dönüşümü,  $\mathfrak{R}g$  ve  $\mathfrak{R}h$  Radon dönüşümlerinin konvolüsyonuna eşittir;

$$\mathfrak{R}\{g * h\} = \mathfrak{R}g * \mathfrak{R}h.$$





## BÖLÜM 3

### RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ

Bu bölümde Radon dönüşümünün tersine yönelik yöntemler incelenecektir. Öncelikle geri-projeksiyon yöntemi anlatılacak ve örnekler üzerinden incelenecektir. Sonra merkezi kesit teoremi ve merkezi kesit teoreminin genel hali anlatılarak Fourier dönüşümü ile Radon dönüşümü arasındaki ilişki incelenecektir. Son olarak filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemi incelenecek ve Hilbert dönüşümünden bahsedilecektir.

#### 3.1 GERİ-PROJEKSİYON

Radon dönüşümünün tersi için Radon dönüşümü ile integralleri alınan fonksiyonun kendisinin bulunması gerekmektedir ancak bu işlem için verilen bir  $l$  doğrusu ile  $(x, y)$  noktalarının ilişkilendirilmesi gerektiğinden ve  $(x, y)$  noktasından geçen sonsuz sayıda doğru olduğundan bu hesaplamayı yapmak zordur.

$(x_0, y_0)$ , düzlemde bir nokta olmak üzere düzlemdeki pek çok doğru bu noktadan geçmektedir. Her bir  $\theta$  değeri için  $l_{t,\theta}$  doğrusu  $(x_0, y_0)$  dan geçecek şekilde yalnızca bir  $t$  reel sayısı vardır. Özel olarak bu değer  $t = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$  olur ve herhangi bir  $x_0, y_0$  ve  $\theta$  değeri için  $l_{(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta), \theta}$  doğrusu  $(x_0, y_0)$  noktasından geçer (Feeman 2015).

Bir ortamda  $(x_0, y_0)$  noktasında hangi tip madde olursa olsun bu noktadan geçen herhangi bir X-ışınının yoğunluğunu etkiler. Bu ışınların her biri bir  $\theta$  açısı için  $l_{(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta), \theta}$  formundaki bir doğru boyunca ilerler. Yani  $(x_0, y_0)$  noktasında maddenin  $f(x_0, y_0)$  azalma katsayısı her bir  $\theta$  açısı için  $\Re f(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta, \theta)$  Radon dönüşümünün değerleri yardımı ile araştırılır.  $f(x_0, y_0)$  değerini elde etmek için ilk adım  $(x_0, y_0)$  dan geçen tüm doğrular için ortalaması alınan bu eğrisel integrallerin ortalama değerini, yani

$$\frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Re f(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta, \theta) d\theta$$

integralini hesaplamaktır. Bu integral, geri-projeksiyon (back-projection BT) veya geri-projeksiyon dönüşümü olarak adlandırılan bir dönüşümü tanımlamak için kullanılır. Geri-projeksiyon operatörü  $B$ ; (Rowland 1979) tarafından tanımlanmıştır.

**Tanım 3.1.1 (Feeman 2015)**  $h = h(t, \theta)$  kutupsal koordinatlarda tanımlı bir fonksiyon olsun.  $h$  nin  $(x, y)$  noktasındaki geri-projeksiyonu

$$Bh(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} h(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta, \theta) d\theta$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $h$  kutupsal koordinatlarda tanımlı iken  $Bh$  Kartezyen koordinatlarda tanımlanmıştır.

**Örnek 3.1.1 (Feeman 2015, s. 41)**

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & , x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun Radon dönüşümü

$$\mathfrak{R}f(t, \theta) = \int_{l_{t,\theta}} f ds = \begin{cases} 2\sqrt{1-t^2} & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| > 1 \end{cases}$$

olduğundan her  $(x, y)$  noktası ve her  $0 \leq \theta \leq \pi$  için

$$\mathfrak{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) = \begin{cases} 2\sqrt{1 - (x \cos \theta + y \sin \theta)^2} & , |x \cos \theta + y \sin \theta| \leq 1 \\ 0 & , |x \cos \theta + y \sin \theta| > 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Burada  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$  eşitsizliğini sağlayan  $(x, y)$  noktaları ile ilgilenildiğinden ve  $|x \cos \theta + y \sin \theta|$  ifadesi  $\sqrt{x^2 + y^2}$  ile sınırlı olduğundan  $|x \cos \theta + y \sin \theta| \leq 1$  eşitsizliği tüm  $(x, y)$  noktaları için sağlanır.

Geri-projeksiyon uygulanırsa  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$  için

$$\begin{aligned} B\mathfrak{R}f(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathfrak{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} 2\sqrt{1 - (x \cos \theta + y \sin \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

**Örnek 3.1.2** (Feeman 2015, s. 42)

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x^2 + y^2 > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu ve  $-1 \leq t \leq 1$  için

$$\begin{aligned} \Re f(t, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \\ &= \int_{s=-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (1 - \sqrt{t^2 + s^2}) ds \\ &= \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2} t^2 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 - \sqrt{1-t^2}} \right). \end{aligned}$$

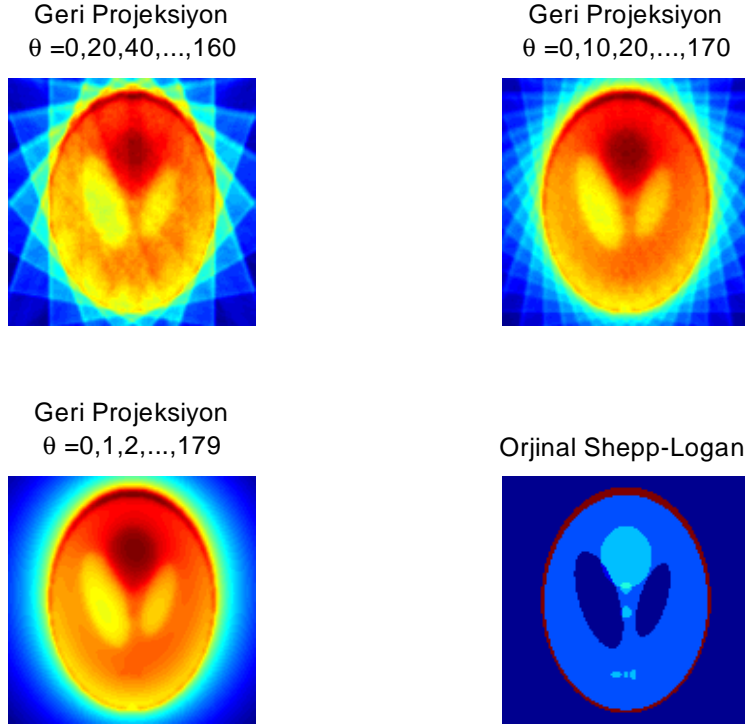
Bir önceki örnekte olduğu gibi  $|x \cos \theta + y \sin \theta| \leq 1$  eşitsizliği birim diskteki  $(x, y)$  noktaları ile ilgilenildiği sürece tüm  $\theta$  değerleri için sağlandığından  $t_\theta = x \cos \theta + y \sin \theta$  için

$$\begin{aligned} B\Re f(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Re f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left\{ \sqrt{1-t_\theta^2} - \frac{1}{2} t_\theta^2 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-t_\theta^2}}{1 - \sqrt{1-t_\theta^2}} \right) \right\} d\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

Geri-projeksiyon yöntemi, fonksiyonun orijinalini geri getirmez; onun bulanık, düzgünleştirilmiş bir versiyonunu geri getirir.

**Örnek 3.1.3** Shepp-Logan Phantom'un (Shepp and Logan 1974) geri-projeksiyon görüntüsü Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 Shepp-Logan Phantom'un geri-projeksiyon görüntüsü.

Şekil 3.1'de görüldüğü üzere geri-projeksiyon resmi, orijinalinin bulanık bir versiyonudur.

**Örnek 3.1.4**  $f(x, y)$  fonksiyonu,

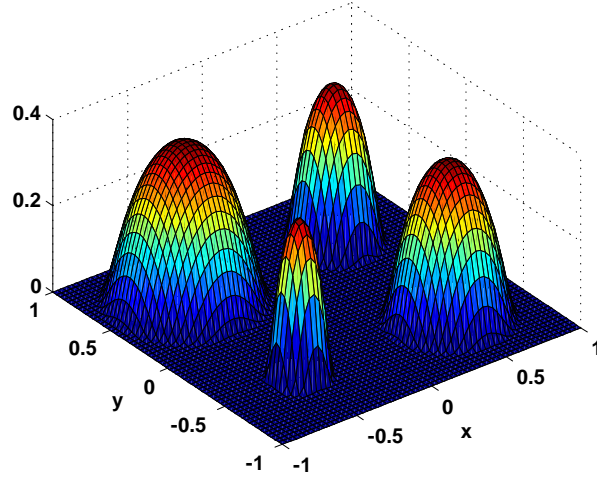
$$C_i(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-r_i^2}{r_i^2 - (x-a_i)^2 - (y-b_i)^2}\right) & , \quad (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 < r_i^2 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere Tablo 3.1'de verilen parametreler için

Tablo 3.1  $C_i(x, y)$  için parametreler

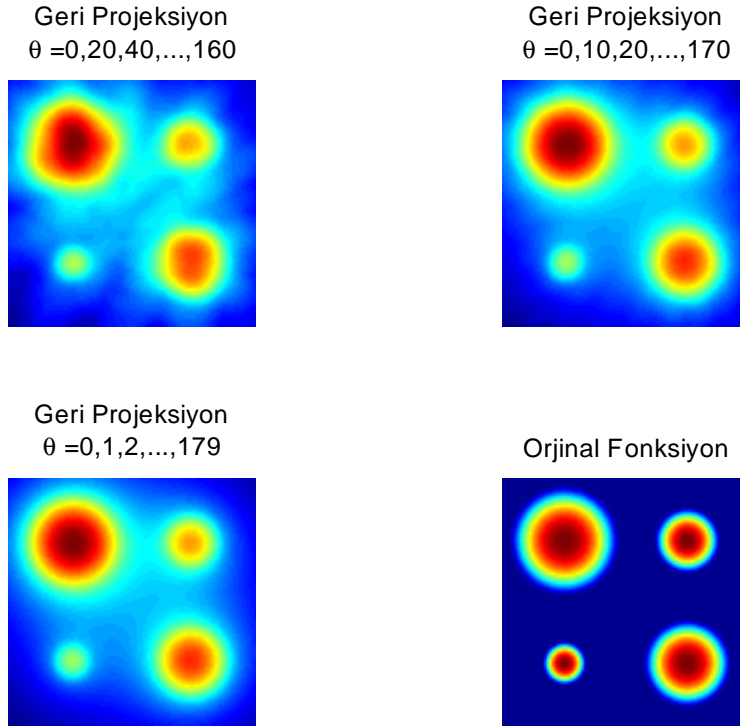
$i$	Merkez $(a_i - b_i)$	Yarıçap $r_i$
1	(0.5, 0.5)	0.2
2	(-0.5, 0.5)	0.4
3	(-0.5, -0.5)	0.1
4	(0.5, -0.5)	0.3

$C_i(x, y)$  fonksiyonlarının toplamı olarak tanımlansın.



Şekil 3.2  $f(x,y)$  fonksiyonunun grafiği (Örnek 3.1.4 için).

Bu düzgün fonksiyon için geri-projeksiyon yaklaşımı Şekil 3.3'te verilmiştir.



Şekil 3.3 Düzgün  $f(x,y)$  fonksiyonu için geri-projeksiyon görüntüsü.

### 3.2 MERKEZİ KESİT TEOREMİ

Fourier dönüşümü ve Radon dönüşümü arasındaki etkileşim merkezi kesit teoremi veya Fourier kesit teoremi olarak ifade edilmektedir.

**Teorem 3.2.1 (Feeman 2015)**  $F$ , 1–boyutlu Fourier dönüşüm operatörü;  $F_2$ , 2–boyutlu Fourier dönüşüm operatörü olmak üzere düzlemde tanımlı bir  $f$  fonksiyonu ve tüm  $S$  ve  $\theta$  reel sayıları için

$$F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = F(\mathfrak{R}f)(S, \theta)$$

olur.

**İspat.** Düzlemde tanımlı  $f$  ve  $s, \theta$  reel sayıları için 2–boyutlu Fourier dönüşümünün tanımı

$$F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (3.1)$$

şeklindedir.

$-\infty < x < \infty$  ve  $-\infty < y < \infty$  üzerinde ayrı ayrı integral almak yerine  $xy$ –düzlemindeki noktalar  $x \cos \theta + y \sin \theta$  değerlerine göre dikkate alınabilir. Özel olarak her bir  $t$  reel sayısı için  $x \cos \theta + y \sin \theta = t$  olacak şekilde düzlemdeki tüm  $(x, y)$  noktaları ele alınabilir. Bu noktalar  $l_{t, \theta}$  doğrusu üzerindeki noktalardır.  $l_{t, \theta}$  üzerindeki her bir  $(x, y)$  noktası için  $s = -x \sin \theta + y \cos \theta$  reel sayısı,  $x = t \cos \theta - s \sin \theta$  ve  $y = t \sin \theta + s \cos \theta$  eşitliklerini sağlar.

$\begin{bmatrix} \partial x / \partial t & \partial x / \partial s \\ \partial y / \partial t & \partial y / \partial s \end{bmatrix}$  matrisinin determinantı 1 e eşit olduğundan değişken değişimi yapılırsa  $ds dt = dx dy$  olur. Bu değişiklikler sonucunda (3.1) in sağ kısmı

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) e^{-iSt} ds dt \quad (3.2)$$

olur. (3.2) integralindeki  $e^{-iSt}$  faktörü  $s$  ye bağımlı değildir. Bu yüzden ilk integralden dışarı çıkarılabilir. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right) e^{-iSt} dt \quad (3.3)$$

olur. (3.3) ün iç integrali,  $(t, \theta)$  noktasında hesaplanan  $f$  fonksiyonunun  $\mathfrak{R}f(t, \theta)$  Radon dönüşümünün tanımı olduğundan (3.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{R}f(t, \theta)) e^{-iSt} dt \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. (3.4) integrali de  $\mathfrak{R}f$  Radon dönüşümünün  $(S, \theta)$  noktasında hesaplanan Fourier dönüşümünün tanımıdır ve (3.4)

$$F(\mathfrak{R}f)(S, \theta)$$

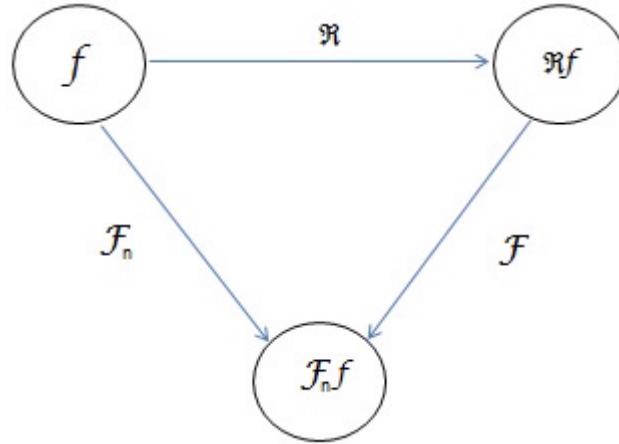
olarak yazılabilir. Böylece  $F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) = F(\mathfrak{R}f)(S, \theta)$  eşitliği gösterilmiş olur. ■

**Teorem;** radyal bir doğru boyunca  $f(x, y)$  nin görüntüsünün 2–boyutlu Fourier dönüşümü ile eğim açısı  $\theta$  olan  $\mathfrak{R}f(t, \theta)$  nin 1–boyutlu Fourier dönüşümünü ilişkilendirir.

### 3.2.1 Merkezi Kesit Teoreminin Genel Hali

**Teorem 3.2.2 (Deans 1983)**  $\mathbb{R}^n$  üzerindeki noktalar  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  şeklinde, Fourier uzayındaki noktalar ise  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  şeklinde tanımlanmış olsun.  $f(\mathbf{x})$  in  $n$ –boyutlu Fourier dönüşümü  $F_n f$  olmak üzere

$$F_n f(\mathbf{k}) = F \mathfrak{R}f(\mathbf{k}).$$

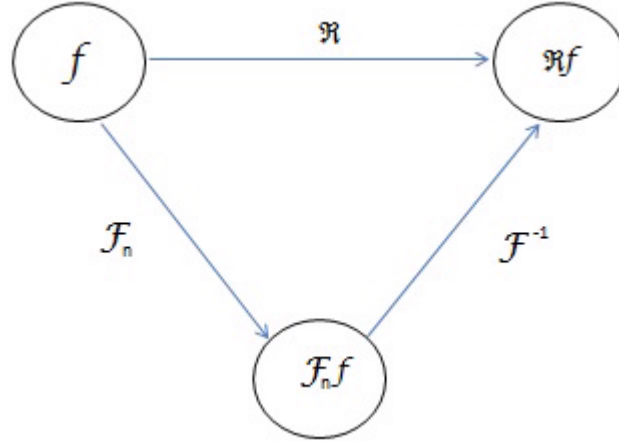


Şekil 3.4 Merkezi kesit teoreminin şematik gösterimi.

Bu teorem yardımıyla  $F_n f$  bilindiğinde radyal yönde ters Fourier dönüşümü uygulayarak  $\mathfrak{R}f$  elde edilebilir ve bu durum sembolik olarak

$$\mathfrak{R}f = F^{-1} F_n f$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.5 Radon dönüşümü için Fourier dönüşümü yönteminin şematik gösterimi.

**Örnek 3.2.1 (Deans 1983, s. 98)**  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  fonksiyonu için  $F_2 f$  dönüşümü hesaplandığında

$$F_2 f(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} e^{-i(ux+vy)} dx dy = \pi e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}$$

olur ve

$$F_2 f(Su, Sv) = \pi e^{-\frac{s^2(u^2+v^2)}{4}}$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına  $F_1^{-1}$  uygulandığında

$$\begin{aligned} F_1^{-1} F_2 f &= \frac{1}{2\pi} \left( \pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2(u^2+v^2)}{4}} e^{iSt} dS \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u^2+v^2}} e^{\left(\frac{-t^2}{u^2+v^2}\right)} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\mathfrak{R}f = F^{-1} F_2 f$  olduğundan

$$\mathfrak{R}f(t; u, v) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u^2+v^2}} e^{\left(\frac{-t^2}{u^2+v^2}\right)}$$

olur.  $u^2 + v^2 = 1$  olmak üzere,  $\xi = (u, v)$  olarak tanımlandığında

$$\mathfrak{R}f(t, \xi) = \sqrt{\pi} e^{-t^2}$$

elde edilir.

**Örnek 3.2.2 (Deans 1983, s. 99)**  $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-\pi(x^2+y^2)}$  fonksiyonun Radon dönüşümünün hesabı, direkt olarak ve Fourier dönüşüm metodu ile aşağıda verilmiştir.



i) Radon dönüşümü tanımı ile:

$$\Re \left\{ x^2 e^{-x^2-y^2} \right\} = \sqrt{\pi} \left( t^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) e^{-t^2},$$

$$\Re \left\{ y^2 e^{-x^2-y^2} \right\} = \sqrt{\pi} \left( t^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) e^{-t^2}$$

olduğu dikkate alındığında

$$\Re \left\{ (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} \right\} = \sqrt{\pi} \left( t^2 + \frac{1}{2} \right) e^{-t^2}$$

olur ve böylece

$$\Re \left\{ (x^2 + y^2) e^{-\pi(x^2+y^2)} \right\} = \left( \frac{1}{2\pi} + t^2 \right) e^{-\pi t^2}$$

elde edilir.

ii) Fourier dönüşüm metodu ile:

$$\begin{aligned} F_2 f(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) e^{-\pi(x^2+y^2)} e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ &= \left[ \frac{1}{\pi} - \frac{u^2 + v^2}{4\pi^2} \right] e^{-\pi \frac{u^2+v^2}{4\pi}} \end{aligned}$$

olup,  $u^2 + v^2 = 1$  üzerinde hesaplanan  $\Re f(Su, Sv)$  yardımıyla  $\xi = (u, v)$  ve  $|\xi| = 1$  olmak üzere

$$F_2 f(s\xi) = \left( \frac{1}{\pi} - \frac{S^2}{4\pi^2} \right) e^{-\frac{S^2}{4\pi}}$$

olur.  $\Re f = F^{-1} F_2 f$  olduğundan

$$\begin{aligned} \Re f(t, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi} - \frac{S^2}{4\pi^2} \right) e^{-\frac{S^2}{4\pi}} e^{iSt} dS \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\pi t^2} - \left( \frac{1}{2\pi} - t^2 \right) e^{-\pi t^2} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} + t^2 \right) e^{-\pi t^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

### 3.3 FİLTRELENMİŞ GERİ-PROJEKSİYON

Geri-projeksiyon yöntemi yeniden yapılandırmada tatmin edici sonuçlar vermediğinden Radon dönüşümünün tersini hesaplamada yetersiz kaldığı yerleri tamamlamak için Filtrelenmiş geri-projeksiyon teoremi geliştirilmiştir. Bu teorem ile uygun bir filtre yardımıyla geri-projeksiyon yönteminden elde edilen görüntünün bulanıklığı ortadan kaldırılır.

**Teorem 3.3.1 (Feeman 2015)**  $f(x, y)$ , düzlemde bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x, y) = \frac{1}{2}B \{F^{-1} [|S| F(\Re f)(S, \theta)]\}(x, y).$$

**İspat.**  $f(x, y)$ , fonksiyonuna 2–boyutlu Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü uygulanırsa fonksiyonun kendisi elde edilir;

$$f(x, y) = F_2^{-1} F_2 f(x, y).$$

Eşitliğin sağ kısmı, Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü tanımları kullanılarak tekrar yazılırsa

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_2 f(X, Y) e^{+i(xX+yY)} dX dY$$

elde edilir.

$X = S \cos \theta$  ve  $Y = S \sin \theta$  olacak şekilde  $(X, Y)$  kartezyen koordinatlarından  $(S, \theta)$  kutupsal koordinatlarına değişken değişimi yapılsın.  $0 \leq \theta \leq \pi$  ve  $-\infty \leq S \leq \infty$  olmak üzere  $dX dY = |S| dS d\theta$  elde edilir. Bunun sonucunda integral

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta$$

haline gelir.  $F_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta)$  çarpanı merkezi kesit teoremine göre  $F(\Re f)(S, \theta)$  ile aynıdır. Bu yüzden integral

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Re f)(S, \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta$$

ile aynıdır. İç integral,  $|S| F(\Re f)(S, \theta)$  fonksiyonunun  $(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$  noktasında hesaplanan ters Fourier dönüşümünün  $2\pi$  katıdır. Yani, yukarıdaki ifade

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F^{-1} [|S| F(\Re f)(S, \theta)](x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

olarak yazılabilir ve geri-projeksiyon tanımı kullanıldığında bu ifade

$$\frac{1}{2}B \{F^{-1} [|S| F(\Re f)(S, \theta)]\}(x, y)$$

ifadesine eşit olacağından, istenilen

$$f(x, y) = \frac{1}{2}B \{F^{-1} [|S| F(\Re f)(S, \theta)]\}(x, y)$$

eşitliği elde edilir. ■

$|S|$  çarpanı olmadığında bu formül Radon dönüşümü için daha önceden elde edilen geri-projeksiyon formülü olur. Uygulamalar açısından bakıldığında, verilerdeki gürültü ve frekans değişiklikleri görüntü rekonstrüksiyonunun bozulabilmesine neden olabilmektedir.  $F(\mathfrak{R}f)(S, \theta)$  dönüşümü  $\mathfrak{R}f(S, \theta)$  nın frekans spektrumu olup,  $|S|$  çarpanı ile frekansın genişliği ölçeklendirilerek daha iyi bir görüntü elde edilmeye çalışılır. Böylece,  $F(\mathfrak{R}f)(S, \theta)$  dönüşümü  $|S|$  çarpanı ile filtrelenmiş olur ve bu nedenle yöntem filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemi olarak adlandırılır (Feeman 2015).

### 3.3.1 Hilbert Dönüşümü

David Hilbert (1862-1943) tarafından ortaya konulan Hilbert dönüşümü, reel eksen üzerinde bir  $g$  fonksiyonu için, Cauchy esas değeri anlamında

$$\begin{aligned} Hg(t) &= \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{t - \omega} d\omega \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t-\omega| > \varepsilon} \frac{g(\omega)}{t - \omega} d\omega \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{g(\omega)}{t - \omega} d\omega + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{g(\omega)}{t - \omega} d\omega \right) \end{aligned}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır.

$$F\left(\frac{df}{dx}\right)(\omega) = i\omega F(f)(\omega)$$

ifadesi Radon dönüşümüne uygulandığında

$$F\left(\frac{\partial(\mathfrak{R}f)(t, \theta)}{\partial t}\right)(S, \theta) = iSF(\mathfrak{R}f)(S, \theta) \quad (3.5)$$

olur.

$$\text{sgn}(S) = \begin{cases} 1, & S > 0 \text{ ise} \\ 0, & S = 0 \text{ ise} \\ -1, & S < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$|S| = S \text{sgn}(S).$$

Böylece (3.5) ten

$$isgn(S).F \left( \frac{\partial (\Re f)(t, \theta)}{\partial t} \right) (S, \theta) = -|S| F(\Re f)(S, \theta).$$

Filtrelenmiş geri-projeksiyon formülü

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}B \left\{ F^{-1} \left[ isgn(S).F \left( \frac{\partial (\Re f)(t, \theta)}{\partial t} \right) (S, \theta) \right] \right\} (x, y) \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade Hilbert dönüşümü yardımıyla daha kısa biçimde ifade edilebilir.

$Hg$  Hilbert dönüşümü, Fourier dönüşümü  $isgnFg$  ifadesine eşit olan fonksiyon olarak tanımlanabilir. Bu durumda, her bir  $t$  reel sayısı için Hilbert dönüşümü

$$Hg(t) = F^{-1} [isgn(\omega)Fg(\omega)](t)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bu tanım yardımıyla (3.6) ifadesi

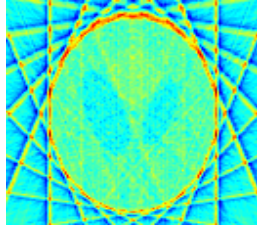
$$f(x, y) = -\frac{1}{2}B \left[ H \left( \frac{\partial (\Re f)(t, \theta)}{\partial t} \right) (S, \theta) \right] (x, y)$$

şeklinde daha sade bir hale gelir. Bu ifade Radon'un Radon dönüşümünün tersi için elde ettiği orijinal formüldür.

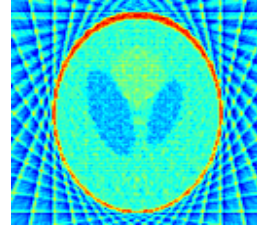
Örnek 3.3.1 ve 3.3.2'de filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemi kullanılarak elde edilen görüntülere yer verilmiştir. Bölüm 3.1'de verilen geri-projeksiyon yöntemi ile elde edilen görüntülerde ortaya çıkan bulanıklığın filtrelenmiş geri-projeksiyon yöntemi kullanıldığında ortadan kalktığı ve daha iyi bir yaklaşım sağlandığı görülmektedir.

**Örnek 3.3.1** *Shepp-Logan Phantom'un filtrelenmiş geri projeksiyon görüntüsü Şekil 3.6'da verilmiştir.*

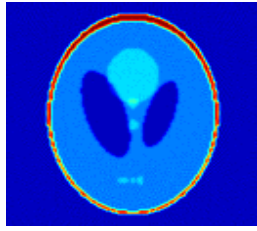
Filtrelenmiş Geri Proj.  
 $\theta = 0, 20, 40, \dots, 160$



Filtrelenmiş Geri Proj.  
 $\theta = 0, 10, 20, \dots, 170$



Filtrelenmiş Geri Proj.  
 $\theta = 0, 1, 2, \dots, 179$



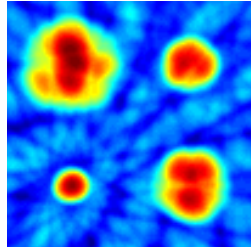
Orjinal Shepp-Logan



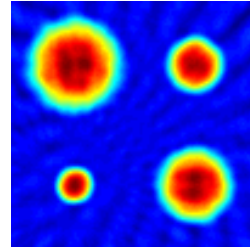
Şekil 3.6 Shepp-Logan Phantom'un filtrelenmiş geri-projeksiyon görüntüsü.

**Örnek 3.3.2** Örnek 3.1.4'te tanımlanan  $f$  fonksiyonu için filtrelenmiş geri-projeksiyon görüntüsü Şekil 3.7'de verilmiştir.

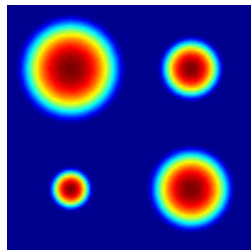
Filtrelenmiş Geri Proj.  
 $\theta = 0, 20, 40, \dots, 160$



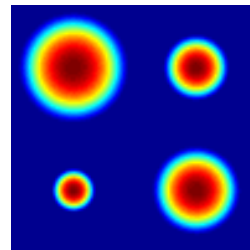
Filtrelenmiş Geri Proj.  
 $\theta = 0, 10, 20, \dots, 170$



Filtrelenmiş Geri Proj.  
 $\theta = 0, 1, 2, \dots, 179$



Orjinal Fonksiyon



Şekil 3.7 Düzgün  $f(x, y)$  fonksiyonu için filtrelenmiş geri-projeksiyon görüntüsü.



## KAYNAKLAR

- Cierniak R** (2011) *X-Ray Computed Tomography in Biomedical Engineering*. Springer, New York.
- Cormack A M** (1963) Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. *Journal of Applied Physics*, 34: 2722-2727.
- Cormack A M** (1964) Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II. *Journal of Applied Physics*, 35: 2908-2912.
- Deans S R** (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Deans S R** (2000) Radon and Abel Transform, *The Transforms and Applications Handbook*. Second Edition, CRC Press LLC, South Florida.
- Debnath L and Bhatta D** (2015) *Integral Transforms and Their Applications*. Third Edition, CRC Press LLC, Edinburg.
- Durrani T S and Bisset D** (1984) The Radon transform and its properties. *Geophysics*, 49 (8): 1180-1187.
- Epstein C L** (2008) *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Second Edition, SIAM, Pennsylvania.
- Erdélyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F G** (1953) *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1, McGraw-Hill, New York.
- Feeman T** (2015) *The Mathematics of Medical Imaging*. Second Edition, Springer, London.
- Helgason S** (1999) *The Radon Transform*. Second Edition, Birkhäuser, Boston.
- Herman G T, Lent A and Rowland S W** (1973) ART: Mathematics and applications. *Journal of Theoretical Biology*, 42 (1): 1-32.
- Herman G T** (1980) *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York.
- Herman G T** (2009) *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*. Second Edition, Springer, New York.
- Hounsfield G N** (1972) A method of apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation. Patent Specification 1283915, *The Patent Office*, London.

## KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Hounsfield G N** (1973) Computerized transverse axial scanning tomography. *British Journal of Radiology*, 46: 1016-1022.
- Jiang M and Wang G** (2003) Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22 (5), 569-579
- Kak A C and Slaney M** (2001) *Principles of computerized tomographic imaging*. Classics in Applied Mathematics, Vol. 33, SIAM, Philadelphia.
- Kuchment P** (2014) *The Radon Transform and Medical Imaging*. CBMS, Vol. 85, SIAM, Philadelphia.
- Natterer F** (1986) *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, New York.
- Radon J** (1917) Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 69: 262-277.
- Rainville E D** (1960) *Special Functions*. Macmillan, New York.
- Rigaud G** (2014) Study of generalized Radon transform and applications in compton scattering tomography. *PhD thesis*, Universität des Saarlandes and Cergy-Pontoise University, Cergy-Pontoise.
- Rowland S W** (1979) Computer implementation of image reconstruction formulas, *In Herman G T (Ed.), Image reconstruction from projections. Implementation and applications*. Vol. 32. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Shepp L A and Logan B F** (1974) The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21: 21-43.
- Szegö G** (1939) Orthogonal polynomials. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI.
- Toft P** (1996) The Radon transform, theory and implementation, *PhD Thesis*, DTU Informatics, Technical University of Denmark, Lyngby.



## ÖZGEÇMİŞ

Gamze SEVİMLİ, 1989'da Zonguldak'ta doğdu; ilk ve orta öğrenimini Zonguldak'ta tamamladıktan sonra 2007 yılında girdiği Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. Halen 2014 yılında girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

### **ADRES BİLGİLERİ**

Adres : Tepebaşı Mah.  
Gözde Küme Evleri  
A/12 Blok D:2 67100  
Merkez/ZONGULDAK  
Tel : (531) 965 46 86  
E-posta : gamzesevimli89@gmail.com