ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEMLERİN TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN KÖSEOĞLU

TEMMUZ 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEMLERİN TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN KÖSEOĞLU

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ

ZONGULDAK

Temmuz 2019

KABUL:

Okan KÖSEOĞLU tarafından hazırlanan "İntegral Denklemlerin Taylor Serisi Yardımıyla Yaklaşık Çözümlerinin Elde Edilmesi" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/07/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN ....
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2019

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Okan KÖSEOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL DENKLEMLERİN TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Okan KÖSEOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ
Temmuz 2019, 57 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde tezde kullanılan temel tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde integral denklemlerin tarihsel gelişimi hakkındaki bilgiler yer almaktadır. Üçüncü bölümde integral denklemlerin sınıflandırılması ele alınmıştır. Dördüncü bölüm Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümlerini ve çözüm algoritmalarını içermektedir. Son bölümde ise değerlendirme ve sonuç kısmı yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklemler, yaklaşık çözümü

Bilim Kodu: 403.06.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

APPROXIMATE SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS VIA TAYLOR SERIES

Okan KÖSEOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIZ
July 2019, 57 pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the basic definitions used in the thesis are given. In the second chapter, some historical information about the development of integral equations is presented. In the third chapter, classification of integral equations is discussed. In the fourth chapter, contains the approximate solution of Volterra and Fredholm integral equations with Taylor series and solution algorithms. In the last chapter, evaluation and conclusion section is presented.

Keywords: Integral equations, approximate solution

Science Code: 403.06.00

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması sürecinde önerilerinden ve bilgilerinden yararlandığım ve desteğini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ' a, çalışmalarımın her aşamasını titizlikle inceleyen ve önerilerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN' e ve kaynak araştırma ve inceleme aşamasında yardımcı olan eşim Pervin KÖSEOĞLU' na teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Gerçel sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Karmaşık sayılar kümesi

$\sum$: Toplam sembolü

$\frac{dy}{dx}$: y'nin x'e göre 1. mertebeden türevi

$\frac{d^n y}{dx^n}$: y'nin x'e göre n. mertebeden türevi

$\frac{\partial^n K(x,t)}{\partial x^n}$: K(x,t) fonksiyonunun x'e göre n. mertebeden kısmi türevi

$\int \ldots (n) \ldots \int$: Katlı integralde katlılık mertebesi (n-mertebe)

BÖLÜM 1

TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.1 (Limit) *$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve a sayısı A kümesinin yığılma noktası olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyor ve $0 < |x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan tüm $x \in A$ değerleri için $|f(x) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $x \longrightarrow a$ iken $f(x)$'in limiti L'dir (veya f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L'dir) denir ve sembolik olarak*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir (Caferov 1999).

Tanım 1.2 ***(Süreklilik)*** *f, (a, b) açık aralığında tanımlı ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ mevcut ve*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ise f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Şu halde f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması demek her $\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunması demektir (Bayraktar 2010).

Tanım 1.3 ***(Düzgün Süreklilik)*** *$A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Buna göre f fonksiyonunun A üzerinde düzgün sürekli olarak isimlendirilmesi için gerek ve yeter şart $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall\ x, a \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olmasıdır (Balcı 2018).*

Tanım 1.4 ***(Türev)*** *$A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ ve a, A'nın bir yığılma noktası olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun a noktasındaki türevi denir. f fonksiyonunun a noktasındaki türevi $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$, $Df(a)$ sembollerinden biri ile gösterilir (Balcı 2018).

Tanım 1.5 ***(İntegral)*** *Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x)dx$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve*

$$\int f(x)dx = F(x)$$

şeklinde gösterilir. Buna göre

$$F(x) = \int f(x)dx \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

olacaktır ve diğer taraftan her sabitin türevi sıfır olduğundan

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = f(x)$$

yazılabilirki bu da $f(x)$'in integralinin $F(x) + C$ şeklinde de yazılabileceğini gösterir. Tamamen keyfi olan bu C sabitine integrasyon sabiti denir. O halde yukarıdaki ifade

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

şeklinde yazılabilir (Balcı 2018).

Tanım 1.6 ***(Lineer Uzay)*** *$(K, +, .)$ bir cisim ve V, üzerinde $* : V \times V \longrightarrow V$ iç ve $\circ : K \times V \longrightarrow V$ dış işlemleri tanımlanmış bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V'ye K cismi üzerinde bir lineer uzay denir.*

V1) $\forall\, x, y, z \in V$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ dir.

V2) $\forall\, x \in V$ için $x * \theta = x = \theta * x$ olacak şekilde $\exists \theta \in V$ vardır.

V3) $\forall\, x \in V$ için $x * x' = \theta = x' * x$ olacak şekilde $\exists x' \in V$ vardır.

V4) $\forall\, x, y \in V$ için $x * y = y * x$ dir.

V5) $\forall\, a \in K$ ve $\forall\, x, y \in V$ için $a \circ (x * y) = (a \circ x) * (a \circ y)$ dir.

V6) $\forall\, a, b \in K$ ve $\forall\, x \in V$ için $(a * b) \circ x = (a \circ x) * (b \circ x)$ dir.

V7) $\forall\, a, b \in K$ ve $\forall\, x \in V$ için $(a \circ b) \circ x = a \circ (b \circ x)$ dir.

V8) $\forall\, x \in V$ için $1 \circ x = x$ dir (Çiftçi 2015).

Tanım 1.7 ***(Diferansiyel Denklem)*** *Bir ya da daha çok bağlı değişkenin, bir ya da daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini ya da diferansiyellerini bulunduran denklemlere diferansiyel denklem denir (Ross 1984).*

Tanım 1.8 ***(Matris)*** $m, n \in \mathbb{N}$ *ve* $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ *olmak üzere bütün* (i, j) *çiftlerinin cümlesi* $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *olsun. Bir* K *cisminde değerler alan* A*'daki bir*

$f : A \longrightarrow K$

fonksiyonunu

$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$

biçiminde tanımlayalım. $a_{ij} \in K$ *değerlerini*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ veya } A = [a_{ij}]$$

biçiminde düzenleyelim. K*'dan seçilen bu cins* mn *tane elemanın* A *tablosuna* K *üzerinde* $m \times n$ *matris denir.* $\forall\ (i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ *çiftine karşılık gelen* a_{ij} *elemanına* A *matrisinin* (i, j) *bileşeni denir (Hacısalihoğlu 2010).*

Tanım 1.9 ***(Determinant)*** n *satır ve* n *sütundan meydana gelmiş*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tablosunu gözönüne alalım. Tablonun herhangi bir elemanını a_{ij} *ile gösterelim. Bu yazılıştaki* i *indisi satır,* j *indisi sütun numaralarını göstermektedir. Burada* i *ve* j*, 1'den n'ye kadar değerler alabilirler. Bu tablonun her satır ve sütunundan bir ve yalnız bir eleman almak suretiyle meydana getirilen*

$(-1)^{I_1+I_2}\ \ a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}...a_{i_nj_n}$

çarpımı yazılmış olsun. Burada I_1*,* i *indislerinin inversiyon sayısını,* I_2 *ise* j *indislerinin inversiyon sayısını göstermektedirler. Bu çarpımın işareti çarpanların sırasına* *bağlı değildir. İndisler sıra değiştirse bile, ancak permütasyon sınıfları değişeceğinden işaret değişmeyecektir. Dolayısıyla yukarıdaki tablodan teşkil edilecek çarpımların sayısı* $n!$ *tane olup, bunların yarısı pozitif, yarısı negatif işaret taşıyacaktır. Yukarıdaki tablodan elde edilen* $n!$ *tane işaretli çarpımların cebirsel toplamlarına yukarıdaki tablonun determinantı denir. Buna göre*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{I_1+I_2} \; a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} ... a_{i_n j_n}$$

yazılabilir (Özdemir ve Aksoy 1971).

Tanım 1.10 ***(Homojen Diferansiyel Denklem)*** *Eğer*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

formundaki bir diferansiyel denklemde f *fonksiyonu sadece* x*'e veya sadece* y*'ye bağlı değilde onların* $\frac{x}{y}$ *veya* $\frac{y}{x}$ *oranlarına bağlı ise diferansiyel denkleme homojendir denir. Kısaca* $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ *formunda gösterilir (Cesur 2004).*

Tanım 1.11 ***(Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi)*** $[a, b]$ *aralığında tanımlı, bu aralıkta özdeş olarak sıfır olmayan ve Riemann anlamında integrale sahip fonksiyonlardan meydana gelen* $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$ *kümesini gözönüne alalım. Eğer*

$$\int_a^b f_i(x)\, f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & , \; i \neq j \\ k_i^2 (\neq 0) & , \; i = j \end{cases}$$

ise, böyle bir kümeye $[a, b]$ *aralığında ortogonal fonksiyon kümesi veya ortogonal fonksiyon sistemi denir. Bu ortogonal fonksiyon sisteminden elde edilen*

$$\left\{ u_1(x) = \frac{f_1(x)}{k_1}, \; u_2(x) = \frac{f_2(x)}{k_2}, \; ... \; , \; u_n(x) = \frac{f_n(x)}{k_n}, \; ... \right\}$$

kümesine $[a, b]$ *aralığı üzerinde bir ortonormal fonksiyon sistemi adı verilir (Özdeğer ve Özdeğer 1994).*

Tanım 1.12 ***(Matris Denklem Sistemleri)*** *m tane denklem ve n tane bilinmeyenden oluşan*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

lineer denklem sistemini gözönüne alalım. $x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenleri, a'lar ve b'ler sabitleri ifade etmektedir. Lineer denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlamış katsayılar matrisi A, bilinmeyenler sütun matrisi X ve sabitler sütun matrisi B olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$
$$A.X = B$$

şeklinde gösterilir (Eren ve Razbonyalı 2006).

Tanım 1.13 ***(Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri)*** *Bir adi diferansiyel denklemin belli koşullara göre çözümleri arandığında, eğer ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme başlangıç değer problemi, eğer koşullar en az farklı iki noktada tanımlanmışsa probleme sınır değer problemi denir (Sezer ve Daşçıoğlu 2014).*

Tanım 1.14 ***(Leibniz Formülü)*** *$f(x,t)$ fonksiyonu $\{(x,t) : a \le x \le b, c \le t \le d\}$ dikdörtgenini kapsayan bir bölgede sürekli ve sürekli bir $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu taktirde $c \le t \le d$ için*

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx$$

olur. f fonksiyonu yukarıdaki şartı sağlayan bir fonksiyon, $a\left(t\right)$ ve $b\left(t\right)$ de $\left(c,d\right)$ aralığında sürekli türeve sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

olur (Balcı 2010).

Tanım 1.15 ***(Taylor Serisi)*** *f fonksiyonu, a noktasını içeren bir açık aralıktaki x değerleri için*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ ... \ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \ ...$$

olur. Bu ifadeye, f fonksiyonunun a noktasındaki Taylor serisi veya Taylor açılımı denir. Eğer $a = 0$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ifadesine de Mclaurin serisi veya açılımı adı verilir (Dönmez 2005).

BÖLÜM 2

İNTEGRAL DENKLEMLERE GİRİŞ

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemlere integral denklem denir. Farklı türlerde integral denklemler mevcut olduğundan tamamını kapsayacak şekilde bir tanımlama yapmamız olanaksızdır. Bu nedenle integral denklemler konusunun araştırılması geniş ve dağınık bir durum sergileyecektir.

İlk integral denkleme, 1823 yılında İtalyan Matematikçi Abel tarafından "Tautochrone" adını verdiği problemi incelediği sırada rastladığı bilinmektedir. Sonraki yıllarda ise Volterra, Fredholm ve Hilbert tarafından integral denklemler konusunda geniş araştırılmaların yapıldığı görülmektedir. İntegral denklem deyimi ise D. B. Reymond tarafından 1888 yılında yayınlanan bir çalışmada ilk kez önerildiği bilinmektedir (Bocher 1926).

Fizik ve mühendislik bölümlerinin daha çok uygulama alanlarında bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olduğu denklemler mevcuttur. Bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerinden oluşan denklemler diferansiyel denklemler olarak bilinirler. Bilindiği gibi limit, süreklilik ve türev noktasal kavramlardır. Ayrıca türev, limitin bir uygulaması olduğundan ve limit hesabı ise bir nokta ve bu noktanın yakın komşuluğunda dikkate alındığından diferansiyel denklemler yerel denklemlerdir diyebiliriz. İntegral hesaplamada eğrisel yaklaşım söz konusu olduğundan integral denklemlerde bütün uzay üzerinden integral alınması gerekecektir ve bu yüzden integral denklemlerin evrensel olduğunu söyleyebiliriz. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. Buradan anlaşılacağı üzere integral denklemlerin çözümü diferansiyel denklemlerin çözümüne nazaran daha zordur.

Diferansiyel denklemler tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmezler ve onlara ek şartların verilmesi gerekir. İntegral denklemler ise bir problemin tanımını tek başlarına verebilirler ve ek şartlara gerek duyulmaz. Ancak sınır şartlarının varlığı uzayın tamamında istenilen bölgeye etki edeceğinden diferansiyel denklemler ile integral denklemler arasında bir ilişki söz konusu olacaktır. Buradan hareketle diferansiyel denklemlerin integral denklem olarak da ifade edilebilecekleri sonucunu elde ederiz (Bayın 2004).

BÖLÜM 3

İNTEGRAL DENKLEMLER VE TEMEL KAVRAMLAR

3.1 İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

f , g ve K fonksiyonları bilinen fonksiyonlar, u bilinmeyen fonksiyon, λ sıfırdan farklı reel veya kompleks parametre olmak üzere, üst sınır sabit veya değişken olduğunda integral denklem en genel haliyle

$$g(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde gösterilir. Burada $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olarak tanımlanır ve bu eşitlikte fonksiyonların özel halleri için integral denklemlerin sınıflandırıldığını göreceğiz (Rahman 2007)

3.1.1 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler öncelikle lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki ana başlıkta incelenirler. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklem için integral operatörünün $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre lineer olması durumda integral denkleme lineer integral denklem denir.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt$$

integral denkleminde, diferansiyel denklemlerde olduğu gibi $n > 1$ olduğunda lineer olma durumu bozulur (Rahman 2007).

3.1.2 Tekil ve Tekil Olmayan Lineer İntegral Denklemler

Bu tip sınıflandırmada integral denklemde bulunan $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun süreklilik durumu önemlidir. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $a \leq x, t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem tekil olmayan, sürekli değil ise tekil integral denklem adını alır.

Örneğin, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha}$$

şeklindeki bir integral denklemde $\frac{1}{(x-t)^\alpha}$ çekirdek fonksiyonu $x = t$ noktasında süreksiz olduğundan bu denklem tekil bir integral denklemdir. Ayrıca

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt$$

örneğinde olduğu gibi integral sınırlarından en az birinin sonsuz olması durumunda da denklem tekil bir integral denklem olacaktır (Rahman 2007).

3.1.3 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

Yapılarına göre integral denklemler üç sınıfa ayrılırlar. $f(x)$ bilinen, $u(x)$ bilinmeyen ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denkleme *I.cins integral denklem* denir. Burada $g(x)$ bilinen fonksiyon olup bilinmeyen u fonksiyonu sadece integral içinde mevcuttur.

Örneğin

$$x^3 + 1 = \int_{-1}^{1} (x-t)\, u(t)dt$$

denklemi I. cins integral denklemdir.

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki integral denklemler ise *II. cins integral denklemler* olarak adlandırılır. Burada ise bilinmeyen u fonksiyonu hem integralin içinde hem de dışındadır.

Örneğin

$$u(x) = 1 + x^2 + \int_1^2 \sin(x+t)u(t)dt$$

denklemi II. cins integral denklemdir.

$$g(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

şeklindeki integral denklemlere ise *III. cins integral denklemler* denir. Burada $f(x)$ ile $g(x)$ bilinen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyondur.

Örneğin

$$x^2u(x) = 1 - e^{-x} + \int_{-1}^1 xt^2u(t)dt$$

denklemi III. cins integral denklemdir.

Burada I. ve II. cins integral denklemlerin III. cins integral denklemlerin özel bir hali olduğu görülür. Yani III. cins olan (3.1) denklemi $g(x) \equiv 0$ ise I. cins, $g(x) \equiv 1$ ise II. cins bir integral denklemdir (Shoukralla 2018).

3.1.4 Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun homojen olup olmadığına bakılarak da sınıflandırılırlar.

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemi için $f(x) \neq 0$ ise integral denklem homojen olmayan bir integral denklem olacaktır. $f(x) = 0$ olması durumunda ise homojen integral denklem elde edilir (Kotsireas 2008).

3.1.5 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerdeki integral sınırlarının değişken veya sabit olması durumuna göre denklemler farklı sınıflandırılırlar. İntegral sınırlarından birinde değişken bulunuyorsa bu durumda bu integral denklem *Volterra integral denklemi*, eğer integral sınırları sabit ise bu integral denklem *Fredholm integral denklemi* olarak tanımlanır.

$$g(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlerde integral sınırlarından biri değişken olduğundan bu denklemler Volterra integral denklemleri olup

$$g(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlerde ise sınırlar sabit olduğundan bu denklemler Fredholm integral denklemleridir (Shoukralla 2018).

3.1.6 İntegro-Diferansiyel Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bulunduğu integral denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir. Örneğin, $u(x)$'in birinci mertebeden türevinin bulunduğu

$$u'(x) = F\{x, u(x)\} + \int_0^x K(x,t,u(t),u'(t))dt$$

şeklindeki bir denklem integro-diferansiyel denklemdir. Başka bir örneği de, n. mertebeden türevinin bulunduğu

$$u^{(n)}(x) = F\{x, u(x), u'(x), ..., u^{(n-1)}(x)\} + \int_0^x K\{x,t,u(t),u'(t),...,u^{(n)}(t)\}dt$$

şeklindeki denklemdir (Aksoy 1983).

3.2 İNTEGRAL DENKLEMLERİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE İLİŞKİSİ

Başlangıç şartlarıyla verilmiş bir diferansiyel denklem, Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bir sınır değer problemi ise Fredholm integral denklemine dönüştürülebilir.

3.2.1 Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi

$u(0) = u_0$ başlangıç koşulu için $\frac{du(t)}{dt} = F(t, u(t))$ diferansiyel denklemi t'ye göre integre edilirse

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(s, u(s))ds$$

ifadesi elde edilir ve bu Volterra tipi bir integral denklemdir. Benzer olarak $u(0) = 1$ ve $u'(0) = 0$ başlangıç koşulları için

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = \lambda u(t) \quad , \quad t > 0$$

diferansiyel denklemi t'ye göre integre edilip daha sonra iki katlı integrali tek katlı integrale indirgeyerek ve başlangıç koşullarını kullanarak

$$u(t) = 1 + \lambda \int_0^t (t - \mu)u(\mu)d\mu$$

denklemi elde edilmiş olur. Böylece, ikinci mertebeden diferansiyel denklem $K(t - \mu)$ çekirdeği ile Volterra integral denklemine dönüşmüş olur. Ayrıca sayıları n tane olan

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

başlangıç koşulları için

$$f(x) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ \ldots\ + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y \tag{3.2}$$

lineer diferansiyel denklemini bir integral denkleme dönüştürelim:

$$u(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

dönüşümü yapılıp türevin mertebesi bir mertebe düşürülürse

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = u(x),$$

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \int_0^x u(x)dx,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x)dx + C_{n-1}$$

elde edilir. Benzer şekilde integral almaya devam edilirse

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = \int_0^x \left[\int_0^x u(x)dx + C_{n-1}\right] dx,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x\int_0^x u(x)dxdx + C_{n-1}\int_0^x dx + C_{n-2},$$

$$\frac{d^{\,n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x\int_0^x u(x)dxdx + C_{n-1}x + C_{n-2}$$

elde edilir ve bu şekilde devam edilirse

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx + \frac{1}{2!}C_{n-1}x^2 + C_{n-2}x + C_{n-3},$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \dots(n-1)\dots\int_0^x u(x)dx \dots dx + \frac{1}{(n-2)!}C_{n-1}x^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!}C_{n-2}x^{n-3} + \dots + C_1$$

bulunur. Son kez integral alınırsa

$$y = \int_0^x \dots(n)\dots\int_0^x u(x)dx \dots dx + \frac{1}{(n-1)!}C_{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}C_{n-2}x^{n-2} + \dots + C_1x + C_0$$

bulunur. Çok katlı integrallerle işlem yapıldığında kolaylık olması açısından

$$\int \dots(n)\dots\int$$

şeklindeki notasyon kullanılabilir.

Bulduğumuz bu ifadeleri (3.2) denkleminde yerine yazarsak

$$f(x) = u(x) + a_1(x)\int_0^x u(x)dx + C_{n-1}a_1(x) + a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx + C_{n-1}xa_2(x)$$

$$+C_{n-2}a_2(x) + a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx + \frac{1}{2!}C_{n-1}x^2a_3(x) + C_{n-2}xa_3(x)$$

$$+C_{n-3}a_3(x) + \ \dots\ + a_{n-1}(x)\int_0^x \dots(n-1)\dots\int_0^x u(x)dx \dots dx$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}C_{n-1}x^{n-2}a_{n-1}(x) + \frac{1}{(n-3)!}C_{n-2}x^{n-3}a_{n-1}(x)$$

$$+ \ldots + C_1 a_{n-1}(x) + a_n(x) \int\limits_0^x \ldots(n)\ldots \int\limits_0^x u(x)dx \ldots dx$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1} x^{n-1} a_n(x) + \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2} x^{n-2} a_n(x) + \ldots + C_1 x a_n(x) + C_0 a_n(x)$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$f(x) - C_{n-1} a_1(x) - C_{n-1} x a_2(x) - \ \ldots \ - \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1} x^{n-1} a_n(x) - \ \ldots \ - C_{n-2} a_2(x)$$

$$-C_{n-2} x a_3(x) - \ \ldots - \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2} x^{n-2} a_n(x) - \ \ldots \ - C_1 x a_{n-1}(x) - C_1 a_n(x) - C_0 a_n(x)$$

$$= u(x) + a_1(x) \int\limits_0^x u(x)dx + a_2(x) \int\limits_0^x \int\limits_0^x u(x)dxdx + a_3(x) \int\limits_0^x \int\limits_0^x \int\limits_0^x u(x)dxdxdx$$

$$+ \ \ldots \ + a_{n-1}(x) \int\limits_0^x \ldots(n-1)\ldots \int\limits_0^x u(x)dx \ \ldots \ dx + a_n(x) \int\limits_0^x \ldots(n)\ldots \int\limits_0^x u(x)dx \ \ldots \ dx$$

şeklinde düzenlenirse eşitliğin sol tarafı x'e bağlı bir fonksiyon olup bu fonksiyon da $F(x)$ ile gösterirse

$$f_{n-1}(x) = a_1(x) + x a_2(x) + \frac{x^2}{2!} a_3(x) + \ \ldots \ + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} a_n(x),$$

$$f_{n-2}(x) = a_2(x) + x a_3(x) + \ \ldots \ + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} a_n(x),$$

$$\vdots$$

$$f_1(x) = a_{n-1}(x) + a_n(x),$$

$$f_0(x) = a_n(x)$$

olmak üzere

$$F(x) = f(x) - [C_{n-1} f_{n-1}(x) + C_{n-2} f_{n-2}(x) + \ \ldots \ + C_1 f_1(x) + C_0 f_0(x)]$$

olduğu görülür. Eşitliğin sağ tarafı ise

$$\int\limits_0^x \ldots(n)\ldots \int\limits_0^x u(t)dt \ \ldots \ dt = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt$$

şeklinde tek katlı integral olarak gösterilebilir (Aksoy 1983).

Teorem 3.1

$$\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(t)dt \; ... \; dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt \tag{3.3}$$

bağıntısı yardımıyla çok katlı bir integral, tek katlı integral olarak ifade edilebilir.

İspat: (3.3) bağıntısını aşağıdaki gibi düzenleyerek ve eşitliğin sağ tarafını I_n ile gösterip daha geniş incelenmiş olması açısından integralin alt sınırı a alınırsa

$$(n-1)! \int_a^x ...(n)... \int_a^x u(t)dt \; ... \; dt = \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t)dt = I_n(x) \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır. Burada n pozitif tamsayı ve a bir sabittir. Leibniz formülünden yararlanarak

$$F(x,t) = (x-t)^{n-1} u(t)$$

şeklinde tanımlayıp türev alınırsa

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) \int_a^x (x-t)^{n-2} u(t)dt \; + \left[(x-t)^{n-1} u(t) \right] \Big|_{t=x}$$

bulunur. Böylece $n > 0$ için

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) I_{n-1} \tag{3.5}$$

olur. Özel olarak $n = 1$ ise, (3.4)'ten

$$\frac{dI_1}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x u(t)dt = u(x) \tag{3.6}$$

bulunur. (3.5)'te türev almaya devam edilirse

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 I_n}{dx^2} &= (n-1)(n-2) I_{n-2}, \\ \frac{d^3 I_n}{dx^3} &= (n-1)(n-2)(n-3) I_{n-3}, \\ &\vdots \\ \frac{d^k I_n}{dx^k} &= (n-1)(n-2)...(n-k) I_{n-k} \quad , \quad n > k, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} &= (n-1)(n-2)...2.1.I_1 = (n-1)! I_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

ifadeleri elde edilip n. mertebeden türev

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)!\frac{dI_n}{dx} = (n-1)!u(x)$$

olarak (3.6)'dan kolayca görülür. $n \geq 1$ iken $I_n(a) = 0$ olduğuna dikkat edilirse, (3.7) bağıntısından, $I_n(x)$'in ve onun ilk (n-1) adet türevinin $x = a$ için sağlandığı sonucuna varılır. $I_n(a) = 0$ olduğu (3.4) bağıntısından kolayca elde edilebilir.

Şimdi, yukarıdaki bağıntılardan geriye doğru hareket edilerek integral alma işlemleri yapılırsa (3.6)'dan

$$I_1(x) = \int_a^x u(t)dt$$

elde edilir. Ayrıca

$$I_2(x) = \int_a^x I_2(x_2)dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} u(t_1)dt_1dt_2$$

yazılabilir. Burada x_1, x_2 birer parametredir. İşlemlere bu şekilde devam edilirse

$$I_n(x) = (n-1)!\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} ... \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(t_1)\, dt_1dt_2dt_3...dt_{n-1}dt_n$$

bulunur. İfadeyi düzenlemek için, her iki tarafı $(n-1)!$ ile bölüp, I_n yerine (3.4) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} ... \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(t_1)\, dt_1dt_2dt_3...dt_{n-1}dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}u(t)dt$$

elde edilir. Burada, $x = x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$ kabul edilirse, gösterilmek istenilen

$$\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(t)dt\ ...\ dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt$$

bağıntısı bulunmuş olur. Buna göre

$$u(x) + a_1(x)\int_0^x u(t)dt + a_2(x)\int_0^x \int_0^x u(t)dtdt + ... + a_n(x)\int_0^x ...(n)... \int_0^x u(t)dt...dt = F(x)$$

ifadesi (3.3) yardımıyla

$$u(x) + a_1(x)\int_0^x u(t)dt + a_2(x)\int_0^x (x-t)\, u(t)dt + ... + a_n(x)\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt = F(x)$$

şeklinde ifade edilecektir. Bu ise belirli integral özelliklerinden

$$u(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3 \frac{(x-t)^2}{2!} + ... + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(t)dt = F(x)$$

olarak yazılabilir. Burada köşeli parantez içindeki ifade $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olarak ele alınırsa

$$K(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3 \frac{(x-t)^2}{2!} + ... + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olur. Bu fonksiyon yerine yazılırsa

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

şeklinde II. cins Volterra integral denklemi elde edilir. Böylece

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x)$$

diferansiyel denklemi bir integral denkleme dönüşmüş olur (Aksoy 1983).

Örnek 3.1 $y''' - 2y'' + y = x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

başlangıç değer problemini Volterra integral denklemine dönüştürelim:

$$y''' = u(x) \tag{3.8}$$

olsun. Eşitliğin her iki tarafını 0'dan x'e integre edip, $y''(0) = 1$ olduğu kullanılırsa

$$y''(x) - y''(0) = \int_0^x u(t)dt,$$

$$y''(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt \tag{3.9}$$

elde edilir. Benzer olarak, (3.9) eşitliğinin her iki tarafı 0'dan x'e integre edilip $y'(0) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$y'(x) - y'(0) = x + \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt$$

olur ve buradan

$$y'(x) = x + \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt \tag{3.10}$$

bulunur. Son olarak, (3.10) eşitliğinin her iki tarafı 0'dan x'e integre edilip

$$y(0) = 1 \text{ ile } \int_0^x\int_0^x\int_0^x u(t)dtdtdt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$$

olduğu kullanılarak integral alınırsa

$$y(x) - y(0) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x\int_0^x\int_0^x u(t)dtdtdt$$

olur ve buradan

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.11) eşitlikleri verilen başlangıç koşullarında yerine yazılırsa

$$u(x) - 2\left(1 + \int_0^x u(t)dt\right) + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt = x$$

olur ve sonuç olarak

$$u(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \left(2 - \frac{(x-t)^2}{2}\right) u(t)dt$$

Volterra integral denklemi elde edilir.

Örnek 3.2 $y'' + 4y = \sin x,\ 0 < x < 1,\ y(0) = y(1) = 0$

sınır değer problemini Fredholm integral denklemine dönüştürelim:

$$y''(x) = u(x) \tag{3.12}$$

olsun. (3.12) eşitliğinin her iki tarafını 0*'dan* x*'e integre edersek*

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt \Rightarrow y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t)dt,$$

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinin her iki tarafı, Leibniz kuralı da kullanılarak 0*'dan* x*'e integre edilirse*

$$\int_0^x y'(t)dt = \int_0^x y'(0)dt + \int_0^x\int_0^x u(t)dtdt,$$

$$y(x) - y(0) = xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt,$$

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt,$$

$$y(x) = xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{3.14}$$

bulunur. $y'(0)$ değerini bulmak için sınır koşulları dikkate alınarak (3.14) eşitliğinde $x = 1$ yazılırsa

$$y(1) = 0 = y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)dt,$$

$$y'(0) = -\int_0^1 (1-t)u(t)dt \tag{3.15}$$

sonucuna ulaşılır. (3.15) eşitliği (3.14)'te yerine yazılırsa

$$y(x) = -\int_0^1 x(1-t)u(t)dt \; - \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{3.16}$$

bulunur. (3.12) ve (3.16) ifadeleri verilen sınır değer probleminde dikkate alınırsa

$$u(x) - 4\int_0^1 x(1-t)u(t)dt \; + 4\int_0^x (x-t)u(t)dt \; = \sin x,$$

$$u(x) - 4\int_0^x x(1-t)u(t)dt \; - 4\int_x^1 x(1-t)u(t)dt \; + 4\int_0^x (x-t)u(t)dt \; = \sin x,$$

$$u(x) - 4\int_0^x t(1-x)u(t)dt - 4\int_x^1 x(1-t)u(t)dt \; = \sin x,$$

$$u(x) = \sin x + \int_0^x 4t(1-x)u(t)dt + \int_0^1 4x(1-t)u(t)dt$$

elde edilir. Eğer

$$f(x) = \sin x \quad ve \;\; K(x,t) = \begin{cases} 4t(1-x)\;, & 0 \le t \le x \\ 4x(1-t)\;, & x \le t \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)$$

Fredholm integral denklemi bulunur.

3.2.2 İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi

Bir diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülebildiği gibi bir integral denklem de diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu işlem için integral işareti altında türev işlemi olan Leibniz formülü kullanılır.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t)dt = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt + F\left(x,\beta(x)\right)\frac{d\beta(x)}{dx} - F\left(x,\alpha(x)\right)\frac{d\alpha(x)}{dx}$$

olup, burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ sabit değerler ise bu durumda türevleri 0 olacağından

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t)dt = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt$$

şeklinde yazılır.

Örnek 3.3 $u(x) - \int\limits_0^x u(t)\tan t dt = \sin x$
integral denklemini $u(0) = 0$ başlangıç şartı için diferansiyel denkleme dönüştürelim: Her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\int\limits_0^x u(t)\tan t dt = \frac{d(\sin x)}{dx},$$

$$u'(x) - \frac{d}{dx}\int\limits_0^x u(t)\tan t dt = \cos x$$

elde edilir. Son ifadeye Leibniz formülü uygulandığında

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x u(t)\tan t dt = \int\limits_0^x 0 dt + u(x)\tan x = u(x)\tan x$$

olur ve sonucunda

$$u'(x) - u(x)\tan x = \cos x$$

şeklinde bir diferansiyel denklem oluşur.

BÖLÜM 4

İNTEGRAL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

4.1 FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Taylor serisi yardımıyla elde edilen yaklaşık çözüm yöntemi, eşitlikte her iki tarafın yeteri kadar türevi alınarak, sonucunda oluşan denklemin bilinmeyen fonksiyonunun Taylor seri açılımında yerine konulması ile elde edilecek çözüm yardımıyla yaklaşık değerinin hesaplanması şeklindedir. Elde edilen bu yaklaşık değer, Taylor seri yaklaşımı olup açılımdaki katsayılar bir lineer sistemin çözümünü oluştururlar. Bu katsayıların hesaplanması matris denklemi yardımıyla olur.

Örneğin

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{4.1}$$

denkleminde $a \leq x, t \leq b$ için u bilinmeyen fonksiyon, f bilinen fonksiyon, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon ve $\lambda \neq 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(k)(x-k)^n \ , \ a \leq k \leq b$$

şeklinde bir Taylor seri çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. (4.1) denkleminde x'e göre n defa türev alınıp x yerine k değeri yazılırsa

$$u^{(n)}(k) = f^{(n)}(k) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \Bigg|_{x=k} u(t)dt$$

elde edilir. $u(t)$ fonksiyonu $t = k$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$u(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} u^{(m)}(k)(t-k)^m$$

olur ve bu değer bir önceki eşitlikte yerine yazılırsa

$$u^{(n)}(k) = f^{(n)}(k) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} u^{(m)}(k)(t-k)^m dt$$

olup buradan

$$u^{(n)}(k) = f^{(n)}(k) + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm} u^{(n)}(k), \quad n, m = 0, 1, 2, ..., N \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada T_{nm} değerleri

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k} (t-k)^m dt$$

işlemi ile elde edilir. (4.2) eşitlikleri lineer denklem sisteminin çözümünü oluştururlar ve yaklaşık bir çözüm değeri elde etmemizi sağlarlar. Buradan elde edilecek matris denklemi

$$U = \begin{bmatrix} u^{(0)}(k) \\ u^{(1)}(k) \\ \vdots \\ u^{(N)}(k) \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} \lambda T_{00} - 1 & \lambda T_{01} & \cdots & \lambda T_{0N} \\ \lambda T_{10} & \lambda T_{11} - 1 & \cdots & \lambda T_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda T_{N0} & \lambda T_{N1} & \vdots & \lambda T_{NN} - 1 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} -f^{(0)}(k) \\ -f^{(1)}(k) \\ \vdots \\ -f^{(N)}(k) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$TU = F \tag{4.3}$$

şeklindedir. Burada T matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise

$$U = T^{-1} F$$

eşitliğini yazabiliriz ve bu sayede $u^{(n)}(k)$ katsayıları hesaplanarak

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} u^{(n)}(k)(x-k)^n \tag{4.4}$$

Taylor seri çözümü elde edilir (Sezer 1992).

Örnek 4.1 $u(x) = x - \dfrac{2e^x}{e^2-1} + \int\limits_0^1 e^{x+t}u(t)dt$

integral denkleminin çözümü $u(x) = x - \dfrac{2e^x}{e^2-1}$ *olup sırasıyla* $N = 3, 4, 5$ *değerleri için yaklaşık çözümünü bulmaya çalışalım: Burada*

$K(x,t) = e^{x+t},\ f(x) = x - \dfrac{2e^x}{e^2-1},\ \lambda = 1,\ a = 0,\ b = 1$ *şeklindedir ve* $k = 0$ *için*

$f^{(n)}(0)$ *ve* $T_{nm} = \dfrac{1}{m!}\int\limits_a^b \dfrac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k}(t-k)^m dt$

değerleri hesaplanırsa

$$f(x) = x - \frac{2e^x}{e^2-1} \Longrightarrow f(0) \cong -0.31303,$$
$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^2-1} \Longrightarrow f'(0) \cong 0.68696,$$
$$f''(x) = -\frac{2e^x}{e^2-1} \Longrightarrow f''(0) \cong -0.31303,$$
$$f'''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) \cong -0.31303,$$

$$T_{00} = \frac{1}{0!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}\left(e^{x+t}\right)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^0 dt = \frac{1}{0!}\int\limits_0^1 \left(e^{x+t}\right)\Bigg|_{x=0} dt = \frac{1}{0!}\int\limits_0^1 e^t dt \cong 1.71828,$$

$$T_{01} = \frac{1}{1!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}\left(e^{x+t}\right)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^1 dt = \frac{1}{1!}\int\limits_0^1 \left(e^{x+t}\right)\Bigg|_{x=0} tdt = \frac{1}{1!}\int\limits_0^1 e^t tdt = 1,$$

$$T_{02} = \frac{1}{2!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}\left(e^{x+t}\right)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^2 dt = \frac{1}{2!}\int\limits_0^1 \left(e^{x+t}\right)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \frac{1}{2!}\int\limits_0^1 e^t t^2dt \cong 0.35914,$$

$$T_{03} = \frac{1}{3!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}\left(e^{x+t}\right)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^3 dt = \frac{1}{3!}\int\limits_0^1 \left(e^{x+t}\right)\Bigg|_{x=0} t^3dt = \frac{1}{3!}\int\limits_0^1 e^t t^3dt \cong 0.09390,$$

$$T_{04} = \frac{1}{4!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}\left(e^{x+t}\right)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^4 dt = \frac{1}{4!}\int\limits_0^1 \left(e^{x+t}\right)\Bigg|_{x=0} t^4dt = \frac{1}{4!}\int\limits_0^1 e^t t^4dt \cong 0.01935,$$

$$T_{05} = \frac{1}{5!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}\left(e^{x+t}\right)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^5 dt = \frac{1}{5!}\int\limits_0^1 \left(e^{x+t}\right)\Bigg|_{x=0} t^5dt = \frac{1}{5!}\int\limits_0^1 e^t t^5dt \cong 0.00329$$

olup sonraki adımlar için benzer hesaplamalar olduğundan kısaca

$T_{10} = T_{20} = T_{30} = T_{40} = T_{50} \cong 1.71828,$

$T_{11} = T_{21} = T_{31} = T_{41} = T_{51} = 1,$

$T_{12} = T_{22} = T_{32} = T_{42} = T_{52} \cong 0.35914,$

$T_{13} = T_{23} = T_{33} = T_{43} = T_{53} \cong 0.09390,$

$T_{14} = T_{24} = T_{34} = T_{44} = T_{54} \cong 0.01935,$

$T_{15} = T_{25} = T_{35} = T_{45} = T_{55} \cong 0.00329$

şeklinde yazılır.

$N = 3$ için bulunan bu değerler (4.3)'te yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0.71828 & 1 & 0.35914 & 0.09390 \\ 1.71828 & 0 & 0.35914 & 0.09390 \\ 1.71828 & 1 & -0.64086 & 0.09390 \\ 1.71828 & 1 & 0.35914 & -0.90610 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.31303 \\ -0.68696 \\ 0.31303 \\ 0.31303 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem çözülecek olursa

$u^{(0)}(0) = u^{(2)}(0) = u^{(3)}(0) \cong -0.31637, \ u^{(1)}(0) \cong 0.68363$

yaklaşık değerleri elde edilir. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x) \cong u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(0)\,x^3,$$

$$u(x) \cong -0.31637 + 0.68363x - 0.15818x^2 - 0.05272x^3$$

yaklaşık sonucu bulunur.

$N = 4$ için bulunan bu değerler (4.3)'te yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0.71828 & 1 & 0.35914 & 0.09390 & 0.01935 \\ 1.71828 & 0 & 0.35914 & 0.09390 & 0.01935 \\ 1.71828 & 1 & -0.64086 & 0.09390 & 0.01935 \\ 1.71828 & 1 & 0.35914 & -0.90610 & 0.01935 \\ 1.71828 & 1 & 0.35914 & 0.09390 & -0.98065 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.31303 \\ -0.68696 \\ 0.31303 \\ 0.31303 \\ 0.31303 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem çözülecek olursa

$$u^{(0)}(0) = u^{(2)}(0) = u^{(3)}(0) = u^{(4)}(0) \cong -0.31358,\ u^{(1)}(0) \cong 0.68342$$

yaklaşık değerleri elde edilir. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0)\,(x-0)^n,$$

$$u(x) \cong u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(0)\,x^4,$$

$$u(x) \cong -0.31358 + 0.68342x - 0.15679x^2 - 0.05226x^3 - 0.01306x^4$$

yaklaşık sonucu bulunur.

$N = 5$ için bulunan bu değerler (4.3)'te yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0.71828 & 1 & 0.35914 & 0.09390 & 0.01935 & 0.00329 \\ 1.71828 & 0 & 0.35914 & 0.09390 & 0.01935 & 0.00329 \\ 1.71828 & 1 & -0.64086 & 0.09390 & 0.01935 & 0.00329 \\ 1.71828 & 1 & 0.35914 & -0.90610 & 0.01935 & 0.00329 \\ 1.71828 & 1 & 0.35914 & 0.09390 & -0.98065 & 0.00329 \\ 1.71828 & 1 & 0.35914 & 0.09390 & 0.01935 & -0.99671 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \\ u^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.31303 \\ -0.68696 \\ 0.31303 \\ 0.31303 \\ 0.31303 \\ 0.31303 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse

$$u^{(0)}(0) = u^{(2)}(0) = u^{(3)}(0) = u^{(4)}(0) = u^{(5)}(0) \cong -0.31311,\ u^{(1)}(0) \cong 0.68689$$

yaklaşık değerleri elde edilir. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

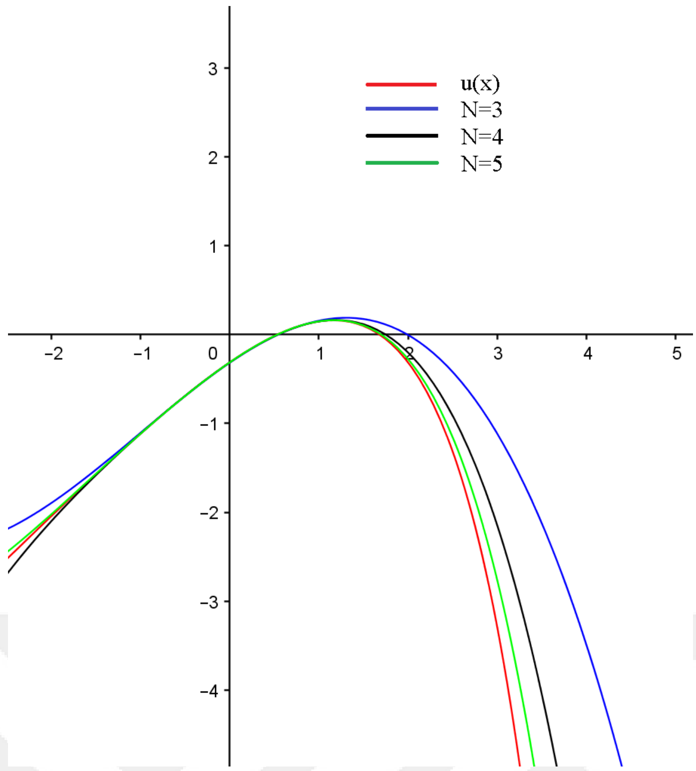
$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0)\,(x-0)^n,$$

$$u(x) \cong u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(0)\,x^4 + \frac{1}{120}u^{(5)}(0)\,x^5,$$

$$u(x) \cong -0.31311 + 0.68689x - 0.15655x^2 - 0.05218x^3 - 0.01304x^4 - 0.00260x^5$$

yaklaşık çözümü elde edilir.

Aşağıda $N = 3, 4, 5$ değerleri için bulunan yaklaşık sonuçların ve kesin çözümün grafiksel olarak karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.1: N=3,4,5 için Örnek 4.1'in Hata Analizi

Örnek 4.2 $u(x) = e^x - 1 + \int\limits_0^1 t u(t) dt$

integral denkleminin çözümü $u(x) = e^x$ *olup sırasıyla* $N = 3, 4, 5$ *için yaklaşık çözümü bulmaya çalışalım: Burada*

$K(x,t) = t,\ \ f(x) = e^x - 1,\ \ \lambda = 1,\ \ a = 0,\ \ b = 1$ *şeklindedir ve* $k = 0$ *için*

$$f^{(n)}(0) \text{ ve } T_{nm} = \frac{1}{m!} \int\limits_a^b \left. \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \right|_{x=k} (t-k)^m dt$$

değerleri hesaplanırsa

$$f(x) = e^x - 1 \Longrightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 1,$$

$$T_{00}=\frac{1}{0!}\int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(t)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^0dt=\frac{1}{0!}\int_0^1 t\Bigg|_{x=0}dt=\frac{1}{0!}\int_0^1 tdt=0.5,$$

$$T_{01}=\frac{1}{1!}\int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(t)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^1dt=\frac{1}{1!}\int_0^1 t\Bigg|_{x=0}tdt=\frac{1}{1!}\int_0^1 t^2dt\cong 0.33333,$$

$$T_{02}=\frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(t)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^2dt=\frac{1}{2!}\int_0^1 t\Bigg|_{x=0}t^2dt=\frac{1}{2!}\int_0^1 t^3dt=0.125,$$

$$T_{03}=\frac{1}{3!}\int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(t)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^3dt=\frac{1}{3!}\int_0^1 t\Bigg|_{x=0}t^3dt=\frac{1}{3!}\int_0^1 t^4dt\cong 0.03333,$$

$$T_{04}=\frac{1}{4!}\int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(t)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^4dt=\frac{1}{4!}\int_0^1 t\Bigg|_{x=0}t^4dt=\frac{1}{4!}\int_0^1 t^5dt\cong 0.00694,$$

$$T_{05}=\frac{1}{5!}\int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(t)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^5dt=\frac{1}{5!}\int_0^1 t\Bigg|_{x=0}t^5dt=\frac{1}{5!}\int_0^1 t^6dt\cong 0.00119,$$

$$T_{10}=\frac{1}{0!}\int_0^1 \frac{\partial^{(1)}(t)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0}(t-0)^0dt=\frac{1}{0!}\int_0^1 0\Bigg|_{x=0}dt=\frac{1}{0!}\int_0^1 0dt=0$$

olup sonraki adımlar için benzer hesaplamalar olduğundan kısaca

$$T_{11}=T_{12}=T_{13}=T_{14}=T_{15}=0,$$

$$T_{20}=T_{21}=T_{22}=T_{23}=T_{24}=T_{25}=0,$$

$$T_{30}=T_{31}=T_{32}=T_{33}=T_{34}=T_{35}=0,$$

$$T_{40}=T_{41}=T_{42}=T_{43}=T_{44}=T_{45}=0,$$

$$T_{50}=T_{51}=T_{52}=T_{53}=T_{54}=T_{55}=0$$

yazılabilir.

$N=3$ için bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix}-0.5 & 0.33333 & 0.125 & 0.03333\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u^{(0)}(0)\\ u^{(1)}(0)\\ u^{(2)}(0)\\ u^{(3)}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem çözülecek olursa

$u^{(0)}(0) \cong 0.98332,\ u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0) = u^{(3)}(0) = 1$

yaklaşık değerleri elde edilir. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x) \cong u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(0)\,x^3,$$

$$u(x) \cong 0.98332 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

yaklaşık sonucu bulunur.

$N = 4$ için bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.33333 & 0.125 & 0.03333 & 0.00694 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem çözülecek olursa

$u^{(0)}(0) \cong 0.99720,\ u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0) = u^{(3)}(0) = u^{(4)}(0) = 1$

yaklaşık değerleri elde edilir. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x) \cong u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(0)\,x^4,$$

$$u(x) \cong 0.99720 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

yaklaşık sonucu bulunur.

$N = 5$ için bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.33333 & 0.125 & 0.03333 & 0.00694 & 0.00119 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \\ u^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem çözülecek olursa

$$u^{(0)}(0) \cong 0.99958, \; u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0) = u^{(3)}(0) = u^{(4)}(0) = u^{(5)}(0) = 1$$

yaklaşık değerleri elde edilir. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x) \cong u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}u^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(0)\,x^4 + \frac{1}{120}u^{(5)}(0)\,x^5,$$

$$u(x) \cong 0.99958 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$

yaklaşık sonucu bulunur.

$u(x) = e^x - 1 + \int_0^1 tu(t)dt$ integral denkleminin Tablo 4.1, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3'te sırasıyla $N = 3, 4, 5$ için Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümleri ve hata miktarları gösterilmiştir.

Tablo 4.1 N=3 için Örnek 4.2'nin yaklaşık çözümleri ve hata miktarları

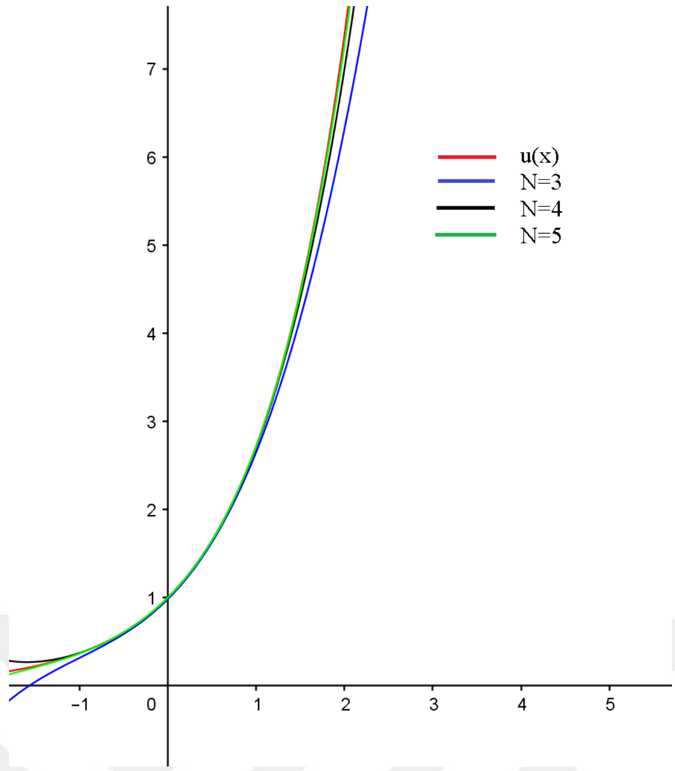
		Kesin Çözüm	$N=3$	
i	x_i	$u(x_i) = e^x$	$u(x_i)$	$E(x_i)$
0	0	1	0.9833200000	$1.6E-02$
1	0.2	1.2214027581	1.2046533330	$1.6E-02$
2	0.4	1.4918246976	1.4739866670	$1.7E-02$
3	0.6	1.8221188003	1.7993200000	$2.2E-02$
4	0.8	2.2255409284	2.1886533330	$3.6E-02$
5	1.0	2.7182818284	2.6499866670	$6.8E-02$
6	1.2	3.3201169227	3.1913200000	$1.2E-01$
7	1.4	4.0551999668	3.8206533330	$2.3E-01$
8	1.6	4.9530324243	4.5459866670	$4.0E-01$
9	1.8	6.0496474644	5.3753200000	$6.7E-01$
10	2.0	7.3890560989	6.3166533330	$1.0E-00$

Tablo 4.2 N=4 için Örnek 4.2'nin yaklaşık çözümleri ve hata miktarları

		Kesin Çözüm	$N=4$	
i	x_i	$u(x_i)=e^x$	$u(x_i)$	$E(x_i)$
0	0	1	0.9972000000	$2.8E-03$
1	0.2	1.2214027581	1.2186000000	$2.8E-03$
2	0.4	1.4918246976	1.4889333340	$2.8E-03$
3	0.6	1.8221188003	1.8186000000	$3.5E-03$
4	0.8	2.2255409284	2.2196000000	$5.9E-03$
5	1.0	2.7182818284	2.7055333340	$1.2E-02$
6	1.2	3.3201169227	3.2916000000	$2.8E-02$
7	1.4	4.0551999668	3.9946000000	$6.0E-02$
8	1.6	4.9530324243	4.8329333340	$1.2E-01$
9	1.8	6.0496474644	5.8266000000	$2.2E-01$
10	2.0	7.3890560989	6.9972000000	$3.9E-01$

Tablo 4.3 N=5 için Örnek 4.2'nin yaklaşık çözümleri ve hata miktarları

		Kesin Çözüm	$N=5$	
i	x_i	$u(x_i)=e^x$	$u(x_i)$	$E(x_i)$
0	0	1	0.99958	$4.2E-04$
1	0.2	1.2214027581	1.2209826670	$4.2E-04$
2	0.4	1.4918246976	1.4913986670	$4.2E-04$
3	0.6	1.8221188003	1.8216280000	$4.9E-04$
4	0.8	2.2255409284	2.2247106670	$8.3E-04$
5	1.0	2.7182818284	2.7162466670	$2.0E-03$
6	1.2	3.3201169227	3.3147160000	$5.4E-03$
7	1.4	4.0551999668	4.0417986670	$1.3E-02$
8	1.6	4.9530324243	4.9226946670	$3.0E-02$
9	1.8	6.0496474644	5.9864440000	$6.3E-02$
10	2.0	7.3890560989	7.2662466670	$1.2E-01$



Şekil 4.2: N=3,4,5 için Örnek 4.2'nin Hata Analizi

Yukarıda $N = 3, 4, 5$ değerleri için bulunan yaklaşık sonuçların ve kesin çözümün grafiksel olarak karşılaştırılması verilmiştir.

Örnek 4.3 $u(x) = (x+1)^2 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\, u(t)dt$

integral denkleminin yaklaşık çözümünü bulmaya çalışalım:

Burada, hem çekirdek hem de bilinen fonksiyonun x değişkenine göre 3. mertebeden türevi 0 *olduğundan tam bir çözüm elde edeceğiz.*

$K(x,t) = (xt + x^2t^2),\ f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,\ \lambda = 1,\ a = -1,\ b = 1$

şeklindedir ve $N = 2,\ k = 0$ *için*

$$f^{(n)}(0) \text{ ve } T_{nm} = \frac{1}{m!}\int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}\bigg|_{x=k} (t-k)^m dt$$

değerleri hesaplanırsa

$$f(x) = (x+1)^2 \Longrightarrow f(0) = 1,$$

$f'(x) = 2x + 2 \Longrightarrow f'(0) = 2,$

$f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2,$

$$T_{00} = \frac{1}{0!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(0)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int_{-1}^{1} 0dt = 0,$$

$$T_{01} = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(0)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int_{-1}^{1} 0tdt = 0,$$

$$T_{02} = \frac{1}{2!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(0)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \int_{-1}^{1} 0t^2dt = 0,$$

$$T_{10} = \frac{1}{0!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(1)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_{-1}^{1} (t + 2xt^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int_{-1}^{1} tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$T_{11} = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(1)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_{-1}^{1} (t + 2xt^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$T_{12} = \frac{1}{2!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(1)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t + 2xt^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^3\ dt = \frac{t^4}{8}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$T_{20} = \frac{1}{0!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(2)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_{-1}^{1} (2t^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int_{-1}^{1} 2t^2dt = \frac{2t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3},$$

$$T_{21} = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(2)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_{-1}^{1} (2t^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int_{-1}^{1} 2t^3\ dt = \frac{t^4}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$T_{22} = \frac{1}{2!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(2)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (2t^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2t^4dt = \frac{2t^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

olup bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \lambda.0 - 1 & \lambda.0 & \lambda.0 \\ \lambda.0 & \lambda.\frac{2}{3} - 1 & \lambda.0 \\ \lambda.\frac{4}{3} & \lambda.0 & \lambda.\frac{2}{5} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olur veya $\lambda = 1$ için

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$u^{(0)}(0) = 1,$$

$$\frac{-1}{3}u^{(1)}(0) = -2,$$

$$\frac{4}{3}u^{(0)}(0) + \frac{-3}{5}u^{(2)}(0) = -2$$

elde edilir. Buradan

$$u^{(0)}(0) = 1,\ u^{(1)}(0) = 6,\ u^{(2)}(0) = \frac{50}{9}$$

bulunur ve bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x) = u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2,$$

$$u(x) = 1 + 6x + \frac{25}{9}x^2$$

sonucu bulunur.

$u(x) = 1 + 6x + \frac{25}{9}x^2$ fonksiyonunun integral denklemin çözümü olduğunu denklemde yerine yazarak gösterelim:

$$u(x) = (x+1)^2 + \int_{-1}^{1} \left(xt + x^2t^2\right)\left(1 + 6t + \frac{25}{9}t^2\right) dt$$

$$= x^2 + 2x + 1 + \int_{-1}^{1} \left(xt + 6xt^2 + \frac{25}{9}xt^3 + x^2t^2 + 6x^2t^3 + \frac{25}{9}x^2t^4\right) dt$$

$$= x^2 + 2x + 1 + \left(\frac{1}{2}xt^2 + 2xt^3 + \frac{25}{36}xt^4 + \frac{1}{3}x^2t^3 + \frac{3}{2}x^2t^4 + \frac{5}{9}x^2t^5\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= x^2 + 2x + 1 + 4x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{9}x^2$$

$$= 1 + 6x + \frac{25}{9}x^2$$

dir.

Örnek 4.4 $u(x) = 0.9x^2 + 0.5\int\limits_0^1 x^2t^2u(t)dt$

integral denkleminde de hem çekirdek hem de bilinen fonksiyonun x değişkenine göre 3. mertebeden türevi 0 olduğundan tam bir çözüm elde edeceğiz. Burada

$K(x,t) = 0.5x^2t^2,\ f(x) = 0.9x^2,\ \lambda = 1,\ a = 0,\ b = 1$ *şeklindedir ve* $N = 2,\ k = 0$ *için*

$f^{(n)}(0)$ *ve* $T_{nm} = \dfrac{1}{m!}\int\limits_a^b \dfrac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k}(t-k)^m dt$

değerleri hesaplanırsa

$f(x) = 0.9x^2 \Longrightarrow f(0) = 0,$

$f'(x) = 1.8x \Longrightarrow f'(0) = 0,$

$f''(x) = 1.8 \Longrightarrow f''(0) = 1.8,$

$$T_{00} = \frac{1}{0!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^0dt = \int\limits_0^1 (0.5x^2t^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int\limits_0^1 0dt = 0,$$

$$T_{01} = \frac{1}{1!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^1dt = \int\limits_0^1 (0.5x^2t^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int\limits_0^1 0tdt = 0,$$

$$T_{02} = \frac{1}{2!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(0)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0}(t-0)^2dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (0.5x^2t^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \int\limits_0^1 0t^2dt = 0,$$

$$T_{10} = \frac{1}{0!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(1)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0}(t-0)^0dt = \int\limits_0^1 (xt^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int\limits_0^1 0dt = 0,$$

$$T_{11} = \frac{1}{1!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(1)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0}(t-0)^1dt = \int\limits_0^1 (xt^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int\limits_0^1 0tdt = 0,$$

$$T_{12} = \frac{1}{2!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(1)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0}(t-0)^2dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (xt^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \int\limits_0^1 0t^2dt = 0,$$

$$T_{20} = \frac{1}{0!}\int\limits_0^1 \frac{\partial^{(2)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0}(t-0)^0dt = \int\limits_0^1 (t^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int\limits_0^1 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$T_{21}=\frac{1}{1!}\int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0}(t-0)^1dt=\int_0^1 (t^2)\Bigg|_{x=0} tdt=\int_0^1 t^3dt=\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{1}{4},$$

$$T_{22}=\frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(0.5x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0}(t-0)^2dt=\frac{1}{2}\int_0^1 (t^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^4dt=\frac{t^5}{10}\Bigg|_0^1=\frac{1}{10}$$

olup bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-9}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.8 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$u^{(0)}(0)=0,\ u^{(1)}(0)=0,$$

$$\frac{1}{3}u^{(0)}(0)+\frac{1}{4}u^{(1)}(0)+\frac{-9}{10}u^{(2)}(0)=-1.8$$

elde edilir. Buradan

$$u^{(0)}(0)=u^{(1)}(0)=0,\ u^{(2)}(0)=2$$

bulunur ve bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x)=\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x)=u^{(0)}(0)+u^{(1)}(0)\,x+\frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2,$$

$$u(x)=x^2$$

sonucu bulunur.

$u(x)=x^2$ fonksiyonunun integral denklemin çözümü olduğunu denklemde yerine yazarak gösterelim:

$$u(x)=0.9x^2+0.5\int_0^1 x^2t^2t^2dt$$

$$=0.9x^2+0.5\left[\left(\frac{1}{5}x^2t^5\right)\Bigg|_0^1\right]$$

$$= 0.9x^2 + 0.1x^2$$

$$= x^2$$

dir.

Örnek 4.5 $u(x) = 1 + \int\limits_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\, u(t)dt$

integral denkleminde yukarıdaki örneklerde olduğu gibi tam çözüm elde edeceğiz. Burada

$K(x,t) = (xt + x^2t^2)\,,\ f(x) = 1,\ \lambda = 1,\ a = -1,\ b = 1$ *şeklindedir ve*

$N = 2,\ k = 0$ *için*

$$f^{(n)}(0) \text{ ve } T_{nm} = \frac{1}{m!}\int\limits_{a}^{b} \frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k} (t-k)^m dt$$

değerleri hesaplanırsa

$$f(x) = 1 \Longrightarrow f(0) = 1,$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow f''(0) = 0,$$

$$T_{00} = \frac{1}{0!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{(0)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int\limits_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int\limits_{-1}^{1} 0dt = 0,$$

$$T_{01} = \frac{1}{1!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{(0)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int\limits_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int\limits_{-1}^{1} 0tdt = 0,$$

$$T_{02} = \frac{1}{2!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{(0)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^0}\Bigg|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \int\limits_{-1}^{1} 0t^2dt = 0,$$

$$T_{10} = \frac{1}{0!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{(1)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int\limits_{-1}^{1} (t + 2xt^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int\limits_{-1}^{1} tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$T_{11} = \frac{1}{1!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{(1)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int\limits_{-1}^{1} (t + 2xt^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int\limits_{-1}^{1} t^2dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

$$T_{12} = \frac{1}{2!}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{(1)}(xt + x^2t^2)}{\partial x^1}\Bigg|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (t + 2xt^2)\Bigg|_{x=0} t^2dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} t^3dt = \frac{t^4}{8}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$T_{20} = \frac{1}{0!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(2)}(xt+x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} (t-0)^0 dt = \int_{-1}^{1} (2t^2)\Bigg|_{x=0} dt = \int_{-1}^{1} 2t^2 dt = \frac{2t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3},$$

$$T_{21} = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(2)}(xt+x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} (t-0)^1 dt = \int_{-1}^{1} (2t^2)\Bigg|_{x=0} tdt = \int_{-1}^{1} 2t^3 dt = \frac{t^4}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$T_{22} = \frac{1}{2!}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{(2)}(xt+x^2t^2)}{\partial x^2}\Bigg|_{x=0} (t-0)^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (2t^2)\Bigg|_{x=0} t^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

olup bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$u^{(0)}(0) = 1,$$

$$\frac{1}{3}u^{(1)}(0) = 0,$$

$$\frac{4}{3}u^{(0)}(0) - \frac{3}{5}u^{(2)}(0) = 0$$

olur ve buradan $u^{(0)}(0) = 1$, $u^{(1)}(0) = 0$, $u^{(2)}(0) = \frac{20}{9}$ bulunur. Bu değerler (4.4)'te yerine yazılırsa

$$u(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}u^{(n)}(0)(x-0)^n,$$

$$u(x) = u^{(0)}(0) + u^{(1)}(0)\,x + \frac{1}{2}u^{(2)}(0)\,x^2,$$

$$u(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$$

sonucu elde edilir.

$u(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$ fonksiyonunun integral denklemin çözümü olduğunu denklemde yerine yazarak gösterelim:

$$u(x) = 1 + \int_{-1}^{1} \left(xt + x^2t^2\right) u(t)dt$$

$$= 1 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2)\left(1 + \frac{10}{9}t^2\right) dt$$

$$= 1 + \int_{-1}^{1} \left(xt + \frac{10}{9}xt^3 + x^2t^2 + \frac{10}{9}x^2t^4\right) dt$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}xt^2 + \frac{5}{18}xt^4 + \frac{1}{3}x^2t^3 + \frac{2}{9}x^2t^5\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= 1 + \frac{10}{9}x^2$$

dir.

4.2 VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN TAYLOR SERİSİ YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt \tag{4.5}$$

denkleminde $a \leq x, t \leq x$ için u bilinmeyen fonksiyon, f bilinen fonksiyon, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon ve $\lambda \neq 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(k)(x-k)^n \ , \ a \leq k \leq x$$

şeklinde bir Taylor seri çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. (4.5) denkleminde x'e göre n defa türev alınırsa

$$u^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda I^{(n)}(x) \tag{4.6}$$

olur. Burada

$$I^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

dir. $n = 0$ için

$$I^{(0)}(x) = I(x) = \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

olur. Leibniz kuralı $I(x)$ integraline uygulanırsa, $n \geq 1$ için

$$I^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [h_i(x).u(x)]^{(n-i-1)} + \int_{a}^{x} \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} u(t)dt \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada

$$h_i(x) = \frac{\partial^{(i)} K(x,t)}{\partial x^i}\Bigg|_{t=x}$$

dir. $[h_i(x).u(x)]^{(n-i-1)}$ değeri hesaplanıp (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$I^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-1)}(x) u^{(m)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} u(t) dt \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.6) denkleminde x değerini 0 alıp (4.8) denkleminde $t = k$ noktasındaki

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} u^{(m)}(k)(t-k)^m$$

değeri Taylor seri açılımında yerine yazılırsa

$$u^{(n)}(k) = f^{(n)}(k) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(k) u^{(m)}(k)$$

$$+\lambda \int_a^k \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} u^{(m)}(k)(t-k)^m dt$$

veya

$$u^{(n)}(k) = f^{(n)}(k) + \lambda \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) u^{(m)}(k) + \sum_{m=n}^{\infty} T_{nm} u^{(m)}(k) \right\} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9)'da

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(k) \tag{4.10}$$

ve

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^k \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k} (t-k)^m dt$$

şeklinde tanımlanır. (4.9)'da $n = 0$ için

$$\sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) u^{(m)}(k) = 0, \ (n = 1, 2, ... \ ; \ m = 1, 2, ..., n-1 \ ; \ n > m)$$

olur. (4.10)'da $n \leq m$ için

$$H_{nm} = 0$$

elde edilir. (4.9) bağıntısından sonsuz lineer denklem elde edilir. $u(x)$'in N. dereceden bir Taylor polinomuna yaklaştığı kabul edilirse, $n, m = 0, 1, ..., N$ alınabilir. Daha sonra (4.9) denkleminden bilinmeyen $u^{(0)}(k), u^{(1)}(k), ..., u^{(N)}(k)$ katsayıları için $(N+1)$ bilinmeyenli $(N+1)$ denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi ortaya çıkar. Bu sistem standart metotlarla nümerik olarak çözülebilir ya da

$$TU = F \tag{4.11}$$

şeklinde matris denklemi haline getirilir ve $|T| \neq 0$ ise (4.11) matris denklemi

$$U = T^{-1}F$$

şeklinde yazılır. (4.11)'deki T, U ve F matrisleri

$$T = \begin{bmatrix} \lambda T_{00} - 1 & \lambda T_{01} & \cdots & \lambda T_{0N} \\ \lambda(H_{10} + T_{10}) & \lambda T_{11} - 1 & \cdots & \lambda T_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(H_{N0} + T_{N0}) & \lambda(H_{N1} + T_{N1}) & \vdots & \lambda T_{NN} - 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u^{(0)}(k) \\ u^{(1)}(k) \\ \vdots \\ u^{(N)}(k) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -f^{(0)}(k) \\ -f^{(1)}(k) \\ \vdots \\ -f^{(N)}(k) \end{bmatrix}$$

şeklindedirler. Buradan

$$u^{(n)}(k) = f^{(n)}(k) + \lambda \int_a^b \left. \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \right|_{x=k} u(t)dt$$

elde edilir. $u(t)$ fonksiyonu $x = k$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$u(x) \cong \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} u^{(m)}(k)(x-k)^m \tag{4.12}$$

yaklaşık çözümü elde edilmiş olur (Sezer 1994).

Örnek 4.6 $u(x) = e^x - \cos x - 2\int\limits_0^x e^{x-t}u(t)dt$

Volterra integral denkleminin çözümü $u(x) = \sin x$ *olup sırasıyla* $N = 3, 5, 7$ *için yaklaşık çözümünü araştıralım: Burada*

$f(x) = e^x - \cos x,\ K(x,t) = e^{x-t},\ \lambda = -2,\ a = 0$ *olup* $k = 0$ *için*

$h_i(x)$, H_{nm} *ve* T_{nm} *değerleri*

$$h_i(x) = \frac{\partial^{(i)}K(x,t)}{\partial x^i}\bigg|_{t=x},$$

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1}\binom{n-i-1}{m}h_i^{(n-m-i-1)}(k),$$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!}\int\limits_a^k \frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^n}\bigg|_{x=k}(t-k)^m dt$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$$h_0(x) = \frac{\partial^{(0)}K(x,t)}{\partial x^0}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(0)}e^{x-t}}{\partial x^0}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_1(x) = \frac{\partial^{(1)}K(x,t)}{\partial x^1}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(1)}e^{x-t}}{\partial x^1}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_2(x) = \frac{\partial^{(2)}K(x,t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(2)}e^{x-t}}{\partial x^2}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_3(x) = \frac{\partial^{(3)}K(x,t)}{\partial x^3}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(3)}e^{x-t}}{\partial x^3}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_4(x) = \frac{\partial^{(4)}K(x,t)}{\partial x^4}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(4)}e^{x-t}}{\partial x^4}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_5(x) = \frac{\partial^{(5)}K(x,t)}{\partial x^5}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(5)}e^{x-t}}{\partial x^5}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_6(x) = \frac{\partial^{(6)}K(x,t)}{\partial x^6}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(6)}e^{x-t}}{\partial x^6}\bigg|_{x=t} = 1,$$

$$h_7(x) = \frac{\partial^{(7)}K(x,t)}{\partial x^7}\bigg|_{x=t} = \frac{\partial^{(7)}e^{x-t}}{\partial x^7}\bigg|_{x=t} = 1$$

olur. $n \leq m$ *için* $H_{nm} = 0$ *olduğundan kısaca*

$$H_{11} = H_{12} = H_{13} = H_{14} = H_{15} = H_{16} = H_{17} = H_{22} = H_{23} = H_{24} = 0,$$

$$H_{25} = H_{26} = H_{27} = H_{33} = H_{34} = H_{35} = H_{36} = H_{37} = H_{44} = H_{45} = 0,$$

$$H_{46} = H_{47} = H_{55} = H_{56} = H_{57} = H_{66} = H_{67} = H_{77} = 0$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$H_{10} = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{0}.1 = 1,\ H_{20} = \sum_{i=0}^{1} \binom{1-i}{0}.1 = 2,\ H_{21} = \sum_{i=0}^{0} \binom{1-i}{1}.1 = 1,$$

$$H_{30} = \sum_{i=0}^{2} \binom{2-i}{0}.1 = 3,\ H_{31} = \sum_{i=0}^{1} \binom{2-i}{1}.1 = 3,\ H_{32} = \sum_{i=0}^{0} \binom{2-i}{2}.1 = 1,$$

$$H_{40} = \sum_{i=0}^{3} \binom{3-i}{0}.1 = 4,\ H_{41} = \sum_{i=0}^{2} \binom{3-i}{1}.1 = 6,\ H_{42} = \sum_{i=0}^{1} \binom{3-i}{2}.1 = 4,$$

$$H_{43} = \sum_{i=0}^{0} \binom{3-i}{3}.1 = 1,\ H_{50} = \sum_{i=0}^{4} \binom{4-i}{0}.1 = 5,\ H_{51} = \sum_{i=0}^{3} \binom{4-i}{1}.1 = 10,$$

$$H_{52} = \sum_{i=0}^{2} \binom{4-i}{2}.1 = 10,\ H_{53} = \sum_{i=0}^{1} \binom{4-i}{3}.1 = 5,\ H_{54} = \sum_{i=0}^{0} \binom{4-i}{4}.1 = 1,$$

$$H_{60} = \sum_{i=0}^{5} \binom{5-i}{0}.1 = 6,\ H_{61} = \sum_{i=0}^{4} \binom{5-i}{1}.1 = 15,\ H_{62} = \sum_{i=0}^{3} \binom{5-i}{2}.1 = 20,$$

$$H_{63} = \sum_{i=0}^{2} \binom{5-i}{3}.1 = 15,\ H_{64} = \sum_{i=0}^{1} \binom{5-i}{4}.1 = 6,\ H_{65} = \sum_{i=0}^{0} \binom{5-i}{5}.1 = 1,$$

$$H_{70} = \sum_{i=0}^{6} \binom{6-i}{0}.1 = 7,\ H_{71} = \sum_{i=0}^{5} \binom{6-i}{1}.1 = 21,\ H_{72} = \sum_{i=0}^{4} \binom{6-i}{2}.1 = 35,$$

$$H_{73} = \sum_{i=0}^{3} \binom{6-i}{3}.1 = 35,\ H_{74} = \sum_{i=0}^{2} \binom{6-i}{4}.1 = 21,\ H_{75} = \sum_{i=0}^{1} \binom{6-i}{5}.1 = 7,$$

$$H_{76} = \sum_{i=0}^{0} \binom{6-i}{6}.1 = 1$$

elde edilir ve

$$T_{nm} = 0,\ (n, m = 0, 1, ..., 7)$$

olup

$$f(x) = e^x - \cos x \Longrightarrow f(0) = 0,$$

$f'(x) = e^x + \sin x \Longrightarrow f'(0) = 1,$

$f''(x) = e^x + \cos x \Longrightarrow f''(0) = 2,$

$f'''(x) = e^x - \sin x \Longrightarrow f'''(0) = 1,$

$f^{(4)}(x) = e^x - \cos x \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 0,$

$f^{(5)}(x) = e^x + \sin x \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 1,$

$f^{(6)}(x) = e^x + \cos x \Longrightarrow f^{(6)}(0) = 2,$

$f^{(7)}(x) = e^x - \sin x \Longrightarrow f^{(7)}(0) = 1$

elde edilir.

$N = 3$ için bulunan değerler (4.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ -6 & -6 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve bu matris denklemi çözülecek olursa

$u^{(0)}(0) = u^{(2)}(0) = 0,\ u^{(1)}(0) = 1,\ u^{(3)}(0) = -5$

bulunur. Bu değerler (4.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x) &\cong \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0).x^n \\ &= \frac{1}{0!}u^{(0)}(0)\,x^0 + \frac{1}{1!}u^{(1)}(0)\,x^1 + \frac{1}{2!}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}u^{(3)}(0)\,x^3 \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 \end{aligned}$$

yaklaşık sonucu elde edilir.

$N = 5$ için bulunan değerler (4.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & -12 & -8 & -2 & -1 & 0 \\ -10 & -20 & -20 & -10 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \\ u^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve bu matris denklemi çözülecek olursa

$$u^{(0)}(0) = u^{(2)}(0) = 0,\ u^{(1)}(0) = 1,\ u^{(3)}(0) = -5,\ u^{(4)}(0) = -2,\ u^{(5)}(0) = 35$$

bulunur. Bu değerler (4.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u(x) &\cong \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0).x^n \\
&= \frac{1}{0!}u^{(0)}(0)\,x^0 + \frac{1}{1!}u^{(1)}(0)\,x^1 + \frac{1}{2!}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}u^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(0)\,x^4 + \frac{1}{5!}u^{(5)}(0)\,x^5 \\
&= x - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{24}x^5
\end{aligned}$$

yaklaşık sonucu elde edilir.

$N = 7$ için bulunan değerler (4.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & -6 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-8 & -12 & -8 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-10 & -20 & -20 & -10 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
-12 & -30 & -40 & -30 & -12 & -2 & -1 & 0 \\
-14 & -42 & -70 & -70 & -42 & -14 & -2 & -1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \\ u^{(5)}(0) \\ u^{(6)}(0) \\ u^{(7)}(0)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1
\end{bmatrix}$$

elde edilir ve bu matris denklemi çözülecek olursa

$$u^{(0)}(0) = u^{(2)}(0) = 0,\ u^{(1)}(0) = 1,\ u^{(3)}(0) = -5,$$

$$u^{(4)}(0) = -2,\ u^{(5)}(0) = 35,\ u^{(6)}(0) = 76,\ u^{(7)}(0) = -249$$

değerleri elde edilir. Bu değerler (4.12)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u(x) &\cong \sum_{n=0}^{7} \frac{1}{n!} u^{(n)}(0).x^n \\
&= \frac{1}{0!}u^{(0)}(0)\,x^0 + \frac{1}{1!}u^{(1)}(0)\,x^1 + \frac{1}{2!}u^{(2)}(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}u^{(3)}(0)\,x^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(0)\,x^4 + \frac{1}{5!}u^{(5)}(0)\,x^5 \\
&= x - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{24}x^5 + \frac{19}{180}x^6 - \frac{83}{1680}x^7
\end{aligned}$$

yaklaşık sonucu elde edilir. Ayrıca denklemin çözümünün $u(x) = \sin x$ olduğunu gösterelim:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^x - \cos x - 2\int_0^x e^{x-t}\sin t dt \\
&= e^x - \cos x - 2\left[\left(-\frac{e^{x-t}(\sin t + \cos t)}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}\right] \\
&= e^x - \cos x + \sin x + \cos x - e^x \\
&= \sin x
\end{aligned}
$$

dir.

$u(x) = e^x - \cos x - 2\int_0^x e^{x-t}u(t)dt$ integral denkleminin Tablo 4.4, Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da sırasıyla $N = 3, 5, 7$ için Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümleri ve hata miktarları gösterilmiştir.

Tablo 4.4 N=3 için Örnek 4.6'nın yaklaşık çözümleri ve hata miktarları

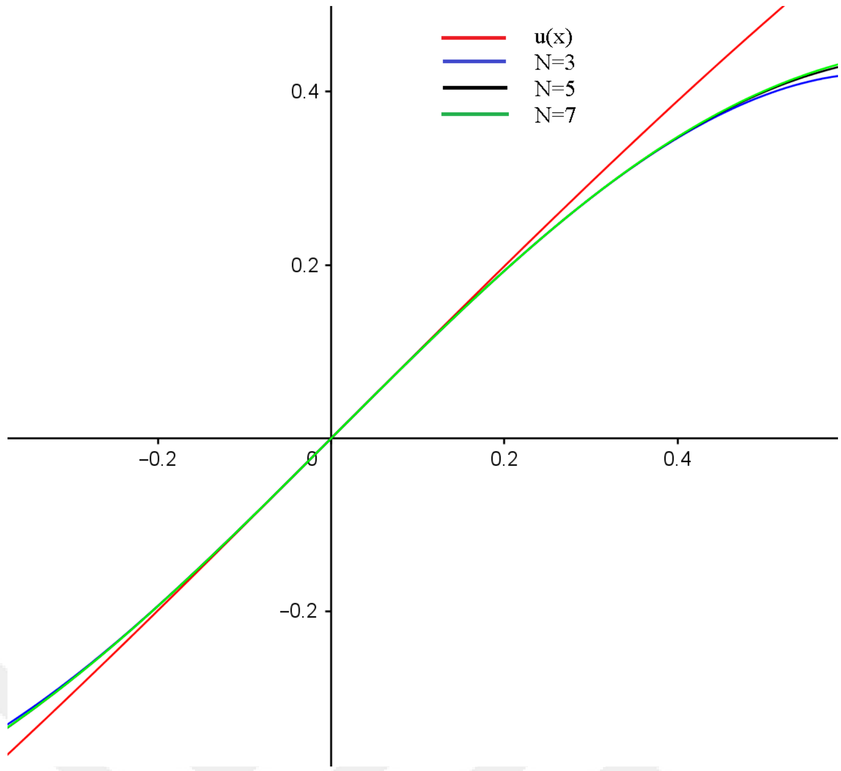
		Kesin Çözüm	$N = 3$	
i	x_i	$u(x_i) = \sin x$	$u(x_i)$	$E(x_i)$
0	0	0	0	0
1	0.1	0.0998334166	0.0991666666	$6.6E-04$
2	0.2	0.1986693307	0.1933333333	$5.3E-03$
3	0.3	0.2955202066	0.2775000000	$1.8E-02$
4	0.4	0.3894183423	0.3466666667	$4.2E-02$
5	0.5	0.4794255386	0.3958333333	$8.3E-02$
6	0.6	0.5646424733	0.4200000000	$1.4E-01$
7	0.7	0.6442176872	0.4141666667	$2.3E-01$
8	0.8	0.7173560908	0.3733333333	$3.4E-01$
9	0.9	0.7833269096	0.2925000000	$4.9E-01$
10	1.0	0.8414709848	0.1666666666	$6.7E-01$

Tablo 4.5 N=5 için Örnek 4.6'nın yaklaşık çözümleri ve hata miktarları

		Kesin Çözüm	$N=5$	
i	x_i	$u(x_i)=\sin x$	$u(x_i)$	$E(x_i)$
0	0	0	0	0
1	0.1	0.0998334166	0.0991612500	$6.7E-04$
2	0.2	0.1986693307	0.1932933333	$5.3E-03$
3	0.3	0.2955202066	0.2775337500	$1.7E-02$
4	0.4	0.3894183423	0.3475200001	$4.1E-02$
5	0.5	0.4794255386	0.3997395833	$7.9E-02$
6	0.6	0.5646424733	0.4318800000	$1.3E-01$
7	0.7	0.6442176872	0.4431787501	$2.0E-01$
8	0.8	0.7173560908	0.4347733333	$2.8E-01$
9	0.9	0.7833269096	0.4100512500	$3.7E-01$
10	1.0	0.8414709848	0.3750000000	$4.6E-01$

Tablo 4.6 N=7 için Örnek 4.6'nın yaklaşık çözümleri ve hata miktarları

		Kesin Çözüm	$N=7$	
i	x_i	$u(x_i)=\sin x$	$u(x_i)$	$E(x_i)$
0	0	0	0	0
1	0.1	0.0998334166	0.0991613506	$6.7E-04$
2	0.2	0.1986693307	0.1932994565	$5.3E-03$
3	0.3	0.2955202066	0.2775998952	$1.7E-02$
4	0.4	0.3894183423	0.3478714109	$4.1E-02$
5	0.5	0.4794255386	0.4010029142	$7.8E-02$
6	0.6	0.5646424733	0.4354217829	$1.2E-01$
7	0.7	0.6442176872	0.4515285611	$1.9E-01$
8	0.8	0.7173560908	0.4520831594	$2.6E-01$
9	0.9	0.7833269096	0.4425176555	$3.4E-01$
10	1.0	0.8414709848	0.4311507936	$4.1E-01$



Şekil 4.3: N=3,5,7 için Örnek 4.6'nın Hata Analizi

Yukarıda ise bu integral denklemin $N = 3, 5, 7$ değerleri için grafiksel olarak hata analizi gösterilmiştir.

Örnek 4.7 $u(x) = x + 1 + \lambda \int_0^x (x - t)u(t)dt$
lineer Volterra integral denkleminin yaklaşık çözümünü araştıralım:

$f(x) = x + 1, \;\; K(x,t) = x - t, \;\; a = 0$ *olup* $N = 4$ *ve* $k = 0$ *için*

$h_i(x), \;\; H_{nm}$ *ve* T_{nm} *değerleri*

$$h_i(x) = \frac{\partial^{(i)} K(x,t)}{\partial x^i}\Bigg|_{t=x},$$

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(k),$$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!}\int_a^k \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}\Bigg|_{x=k} (t-k)^m dt$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa

$h_0(x) = h_2(x) = h_3(x) = h_4(x) = 0, \;\; h_1(x) = 1,$

$H_{10}=0,\ H_{20}=1,\ H_{21}=0,\ H_{30}=1,\ H_{31}=1,$

$H_{40}=1,\ H_{41}=2,\ H_{42}=1,\ H_{43}=0,$

$T_{nm}=0,\ (n,m=0,1,...,4)$

elde edilir. Ayrıca

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=0$$

olup matris denklemi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(0)}(0) \\ u^{(1)}(0) \\ u^{(2)}(0) \\ u^{(3)}(0) \\ u^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve buradan

$$u^{(0)}(0)=u^{(1)}(0)=1,\ u^{(2)}(0)=\lambda,\ u^{(3)}(0)=2\lambda,\ u^{(4)}(0)=\lambda^2+3\lambda$$

değerleri elde edilir. Bulunan bu değerler (4.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x) &\cong \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!}u^{(n)}(0).x^n \\ &= \frac{1}{0!}u^{(0)}(0)\,x^0+\frac{1}{1!}u^{(1)}(0)\,x^1+\frac{1}{2!}u^{(2)}(0)\,x^2+\frac{1}{3!}u^{(3)}(0)\,x^3+\frac{1}{4!}u^{(4)}(0)\,x^4 \\ &= 1+x+\frac{1}{2}\lambda x^2+\frac{1}{3}\lambda x^3+\frac{1}{24}(\lambda^2+3\lambda)x^4 \end{aligned}$$

yaklaşık çözümü bulunur. $u(x)=1+x+\lambda\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4\right)+\frac{1}{24}\lambda^2x^4$ *fonksiyonunun* $\lambda=1$ *için denklemin yaklaşık çözümü olduğunu gösterelim:*

$$u(x)=x+1+\int_0^x(x-t)u(t)dt$$

$$\cong x+1+\int_0^x(x-t)\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{6}t^4\right)dt$$

$$=x+1+\int_0^x\left(x+xt+\frac{1}{2}xt^2+\frac{1}{3}xt^3+\frac{1}{6}xt^4-t-t^2-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{3}t^4-\frac{1}{6}t^5\right)dt$$

$$= x + 1 + xt + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{12}xt^4 + \frac{1}{30}xt^5 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{36}t^6 \Big|_0^x$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{36}x^6$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{180}x^6$$

bulunur. N değeri sonsuza yaklaştıkça çözümün de e^x fonksiyonuna yaklaştığı görülür.

Örnek 4.8 *İntegral denklemlerin Taylor serisi yöntemi ile elde edilen çözümlerinin Maple programı ile elde edilmesine örnek olarak Örnek 4.4'ün $N = 3$ için kodlanması aşağıda gösterilmiştir.*

$> u(x) = 0.9 * x\hat{}2 + 0.5 * Int((x\hat{}2 * t\hat{}2) * u(t), t = 0..1);$

$> f(x) := 0.9 * x\hat{}2;$

$> K(x,t) := 0.5 * x\hat{}2 * t\hat{}2;$

$> f(0) := subs(x = 0, f(x));$

$> fbirinciturev := diff(0.9 * x\hat{}2, x);$

$> fikinciturev := diff(1.8 * x, x);$

$> fucuncuturev := diff(1.8, x);$

$> subs(x = 0, 1.8 * x);$

$> subs(x = 0, 1.8);$

$> subs(x = 0, 0);$

$> Kbirinciturev := diff(0.5 * x\hat{}2 * t\hat{}2, x);$

$> Kikinciturev := diff(x * t\hat{}2, x);$

$> Kucuncuturev := diff(t\hat{}2, x);$

$> subs(x = 0, x * t\hat{}2);$

$> subs(x = 0, t\hat{}2);$

$> subs(x = 0, 0);$

$> T00 := 1/0! * int(0 * (t - 0)\hat{}0, t = 0..1);$

$> T01 := 1/1! * int(0 * (t - 0)\hat{}1, t = 0..1);$

$> T02 := 1/2! * int(0 * (t - 0)\hat{}2, t = 0..1);$

$> T03 := 1/3! * int(0 * (t - 0)\hat{}3, t = 0..1);$

$> T10 := 1/0! * int(0 * (t - 0)\hat{}0, t = 0..1);$

$> T11 := 1/1! * int(0 * (t - 0)\hat{}1, t = 0..1);$

$> T12 := 1/2! * int(0 * (t-0)\hat{}2, t = 0..1);$

$> T13 := 1/3! * int(0 * (t-0)\hat{}3, t = 0..1);$

$> T20 := 1/0! * int(t\hat{}2 * (t-0)\hat{}0, t = 0..1);$

$> T21 := 1/1! * int(t\hat{}2 * (t-0)\hat{}1, t = 0..1);$

$> T22 := 1/2! * int(t\hat{}2 * (t-0)\hat{}2, t = 0..1);$

$> T23 := 1/3! * int(t\hat{}2 * (t-0)\hat{}3, t = 0..1);$

$> T30 := 1/0! * int(0 * (t-0)\hat{}0, t = 0..1);$

$> T31 := 1/1! * int(0 * (t-0)\hat{}1, t = 0..1);$

$> T32 := 1/2! * int(0 * (t-0)\hat{}2, t = 0..1);$

$> T33 := 1/3! * int(0 * (t-0)\hat{}3, t = 0..1);$

$> T := matrix([[1*T00-1, 1*T01, 1*T02, 1*T03], [1*T10, 1*T11-1, 1*T12, 1*T13],$
$[1*T20, 1*T21, 1*T22-1, 1*T23], [1*T30, 1*T31, 1*T32, 1*T33-1]]);$

$> U := matrix([[u(0)], [u(1)], [u(2)], [u(3)]]);$

$> F := matrix([[0], [0], [-1.8], [0]]);$

$> evalm(T\& * U) = matrix(F);$

$> denk1 := -u(0) = 0;$

$> denk2 := -u(1) = 0;$

$> denk3 := (1/3) * u(0) + (1/4) * u(1) - (9/10) * u(2) + (1/36) * u(3) = -1.8;$

$> denk4 := -u(3) = 0;$

$> solve(\{denk1, denk2, denk3, denk4\}, \{u(0), u(1), u(2), u(3)\});$

$> u(x) := 1/0! * 0 * (x-0)\hat{}0 + 1/1! * 0 * (x-0)\hat{}1 + 1/2! * 2 * (x-0)\hat{}2 + 1/3! * 0 * (x-0)\hat{}3;$

BÖLÜM 5

DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında integral denklemlerin tanımları ve çeşitleri ele alınmış, integral denklemlerin diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi gösterilmiş, Fredholm ve Volterra tipi integral denklemlerin Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edilmeye çalışılmıştır. Bu yöntemle, çözümü aranan integral denklemlerdeki fonksiyonların verilen aralıkta N. mertebeden türevlerinin var olması gerektiği anlaşılmaktadır. Taylor serisi yöntemi alınan N değerine göre birkaç türev ve integral hesaplama işleminden sonra bulunan bu değerlerin oluşturduğu lineer denklem sisteminin çözümü sonrasında bulunan değerlerin açılımda yerine yazılması ile yaklaşık çözümün elde edilmesi şeklindedir. Bu çözüm yönteminin integro-diferansiyel denklemlerde de uygulanması mümkündür.

Ayrıca bu tez çalışmasında yaklaşık çözümlerin elde edilmeye çalışıldığı örneklerdeki türev ve integral hesaplamalarında Maple programı kullanışmış olup virgülden sonra 5 basamak ve tablo gösteriminde ise virgülden sonra 10 basamak alınmıştır. Grafik çizimlerinde ise GeoGebra programı kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

Aksoy Y (1983) *İntegral Denklemler.* 166. Sayı, 1. Cilt, ISBN No: 975-461-056-8, Yıldız Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 156 s.

Balcı M (2010) *Matematik Analiz Problemleri 2.* 1. Sayı, ISBN No: 978605355644, Balcı Yayınları, Ankara, 548 s.

Balcı M (2018) *Matematik Analiz 1.* 1. Sayı, ISBN No: 9786053556480, Palme Yayınları, Ankara, 362 s.

Bayın S Ş (2004) *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler.* 2. Sayı, ISBN No: 975-443-397-6, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık, Ankara, 424 s.

Bayraktar M (2010) *Analiz 1.* 1. Sayı, ISBN No: 6053954125, Nobel Yayıncılık, İstanbul, 582 s.

Bocher M (1926) *An Introduction to the Study of Integral Equations.* 2st edition, ISBN No: 978-1-107-49349-0, Harvard University, Cambridge, 71 pp.

Caferov V (1999) *Analiz.* 2. Cilt, ISBN No: 975-492-841-X, Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Yayınları, Eskişehir, 363 s.

Çelik B (2014) *Maple ve Maple ile Matematik.* 3. Sayı, ISBN No: 9786054798605, Dora Yayıncılık, Bursa, 728 s.

Çiftçi S (2015) *Lineer Cebir.* 1. Sayı, ISBN No: 978-605-9929-73-8, Dora Yayıncılık, Bursa, 430 s.

Dönmez A (2005) *Matematik Analiz 1/2.* 1. Sayı, ISBN No: 975614503x, Doğuş Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, İstanbul, 1154 s.

Eren Ş ve Razbonyalı M (2006) *Lineer Cebir.* 1. Sayı, ISBN No: 9781111125714, Maltepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, İstanbul, 287 s.

Gerard A V (2013) *Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra.* 1st edition, ISBN No: 978-0883857847, American Mathematical Society, Rhode Island, 129 pp.

Hacısalihoğlu H H (2010) *Lineer Cebir.* 9. Sayı, 1. Cilt, ISBN No: 9789759261276, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara, 395 s.

Kotsireas I S (2008) *A Survey on Solution Methods for Integral Equations.* The Ontario Research Centre for Computer Algebra, Ontario, 47 pp.

Özdeğer A ve Özdeğer N (2006) *Analiz Problemleri 1.* 1. Sayı, ISBN No: 9759802988, Tunca Yayınevi, İstanbul, 519 s.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Özdemir Y ve Aksoy Y (1995) *Çözümlü Lineer Cebir Problemleri*. 4. Sayı, ISBN No: 9781111128838, Seç Yayıncılık, Ankara, 291 s.

Rahman M (2007) *İntegral Equations and their Applications.* ISBN No: 978-1-84564-101-6, Dalhousie University, Canada, 356 pp.

Ross S L (1984) *Differantial Equations Part I,* 3st edition, ISBN No: 9780471032946, John Wiley High Education, New York, 816 pp.

Sezer M (1992) *The Solutions of Certain Classes of Fredholm Integral Equations by Means of Taylor Series.* 2. Sayı, 7. Cilt, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakülteleri Dergisi, Bursa, 206 s.

Sezer M (1994) *Taylor Polynomial Solution of Volterra Integral Equations*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 625-633.

Sezer M ve Daşçıoğlu A (2014) *Diferansiyel Denklemler I*. 5. Sayı, ISBN No: 9786052471029, Dora Yayıncılık, Bursa, 292 s.

Shoukralla E S (2018) *Fredholm Integral Equations of the Second Kind.* Future University, Egypt, 101 pp.

Yalçınbaş S, Akkaya T ve Aynigül M (2010) *Laguerre Series Solutions of Fredholm Integral Equations.* 2. Sayı, 26. Cilt, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Kayseri, 131-142.

ÖZGEÇMİŞ

18.09.1984 tarihinde Zonguldak’ ta doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Zonguldak’ ta tamamladı. 2007 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans programından mezun oldu. 2016 yılında başladığı Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans programından 2019 yılında mezun olmuştur. 2009 yılından beri Ticaret Bakanlığında Gümrük Muhafaza Memuru olarak çalışmaya devam etmekte olup evli ve bir çocuk babasıdır.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Ortabağlar Mah. 2. Oğuz Sk. No:2/2 Yıldırım / BURSA.

Tel: (+90) 551 212 44 76
E-posta: beanpole_67@hotmail.com