

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR VE AĞSIZ YEREL PETROV-GALERKİN
YÖNTEMLERİNİN ÇÖZÜM PROSEDÜRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED KEMAL YURTOĞLU

TEMMUZ 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR VE AĞSIZ YEREL PETROV GALERKİN
YÖNTEMLERİNİN ÇÖZÜM PROSEDÜRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammed Kemal YURTOĞLU

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ

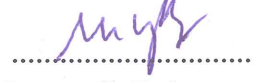
ZONGULDAK
Temmuz 2019

KABUL:

Muhammed Kemal YURTOĞLU tarafından hazırlanan “Sonlu Elemanlar ve Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemlerinin Çözüm Prosedürlerinin Karşılaştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 29/07/2019

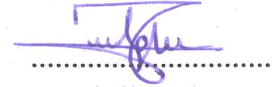
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye : Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



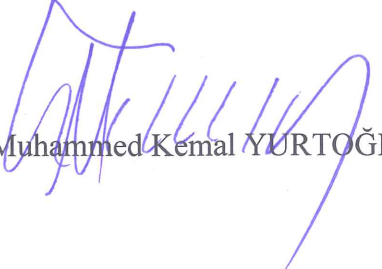
ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”


Muhammed Kemal YURTOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SONLU ELEMANLAR VE AĞSIZ YEREL PETROV-GALERKİN YÖNTEMLERİNİN ÇÖZÜM PROSEDÜRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Muhammed Kemal YURTOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ

Temmuz 2019, 91 sayfa

Tez altı bölümden meydana gelmiş olup, ilk bölümde; kullanılacak temel tanım ve kurallara yer verilmiştir.

İkinci bölümde; nümerik yöntemler ele alınmış, fiziksel problemler için sonlu elemanlar yöntemi ve ağsız yöntemlerde sayısal modellemenin uygulanması hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, çözüm prosedürü verilmiş ve bu prosedüre göre bir boyutlu fiziksel problemlerden; ısıtılan çubuk için sıcaklık değerleri ve yaylardaki yer değiştirme (uzama/sıkışma) değerlerinin hesaplanması problemleri ile iki boyutlu fiziksel problemlerden ısıtılan plaka için, yine sıcaklık değerlerinin hesaplanması problemi örnek olarak incelenmiştir. Eleman denklemleri oluşturulurken kullanılan yöntemlerden kısaca bahsedilerek; doğrudan yaklaşım yöntemi ve en sık kullanılan yöntemlerden biri olan ağırlıklı artıklar yöntemi için eleman denklemlerinin oluşumu araştırılmıştır.

ÖZET (devam ediyor)

Dördüncü bölümde; diğer bir nümerik yaklaşım yöntemi olan ağsız yöntemlerin tarihçesinden, sınıflandırılmasından, özelliklerinden, kategorilerinden ve şekil fonksiyonlarının oluşumundan bahsedilmiştir.

Beşinci bölümünde; ağsız yöntemlerden biri olan ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi ele alınarak, hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonlarının oluşumuna ilişkin çalışmalar yapılmış ve ağırlık fonksiyonunun, şekil fonksiyonuna olan etkileri üzerinde durulmuştur.

Tezin son bölümünde ise; sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar yöntemi, Galerkin yöntemi, ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi, hareketli en küçük kareler yaklaşımı.

Bilim Kodu: 403.06.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

THE COMPARISON OF SOLUTION PROCEDURES OF THE METHODS OF FINITE ELEMENTS AND MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN

Muhammed Kemal YURTOĞLU

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIZ

July 2019, 91 pages

This thesis consists of six chapters, which is basic definitions and rules are used in the first chapter.

In the second chapter, numerical methods are considered, finite element method for physical problems and information about application to numerical modeling in meshless methods are given.

In the third chapter, using finite element method, solution procedure is given and according to this procedure; the problem of calculating the temperature values and the displacement (extension/compression) values of the springs for the heated rod, which are one dimensional physical problems, and the problem of calculating the temperature values for the heated plate, which is two dimensional physical problem, are examined as an example. By briefly mentioning the methods used in creating element equations; the formation of element

ABSTRACT (continued)

equations for the direct approach method and one of the most commonly used methods, the weighted residues method, were investigated.

In the fourth section; meshless methods, which are another important numerical approximation method, also the history of the meshless methods, classification, properties, categories and the formation of shape functions are mentioned.

In the fifth chapter, the local Petrov-Galerkin method, which is one of the meshless methods, is studied and the studies on the formation of the shape functions of the moving least squares approximation have been made and the effects of the weight function on the shape function are considered.

In the last part of the thesis; conclusions and recommendations are given.

Keywords: Finite elements method, Galerkin method, meshless local Petrov-Galerkin method, moving least squares approximation.

Science Code: 403.06.00

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanmasında ve her aşamasında değerli vakitlerini ayıran danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ' a ve her zaman fikirlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN' e en içten teşekkürlerimi sunar, maddi ve manevi olarak beni her zaman destekleyen aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.





İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xvii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
1.1 TEMEL TANIM VE KURALLAR	2
BÖLÜM 2 NÜMERİK YÖNTEMLER	5
2.1 SAYISAL MODELLEME	5
BÖLÜM 3 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ (SEY).....	7
3.1 ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ.....	7
3.1.1 Çözüm Bölgesinin Parçalara Ayrılması	7
3.1.2 Eleman Denklemlerinin Oluşturulması	8
3.1.2.1 Yaklaşım Fonksiyonlarının Seçilmesi ve Şekil Fonksiyonlarının Eldesi	9
3.1.3 Sistem Denkleminin Oluşturulması	11
3.1.4 Sınır Koşullarının Uygulanması.....	12
3.1.5 Çözüm ve Sonuçların Gösterilmesi.....	12
3.2 BİR BOYUTLU PROBLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN UYGULANIŞI	12

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.2.1 Eleman Denklemleri Oluşturulurken Kullanılan Yöntemler	14
3.2.1.1 Doğrudan (Dolaysız (Direkt)) Yaklaşım Yöntemi.....	14
3.2.1.2 Ağırlıklı Artıklar (Kalanlar) Yöntemi	16
3.2.1.3 Varyasyonel Yaklaşım Yöntemi	19
3.2.1.4 Enerji Dengesi Yaklaşım Yöntemi.....	19
3.3 İKİ BOYUTLU PROBLEMLER İÇİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN UYGULANIŞI VE MODELLENMESİ	30
BÖLÜM 4 AĞSIZ YÖNTEMLER	35
4.1 AĞSIZ YÖNTEMLERE GİRİŞ.....	35
4.2 AĞSIZ YÖNTEMLERİN TARİHÇESİ	36
4.3 AĞSIZ YÖNTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI	36
4.3.1 Formülasyon Prosedürüne Göre Sınıflandırma.....	37
4.3.2 Yaklaşım Fonksiyonu Uyumuna Göre Sınıflandırma.....	37
4.3.3 Bölge Gösterimine Göre Sınıflandırma.....	38
4.4 AĞSIZ YÖNTEMLERİN ŞEKİL FONKSİYONLARININ OLUŞUMU.....	38
4.5 AĞSIZ YÖNTEMLERİN ÖZELLİKLERİ	39
4.6 AĞSIZ YÖNTEMLERİN KATEGORİLERİ.....	40
BÖLÜM 5 AĞSIZ YEREL PETROV GALERKİN YÖNTEMİ (AYPGY).....	41
5.1 ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ.....	41
5.2 BÖLGE GÖSTERİMİ.....	42
5.2.1 Çözüm Bölgesi	42
5.2.2 Yaklaşım Bölgesi	43
5.2.3 Etkileşim (Kesişim) Bölgesi.....	44
5.2.4 Destek Bölgesi.....	45
5.2.4.1 Ortalama Düğüm Aralığının Belirlenmesi	46
5.2.4.2 Destek Bölgesinin Şekil Fonksiyonları Açısından Önemi.....	47
5.3 YAKLAŞIM FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI	48
5.3.1 Şekil Fonksiyonlarının Eldesi	48

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
5.3.1.1 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı (HEKY).....	52
5.3.1.2 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı Çözüm Prosedürü.....	52
5.3.1.3 Seçilen Spesifik Bir Nokta İçin Kullanılabilecek Yaklaşım Fonksiyonları.....	54
5.3.1.3.1 Bir Boyutlu Problemlerde, Sabit Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü.....	55
5.3.1.3.2 Bir Boyutlu Problemlerde, Doğrusal Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü	58
5.3.1.3.3 İki Boyutlu Problemlerde, Doğrusal Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü.....	62
5.3.1.3.4 Üç Boyutlu Problemlerde, Doğrusal Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü.....	67
5.3.2 Ağırlık Fonksiyonunun Oluşturulması.....	75
5.3.2.1 Ağırlık Fonksiyonlarının Çeşitleri	75
5.3.2.2 Ağırlık Fonksiyonlarının Çözümüne Olan Etkileri	80
5.4 SİSTEM DENKLEMİNİN OLUŞTURULMASI.....	81
5.5 DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM SİSTEMİ.....	81
5.5.1 Sınır Koşullarının Uygulanması.....	81
5.6 KULLANILAN YÖNTEMİN AVANTAJ VE DEZAVANTAJLARI	84
BÖLÜM 6 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	85
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ	91



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Yamuk Kuralı.....	2
Şekil 2.1 Sonlu elemanlar yönteminde çözüm bölgesi	6
Şekil 2.2 Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesi	6
Şekil 3.1 Isıtılan çubuk için analitik çözüm	14
Şekil 3.2 T, (x_1 ve x_2) arasındaki doğrusal yaklaşım.....	14
Şekil 3.3 Sabit ısı kaynağı ile ısıtılan 20 cm lik çubuk eleman.....	20
Şekil 3.4 Eşit uzunlukta dört eleman ve beş düğüm noktalı çubuk eleman.....	20
Şekil 3.5 Analitik ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması.....	25
Şekil 3.6 Bir ucu sabit, diğeri F kuvveti ile çekilen yaylar	26
Şekil 3.7 Yaya karşılık gelen tek bir eleman.....	26
Şekil 5.1 Çözüm bölgesi ve düğüm noktaları	43
Şekil 5.2 K ve I düğümleri için yaklaşım bölgesi	43
Şekil 5.3 I düğümü için yaklaşım bölgesinin büyüklüğü	43
Şekil 5.4 I düğümünün yaklaşım bölgesinde Gauss kareleme noktaları.....	44
Şekil 5.5 I, K ve M düğümlerinin etkileşim bölgeleri.....	44
Şekil 5.6 Dairesel (Çembersel) destek bölgeleri	45
Şekil 5.7 Dikdörtgensel destek bölgeleri.....	45
Şekil 5.8 Spesifik X noktasını merkez alan destek bölgesi	47
Şekil 5.9 Alan düğümlerini merkez alan destek bölgesi	47
Şekil 5.10 Paskal üçgeni.....	49
Şekil 5.11 Paskal piramidi.....	49
Şekil 5.12 Yaklaşım fonksiyonuna göre düğüm noktalarının durumları	53
Şekil 5.13 Spesifik noktanın örnek dört düğüm noktasına göre durumu	53
Şekil 5.14 Üçüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonu	78
Şekil 5.15 Dördüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonu	79
Şekil 5.16 Gauss ağırlık fonksiyonu	80
Şekil 5.17 Ağırlık fonksiyonlarının şekil fonksiyonlarına göre durumu	80



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 Eleman düğüm yapısının oluşumu	8
Çizelge 3.2 Analitik çözümden elde edilen kesin çözüm değerleri	13
Çizelge 3.3 Analitik ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması.....	25
Çizelge 4.1 Ağsız yöntemlerin sınıflandırılması.....	37
Çizelge 4.2 Ağsız yöntemlerin kategorileri.....	40
Çizelge 5.1 Sonlu elemanlar yöntemi ve ağsız yöntemlere ait çözüm prosedürü.....	41
Çizelge 5.2 Ağırlık fonksiyonlarının durumları	75
Çizelge 5.3 Üçüncü der. Spine ağırlık fonksiyonunun spesifik noktalardaki değerleri.....	79
Çizelge 5.4 Dördüncü der. Spine ağırlık fonksiyonunun spesifik noktalardaki değerleri	79
Çizelge 5.5 Gauss ağırlık fonksiyonunun spesifik noktalardaki değerleri.....	80



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

D_{diag}	: Köşegen matris
d_i	: Köşegen matris elemanları
δ_{ij}	: Kronecker delta
a_{ij}	: Matris elemanları
$u(x)$: Sonlu elemanlar için yaklaşım fonksiyonu
$u^h(x)$: Ağsız yöntemler için bir boyutta yaklaşım fonksiyonu
h	: Destek büyüklüğü
$\phi_i(x)$: i. şekil fonksiyonu
u_i	: i. yer değiştirme değeri
\hat{u}_i	: i. kesin düğüm noktası
$[k]$: Eleman katsayılar matrisi
$[K]$: Toplam katsayılar matrisi/Sistem katsayılar matrisi
F	: Düğüm noktalarına uygulanan dış kuvvet
R	: Artık terim
$W_i(x)$: Ağırlık fonksiyonu
D	: Çözüm bölgesi
$f(x)$: Sabit ısı kaynağı
μ	: Üçgen eleman alan
Ω_I	: I noktası için yerel alt bölge
d_{ort}	: Alan düğümlerinin ortalama düğüm aralığı
r_w	: Etkileşim yarıçapı
a_I	: I noktası için etkileşim bölgesinin büyüklük çarpanı
x_Q	: Ağsız yöntemlerde incelenen merkez nokta
d_s	: Destek bölgesinin büyüklüğü
a_s	: Destek bölgesinin boyutsuz parametresi
A_s	: Tahmini destek bölgesinin alanı

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

V_s	: Tahminin destek bölgesinin hacmi
$P(x)$: Taban vektörü
J	: Ağırlıklandırılmış yerel artık terim
n	: Destek bölgesinde seçilen düğüm sayısı
A	: Moment matrisi
B	: Vandermonde matrisi
m	: Taban vektör sayısı
r_i	: Ağırlık fonksiyonu parametresi
λ	: Sabit şekil parametresi
α	: Penaltı katsayısı

KISALTMALAR

AKY	: Ağsız Kolakasyon Yöntemi
AYPGY	: Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Yöntemi
BPSEY	: Birimsel Parçacık Sonlu Elemanlar Yöntemi
DPHY	: Düzgün Parçacık Hidrodinamiği Yöntemi
EBGY	: Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi
HEKY	: Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı
HRNİY	: Hibrit Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi
RNİY	: Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi
SDY	: Sınır Düğüm Yöntemi
SEY	: Sonlu Elemanlar Yöntemi
SNY	: Sonlu Nokta Yöntemi
SNİY	: Sonlu Nokta İntegral Yöntemi
SRNİY	: Sınır Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi
YRNİY	: Yerel Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi
YSİDY	: Yerel Sınır İntegral Denklemi Yöntemi
YÜÇPY	: Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada; sonlu elemanlar ve ağırsız yöntemlerin çözüm prosedürleri kıyaslanmış, birkaç özellik dışında benzerliklerine dikkat çekilerek, çok boyutlu problemler için temel oluşturulmaya çalışılmıştır.

Her iki yöntemde de; çözüm bölgesindeki modelleme farklılığının, şekil fonksiyonlarının eldesinde de farklılığa neden olacağı vurgulanmıştır. Böylece; yaklaşım, şekil ve ağırsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonlarının davranışları incelenmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminde, bir boyutlu problemlerden ısıtılan çubuk ve yay örnekleri ele alınarak, sıcaklık ve yaylardaki yer değiştirme değerleri araştırılmıştır. İki boyutta da ısıtılan plaka örneği ele alınmıştır.

Ağırsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi şekil fonksiyonlarının eldesinde; uygulama açısından verimli olan, hareketli en küçük kareler yaklaşımı çözüm prosedürü ele alınarak, spesifik bir noktada; bir, iki ve üç boyutlu problemlere yapılan sabit, doğrusal, karesel ve kübik yaklaşımlar hakkında bilgi verilmiştir. Bir boyutlu problemler için, sabit ve doğrusal yaklaşım; iki ve üç boyutlu problemlerde ise doğrusal yaklaşım, yaklaşım fonksiyonu olarak ele alınmıştır. Karesel ve kübik yaklaşımların, yaklaşım fonksiyonu olarak seçilmesi ile oluşacak matris elemanlarının, uygulamada daha da karmaşık yapılara sahip olabileceği değerlendirilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü dereceden spline fonksiyonları ile Gauss fonksiyonu için belirlenen etkileşim yarıçapı doğrultusunda, ağırlık fonksiyonlarının durumları incelenmiştir.

Yapılan sayısal hesaplamaların bazı ara işlemleri, Scientific WorkPlace 5.5 paket programı kullanılarak elde edilmiştir.

1.1 TEMEL TANIM VE KURALLAR

Tanım 1.1 (Cramer Kuralı) Aşağıda matris formunda;

$$\check{A}.x = b$$

yazılan denklem takımı, daha açık şekilde yazılacak olursa;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

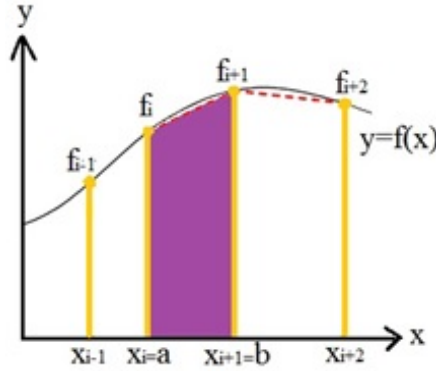
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots = \dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

dir ve çözümü $i = \overline{1, n}$ için, $x_i = \frac{|\check{A}_i|}{|\check{A}|}$ dir. Burada, $|\check{A}_i|$ katsayılar matrisinin i . sütunu silinerek, yerine b vektörünün konulması ile oluşan matrisin determinantıdır. $|\check{A}|$ ise katsayılar matrisinin determinantıdır ve sistemin tek çözümünün olması için, $|\check{A}| \neq 0$ olmalıdır [1-3].

Tanım 1.2 (Yamuk Kuralı) x eksenine bir $y = f(x)$ eğrisi arasında kalan alan, eğri- den x eksenine şeritler çizilmek suretiyle, parçalara ayrılarak; eğri altındaki bu alanların hesaplanabilmesi adına, değişik yaklaşımlar yapmak mümkündür.



Şekil 1.1 Yamuk Kuralı.

Örneğin; eğri altında kalan alan dikdörtgen kabul edilerek, dikdörtgenin üst köşelerinden birisi ya da üst kenarının orta noktası eğri ile karşılaştırılabilir veya şerit kenarlarının eğriyi kestiği komşu noktalar arasında yer alan bir doğru parçası alınarak, şerit bölge bir dik yamuk olarak kabul edilebilir. Bu ise, eğrinin birinci dereceden bir yaklaşım polinomu ile temsil edilmesi demektir. Bu durumda, $i = \overline{1, n}$ ve $[x_i, x_{i+1}]$ aralığındaki integral değeri;

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \frac{f_{i+1} + f_i}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu kurala yamuk kuralı denir [2, 4-5].

Tanım 1.3 (Çeşitli matris tipleri ve özellikleri) Elemanları a_{ij} olan, $m \times n$ tipi bir \check{A} matrisi $i = \overline{1, m}$ ve $j = \overline{1, n}$ için;

$$\check{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

şeklinde gösterilir. Burada $m = n$ olması halinde, bu matrise kare matris denir. Köşegen elemanları hariç diğer elemanlar 0 ise, köşegen ya da diagonal matris olarak adlandırılır. $D_{diag} = \text{kös}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ şeklinde ifade edilir. Birim matris ise, köşegen matrisin özel hali olup, bu matris I ile gösterilir. Birim matrisin elemanları $I = (\delta_{ij})$ şeklinde yazılabildiğinden, δ_{ij} ifadesine Kronecker delta denir ve $i = j$ iken $\delta_{ij} = 1$ ve $i \neq j$ ise $\delta_{ij} = 0$ dır. Bir kare matrisin elemanları köşegenine göre simetrik ise, simetrik matris denir ve bu matriste $a_{ij} = a_{ji}$ dir. Bir kare matrisin elemanları köşegenine göre anti simetrik ise, bu matrise antisimetrik matris denir ve bu matriste $a_{ij} = -a_{ji}$ olup, köşegen elemanları 0 dır. Köşegenin altında veya üstünde, köşegene paralel belirli sıralardaki elemanlar hariç, diğer elemanları 0 olan matrise ise bant matris denir. Bir a_{ij} şeklindeki matris elemanlarının, a_{ji} şeklinde yer değiştirmesi ile elde edilen matrise, matrisinin transpozesi denir ve \check{A}^T olarak ifade edilir. [1-2, 6].

Tanım 1.4 (Kısmi integrasyon yöntemi) Yöntem, iki fonksiyonun çarpımını integre etmek için kullanılmaktadır. Burada çarpımlardan birini bir diferansiyel olarak almak gerekir. Yani,

$$v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$$

dir. Eğer $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise, bu durumda $f(x)g(x)$ in diferansiyeli,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

tir. Elde edilen bu ifadenin her iki tarafının integralinin alınması ile,

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

ya da

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

olur ve buradan,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

elde edilir. Bu eşitlik, $du = f'(x)dx$ ve $dv = g'(x)dx$ diferansiyellerine göre genellikle;

$$\int u dv = uv - \int v du$$

şeklinde yazılır ve bu ise, kısmi integrasyondur [7].

Tanım 1.5 (Birinci Dereceden Bölünmüş Fark) $P_n(x); x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi $n+1$ farklı noktada f fonksiyonu ile aynı değerleri alan n . dereceden Lagrange polinomu olsun. f fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n noktalarına göre bölünmüş farkları,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

olacak şekilde $i = \overline{0, n}$ için, $a_i(x)$ katsayılarını hesaplama problemi. Dolayısıyla; a_0 katsayısını bulabilmek adına eşitlikte $x = x_0$ yazılırsa;

$$P_n(x_0) = f(x_0) = a_0 = f_0$$

elde edilir. Benzer şekilde, a_1 katsayısını bulabilmek adına eşitlikte $x = x_1$ yazılırsa;

$$P_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$$

bulunur ve bu eşitlikten a_1 katsayısı;

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

şeklinde ve buradan genelleme yapılırsa, $i = \overline{0, n}$ için;

$$f(x_0, x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}, f(x_1, x_2) = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, \dots, f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

şeklinde tanımlanan işlemlere birinci dereceden bölünmüş fark adı verilir [8-9].

BÖLÜM 2

NÜMERİK YÖNTEMLER

Geçmişten günümüze fen bilimciler, birçok bilim dalında geleneksel analitik yöntemlerle uğraşmışlar, çözümü çok zor, hatta imkansız olan fiziksel problemlerle sık sık karşılaşmışlar ve problemin çözümü için nümerik analiz denilen bir çözümleme analizine başvurmuşlardır. Çözümleme analizi, günümüze kadar sonlu elemanlar yöntemi gibi diğer pek çok nümerik yöntemde önemli gelişmeler göstermiş ve son yıllarda da dikkatleri oldukça üzerine çekmiştir. Günümüzde ise, bu alanda çeşitli ağsız yöntemler bilim dallarındaki pek çok probleme uygulanmış, geliştirilmiş ve geliştirilmeye de devam etmektedir.

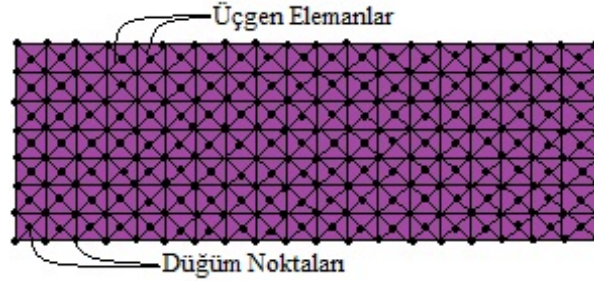
Çözülmesi zor olan, fiziksel problemlerin çözümünde kullanılabilen çok sayıda nümerik yöntem mevcuttur. Tezde, bu nümerik yöntemlerin iki tanesinden; sonlu elemanlar ve ağsız yöntemlerin çözüm prosedürlerinden karşılaştırmalı olarak bahsedilmiştir. Unutulmamalıdır ki; sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen tüm çözümler, ağsız yöntemler kullanılarak elde edilebilir. Ancak, bu durumun tersi her zaman geçerli olmayabilir. Ağsız yöntemlerin avantajı, yöntemin isminden de anlaşılacağı üzere, bu işlemleri düğüm noktaları sayesinde ve ağ yapılarına gerek duymadan yapabilmesidir.

2.1 SAYISAL MODELLEME

Fiziksel olaylar bazen cebirsel, bazen diferansiyel ve bazen de integral denklemler ile ifade edilebilir. Bu denklemler, öncelikle analitik olarak çözülmeye çalışılır. Ancak, karmaşık yapıdaki fiziksel problemlerde, günümüz teknolojilerinden yararlanarak, modelleme ve uygun yöntemler sayesinde çözüm araştırılır. Bu kapsamda tezde, sonlu elemanlar ile ağsız yöntemlerin çözüm bölgesinin modelleme aşamaları incelenecektir.

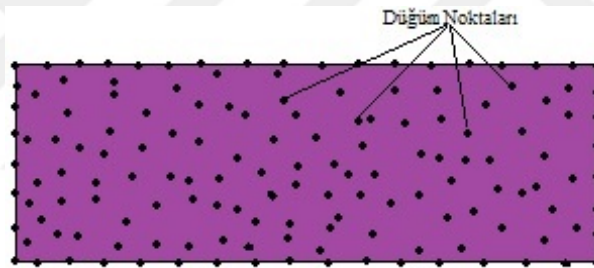
Sonlu elemanlar yönteminin çözüm bölgesi, düğüm noktalarından birbirine bağlanan ve birbiri üzerine geçmeyen, Şekil 2.1 de olduğu gibi, düzgün şekillerle yani elemanlar yardımı ile modellenir. Elemanın iç açıları ve şekli çözümü etkilemesinden dolayı çok önemlidir. Düzgün çözüm bölgelerindeki düğüm noktalarında süreklilik sağlanabilirken, karmaşık

çözüm bölgelerinde sürekliliği sağlamak sanıldığı kadar kolay olmayabilir. Ebatları birbirinden farklı malzemelerin birbirine bağlandığı yerlerde özellikle, sürekli düğüm yapısını oluşturmak zorlu bir süreçtir.



Şekil 2.1 Sonlu elemanlar yönteminde çözüm bölgesi.

Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesi, birbirleri ile ilişkisi olmayan keyfi alan düğümleri sayesinde modellenebildiğinden, sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi, ağ oluşturmak için bir uğraş verilmeyecektir. Bu yöntemde örnek modelleme, aşağıdaki Şekil 2.2 de görülmektedir.



Şekil 2.2 Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesi.

Şekillerden de görüleceği üzere; çözüm bölgelerinin birbirinden farklı modellenmesi, şekil fonksiyonlarının da farklı biçimlerde hesaplanacağı anlamına gelmektedir. Tezde, sonlu elemanlar yöntemi için şekil fonksiyonları Bölüm 3.1.2.1 de, ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi için Bölüm 5.3.1 de ayrıntıları ile ele alınacaktır.

Bir fiziksel problemin modellenebilmesi için öncelikle, problem belirlenmeli ve cebirsel, diferansiyel veya integral denklemler yardımı ile oluşturulan problem, ek şartlar ile desteklenerek, günümüz teknolojileri yardımı ile sayısal modelin temeli oluşturulmalıdır. Sonrasında çözüm için, modele uygun sonlu elemanlar yöntemi, ağsız yöntemler, vb. nümerik yöntemler seçilmeli ve çözüm prosedürleri tanımlandıktan sonra, son olarak elde edilen sonuçlar ile problem analiz edilmelidir.

BÖLÜM 3

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ (SEY)

Bu bölüm, [1,10] numaralı kaynaklar esas alınarak hazırlanmıştır. Sonlu elemanlar; pek çok fiziksel probleme uygulanabildiğinden tezde, bir boyutlu problemlerde sabit ısı kaynağı ile ısıtılan çubuğun sıcaklık değerleri, yaylardaki yer değiştirme değerleri ve yine aynı şekilde iki boyutlu problemlerde bir plakanın sıcaklık değerleri belirlenirken, uygulama açısından verimli ve kullanışlı olmasından dolayı tercih edilmiştir.

3.1 ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ

Bu kısımda, sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedürü incelenecektir. Problemin, sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünün yapılabilmesi için; çözüm bölgesi parçalara ayrılır. Yani, numaralandırma şemasından yararlanarak elemanlar belirlenir ve düğüm noktaları sayesinde eleman denklemleri oluşturulur. Tüm eleman denklemleri birleştirilerek, sistem denklemi elde edilir ve sınır koşullarının da uygulanması ile problem çözülür. Elde edilen sonuçlar grafikler veya şekiller yardımı ile de gösterilebilir ve böylece çözüm prosedürü tamamlanır. Prosedürün ikinci ve en önemli adımı olan; eleman denklemlerinin eldesi, sonlu elemanlar yönteminin temellerini oluşturur [1].

3.1.1 Çözüm Bölgesinin Parçalara Ayrılması


Bu yöntemde çözüm bölgesi; bir boyutta çubuk, iki boyutta çokgen (üçgen, dörtgen, ...), üç boyutta küp gibi isimlendirilen elemanlara düzgün olarak parçalanmalıdır. Elemanlar arasında herhangi bir çakışma ve boşluk olmamalıdır. Aynı zamanda, ağ oluşturulurken süreklilik daima korunmalıdır. Süreklilik korunamaz ve elemanlar birbirinden koparsa, ağ oluşturulamaz. Burada, elemanlar ile düğüm noktalarının birbirlerine civata-somun gibi bağlı olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca tüm çözüm bölgesinde değil de, sadece hassas sonuçlar elde edilecek bölgede ya da çözüm bölgesinin yapısı göz önüne alınarak girinti ve çıkıntının olduğu yerlerde, ağ yapısı sıklaştırılmalı yani, eleman sayısı arttırılmalıdır.

3.1.2 Eleman Denklemlerinin Oluşturulması

Eleman denklemleri oluşturulurken; her eleman için, yaklaşım fonksiyonları geliştirilir. Yani, her eleman için eleman katsayılar (katılık/özellik/rijitlik) matrisleri oluşturulmalıdır. Eleman denklemlerinin oluşturulabilmesi için, bir yaklaşım fonksiyonu seçilmeli ve bu fonksiyonun katsayıları, en iyi yaklaşık çözümü verecek şekilde hesaplanmalıdır. Eleman denklemleri oluşturulmadan; elemanlar ve düğüm noktalarının tamamı, Çizelge 3.1 de olduğu gibi numaralandırılmalıdır. Böylece, hangi düğüm noktasının hangi elemana ait olduğu belirlenir. Eleman denklemleri oluşturulduktan sonra ise; sistem denklemini elde etmek adına, bu eleman denklemleri birbirine birleştirilir. Sonlu elemanlar yönteminin bir boyutlu hali için, uygulanacak örnek problemdeki dört eleman ve beş düğüm noktasının numaralandırma şeması aşağıdaki gibidir:

Çizelge 3.1 Eleman düğüm yapısının oluşumu.

ELEMAN (4 eleman alındığından)	YEREL 1 — 2 Çubuk eleman için iki düğüm noktası arası	GENEL 1 2 3 4 5 Düğüm noktalarının sıralamasına göre
1	{ 1 2	{ 1 2
2	{ 1 2	{ 2 3
3	{ 1 2	{ 3 4
4	{ 1 2	{ 4 5

İki boyutlu problemlerde üçgen eleman olacağından bu kısım: 	İki boyutlu problemlerde üçgen eleman oluşumuna bağlı olarak keyfi şekilde sıralanabilir.
{ 1 2 3	

Eleman denklemlerini oluşturmak için kullanılacak, çok sayıda yöntem mevcuttur. Bunlardan bazıları; doğrudan (dolaysız/direkt) yaklaşım, ağırlıklı artıklar (kalanlar), varyasyonel yaklaşım, enerji dengesi yaklaşım vb. yöntemlerdir ve bu çeşitlilik sonlu

elemanlar yöntemi için bir avantajdır [1]. Bölüm 3.2.1 de, bu yöntemlerin ilk ikisinden ayrıntılı olarak bahsedilecektir.

3.1.2.1 Yaklaşım Fonksiyonlarının Seçilmesi ve Şekil Fonksiyonlarının Eldesi

Bu kısımda; sonlu elemanlar yöntemi şekil fonksiyonlarının, eleman denklemlerinin ve buna bağlı yaklaşım fonksiyonunun oluşumu incelenecektir. Yaklaşım fonksiyonu olarak, genellikle polinomlardan yararlanılacak ve bir boyutlu problemlerde, birinci dereceden bir polinom ya da bir doğru seçilecektir. Bölüm 5.3.1.3 te ele alınacak olan yaklaşımlardan herhangi biri de seçilerek, eleman denklemlerinin oluşturulabileceği unutulmamalıdır. Öncelikle yaklaşım fonksiyonu olarak doğrusal yaklaşım seçilirse;

$$u(x) = a_0 + a_1x \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada; yaklaşım fonksiyonu u bağımlı değişken, x bağımsız değişken ve a_0 ile a_1 de katsayılarıdır. Bu $u(x)$ fonksiyonu, elemanın düğüm noktalarındaki, u_i değerlerini sağlamalıdır. Yani;

$$u_1(x_1) = a_0 + a_1x_1 = u_1, \quad (3.2)$$

$$u_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 = u_2 \quad (3.3)$$

olmalıdır. Böylece, (3.2) eşitliği x_2 ile, (3.3) eşitliği de $-x_1$ ile genişletilerek taraf tarafa toplanırsa buradan, a_0 katsayısı;

$$a_0 = \frac{x_2u_1 - x_1u_2}{x_2 - x_1}$$

elde edilir. Yine, (3.2) eşitliği (-1) ile çarpılır, (3.3) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa buradan, a_1 katsayısı;

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

elde edilir. Bu katsayılar, Cramer kuralı ile de bulunabilir. Bulunan bu katsayılar; $u(x)$ fonksiyonu olarak seçilen (3.1) eşitliğindeki yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u(x) &= a_0 + a_1x = \frac{x_2u_1 - x_1u_2}{x_2 - x_1} + \left(\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \right) x = \frac{x_2u_1 - xu_1 + xu_2 - x_1u_2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}u_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

bulunur. Burada $i = \overline{1, 2}$ için u_i ifadelerinin dışında kalan ifadeler, şekil fonksiyonlarıdır ve ϕ_i olarak ifade edilirse, 1. düğüm noktasına karşılık gelen şekil fonksiyonu;

$$\phi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (3.5)$$

dir ve 2. düğüm noktasına karşılık gelen şekil fonksiyonu ise;

$$\phi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.6)$$

dir. Buradan şekil fonksiyonlarına bağlı doğrusal yaklaşım fonksiyonu da;

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 \phi_i u_i = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 \quad (3.7)$$

biçimindedir ve bu $u(x)$ fonksiyonu, Lagrange'ın birinci dereceden yaklaşım polinomu olup, aynı zamanda $i = \overline{1, 2}$ için düğüm noktalarına karşılık gelen u_i değerleri arasındaki ara değerleri (örnek problemlerde anlatılacak sıcaklık ya da yaylardaki yer değiştirme değerleri gibi) bulmayı sağlar. Burada; n düğüm sayısı olmak üzere, polinomun derecesi $(n - 1)$ ile bulunur ve iki düğüm noktası için $n = 2$ olduğundan, polinomun derecesinin bir olduğu aşikardır.

$$\sum_{i=1}^2 \phi_i(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

olduğu da aşikardır. Böylece (3.7) eşitliğindeki $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli alınır;

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d\phi_1(x)}{dx} u_1 + \frac{d\phi_2(x)}{dx} u_2 \quad (3.8)$$

bulunur ve bu ifadedeki şekil fonksiyonlarının diferansiyelini hesaplayabilmek için (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden yararlanılırsa, sırasıyla;

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1}, \quad (3.9)$$

$$\frac{d\phi_2(x)}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (3.10)$$

dir. Bu ifadeler, (3.8) eşitliğinde yerine yazıldığında, $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli;

$$\frac{du(x)}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} u_2 = \frac{1}{x_2 - x_1} (-u_1 + u_2) = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad (3.11)$$

elde edilir. Bu diferansiyel, düğüm noktalarını birleştiren doğrunun eğimini gösteren birinci dereceden bölünmüş farktır. $u(x)$ fonksiyonunun, $(x_1 - x_2)$ düğüm aralığındaki integrali ise;

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\phi_1 u_1 + \phi_2 u_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 u_1 dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 u_2 dx \quad (3.12)$$

dir ve bu integral, aynı zamanda tabanı $(x_2 - x_1)$ ve yüksekliği u olan bir dik üçgenin alanıdır. Bu integrali hesaplayabilmek için, integralin sağ tarafındaki ilk terim;

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} \phi_1 u_1 dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1(x) dx = u_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} dx = \frac{u_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - x) dx \\
&= \frac{u_1}{x_2 - x_1} \left(x_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{u_1}{x_2 - x_1} \left[x_2^2 - \frac{x_2^2}{2} - \left(x_2 x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) \right] \\
&= \frac{u_1}{x_2 - x_1} \left[\frac{x_2^2}{2} - x_2 x_1 + \frac{x_1^2}{2} \right] = \frac{u_1}{x_2 - x_1} \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} = \frac{u_1 (x_2 - x_1)}{2} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

hesap edildikten sonra, ikinci terim;

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} (\phi_2 u_2) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2(x) dx = u_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{u_2}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) dx \\
&= \frac{u_2}{x_2 - x_1} \left(\frac{x^2}{2} - x_1 x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{u_2}{x_2 - x_1} \left[\frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 - \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1^2 \right) \right] \\
&= \frac{u_2}{x_2 - x_1} \left[\frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right] = \frac{u_2}{x_2 - x_1} \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} = \frac{u_2 (x_2 - x_1)}{2} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bulunan bu eşitlikler (3.12) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} u(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} (\phi_1 u_1 + \phi_2 u_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 u_1 dx + \int_{x_1}^{x_2} \phi_2 u_2 dx \\
&= \frac{u_1 (x_2 - x_1)}{2} + \frac{u_2 (x_2 - x_1)}{2} = (x_2 - x_1) \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifade yamuk kuralı olarak bilinmektedir. Bu kısımdaki eşitlikler, tezin ilerleyen bölümlerindeki örnek problemlerin çözümünde temel teşkil ettiğinden önemlidir.

3.1.3 Sistem Denkleminin Oluşturulması

Eleman denklemleri, matris formunda yazılabilen doğrusal denklem takımları içerir. Yani,

$$[k] \{u\} = \{F\} \quad (3.16)$$

dir ve burada $[k]$ ile eleman katsayılar matrisi, $\{u\}$ ile düğümler arasındaki bilinmeyenlerin sütun vektörü ve $\{F\}$ ile de, düğüm noktalarına uygulanan dış kuvveti (çekme/sıkıştırma, ısı verme gibi) gösteren sütun vektörü ifade edilir. Tek bir eleman için, (3.16) eşitliğindeki gibi, matris formunda oluşturulacak eleman denklemlerinin tamamı birleştirildiğinde oluşan sistem denklemleri, matris formunda;

$$[K] \{u^*\} = \{F^*\} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[K]$ ile toplam katsayılar matrisi ya da sistem katsayılar matrisi; $\{u^*\}$ ile tüm düğümler arasındaki bilinmeyenlerin toplamının sütun vektörü ve

$\{F^*\}$ ile de; düğüm noktalarına uygulanmış dış kuvveti gösteren sütun vektörü ifade edilmekte olup, tüm eleman denklemlerinin birleştirilmesi ile elde edildiğini vurgulamak için * işareti ile gösterilmiştir. Bu kısımda; dikkat edilmesi gereken en önemli husus, eleman denklemlerinin birleştirilmesi aşamasında süreklilik kavramıdır.

3.1.4 Sınır Koşullarının Uygulanması

Bu kısımda, (3.17) eşitliğindeki gibi elde edilen sistem denkleminin çözümüne geçilmeden önce, sınır koşulları dahil edilerek sistem güncellenmelidir. Bu işlemin gerçekleştirilmesi ile yeni matris;

$$[\overline{K}] \{u^*\} = \{\overline{F^*}\} \quad (3.18)$$

şeklinindedir. Buradaki üst çizgiler, sınır koşullarının dahil edildiği anlamına gelmektedir.

3.1.5 Çözüm ve Sonuçların Gösterilmesi

Eleman denklemlerinin birleştirilmesi ve sınır koşullarının sistem denklemine dahil edilmesi ile; (3.18) eşitliği bant matris olacak biçimde düzenlenerek, çözüm gerçekleştirilir. Elde edilen sonuçlar, daha sonra grafikler veya çizelgeler yardımı ile gösterilebilir. Ayrıca farklı değişkenler seçilerek, yine aynı adımlar incelenebilir. Prosedür, çok geneldir ve sonlu elemanlar yönteminin pek çok uygulamasına uygundur.

3.2 BİR BOYUTLU PROBLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN UYGULANIŞI

Aşağıdaki bir boyutlu örnek problemde; sabit ısı kaynağı ve sabit sınır koşulları altında ısıtılan bir çubuğun, sıcaklık değerleri analitik olarak incelenerek, sonlu elemanlar için temel teşkil edecek bilgiler verildikten sonra, sonlu elemanlar yönteminden yararlanılarak aynı örnek problem çözülmeye çalışılacak ve bulunan sıcaklık değerlerindeki değişim analiz edilebilecektir. Sıcaklık değerlerindeki değişim için, eleman denklemleri oluşturulurken Poisson denkleminde yararlanılarak çözüm yapılacaktır. Örnek problemlerin incelenmesi ile sonlu elemanlar yöntemi için çözüm prosedürünün çok daha büyük boyutlara uygulanma imkanı bulunabilecek ve sonlu elemanlar yönteminin olumlu ya da olumsuz sonuçları tartışılabilecektir.

Problem 3.1 *Sınır koşulları;*

$$T(0, t) = 50 \text{ ve } T(20, t) = 500$$

ve sabit ısı kaynağı $f(x) = 10$ olan, 20 cm uzunluğundaki bir çubuğun, dört eşit parçaya bölündüğü varsayılarak, beş noktadaki sıcaklık değerlerinin Poisson denkleminde yararlanarak elde edilmesi.

Poisson denklemi;

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -f(x) \quad (3.19)$$

şeklinde olup, kesin çözümün;

$$T(x, t) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \quad (3.20)$$

şeklinde olduğu varsayılırsa, bu durumda (3.20) eşitliğinin iki kez diferansiyelinin alınması ve verilen ek koşulun ($f(x) = 10$) yerine yazılması ile;

$$T' = \frac{dT(x)}{dx} = 2a_0x + a_1,$$

$$T'' = \frac{d^2T(x)}{dx^2} = 2a_0 = -10 \implies a_0 = -5$$

a_0 katsayısı bulunur. Diğer katsayılar da sınır koşulları yardımı ile hesaplanırsa;

$$T(x, t) = -5x^2 + a_1x + a_2$$

$$T(0, t) = -5 \times 0 + a_1 \times 0 + a_2 = 50 \implies a_2 = 50$$

$$T(20, t) = -5 \times 20^2 + a_1 \times 20 + 50 = 500 \implies a_1 = 122.5$$

a_1 ve a_2 katsayıları bulunur ve bu katsayıların, (3.20) eşitliğinde yerine yazılması ile;

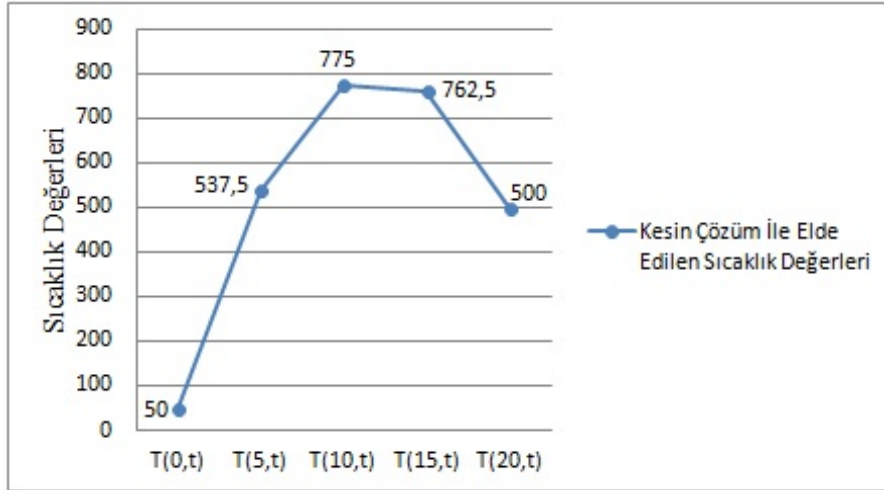
$$T(x, t) = -5x^2 + 122.5x + 50 \quad (3.21)$$

kesin çözümü elde edilir. Böylece, 20 cm uzunluğundaki çubuğun dört eşit parçaya bölünmesi ile elde edilen beş düğüm noktasındaki sıcaklık değerleri, Çizelge 3.2 de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2 Analitik çözümden elde edilen kesin çözüm değerleri.

$T(x, t)$	Kesin Çözüm İle Elde Edilen Sıcaklık Değerleri
$T(0, t)$	50
$T(5, t)$	537.5
$T(10, t)$	775
$T(15, t)$	762.5
$T(20, t)$	500

Bu sonuçlar, grafik yardımı ile gösterilecek olursa;



Şekil 3.1 Isıtılan çubuk için analitik çözüm.

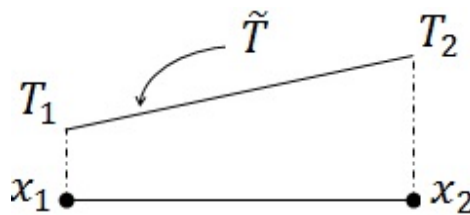
şeklinde. Problem 3.1 de; kesin çözümü veren denklem elde edilerek, istenen aralıklardaki sıcaklık değerleri bulunduğundan sonra, çizelge ve grafik yardımı ile de gösterilmiştir.

3.2.1 Eleman Denklemleri Oluşturulurken Kullanılan Yöntemler

Bölüm 3.1.2 de, eleman denklemleri oluşturulurken kullanılacak çok sayıda yöntemin varlığından bahsedilmiştir. Bu kısımda, doğrudan yaklaşım yöntemi ve devamında ise en sık kullanılan ağırlıklı artıklar yöntemi üzerinde ayrıntılı olarak durulacaktır. Söz konusu diğer yöntemler; varyasyonel yaklaşım ve enerji dengesi yaklaşım yönteminden de kısaca bahsedilecektir.

3.2.1.1 Doğrudan (Dolaysız/Direkt) Yaklaşım Yöntemi

Bu yöntemde; genellikle fiziksel problemler baz alındığından, yöntemin diğer bir adı da, fiziksel yaklaşım yöntemidir ve eleman denklemleri oluşturulurken kullanılan yöntemler arasında uygulama kolaylığı nedeniyle ilk ele alınmaktadır [1]. Isı kaynağı $f(x) = 0$ olduğunda yani, dış kuvvetin olmadığı ya da pasif olduğu durumlarda, eleman denklemlerinin eldesi için bu yöntem çok kullanışlıdır.



Şekil 3.2 \tilde{T} , (x_1 ve x_2) arasındaki doğrusal yaklaşım.

Şekil 3.2 den yola çıkılarak, 1. ve 2. düğüm noktaları arasındaki ilk elemana karşılık gelen yaklaşım fonksiyonu $\tilde{T}(x)$;

$$\tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^2 \phi_i T_i = \phi_1 T_1 + \phi_2 T_2 \quad (3.22)$$

şeklindedir ve bilinen ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerinin eşitlikte yerine yazılması ile $\tilde{T}(x)$ fonksiyonu;

$$\tilde{T}(x) = \phi_1 T_1 + \phi_2 T_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T_2 \quad (3.23)$$

şeklindedir ve bu fonksiyonun diferansiyeli alınır ki burada, ϕ_1 ve ϕ_2 nin diferansiyeli (3.9) ve (3.10) eşitliklerinde hesaplandığından, doğrudan yerine yazılarak;

$$\frac{d\tilde{T}(x)}{dx} = \frac{d\phi_1}{dx} T_1 + \frac{d\phi_2}{dx} T_2 = \frac{-1}{x_2 - x_1} T_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} T_2 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (3.24)$$

bulunur ve bu diferansiyel, ısı akısı ve sıcaklık arasındaki bağıntıyı belirleyen Fourier denkleminde yerine yazılırsa, eleman denklemleri elde edilebilir. Fourier denklemi;

$$q = -k' \frac{dT(x)}{dx} = -k' \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, q ısı akısı ve k ısı iletimi katsayısıdır. Dolayısıyla, 1. düğüm noktasındaki ısı akısı q_1 ve 2. düğüm noktasındaki ısı akısı q_2 şeklinde ifade edilirse,

$$q_1 = -k' \frac{dT(x)}{dx} = -k' \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.26)$$

$$q_2 = k' \frac{dT(x)}{dx} = k' \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (3.27)$$

biçiminde yazılabilir. Elde edilen bu eşitlikler, istenilen eleman denklemlerini oluşturur. Fourier denkleminin; uçlardaki q_1 ve q_2 ısı akıları, sınırdaki sıcaklık değişimi cinsinden ifade etmek için kullanılabileceği düşünüldüğünde,

$$q_1 = -k' \frac{dT(x_1)}{dx}, \quad (3.28)$$

$$q_2 = k' \frac{dT(x_2)}{dx} \quad (3.29)$$

gibi yazılabilir. Bu son eşitlikler, sırasıyla (3.26) ve (3.27) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} q_1 &= -k' \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = -k' \frac{dT(x_1)}{dx} \\ \Rightarrow \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} &= -\frac{dT(x_1)}{dx} \Rightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} [T_1 - T_2] = -\frac{dT(x_1)}{dx}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= k' \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = k' \frac{dT(x_2)}{dx} \\ \Rightarrow \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} &= \frac{dT(x_2)}{dx} \Rightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} [-T_1 + T_2] = \frac{dT(x_2)}{dx} \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.30) ve (3.31) eşitlikleri matris biçiminde yazılacak olursa;

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{dT(x_1)}{dx} \\ \frac{dT(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

bulunur ve bu eşitliğin, (3.16) eşitliği ile aynı biçimde olduğu görülür. Dolayısıyla, tek bir eleman için matris eşitliği elde edilir. Eleman denklemlerini bu yolla oluşturmak, çoğu zaman sanıldığı kadar kolay olmayabilir. Bunun için, aşağıda ayrıntıları verilecek olan ve uygulamalarda çok sık karşılaşılan, ağırlıklı artıklar yöntemi geliştirilmiştir.

3.2.1.2 Ağırlıklı Artıklar (Kalanlar) Yöntemi

Bu kısımda; eleman denklemleri oluşturulurken en sık kullanılan ağırlıklı artıklar yöntemi üzerinde durulacaktır. Bu yöntemde; yaklaşık çözümün, denklemde yerine yazılması ile elde edilecek kalan üzerinden işlem yapılmaktadır [1]. Eleman denklemleri oluşturulurken (3.19) eşitliğinde belirtilen Poisson denkleminde yararlanılırsa ki bu denklem;

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -f(x)$$

şeklinde idi ve bu denklem yeniden düzenlenirse;

$$0 = \frac{d^2T(x)}{dx^2} + f(x) \quad (3.33)$$

olur. Ancak bu ifade de eşitliğin sol tarafı sıfır değil, bir artığa (bundan sonra artık terim R ile ifade edilecek) ya da diğer bir ifade ile bir kalana eşit olacaktır. Yani,

$$R = \frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} + f(x) \quad (3.34)$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla, bu kısımda anlatılan ağırlıklı artıklar yöntemi; aşağıdaki genel biçime göre, artıklar için bir minimum bulmayı içerir. $i = \overline{1, n}$ için;

$$\int_D RW_i dD = 0 \quad (3.35)$$

dır. Burada, D çözüm bölgesidir ve $[x_1, x_n]$ kapalı aralığı çözüm bölgesi olarak düşünülebilir. W_i ise ağırlık fonksiyonudur. Sonlu elemanlar yönteminde; $i = 1, 2$ için ϕ_i fonksiyonları, ağırlık fonksiyonlarının yerine kullanılır. Yani,

$$W_i = \phi_i \quad (3.36)$$

olarak seçilir ve (3.35) eşitliğinde yerine yazılırsa, Galerkin yöntemi;

$$\int_D R\phi_i dD = 0 \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir. Bu kapsamda; (3.34) eşitliği ile verilen R , son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \int_D R\phi_i dD &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} + f(x) \right) \phi_i(x) dx \quad , i = 1, 2 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} \phi_i(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_i(x) dx = 0, \\ &\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \phi_i(x) \frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_i(x) dx \end{aligned} \quad (3.38)$$

bulunur. Eşitliğinin, sol tarafındaki ifadeyi hesaplamak adına, kısmi integral yönteminden yararlanılırsa burada, $\phi_i(x) = u$ ve $\frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} dx = dv$ olacaktır. Böylece,

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi_i(x) \frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} dx = \phi_i(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx \quad (3.39)$$

elde edilir ve formülasyondaki ikinci dereceden diferansiyel, birinci dereceden diferansiyele düşürülmüştür. Bulunan bu eşitlik, (3.38) eşitliğinde yerine yazıldığında;

$$\phi_i(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_i(x) dx \quad (3.40)$$

elde edilir ve buradaki terimler, ayrı ayrı hesaplanabilir. Dolayısıyla, eşitliğin ilk terimi $i = \overline{1, 2}$ için ayrı ayrı hesaplanacaktır. İlk olarak, $i = 1$ için;

$$\phi_1(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \phi_1(x_2) \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - \phi_1(x_1) \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir ve eşitlikteki $\phi_1(x)$ ifadesi, (3.5) eşitliğinde tanımlanmıştır;

$$\phi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

burada tekrar hatırlanarak,

$$\phi_1(x_2) = \frac{x_2 - x_2}{x_2 - x_1} = 0 \text{ ve } \phi_1(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 \quad (3.42)$$

ifadeleri bulunur ve bu ifadeler (3.41) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\phi_1(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \phi_1(x_2) \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - \phi_1(x_1) \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} = - \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \quad (3.43)$$

elde edilir. Bu kapsamda, (3.40) eşitliğinin ilk terimi, $i = 2$ için;

$$\phi_2(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \phi_2(x_2) \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - \phi_2(x_1) \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \quad (3.44)$$

şeklinde yazılabilir ve eşitlikteki $\phi_2(x)$ ifadesi, (3.6) eşitliği ile verilmişti;

$$\phi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

burada tekrar yazılarak,

$$\phi_2(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 \text{ ve } \phi_2(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \quad (3.45)$$

ifadeleri bulunur ve bu ifadeler (3.44) eşitliğinde yerine konulursa;

$$\phi_2(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \phi_2(x_2) \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - \phi_2(x_1) \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.43) ve (3.46) eşitlikleri, (3.40) eşitliğinde yazılarak, $i = 1$ için düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \phi_1(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \phi_1(x) dx, \\ - \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \phi_1(x) dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx &= - \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \phi_1(x) dx \end{aligned} \quad (3.47)$$

$i = 2$ için düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \phi_2(x) \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \phi_2(x) dx, \\ \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \phi_2(x) dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx &= \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \phi_2(x) dx \end{aligned} \quad (3.48)$$

bulunur. $\tilde{T}(x)$ fonksiyonunun, doğrusal yapısı diferansiyel ve integral almayı kolaylaştırır.

Bu kapsamda, (3.24) eşitliği ile belirtilen $\tilde{T}(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli;

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} &= \frac{d\phi_1}{dx} T_1 + \frac{d\phi_2}{dx} T_2 \\ &= \frac{-1}{x_2 - x_1} T_1 + \frac{1}{x_2 - x_1} T_2 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

tekrar hatırlanmalıdır. Bu diferansiyeller (3.47) eşitliğinin ilk teriminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \frac{-1}{x_2 - x_1} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{T_1 - T_2}{(x_2 - x_1)^2} dx \\ &= \frac{T_1 - T_2}{(x_2 - x_1)^2} x \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{T_1 - T_2}{(x_2 - x_1)^2} (x_2 - x_1) = \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}\end{aligned}\quad (3.49)$$

bulunur. Bu diferansiyeller (3.48) eşitliğinin ilk teriminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}(x)}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{T_2 - T_1}{(x_2 - x_1)^2} dx \\ &= \frac{T_2 - T_1}{(x_2 - x_1)^2} x \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{T_2 - T_1}{(x_2 - x_1)^2} (x_2 - x_1) = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}\end{aligned}\quad (3.50)$$

bulunur. (3.49) ve (3.50) eşitlikleri, sırasıyla (3.47) ve (3.48) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx = \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_1(x) dx, \quad (3.51)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} dx = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_2(x) dx \quad (3.52)$$

bulunur ve matris formunda yeniden yazılırsa, eleman denklemlerinin son hali;

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \\ \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_2(x) dx \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

olur. Burada dikkat edilecek olursa, eşitliğin sol tarafı eleman katsayılar matrisidir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sınır koşullarını, ikinci terim ise dış kuvvetleri ifade etmektedir. Buraya kadar yapılan işlemler, çubuk elemanın sadece ilk elemanı içindir. Diğer üç eleman, yani; $(x_2 - x_3)$, $(x_3 - x_4)$ ve $(x_4 - x_5)$ içinde, aynı işlemler tekrarlanır. Bu kapsamda; Problem 3.2 de, diğer elemanların nasıl oluşturulduğu gösterilecektir.

3.2.1.3 Varyasyonel Yaklaşım Yöntemi

Bu yaklaşımın, diğer bir adı da matematiksel yaklaşımdır ve çeşitli hesaplamalar ile en iyi yaklaşım fonksiyonunun elde edilmesi sağlanır. Bu yaklaşım, hem basit hem de karmaşık yapıdaki eleman tiplerine uygulanabilmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin çok büyük boyutlara genişletilmesinde, önemli bir yer teşkil eder [1].

3.2.1.4 Enerji Dengesi Yaklaşım Yöntemi

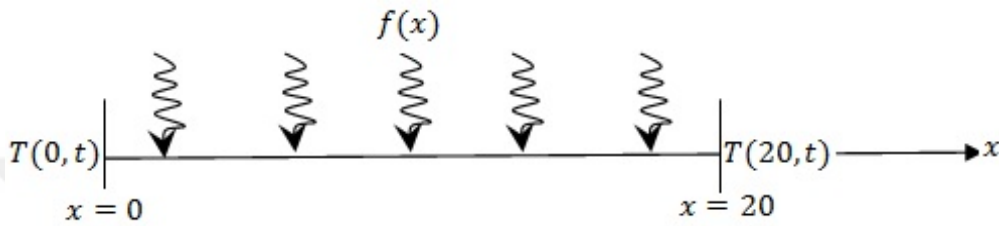
Bu yaklaşım; Bölüm 3.2.1.2 de ayrıntısı verilen ağırlıklı artıklar yöntemindeki ağırlıklı artık yerine, sistemin ısı veya mekanik enerji dengesini kullanılarak, eleman denklemlerini oluşturabilen yöntemlerdendir [1].

Problem 3.2 *Sınır koşulları;*

$$T(0, t) = 50 \text{ ve } T(20, t) = 500$$

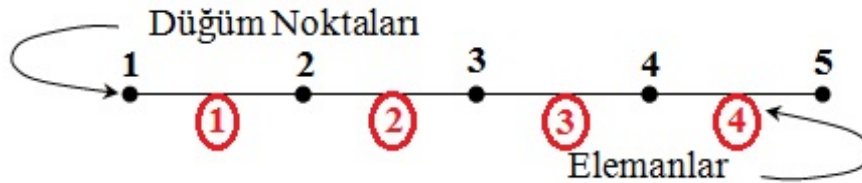
ve sabit ısı kaynağı $f(x) = 10$ şeklinde verilmekte olan, 20 cm uzunluğundaki bir çubuğun; 5 cm uzunluğundaki dört elemana bölünerek, (3.53) eşitliğinden de faydalanarak eleman denklemlerinin oluşturulması.

Aşağıda, sabit ısı kaynağı ile ısıtılan 20 cm uzunluğundaki çubuk modeli;



Şekil 3.3 Sabit ısı kaynağı ile ısıtılan 20 cm lik çubuk eleman.

verilmiş olup, buradan yola çıkarak; aşağıda Poisson denkleminin bir boyutlu formu ile sonlu elemanlar yöntemi için çözüm bölgesinin modeli gösterilmektedir. Sistemi basit bir şekilde modellemek için; 20 cm uzunluğundaki bir çubuk eşit uzunlukta dört eşit elemana bölünerek, beş düğüm noktası oluşturulmuştur.



Şekil 3.4 Eşit uzunlukta dört eleman ve beş düğüm noktalı çubuk eleman.

Çubuk eleman dört eşit parçaya bölündüğünden, düğüm noktaları sırası ile, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 10$, $x_4 = 15$ ve $x_5 = 20$ cm e karşılık gelmek üzere, bu düğüm noktalarındaki sıcaklık değerlerinin hesaplanırken, (3.53) eşitliğinden yararlanarak eleman denklemleri oluşturulacaktır. Bu kapsamda ilk olarak; $(x_1 - x_2)$ düğüm aralığındaki birinci elemana ait eleman denklemleri oluşturulacaktır. Burada x_2 ve x_1 düğümleri arasındaki mesafenin 5 cm olduğuna dikkat ederek (3.53) eşitliğinden,

$$\frac{1}{x_2 - x_1} (T_1 - T_2) = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_1(x) dx, \quad (3.54)$$

$$\frac{1}{x_2 - x_1} (-T_1 + T_2) = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_2(x) dx \quad (3.55)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sağındaki ikinci terimler, öncelikli olarak sırasıyla hesaplanırsa;

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_1(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} 10 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} dx = \int_0^5 10 \frac{5 - x}{5 - 0} dx = 25,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_2(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} 10 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \int_0^5 10 \frac{x - 0}{5 - 0} dx = 25$$

bulunur. Diğer parametre değerleri ile birlikte, bu sonuçlar sırasıyla (3.54) ve (3.55) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$0.2(T_1 - T_2) = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25 \Rightarrow 0.2T_1 - 0.2T_2 = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25, \quad (3.56)$$

$$-0.2(T_1 - T_2) = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25 \Rightarrow -0.2T_1 + 0.2T_2 = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25 \quad (3.57)$$

elde edilir. Bulunan bu değerler matris formunda;

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25 \\ \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $(x_2 - x_3)$, $(x_3 - x_4)$ ve $(x_4 - x_5)$ düğüm aralıklarındaki ikinci, üçüncü ve dördüncü elemana ait eleman denklemleri, yine aynı şekilde (3.53) eşitliği kullanılarak oluşturulacaktır. Bu kapsamda ikinci olarak; $(x_2 - x_3)$ düğüm aralığındaki ikinci elemana ait eleman denklemi oluşturulacaktır. Burada x_3 ve x_2 düğümleri arasındaki mesafenin 5 *cm* olduğuna dikkat ederek (3.53) eşitliğinden,

$$\frac{1}{x_3 - x_2}(T_2 - T_3) = -\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\phi_2(x) dx, \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{x_3 - x_2}(-T_2 + T_3) = \frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\phi_3(x) dx \quad (3.59)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sağındaki ikinci terimler, öncelikli olarak sırasıyla hesaplanırsa;

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\phi_2(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} 10 \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} dx = \int_5^{10} 10 \frac{10 - x}{10 - 5} dx = 25,$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\phi_3(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} 10 \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} dx = \int_5^{10} 10 \frac{x - 5}{10 - 5} dx = 25$$

bulunur. Diğer parametre değerleri ile birlikte, bu sonuçlar sırasıyla (3.58) ve (3.59) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$0.2(T_2 - T_3) = -\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25 \Rightarrow 0.2T_2 - 0.2T_3 = -\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25, \quad (3.60)$$

$$-0.2(T_2 - T_3) = \frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25 \Rightarrow -0.2T_2 + 0.2T_3 = \frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25 \quad (3.61)$$

elde edilir. Sistem denkleminin elde edilmesi için, buraya kadar olan eleman denklemleri birleştirilerek, yeniden matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.2 + 0.2 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25 \\ 25 + 25 \\ \frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu kapsamda, üçüncü olarak; $(x_3 - x_4)$ düğüm aralığındaki üçüncü elemana ait eleman denklemi oluşturulacaktır. Burada x_4 ve x_3 düğümleri arasındaki mesafenin 5 cm olduğuna dikkat ederek (3.53) eşitliğinden,

$$\frac{1}{x_4 - x_3} (T_3 - T_4) = -\frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\phi_3(x) dx, \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{x_4 - x_3} (-T_3 + T_4) = \frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\phi_4(x) dx \quad (3.63)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sağındaki ikinci terimler, öncelikli olarak sırasıyla hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \int_{x_3}^{x_4} f(x)\phi_3(x) dx &= \int_{x_3}^{x_4} 10 \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} dx = \int_{10}^{15} 10 \frac{15 - x}{15 - 10} dx = 25, \\ \int_{x_3}^{x_4} f(x)\phi_4(x) dx &= \int_{x_3}^{x_4} 10 \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} dx = \int_{10}^{15} 10 \frac{x - 10}{15 - 10} dx = 25 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer parametre değerleri ile birlikte, bu sonuçlar sırasıyla (3.62) ve (3.63) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$0.2 (T_3 - T_4) = -\frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25 \Rightarrow 0.2T_3 - 0.2T_4 = -\frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25, \quad (3.64)$$

$$-0.2 (T_3 - T_4) = \frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25 \Rightarrow -0.2T_3 + 0.2T_4 = \frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25 \quad (3.65)$$

elde edilir. Sistem denklemini elde etmek için, buraya kadarki eleman denklemleri yeniden birleştirilerek, matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.2 + 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25 \\ 50 \\ 25 + 25 \\ \frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve bu kapsamda son olarak; $(x_4 - x_5)$ düğüm aralığındaki dördüncü elemana ait eleman denklemi oluşturulacaktır. Burada x_5 ve x_4 düğümleri arasındaki mesafenin 5

cm olduğuna dikkat ederek (3.53) eşitliğinden,

$$\frac{1}{x_5 - x_4} (T_4 - T_5) = -\frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + \int_{x_4}^{x_5} f(x)\phi_4(x) dx, \quad (3.66)$$

$$\frac{1}{x_5 - x_4} (-T_4 + T_5) = \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} + \int_{x_4}^{x_5} f(x)\phi_5(x) dx \quad (3.67)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sağındaki ikinci terimler, öncelikli olarak sırasıyla hesaplanırsa;

$$\int_{x_4}^{x_5} f(x)\phi_4(x) dx = \int_{x_4}^{x_5} 10 \frac{x_5 - x}{x_5 - x_4} dx = \int_{15}^{20} 10 \frac{20 - x}{20 - 15} dx = 25,$$

$$\int_{x_4}^{x_5} f(x)\phi_5(x) dx = \int_{x_4}^{x_5} 10 \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} dx = \int_{15}^{20} 10 \frac{x - 15}{20 - 15} dx = 25$$

bulunur. Diğer parametre değerleri ile birlikte, bu sonuçlar sırasıyla (3.66) ve (3.67) eşitliklerinde yerine yazılırsa, sırasıyla;

$$0.2(T_4 - T_5) = -\frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25 \Rightarrow 0.2T_4 - 0.2T_5 = -\frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25, \quad (3.68)$$

$$-0.2(T_4 - T_5) = \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} + 25 \Rightarrow -0.2T_4 + 0.2T_5 = \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} + 25 \quad (3.69)$$

elde edilir. Buraya kadarki eleman denklemleri son kez birleştirilerek, yeniden matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 + 0.2 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25 \\ 50 \\ 50 \\ 25 + 25 \\ \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} + 25 \end{bmatrix}$$

sınır koşullarının dahil edilmeden önceki sistem denklemleri elde edilir. Sonlu elemanların; sınır koşullarının uygulanmasına ilişkin 3.1.4. bölümünde, sistem denkleminin çözümüne geçilmeden, sınır koşullarının dahil edilerek sistemin güncellenmesi gerektiği belirtilmiştir.

Böylece, $T_1 = 50$ ve $T_5 = 500$ olduğu problemde verildiğinden, sistem güncellenmelidir. Unutulmamalıdır ki, $\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx}$ ve $\frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx}$ sınır koşulları olduğu için ihmal edilmezken, $\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx}$, $\frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx}$ ve $\frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx}$ iç sınır koşulları olduğundan ihmal edilirler. Böylece, (3.54) denklemi

yeniden düzenlenirse, aşağıdaki denklem;

$$\begin{aligned}
0.2(T_1 - T_2) &= -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_1(x) dx, \\
0.2T_1 - 0.2T_2 &= -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25, \\
10 - 0.2T_2 &= -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + 25, \\
\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} - 0.2T_2 &= -15
\end{aligned} \tag{3.70}$$

bulunur. (3.55) ve (3.58) eşitliklerinin ortak çözümü ve sınır koşullarının uygulanması ile;

$$\begin{aligned}
-0.2T_1 + 0.2T_2 &= \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\phi_2(x) dx \Rightarrow -10 + 0.2T_2 = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25, \\
0.2T_2 - 0.2T_3 &= -\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\phi_2(x) dx \Rightarrow 0.2T_2 - 0.2T_3 = -\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + 25
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadelerin taraf tarafa toplanması ile aşağıdaki denklem,

$$0.4T_2 - 0.2T_3 = 60 \tag{3.71}$$

bulunur. (3.59) ve (3.62) eşitliklerinin ortak çözümü ve sınır koşullarının uygulanması ile;

$$\begin{aligned}
-0.2T_2 + 0.2T_3 &= \frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\phi_3(x) dx \Rightarrow -0.2T_2 + 0.2T_3 = \frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25, \\
0.2T_3 - 0.2T_4 &= -\frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\phi_3(x) dx \Rightarrow 0.2T_3 - 0.2T_4 = -\frac{d\tilde{T}(x_3)}{dx} + 25
\end{aligned}$$

elde edilir ve ifadelerin taraf tarafa toplanması ile aşağıdaki denklem,

$$-0.2T_2 + 0.4T_3 - 0.2T_4 = 50 \tag{3.72}$$

bulunur. (3.63) ve (3.66) eşitliklerinin ortak çözümü ve sınır koşullarının uygulanması ile;

$$\begin{aligned}
-0.2T_3 + 0.2T_4 &= \frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\phi_4(x) dx \Rightarrow -0.2T_3 + 0.2T_4 = \frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25, \\
0.2T_4 - 0.2T_5 &= -\frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + \int_{x_4}^{x_5} f(x)\phi_4(x) dx \Rightarrow 0.2T_4 - 100 = -\frac{d\tilde{T}(x_4)}{dx} + 25
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadelerin taraf tarafa toplanması ile aşağıdaki denklem,

$$-0.2T_3 + 0.4T_4 = 150 \tag{3.73}$$

bulunur ve son olarakta, (3.67) denkleminin yeniden düzenlenmesi ile aşağıdaki denklem;

$$\begin{aligned}
-0.2T_4 + 0.2T_5 &= \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} + \int_{x_4}^{x_5} f(x)\phi_5(x) dx, \\
-0.2T_4 + 100 &= \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} + 25 \Rightarrow -0.2T_4 - \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} = -75
\end{aligned} \tag{3.74}$$

bulunur ve buradan (3.70)–(3.74) arasındaki denklemler matris formunda yeniden yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 60 \\ 50 \\ 150 \\ -75 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve Scientific Workplace 5.5 paket programında çözdürülürse sıcaklık değerleri;

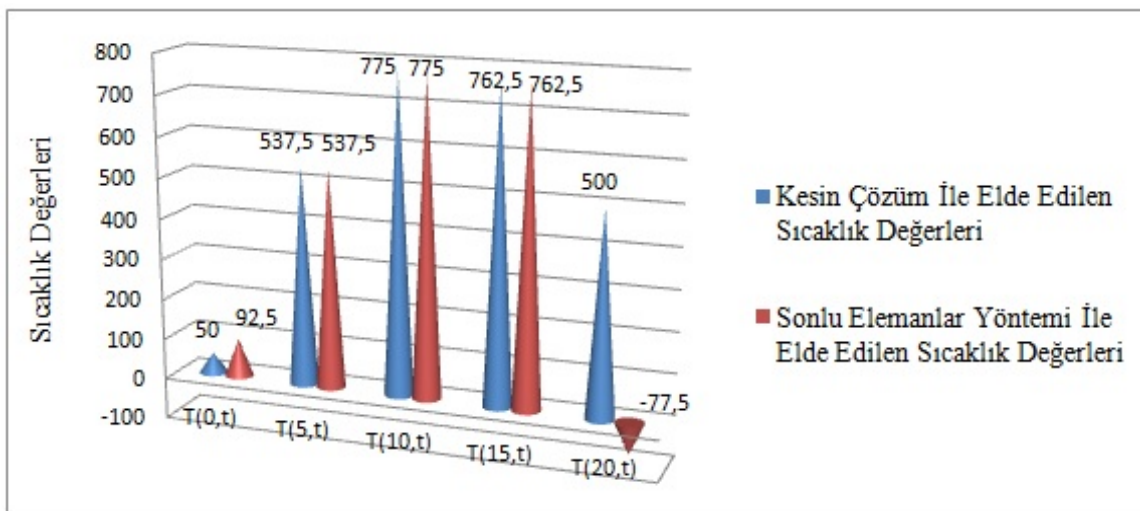
$$\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} = 92.5, T_2 = 537.5, T_3 = 775, T_4 = 762.5, \frac{d\tilde{T}(x_5)}{dx} = -77.5$$

bulunur. Kesin çözüm ve sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sıcaklık değerlerinin karşılaştırılmasına ilişkin çizelge aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.3 Analitik ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması.

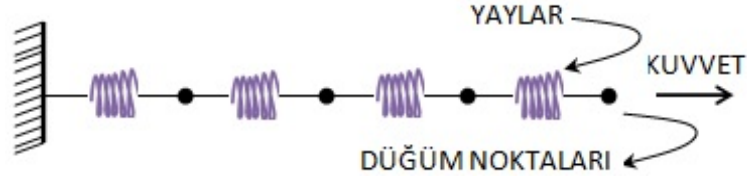
$T(x, t)$	Kesin Çözüm İle Elde Edilen Sıcaklık Değerleri	Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Edilen Sıcaklık Değerleri
$T(0, t)$	50	92.5
$T(5, t)$	537.5	537.5
$T(10, t)$	775	775
$T(15, t)$	762.5	762.5
$T(20, t)$	500	-77.5

Elde edilen sıcaklık değerlerinin karşılaştırılması Şekil 3.5 te olduğu gibi de gösterilebilir.



Şekil 3.5 Analitik ve SEY çözümlerinin karşılaştırılması.

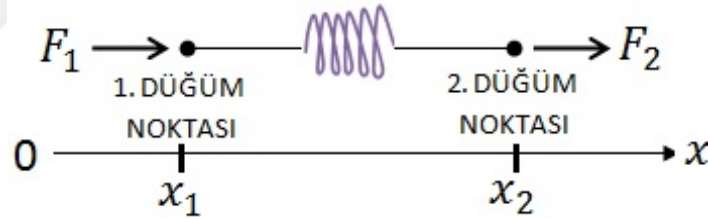
Problem 3.3 (Yaylardaki Yer Değişikliklerinin Belirlenmesi) Aşağıda Şekil 3.6 da gösterildiği gibi modellenen bir ucu sabit yani, bir mesnete (dayanağa) bağlı, diğer ucu F kuvveti ile çekilen, birbirine bağlı dört tane yayın yer değişikliklerini (uzama/sıkışma) belirleyebilmek için, sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedürünün uygulanması.



Şekil 3.6 Bir ucu sabit, diğeri F kuvveti ile çekilen yaylar [10].

1. Adım: Parçalara Ayırma

Sonlu elemanlar yönteminde; birbirine bağlı yayları parçalara ayırmanın en kolay yolu, her yayı bir eleman olarak düşünmektir. Dolayısıyla; yayın sonlu elemanlar modeli Şekil 3.4 te olduğu gibi, dört eleman ve beş düğüm noktasından oluşacaktır. Yayı meydana getiren $(x_1 - x_2)$ düğüm aralığındaki birinci yay, yani; ilk eleman için model ise aşağıdaki gibidir;



Şekil 3.7 Yaya karşılık gelen tek bir eleman [10].

Burada, F dış kuvvet ve $i = \overline{1, 5}$ için, x_i yer değiştirme değerleridir.

2. Adım: Eleman Denklemlerinin Eldesi - Sistem Denkleminin Eldesi

Bu kısımda; yayı meydana getiren düğümler sayesinde, eleman denklemleri oluşturularak sistem denklemleri elde edilecektir.

$$kx = F \quad (3.75)$$

burada k yay sabitidir ve birim yer değiştirme için gerekli olan kuvvettir. x yayın başlangıç durumuna göre konumudur. F ise yaya uygulanan çekme ya da sıkıştırma kuvvetidir. Buradan 1. düğüm noktasını etkileyen F_1 kuvveti,

$$k_{11}x_1 - k_{12}x_2 = F_1 \quad (3.76)$$

dir. Burada x_i , i . düğüm noktasının başlangıç konumuna göre yer değiştiğidir. k_{ij} , yay sabiti ve birim yer değiştirme için gereken kuvvettir. Yani, j . düğüm noktasında birim yer değiştirmeye neden olan i . düğüm noktasında gerekli olan kuvvettir. Örneğin, k_{12} ile ifade edilmek istenen; 2. düğüm noktasındaki yer değiştirmeye neden olan 1. düğüm noktasında gerekli olan kuvvettir. Yay hareketsiz yani herhangi bir kuvvet etki etmiyorsa,

$$F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = -F_2 \quad (3.77)$$

biçiminde ifade edilir. Dolayısıyla 2. düğüm noktasını etkileyen F_2 kuvveti ise;

$$-k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = F_2 \quad (3.78)$$

şeklindedir. (3.76) ve (3.78) eşitlikleri, belirli kuvvetlere karşılık, elemanların davranışını tanımlar. Dolayısıyla, $(x_1 - x_2)$ düğüm aralığındaki birinci elemana, yani yaya karşılık gelen eleman denklemi matris formunda aşağıdaki gibi;

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

yazılabilir. Eleman denklemlerinin, genellikle matris formunda elde edilebilen doğrusal denklem takımlarını içerdiği, Bölüm 3.1.3 te belirtilmiştir. Dikkat edilecek olursa (3.79) eşitliği, (3.16) eşitliğinin modifiye edilmiş halidir. Yani bu eşitlik,

$$[k] \{x\} = \{F\} \quad (3.80)$$

biçimindedir. Burada $[k]$ eleman katsayılar matrisi, $\{x\}$ yer değiştirme (düğümlerdeki uzama/sıkışma miktarları) vektörü ve $\{F\}$ de kuvvet (çekme/sıkıştırma) vektörüdür. Dolayısıyla; ilk eleman denkleminin karşılık gelen matris denklemi oluşturulmuş olunur. $(x_1 - x_2)$ düğüm aralığındaki ilk yay için eleman denklemi elde edildikten sonra, yay meydana getiren $(x_2 - x_3)$ düğüm aralığındaki ikinci yay, $(x_3 - x_4)$ düğüm aralığındaki üçüncü yay ve son olarak da $(x_4 - x_5)$ düğüm aralığındaki dördüncü yay için de, eleman denklemleri oluşturulmalıdır. Dolayısıyla; $(x_2 - x_3)$ düğüm aralığındaki ikinci yay için de, eleman denklemleri aynı şekilde oluşturulursa;

$$k_{22}x_2 - k_{23}x_3 = F_2, \quad (3.81)$$

$$-k_{32}x_2 + k_{33}x_3 = F_3 \quad (3.82)$$

şeklindedir ve bu matris formunda aşağıdaki gibi;

$$\begin{bmatrix} k_{22} & -k_{23} \\ -k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.83)$$

yazılabilir. Böylece; $(x_1 - x_2)$ düğüm aralığındaki ilk yay ve $(x_2 - x_3)$ düğüm aralığındaki ikinci yay için oluşturulan eleman denklemleri birleştirilirse;

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & 0 \\ -k_{21} & k_{22} + k_{22} & -k_{23} \\ 0 & -k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

olur. Bu kapsamda, $(x_3 - x_4)$ düğüm aralığındaki üçüncü yay için eleman denklemleri;

$$k_{33}x_3 - k_{34}x_4 = F_3, \quad (3.85)$$

$$-k_{43}x_3 + k_{44}x_4 = F_4 \quad (3.86)$$

matris formunda aşağıdaki gibi;

$$\begin{bmatrix} k_{33} & -k_{34} \\ -k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

yazılır ve buraya kadar elde edilen $(x_1 - x_2)$, $(x_2 - x_3)$ ve $(x_3 - x_4)$ düğüm aralıklarındaki yaylar için oluşturulan eleman denklemleri yeniden birleştirilirse;

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{21} & k_{22} + k_{22} & -k_{23} & 0 \\ 0 & -k_{32} & k_{33} + k_{33} & -k_{34} \\ 0 & 0 & -k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

olur. Bu kapsamda, $(x_4 - x_5)$ düğüm aralığındaki son yay için eleman denklemleri;

$$k_{44}x_4 - k_{45}x_5 = F_4, \quad (3.89)$$

$$-k_{54}x_4 + k_{55}x_5 = F_5 \quad (3.90)$$

matris formunda aşağıdaki gibi;

$$\begin{bmatrix} k_{44} & -k_{45} \\ -k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

yazılır ve buraya kadar bulunan tüm eleman denklemleri, sistem denklemini oluşturmak üzere birleştirilirse, bu sistem denklemini matris formunda;

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & k_{22} + k_{22} & -k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{32} & k_{33} + k_{33} & -k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{43} & k_{44} + k_{44} & -k_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (3.92)$$

şeklinde yazılabilir ve dikkat edilirse sistem denklemini,

$$[K] \{x^*\} = \{F^*\} \quad (3.93)$$

biçimindedir, yani sınır koşullarının uygulanmadan önceki hali elde edilmiş olur [11]. Bununla ilgili ayrıntılı bilgi eşitlik (3.17) de mevcuttur. Burada sistem matrisi yani diğer bir ifade ile tüm katsayılar matrisi $[K]$;

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & 2k_{22} & -k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{32} & 2k_{33} & -k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{43} & 2k_{44} & -k_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

görüldüğü üzere bant matristir. Genişletilmiş kuvvet vektörü $\{F^*\}$ ise;

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

şeklinde ve $\{x^*\}$ ise, genişletilmiş yer değiştirme vektörüdür. Eleman denklemleri birleştirildiğinde iç kuvvetlerin ihmal edildiği, bir önceki ısıtılan çubuk örneği de göz önüne alınarak dikkat edilmelidir. İlk ve son düğüm noktaları hariç, bütün düğüm noktaları için $\{F^*\} = 0$ dır.

3. Adım: Sınır Koşullarını Uygulama

Başlangıçta; yani, $x_1 = 0$ da bir tek sınır koşuluna tabidir. Bu koşulun hesaba katılması ve genel numaralandırma şemasının uygulanması ile sistem $k = 1$ için şu hale indirgenir;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

ve dolayısıyla sistem şu anda;

$$\overline{[K]} \{x^*\} = \{\overline{F^*}\} \quad (3.97)$$

biçimindedir ve sınır koşullarının hesaba katıldığı anlamına gelir. Eşitlik (3.18) de bununla ilgili bilgi mevcuttur ve sistem şu anda çözülebilir haldedir.

4. Adım: Çözüm ve Sonuçları Gösterme

$k = 1$ ve $F = 1$ için, $x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ ve $x_5 = 4$ şeklinde elde edilir ve bu durum, her bir yayın, birim yerdeğiştirme kadar uzadığını göstermektedir.

3.3 İKİ BOYUTLU PROBLEMLER İÇİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN UYGULANIŞI VE MODELLENMESİ

Problem 3.4 (Isıtılan Plaka) *Sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedürü, iki boyutlu problemler için ısıtılan plaka örneğine uygulanacaktır.*

1. Adım: Parçalara Ayırma

İki boyutlu problemlerde sonlu elemanlar yöntemine göre çözüm bölgesi modellenirken, çokgen elemanlardan faydalanılır. Tezde, basit ve modelleme açısından kolay olan üçgen elemanlardan yararlanılacaktır.

2. Adım: Eleman Denklemlerinin Eldesi

Bu adımda, bir boyutlu problemlerde olduğu gibi, sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedüründen yola çıkılarak; eleman denklemlerinin eldesinde, bir yaklaşım fonksiyonu geliştirilecektir. Yaklaşım fonksiyonu olarak, Bölüm 5.3.1.3 teki eşitliklerden herhangi biri de seçilebileceği gibi, burada; genelleme yapabilmek adına doğrusal yaklaşım seçilerek;

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (3.98)$$

üçgen elemanın, eleman denklemleri oluşturulacaktır. Burada; yaklaşım fonksiyonu u bağımlı değişken, a_0, a_1 ve a_2 katsayılar, x ve y de bağımsız değişkenlerdir. Bu $u(x, y)$

fonksiyonu, üçgen elemanın (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) düğüm noktalarındaki $u_i(x, y)$ fonksiyonlarını sağlamalıdır. Dolayısıyla, bu $u_i(x, y)$ değerleri sırasıyla;

$$u_1(x, y) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1, \quad (3.99)$$

$$u_2(x, y) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2, \quad (3.100)$$

$$u_3(x, y) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 \quad (3.101)$$

şeklinde yazılabilir. Matris formunda yazılacak olursa;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

şeklinde ve buradan $i = \overline{0, 2}$ için a_i katsayılarını hesaplayabilmek için öncelikle;

$$\text{Üçgen eleman alanı} := \mu = x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 \quad (3.103)$$

şeklinde tanımlanırsa, buradan;

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_3(x_1y_2 - x_2y_1) - u_2(x_1y_3 - x_3y_1) + u_1(x_2y_3 - x_3y_2)}{x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2} \\ &= \frac{u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2} \\ &= \frac{u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)}{\mu}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{u_1(y_2 - y_3) - u_2(y_1 - y_3) + u_3(y_1 - y_2)}{x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2} \\ &= \frac{u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)}{x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2} \\ &= \frac{u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)}{\mu}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{u_2(x_1 - x_3) - u_1(x_2 - x_3) - u_3(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2} \\ &= \frac{u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)}{x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2} \\ &= \frac{u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)}{\mu} \end{aligned} \quad (3.106)$$

a_0 , a_1 ve a_2 katsayıları bulunur ve bu katsayıların (3.98) eşitliğinde yerine yazılması ile, yaklaşım fonksiyonu;

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^3 \phi_i u_i = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 \\ &= \frac{u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)}{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)}{\mu} \right) x \\
& + \left(\frac{u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)}{\mu} \right) y \\
= & \frac{u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)}{\mu} \\
& + \frac{u_1x(y_2 - y_3) + u_2x(y_3 - y_1) + u_3x(y_1 - y_2)}{\mu} \\
& + \frac{u_1y(x_3 - x_2) + u_2y(x_1 - x_3) + u_3y(x_2 - x_1)}{\mu} \\
= & \frac{u_1x_2y_3 - u_1x_3y_2}{\mu} + \frac{u_2x_3y_1 - u_2x_1y_3}{\mu} + \frac{u_3x_1y_2 - u_3x_2y_1}{\mu} \\
& + \frac{u_1xy_2 - u_1xy_3}{\mu} + \frac{u_2xy_3 - u_2xy_1}{\mu} + \frac{u_3xy_1 - u_3xy_2}{\mu} \\
& + \frac{u_1yx_3 - u_1yx_2}{\mu} + \frac{u_2yx_1 - u_2yx_3}{\mu} + \frac{u_3yx_2 - u_3yx_1}{\mu} \\
= & u_1 \left(\frac{(x_2y_3 - x_3y_2) + (xy_2 - xy_3) + (yx_3 - yx_2)}{\mu} \right) \\
& + u_2 \left(\frac{(x_3y_1 - x_1y_3) + (xy_3 - xy_1) + (yx_1 - yx_3)}{\mu} \right) \\
& + u_3 \left(\frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (xy_1 - xy_2) + (yx_2 - yx_1)}{\mu} \right) \tag{3.107}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $i = \overline{1, 3}$ için u_i değerlerinin dışında kalan ϕ_1 , ϕ_2 ve ϕ_3 şekil fonksiyonları ise, sırasıyla;

$$\phi_1 = \frac{(x_2y_3 - x_3y_2) + (xy_2 - xy_3) + (yx_3 - yx_2)}{\mu}, \tag{3.108}$$

$$\phi_2 = \frac{(x_3y_1 - x_1y_3) + (xy_3 - xy_1) + (yx_1 - yx_3)}{\mu}, \tag{3.109}$$

$$\phi_3 = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (xy_1 - xy_2) + (yx_2 - yx_1)}{\mu} \tag{3.110}$$

biçimindedir ve μ , elemanlar için ara değerleri, elemanın düğüm noktalarındaki değerlere dayanarak, tahmin etmeyi sağlayan bir yöntem sunar. Burada,

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) = 1 \tag{3.111}$$

olmalıdır. Elde edilen iki boyutlu eleman denklemlerinin, bir boyuttaki eleman denklemlerinden çok daha karmaşık olduğu görülmüştür. Ancak $u(x, y)$ fonksiyonları, (3.98) eşitliğinde olduğu gibi genellikle düşük dereceli polinomlar olduğundan, eleman matrisinin elemanları düşük dereceli polinomlar ve katsayılarından oluşacaktır.

3. Adım: Tüm Çözümü Birleştirme ve Sınır Koşullarını Uygulama

Sonlu elemanlar yönteminde eleman denklemlerinin birleştirilmesi ile elde edilen sistem denkleminde sınır koşullarının da dahil edilmesi, çok daha büyük boyutlu problemlere geçildiğinde uygulamada hem çok zaman almakta, hem de karmaşık bir yapıya sahip olmaktadır. Dolayısıyla burada, problemin çözülebilmesi için dikkat edilmesi gereken iki önemli özellik vardır. Bunlardan ilki; numaralandırma şemasının seçimi, diğeri ise; sistem matrisinin bant matris olmasıdır.

4. Adım: Çözüm ve Sonuçları Gösterme

Yukarıdaki örnek problemlerden de anlaşılacağı üzere, sonlu elemanlar yönteminde; çözüm bölgesi eleman ağları ile modellenmektedir ve çok daha büyük boyutlara geçildiğinde modelleme açısından zorluklar yaşanmaktadır. Karmaşık yapıdaki çözüm bölgeleri göz önüne alındığında, girinti ve çıkıntılara bağlı olarak eleman sayılarında artış yani, ağ oluşumunda yoğunluk meydana geleceğinden, ağ yapılarında bozulmalar olacaktır. Yani, çözüm için daha fazla vakit harcanacağından sıkıntılar çekilecektir. Hassas çözümler elde edilmek istenen bölgeler daha çok elemanlara ayrılacağından, analiz süresinde artmalar meydana gelecektir. Bununla birlikte, tezde belirtilen pek çok sorundan dolayı, dördüncü bölümde anlatılacak olan ağsız yöntemler, nümerik yöntemler açısından bir alternatif haline gelmiştir.



BÖLÜM 4

AĞSIZ YÖNTEMLER

4.1 AĞSIZ YÖNTEMLERE GİRİŞ

Ağsız yöntemler; günümüze kadar geliştirilen, nümerik yöntemlerin menfi durumlarını ortadan kaldırmak, yahut en aza indirmek için önerilmiş, alternatif yöntemler olup, bu yöntemler; zamandan tasarruf sağlamasından, modelleme için etkili ve daha verimli sonuçlar vermesinden, çözüm esnekliğinden, üstün performans göstermesinden ve daha pek çok müspet özelliğinden, dikkatleri üzerine çekmiş; ağ yapısına ihtiyaç duymadan ve nizami dizilmesi zorunlu olmayan düğümler aracılığı ile, insan emeğinden çok günümüz teknolojilerinden faydalanılarak, çözümlenebileceğini kanıtlamıştır.

Ağsız yöntemler, adı gibi; herhangi bir ağ ya da elemana ihtiyaç duymadan, keyfi düğüm noktaları ile çözüm bölgesini sarak, yaklaşım fonksiyonunu, bu düğümler üzerinden oluşturur. Dolayısıyla; sonlu elemanlar yönteminde karşılaşılan ağ oluşturma zorlukları, bu yöntemde görülmez. Sonlu elemanlar yöntemine oranla, daha kolay ve araştırılması gereken çok zengin bir alandır. Bununla beraber, pek çok uğraş gerektiren ve zaman alan fiziksel problemlerde etkili sonuçlar elde edildiğinden, günümüzde en çok tercih edilen yöntemler arasında yer almaktadır.

Bu zamana kadar geliştirilen ağsız yöntemlere, tam olarak ideal yöntem denemez. Çünkü; bir yönteme ideal yöntem diyebilmek için, tüm çözüm aşamasında herhangi bir ağ yapısına (arka plan hücreleri/gölge hücre yapıları) gerek duyulmamalıdır. Örneğin; ağsız yöntemlerden, eleman bağımsız Galerkin yönteminde gölge hücre yapıları mevcuttur. Bunun için yöntem, tam olarak ideal sayılamamaktadır. Ancak, Atluri ve Zhu 1998 yılında hücre yapısı gerektirmeyen, gerçek manada bir ağsız yöntem geliştirmişlerdir.

Ağsız yöntemler; çözüm bölgesinde ağ yapılarına ihtiyaç duymadan, sistem denklemini oluşturmaya çalışır ve uygun sınır koşulları altında, çözüm bölgesindeki düğüm noktalarını kullanarak problemi çözer. Çözüm bölgesine saçılan düğümlere, alan düğümleri denir ve bu düğümler birbirleri ile ağ oluşturamazlar [12].

4.2 AĞSIZ YÖNTEMLERİN TARİHÇESİ

Ağsız yöntemlerde; ilk çalışmalar 1977 yılına kadar ulaşmaktadır. 1980 yılından günümüze kadar da, bu alanda kapsamlı araştırmalar neticesinde önemli gelişmeler kaydedilmiş ve farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu alanda yapılan çalışmalardan bazıları;

1992 yılında Nayroles vd. difüze eleman Galerkin yöntemini geliştirerek, ağ yapısına gerek duymadan düğümleri toplamışlar ve düğüm noktaları arasındaki boşluklar çözüm hassasiyetini etkilememiştir.

1994 yılında Belytschko; difüze eleman bağımsız Galerkin yöntemi hakkında araştırmalar yaparken, eleman bağımsız Galerkin denilen yöntemi geliştirmiş ve şekil fonksiyonlarının eldesinde hareketli en küçük kareler yaklaşımını kullanarak, zor problemlerde daha hassas sonuçlar elde etmiştir. Sınır koşullarını uygularken de Lagrange çarpanları yönteminden yararlanmıştır [13].

1998 yılında Atluri ve Zhu, bu alanda ağ yapısına (literatürde gerçek manada ağ yapısı olmamakla birlikte, benzeri bir yapı mevcut olup, genellikle bu yapılar arka plan hücresi, geri plan hücresi ya da gölge hücre yapıları olarak ifade edilmektedir.) gerek duymayan gerçek manada bir ağsız yöntem geliştirmişlerdir. Bunun dışında; 1980 yılında Liszka ve Orkiz genel sonlu farklar yöntemini, 1992 yılında Sulsky vd. hücre metod partikülü yöntemini, 1995 yılında Liu vd. yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemini, 1995 ve 1996 yıllarında Babuska ve Melenk birimsel parçacık yöntemini, 1995 ve 1996 yıllarında Duarte ve Oden H-P toz bulutu yöntemini, 1996 yılında Onate vd. sonlu nokta yöntemini, 2000 yılında Yagawa ve Furukawa bağımsız ağ yöntemini, 2000 yılında Zhu ağsız yerel sınır integrasyon denklem yöntemini, 2000 yılında Atluri ve Zhu ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemini geliştirmişlerdir [12]. Günümüzde ise, bu ağsız yöntemler halen geliştirilmeye devam etmektedir.

4.3 AĞSIZ YÖNTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Ağsız yöntemler, aşağıdaki Çizelge 4.1 incelendiğinde, kategorilerine göre sınıflara ayrılmış ve kullanılan yöntemler karşılıklarında verilmiştir. Bu sınıflar, aşağıdaki alt bölümlerde kısaca ele alınacaktır. Tezde, yaklaşım yöntemine göre sınıflandırılan, hareketli en küçük kareler yaklaşımını kullanan ağsız yöntemler kategorisinden, ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi üzerinde durulmuş ve bu yöntemin çözüm prosedürü araştırılmıştır.

Çizelge 4.1 Ağsız yöntemlerin sınıflandırılması [12].

SINIFLANDIRMA	KATEGORİLER	YÖNTEMLER
Formülasyon prosedürüne göre	Zayıf form oluşturulmasına göre ağsız yöntemler	EBGY, RNİY, AYPGY, YRNİY, vb.
	Güçlü form oluşturulmasına göre ağsız yöntemler	AKY, SNY, vb.
	Zayıf ve güçlü formların kombinasyonuna göre ağsız yöntemler	Ağsız zayıf-güçlü form yöntemleri, vb.
Yaklaşım yöntemine göre	Hareketli en küçük kareler yaklaşımını kullanan ağsız yöntemler	AYPGY, EBGY, vb.
	Yaklaşım fonksiyonu için integral açılımını kullanan ağsız yöntemler	DPHY, vb.
	Nokta interpolasyon yöntemini kullanan ağsız yöntemler	RNİY, YRNİY, vb.
	Diğer interpolasyon gösterimini kullanan ağsız yöntemler	H-P BULUTU, BPSEY, vb.
Bölge gösterimine göre	Bölge tipi ağsız yöntemler	DPHY, EBGY, RNİY, AYPG, YRNİY, vb.
	Sınır tipi ağsız yöntemler	SDY, YSIDY, SNİY, SRNİY, HRNİY, vb.

4.3.1 Formülasyon Prosedürüne Göre Sınıflandırma

Fiziksel problemleri sayısal olarak ifade edebilen denklemler, zayıflatılmış integral denklemlerine dönüştürülür ve zayıflatılmış formlar yardımı ile çözüm bölgesinde genel ya da yerel olarak oluşturulmuş arka plan hücreleri kullanılarak, nümerik yöntemler birkaç cebirsel denklem ile çözülebilir.

4.3.2 Yaklaşım Fonksiyonu Uyumuna Göre Sınıflandırma

Keyfi düğüm noktaları üzerinde oluşturulan yaklaşım fonksiyonları, ağsız yöntemlerde en sık kullanılan sınıftır. Burada, fonksiyon yaklaşık olarak tanımlanır ve değişkenlere göre çözüm yapılır. Bu sınıfa ait, Atluri ve Zhu tarafından önerilen ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi de, herhangi bir ağ yapısına gerek duymayan gerçek manada ağsız bir yöntemdir. Şekil fonksiyonlarının eldesinde hareketli en küçük kareler yaklaşımını

kullanırlar ancak, hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliğini sağlamaz.

4.3.3 Bölge Gösterimine Göre Sınıflandırma

Bölge gösterimine göre sınıflandırılan ağsız yöntemlerde, sistem denklemi tüm bölgede zayıf ve güçlü formlar kullanılarak oluşturulur. Çözüm bölgesi ve sınırlar, alan düğümleri ile gösterilir. Bu sınıfa ait sınır tipi ağsız yöntemlerde; sınır integral denklemi, başlangıçta fonksiyonlar kurulmasıyla oluşturulur. Sistem denklemi; ağsız şekil fonksiyonlarından yararlanılarak, sınır düğüm noktalarından bulunur.

Mukherjee ve Mukherjee sınır düğüm yöntemini önermişlerdir. Bu yöntemde, saçılan düğümlere bağlı kalınarak çözüm bölgesi gösterilir [14-15]. Diğer sınır tipi ağsız yöntem ise, yerel sınır integral denklemi yöntemidir. Çözüm bölgesinin sınırı, dağılmış düğümler tarafından gösterilir ve her alan düğümü için nizami yerel bölgeler kullanılır [16-17].

4.4 AĞSIZ YÖNTEMLERDE ŞEKİL FONKSİYONLARININ OLUŞUMU

Bir bölgede, ek koşullar altında verilen problemin nümerik çözümü yapılırken; yöntemin çözüm prosedürüne göre şekil fonksiyonlarından yararlanılarak, yaklaşım fonksiyonunun hesaplanması gerekir. Ancak, sonlu elemanlar ve ağsız yöntemlerde çözüm bölgelerinin birbirinden farklı modellenmesi, şekil fonksiyonlarının hesaplanmasında farklı yolların izleneceği manasına gelmektedir. Aynı zamanda, bir ağsız yöntemin geliştirilmesinde, şekil fonksiyonlarının oluşturulması en önemli meselenin çözüme kavuşturulmasıdır.

Ağsız yöntemlerde; çözüm bölgesi, keyfi alan düğümleri ile temsil edildiğinden, seçilen yerel düğüm noktaları, spesifik bir nokta için oluşturulur ve bu noktanın değişmesi halinde, şekil fonksiyonları da değişir. Genellikle şekil fonksiyonları oluşturulurken hareketli en küçük kareler yaklaşımından yararlanır. Destek bölgesinde tanımlı birkaç alan düğümü bu şekil fonksiyonlarını oluşturmak için kullanıldığından, şekil fonksiyonları bölge dışında kullanılamaz. Bölüm 5.2 de bu bölgeler ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Bu yöntemlerde, şekil fonksiyonları önceden belli değildir ve çözüm aşamasında hesaplanmaları gerekir. Sistem matrisi oluşturulurken ya da sınır koşulları uygulanırken, ilgili noktalar için şekil fonksiyonları çözüm esnasında oluşturulur.

Sonlu elemanlar yönteminde ise; şekil fonksiyonları, önceden tanımlanmıştır. Yani, çözüme

geçilmeden önce, şekil fonksiyonları zaten bilinmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin şekil fonksiyonları, düğüm noktaları tarafından oluşturulan, elemanlara dayalı yaklaşım yöntemleri kullanılarak oluşturulur.

4.5 AĞSIZ YÖNTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

Ağsız yöntemlerde bulunması gereken temel özellikler, şu şekilde sıralanabilir:

Kararlılık: Sayısal olarak kararlı olmalıdır. Burada iki durum söz konusudur. İlki, yaklaşım kararlı olmalıdır. Şekil fonksiyonlarının destek bölgesindeki düğüm noktalarının durumuna göre, dengeli olması gerekir ve bu keyfi olarak dağıtılan düğümler kullanılarak oluşturulan moment matrisi A nın da iyi koşullanmış olmasını gerektirir. İkinci durum ise, çözüm kararlı olmalıdır.

Kapsamlılık: Keyfi ve yeteri kadar alan düğümü, bölgeyi iyi bir şekilde kapsamalıdır.

Tutarlılık: Yöntem, belli bir tutarlılık derecesine kadar desteklenebilir olmalıdır.

Uyumluluk: Genel zayıf form kullanıldığında çözüm bölgesi içinde; yerel zayıf form kullanıldığında ise, yerel karesel alan boyunca şekil fonksiyonlarını kullanan yöntemler uyumlu olmalıdır. Yani; ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonları, yerel destek bölgelerine dayalı olarak oluşturulmuştur. Bu nedenle, destek bölgesi çözüm bölgesine taşındığında bu şekil fonksiyonlarını kullanarak, yaklaşık olarak hesaplanan alan fonksiyonu sürekli olmayabilir. Kısaca, yaklaşım sürekli ise uyumlu, aksi halde değildir.

Kompaktlık: Çözüm bölgesi, destek bölgesi dışında sıfır olarak kabul edilmelidir. Aynı zamanda kompaktlık, her bir eleman denklemini oluşturmak için gereklidir ve büyük sistemler için son derece önemlidir.

Kronecker Delta Özelliği: Şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliğini taşıyorsa, ideal şekil fonksiyonu özelliğine sahiptir. Eğer şekil fonksiyonları bu özelliği taşıyorsa, gerekli sınır koşullarını uygulamak için özel şartlar gereklidir. Sonlu elemanlar yönteminde sınır koşulları uygulanırken; şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliğini sağladığından, bu sınır koşulları denkleme doğrudan yazılabilir. Hareketli en küçük kareler yaklaşımı ile elde edilen fonksiyon düzgün bir eğri veya yüzey olup; düğüm değerlerini geçemez. Bu nedenle; hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları, genel olarak Kronecker delta özelliğini sağlamamaktadır.

Hesaplanabilirlik/Verimlilik: Fonksiyon hesaplama açısından basit ve aynı zamanda verimli olmalıdır.

4.6 AĞSIZ YÖNTEMLERİN KATEGORİLERİ

Ağsız şekil fonksiyonlarının eldesi için etkili yaklaşım yöntemlerinin geliştirilmesi, ağsız yöntemlerin araştırılmasında en önemli konulardan biridir [18].

Çizelge 4.2 Ağsız yöntemlerin kategorileri [18].

KATEGORİLER	AĞSIZ YÖNTEMLER
İntegral Gösterimi →	Düzgün Parçacık Hidrodinamiği Yöntemi, Yeniden Üretilen Çekirdek Parçacığı Yöntemi
Seri Gösterimi →	Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı, Nokta İnterpolasyon Yöntemi (RİY ve RNİY)
Diferansiyel Gösterimi →	Genel Sonlu Farklar Yöntemi

Çizelge incelendiğinde ağsız yöntemler; integral, seri ve diferansiyel gösterimine göre üç kategoriye ayrılmıştır. Tezde, seri gösterimi kategorisine giren hareketli en küçük kareler yaklaşımı, ağsız şekil fonksiyonlarının eldesinde en sık kullanılan yaklaşımdır. Bölüm 5 te, bu ağsız yöntemlerden biri olan ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi şekil fonksiyonlarının eldesinde de, bu yaklaşımdan yararlanılacaktır.

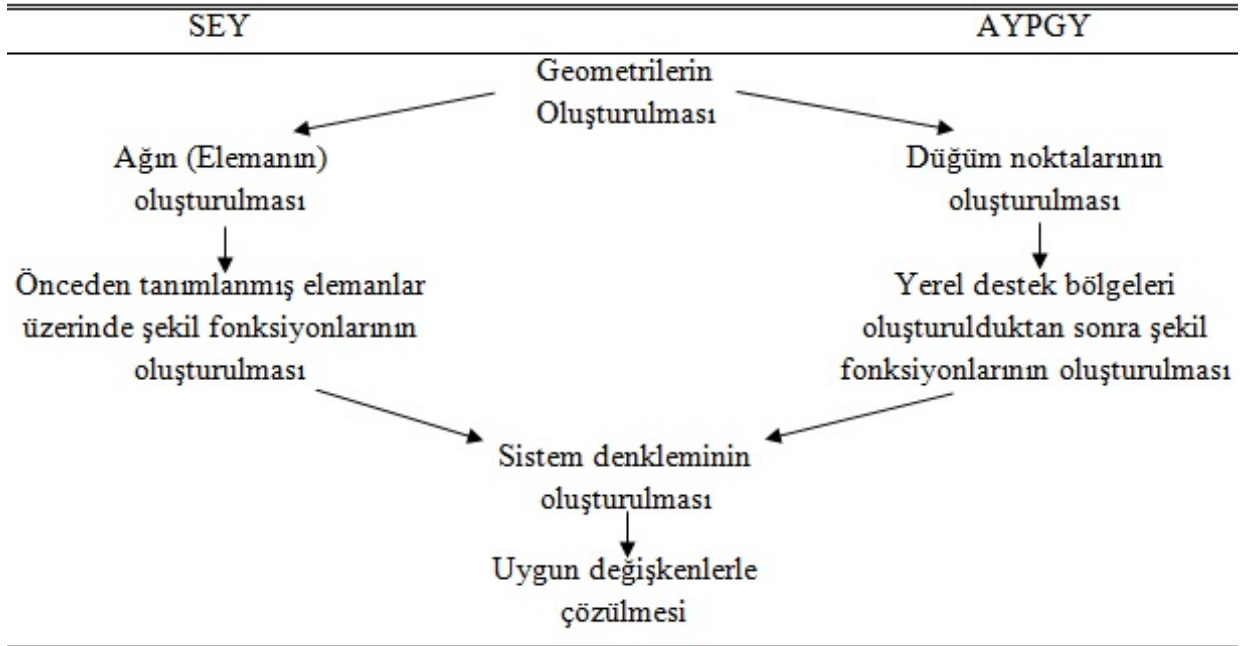
BÖLÜM 5

AĞSIZ YEREL PETROV-GALERKİN YÖNTEMİ (AYPGY)

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminin çeşitli biçimleri Atluri vd. tarafından önerilmiş ve geliştirilmiştir [19-20].

5.1 ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ

Çizelge 5.1 Sonlu elemanlar yöntemi ve ağsız yöntemlere ait çözüm prosedürü.



Çizelgede, sonlu elemanlar ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinin karşılaştırmalı çözüm prosedürü yer almaktadır. Her iki yöntemde de, çözüm bölgesine ait geometriler oluşturulduktan sonra, ele alınacak yöntem göre, ağ ya da düğüm noktaları belirlenir. Yaklaşım fonksiyonları oluşturulurken, şekil fonksiyonları bulunur ve sınır şartları da dahil edilerek, sistem denklemleri elde edilir. Uygun değişkenler ile çözüm yapılarak, prosedür tamamlanır.

Sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedüründe olduğu gibi bu yöntemde de; ilk adımda problem modellenirken, düğüm noktaları yerleştirilerek çözüm bölgesi oluşturulur. İkinci adımda, düğüm noktalarından faydalanılarak, ağırlık fonksiyonlarının da kullanılması ile şekil fonksiyonları ve buna bağlı yaklaşım fonksiyonu elde edilir; üçüncü adımda, sistem denklemi elde edildikten sonra son adımda, doğrusal denklemler çözülür.

5.2 BÖLGE GÖSTERİMİ

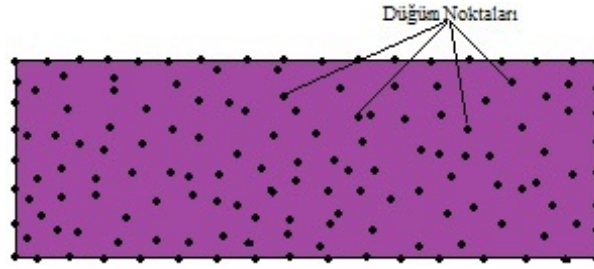
Bu kısımda; problemin çözüm bölgesinin, sonlu elemanlar ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi açısından nasıl modelleneceği araştırılacaktır. Sonlu elemanlarda, elemanlar numaralandırılarak modelleme gerçekleştirilir. Eğer, çubuk elemanlar kullanılırsa; bir boyutlu problemler için elemanların yüzeyleri düz çizgilerden, iki boyutlu problemler için düz yüzeylerden oluşur. Bu yüzeylerin gösterim doğruluğu, eleman sayısı ile orantılı olarak değişir. Burada, daha çok elemanın kullanılması demek, eğri yüzeylerinin daha da belirginleşmesi anlamına gelir. Ayrıca çözümün doğruluğu ve verimliliği, kullanılan teknolojiye bağlı olarak değişebilir. Eleman sayısı ile çözüm süresi arasında yine doğru orantı söz konusudur.

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde ise; iki ve daha büyük boyutlu problemlerde, dört bölgeden bahsedilecektir. Bunlar; çözüm bölgesi, yaklaşım bölgesi, etkileşim (kesişim) bölgesi ve destek bölgesidir. Tezde; bu bölgeler, alt başlıklar halinde kısaca incelenecektir. Ancak, destek bölgesi şekil fonksiyonlarının eldesi için önem arz ettiğinden ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Çözüm bölgesi dışında kalan diğer üç bölge, alan düğümlerinin düğüm aralığına göre tanımlanmaktadır. Bundan sonra alan düğümlerinin düğüm aralığı, d_{ort} ile ifade edilecek ve Bölüm 5.2.4.1 de ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

5.2.1 Çözüm Bölgesi

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde; çözüm bölgesi, dağınık düğümlerin kümesi ile gösterilecek olup, düğüm yoğunluğunun her yerde aynı olması gerekmez. Sonlu elemanlar yöntemindeki elemanların yerini, bu yöntemde düğümler almaktadır. Problemin, $[a, b]$ aralığında verildiği düşünülürdüğünde bu aralık $i = \overline{1, n}$ için, $x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ olmak üzere $n - 1$ tane alt aralığa bölünür. Burada x_i ler düğüm noktaları olarak ifade edilir [1]. Düğümlerin yoğunluğu çözüm hassasiyetini etkilediğinden hassas çözüm

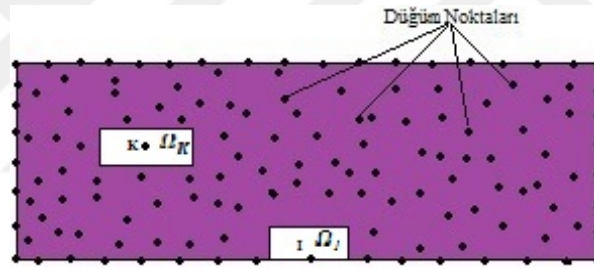
yapılmak istenen bölgede, düğüm yoğunluğu arttırılmalıdır. Aşağıda Şekil 5.1 de çözüm bölgesi ve sınırı örneklendirilmiştir.



Şekil 5.1 Çözüm bölgesi ve düğüm noktaları.

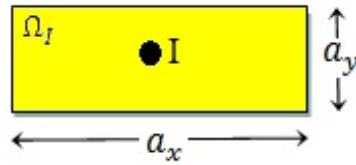
5.2.2 Yaklaşım Bölgesi

Çözüm bölgesindeki I düğüm noktası için yerel alt bölge Ω_I ve K düğüm noktası için yerel alt bölge Ω_K ile gösterilsin. K ve I düğüm noktaları için yaklaşım bölgeleri, Şekil 5.2 de gösterilmektedir.



Şekil 5.2 K ve I düğümleri için yaklaşım bölgesi.

K düğüm noktasının yaklaşım bölgesi, çözüm bölgesinin tam olarak içinde iken; I düğüm noktasının yaklaşım bölgesi çözüm bölgesi ile kesişmektedir.



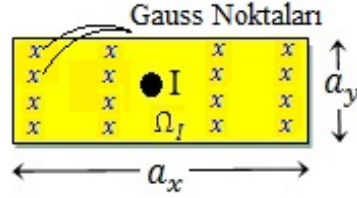
Şekil 5.3 I düğümü için yaklaşım bölgesinin büyüklüğü.

Şekil 5.3 te görüleceği üzere, I düğüm noktası için yaklaşım bölgesinin büyüklüğü x ve y koordinatlarına göre;

$$a_x = a_I \times d_{ort} \quad (5.1)$$

$$a_y = a_I \times d_{ort} \quad (5.2)$$

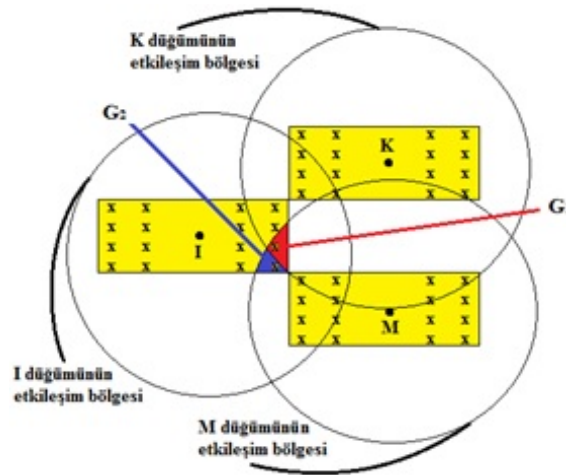
şeklinde hesaplanır. Burada a_I analiz parametresi ve aynı zamanda yaklaşım bölgesi büyüklük çarpımı olup, keyfi olarak belirlenir. I düğüm noktasının yaklaşım bölgesinde, Gauss kareleme noktalarının dağılımı ise aşağıdaki Şekil 5.4 te örneklendirilmiştir.



Şekil 5.4 I düğümünün yaklaşım bölgesinde Gauss kareleme noktaları.

5.2.3 Etkileşim (Kesişim) Bölgesi

Her düğüm noktası için, etkileşim bölgesi oluşturulur. Şekil 5.5 te görüldüğü üzere, I , K ve M düğüm noktaları; G_1 noktasında, yer değiştirme yaklaşımına katılmıştır. Çünkü; G_1 noktası, bu düğüm noktalarının etkileşim bölgesinde yer almaktadır. G_2 noktasında ise; I ve M düğüm noktaları, yer değiştirme yaklaşımına katılmıştır. Burada G_1 noktası, G_2 noktasının etkileşim bölgesinde değildir. Düğüm noktasına karşılık gelen bölge etkileşim bölgesi iken, Gauss noktasına karşılık gelen bölge destek bölgesidir. Bir G_1 noktasının destek bölgesi, Gauss noktasında yer değiştirme yaklaşımına katılan I , K ve M düğüm noktalarını kapsar. Diğer yandan G_2 noktasının destek bölgesi, I ve M düğüm noktalarını kapsar.



Şekil 5.5 I , K ve M düğümlerinin etkileşim bölgeleri.

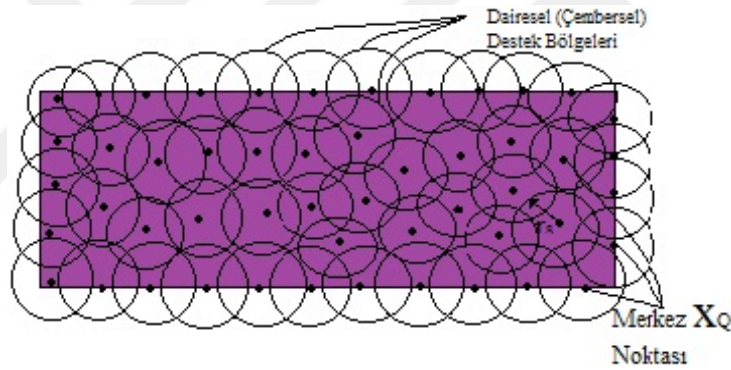
Bir alan düğümü için, etkileşim bölgesinin yarıçapı;

$$r_w = a_I \times d_{ort} \quad (5.3)$$

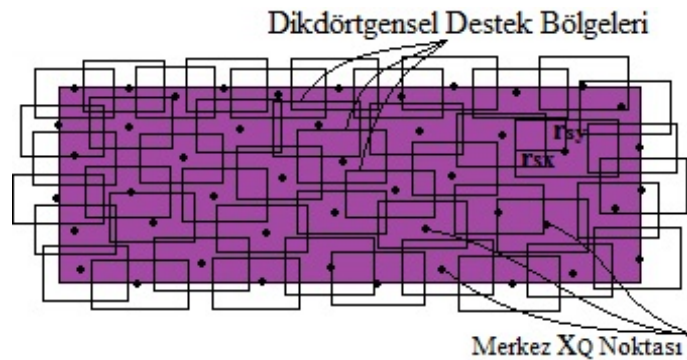
şeklinde hesaplanır. Burada a_I , etkileşim bölgesinin büyüklük çarpanı ve aynı zamanda bir analiz parametresi olup, keyfi olarak belirlenmektedir.

5.2.4 Destek Bölgesi

Destek bölgesi, ağırsız şekil fonksiyonlarının eldesi için önem arz ettiğinden, tezde ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Destek bölgelerinin büyüklüğü bundan sonra d_s ile ifade edilecek olup, alan düğümlerinin dağılımına göre seçilmelidir. Aksi halde, yaklaşım fonksiyonu hassas olamaz. Yani, destek bölgesindeki alan düğümlerinin ortalama aralığı d_{ort} ile destek bölgesinin büyüklüğü d_s tutarlı olmalıdır. Destek bölgesindeki merkez x_Q noktasının yaklaşım doğruluğu, Şekil 5.6 ve Şekil 5.7 de gösterildiği üzere; bölge içerisinde kalan düğüm noktalarına bağlıdır. Doğru ve verimli bir yaklaşım sağlamak için uygun destek bölgeleri seçilmelidir. Problemin şartlarına ve boyutuna göre, destek bölgesinin büyüklüğü ve şekli belirlenir.



Şekil 5.6 Dairesel (Çembersel) destek bölgeleri (r_s : destek bölge boyutu).



Şekil 5.7 Dikdörtgensel destek bölgeleri ($x-y$ koordinatlarında bölge boyutu r_{sx} ve r_{sy}).

İki boyutlu problemlerde, merkez x_Q noktasının, destek bölgesinin büyüklüğü;

$$d_s = \alpha_s \times d_{ort} \quad (5.4)$$

ile bulunur. Burada α_s , destek bölgesinin gerçek boyutunu kontrol ettiğinden, kontrol parametresi olarak adlandırılır ve analizden önce, keyfi olarak belirlenir. Bu çoğunlukla, deneme yanılma ile bulunur ve $\alpha_s \in [2, 3]$ aralığında, pek çok problem için verimli sonuçlar vermektedir. d_{ort} ise; merkez x_Q noktasındaki düğüm aralığı ve aynı zamanda düzgün şekilde dağılmış komşu düğüm noktaları arasındaki uzaklıktır. Örneğin; $\alpha_s = 2.5$ seçilirse; yarıçapı, ortalama düğüm aralığının, 2.5 katı olan bir destek bölgesi anlamına gelir. Bu kapsamda, gerçek düğüm noktası sayısı n ise, destek bölgesindeki tüm düğüm noktalarının sayısınınca belirlenebilir [18].

5.2.4.1 Ortalama Düğüm Aralığının Belirlenmesi

Alan düğümleri arasındaki mesafe hesaplanırken; bir boyutlu durumlarda (5.5) eşitliği, iki boyutlu durumlarda (5.6) eşitliği ve üç boyutlu durumlarda (5.7) eşitliği kullanılır. Ancak, düğümler nizami bir şekilde sıralanırsa; (5.4) eşitliğinden yararlanılır.

$$d_{ort} := \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)} \quad (5.5)$$

Burada D_s , yaklaşık (5.4) eşitliğindeki değer gibi kabul edilebilir. n_{D_s} , toplam düğüm noktası sayısıdır.

$$d_{ort} := \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s}} - 1} \quad (5.6)$$

Burada A_s , tahmini destek bölgesinin alanıdır ve iyi derecede tahminde bulunmak gerekir. n_{A_s} ise, A_s alanlı tahmini bölgenin kapsadığı, düğüm noktası sayısıdır.

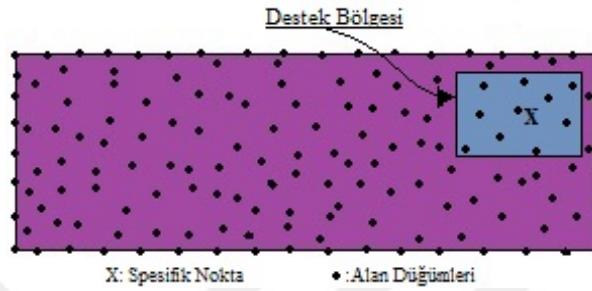
$$d_{ort} := \frac{\sqrt[3]{V_s}}{\sqrt[3]{n_{V_s}} - 1} \quad (5.7)$$

Burada V_s , tahmini destek bölgesinin hacmi iken; n_{V_s} ise, V_s hacimli tahmini bölgenin kapsadığı düğüm noktalarının sayısıdır.

Burada, (5.5), (5.6) ve (5.7) eşitliklerinin, (5.4) eşitliğinde yerine yazılması ile, destek bölgesinin büyüklüğü d_s bulunur. Yani; d_{ort} belirlendikten sonra, keyfi dağılan düğüm noktalarından bir merkez x_Q noktasının, destek bölgesinin büyüklüğü olan d_s , rahatlıkla bulunabilir. Dolayısıyla, probleminin boyutuna göre; D_s veya A_s veya V_s verilerek, merkez x_Q noktasında, destek bölgesinin büyüklüğü d_s tahmin edilir. Probleminin boyutuna göre; D_s veya A_s veya V_s tarafından kapsanan n_{D_s} , n_{A_s} ve n_{V_s} yi veren düğüm noktası sayısı bulunur. Problemin boyutuna ve düğümlerin dizilişine göre düğüm aralığı hesaplanırken, (5.4), (5.5), (5.6) veya (5.7) eşitliklerinden yararlanılır [18].

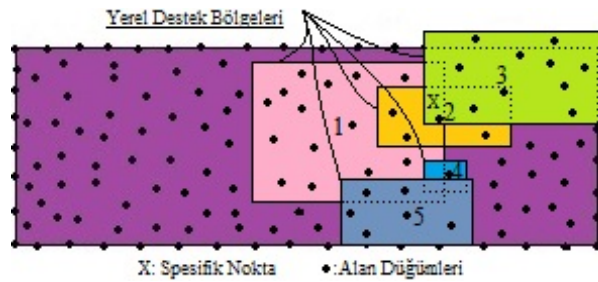
5.2.4.2 Destek Bölgesinin Şekil Fonksiyonları Açısından Önemi

Destek bölgeleri belirlenirken iki önemli durum vardır. İlk durumda, Şekil 5.8 de olduğu gibi, spesifik X noktası merkez olarak seçilerek, destek bölgesi oluşturulur ve bu bölgede içindeki düğümler kullanılarak, Bölüm 5.3.1 de anlatılacak olan spesifik X noktasının şekil fonksiyonları oluşturulur.



Şekil 5.8 Spesifik X noktasını merkez alan destek bölgesi.

İkinci durumda ise; Şekil 5.9 da olduğu gibi, spesifik X noktası hangi destek bölgesi içinde yer alıyor ise, o bölge için şekil fonksiyonu eldesinde kullanılır. Burada, alan düğümleri merkez alınarak destek bölgesi oluşturulur. Yani; 1, 2 ve 3 numaralı alan düğümlerinin destek bölgeleri, spesifik X noktasını kapsadığından, o alan düğümleri şekil fonksiyonlarının eldesinde kullanılır. Eğer başka alan düğümleri de bu spesifik X noktasını kapsar ise, onlar da şekil fonksiyonlarının eldesinde dahil edilirler. 4 ve 5 numaralı alan düğümlerinin destek bölgeleri ise, spesifik X noktasını kapsamadığından, şekil fonksiyonları eldesinde dikkate alınmazlar.



Şekil 5.9 Alan düğümlerini merkez alan destek bölgesi.

Bu durumlardan ikincisi, çözüm bölgesi içerisinde keyfi dağıtılan düğümler ve buna bağlı geniş düğüm aralıklarının oluşmasından dolayı, kullanım açısından daha verimlidir [12]. Dolayısıyla, yukarıda belirtilen durumlar, ağırsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi şekil fonksiyonlarının eldesinde dikkat edilmesi gereken hususlardır.

5.3 YAKLAŞIM FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI

Yaklaşım fonksiyonu elde edilirken; spesifik noktadaki yer değiştirme değeri, noktanın destek bölgesinde alan düğümlerinin kümesi ile temsil edilir. Burada, destek bölgesindeki yer değiştirmeler, düğüm değerleri açısından sürekli tanımlanır. Sürekli tanımlanan bu fonksiyona, şekil fonksiyonu adı verilir. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde; h , destek büyüklüğü olmak üzere, yaklaşım fonksiyonu $u^h(x)$ ile ifade edilir. Bu $u^h(x)$ fonksiyonunun hesaplanabilmesi için Bölüm 5.3.1.2 de ayrıntılı ele alınacak olan, hareketli en küçük kareler yaklaşımından yararlanır. Bu yöntemde; sonlu elemanlar yöntemindeki gibi ağ oluşumu gerçekleştirilmediğinden, yer değiştirme elemanları çözüm bölgesinde, destek bölgesinin yaklaşım değerlerini kullanır. Spesifik noktanın destek bölgesi, farklı büyüklük ve şekle sahiptir. Destek bölgesi, $u^h(x)$ fonksiyonunu oluşturacak düğüm noktalarını belirler. Yerel destek bölgeleri, çembersel ya da dikdörtgensel olarak seçilebilir. Sonlu elemanlar yöntemi şekil fonksiyonları ise; elemanlar üzerinden oluşturulur. Eğer, doğal koordinat sistemi kullanılırsa, şekil fonksiyonları her bir eleman için aynı özelliktedir.

5.3.1 Şekil Fonksiyonlarının Eldesi

Burada; ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi şekil fonksiyonlarının eldesine ilişkin bilgiler verilecektir. Çözüm bölgesinde, bir yer değiştirmenin, $u(x)$ bilinmeyen skaler değeri yani, yaklaşım fonksiyonu;

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=0}^m P^T(x_i) a_i(x) \quad (5.8)$$

şeklindedir. Burada, $P(x)$ ile taban vektörü, m ile monomial (terim) sayısı ve $a_i(x)$ ile de, katsayılar vektörü ifade edilecektir. Monomiallerin tam kümesi, $P(x)$ olarak kullanılabilir. Dolayısıyla, bir boyutlu problemlerde taban matrisleri sırasıyla; sabit yaklaşım (5.9), doğrusal yaklaşım (5.10), karesel yaklaşım (5.11) ve kübik yaklaşım (5.12) eşitliğindeki;

$$P^T(x) = [1]_{1 \times 1}, \text{ monomial sayısı} = 1 \quad (5.9)$$

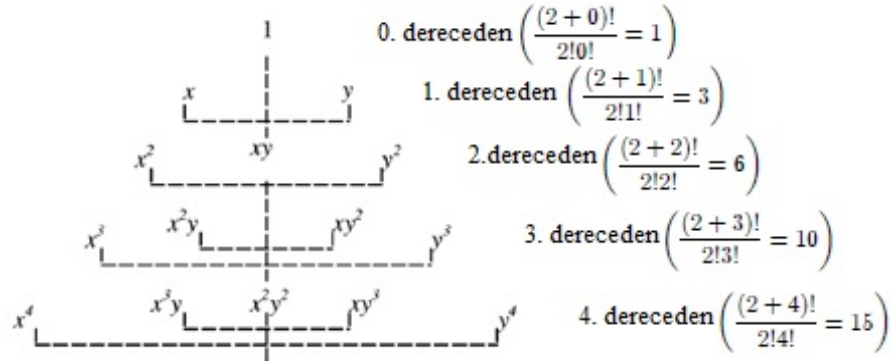
$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}_{1 \times 2}, \text{ monomial sayısı} = 2 \quad (5.10)$$

$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}_{1 \times 3}, \text{ monomial sayısı} = 3 \quad (5.11)$$

$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}_{1 \times 4}, \text{ monomial sayısı} = 4 \quad (5.12)$$

$$\vdots = \quad \vdots$$

gibidir [21-23]. İki boyutlu problemlerde ise, taban matrisleri oluşturulurken, Şekil 5.10 deki Paskal üçgenindeki monomiallerden yararlanır.



Şekil 5.10 Paskal üçgeni [12].

Bu durumda, taban matrisleri sırasıyla; sabit yaklaşım (5.13), doğrusal yaklaşım (5.14), karesel yaklaşım (5.15), ve kübik yaklaşım (5.16) eşitliğindeki;

$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1 \times 1}, \text{ monomial sayısı} = 1 \quad (5.13)$$

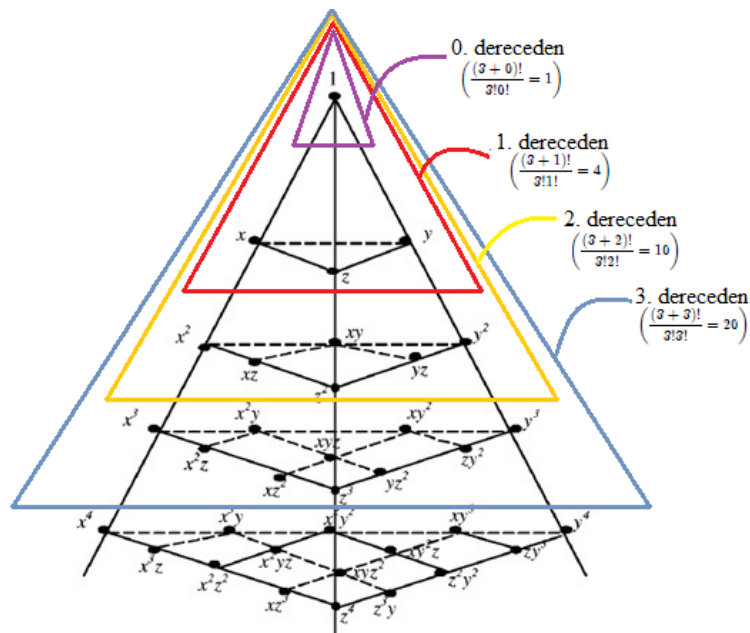
$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix}_{1 \times 3}, \text{ monomial sayısı} = 3 \quad (5.14)$$

$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}_{1 \times 6}, \text{ monomial sayısı} = 6 \quad (5.15)$$

$$P^T(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix}_{1 \times 10}, \text{ monomial sayısı} = 10 \quad (5.16)$$

$$\vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

gibidir [23-32]. Üç boyutlu problemlerde ise, taban matrisleri oluşturulurken, Şekil 5.11 deki Paskal piramidindeki monomiallerden yararlanır.



Şekil 5.11 Paskal piramidi [12].

Bu durumda, taban matrisleri sırasıyla; sabit yaklaşım (5.17), doğrusal yaklaşım (5.18), karesel yaklaşım (5.19) ve kübik yaklaşım (5.20) eşitliğindeki;

$$P^T(x) = \left[1 \right]_{1 \times 4}, \text{monomial sayısı} = 1 \quad (5.17)$$

$$P^T(x) = \left[1 \quad x \quad y \quad z \right]_{1 \times 4}, \text{monomial sayısı} = 4 \quad (5.18)$$

$$P^T(x) = \left[1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad xz \quad yz \right]_{1 \times 10}, \text{monomial sayısı} = 10 \quad (5.19)$$

$$P^T(x) = \left[\underbrace{1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad xz \quad yz \quad x^3 \quad y^3 \quad z^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xy^2 \quad y^2z \quad xz^2 \quad yz^2 \quad xyz}_{\text{monomial sayısı}=20} \right]_{1 \times 20} \quad (5.20)$$

$$\vdots = \vdots$$

gibidir [33]. Dolayısıyla burada belirtilen monomial sayıları ise;

$$\text{Monomial sayısı} := \frac{(d+c)!}{d!c!} \quad (5.21)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada, d çözüm bölgesinin boyutu; c ise, tamlığın sırasıdır. Örneğin; üç boyutlu problemlerde, 3. dereceden tamlık için 20 monomial vardır. Yani,

$$\text{Monomial sayısı} = \frac{(d+c)!}{d!c!} = \frac{(3+3)!}{3!3!} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

dır. Yani, monomial sayısının 20 bulunması, taban vektörünün 20 elemandan oluşacağı anlamına gelir ve bu;

$$P^T(x) = \{1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad xz \quad yz \quad x^3 \quad y^3 \quad z^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xy^2 \quad y^2z \quad xz^2 \quad yz^2 \quad xyz\} \quad (5.22)$$

şeklindedir. (5.8) eşitliğindeki $a_i(x)$ ile belirtilen katsayılar vektörü ise $i = \overline{0, m}$ için;

$$a_i^T(x) = \{a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)\} \quad (5.23)$$

şeklindedir. Ağırlıklandırılmış yerel artık denklemin J ile simgelenmesi durumunda;

$$J = \sum_{i=0}^n w_i [P^T(x_i) a_i(x) - \hat{u}_i]^2 = \sum_{i=0}^n \bar{w}_i (x - x_i) [u^h(x) - \hat{u}_i]^2 \quad (5.24)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, w_i ağırlık fonksiyonudur ve destek bölgesi içinde çözüm yapıldığından $\bar{w}_i(x - x_i) > 0$ şeklindedir. n ise, destek bölgesindeki düğümlerin sayısıdır. Hareketli en küçük kareler yaklaşımında kullanılan düğüm sayısı n , bilinmeyen katsayıların sayısından çok daha büyük olduğundan, $u^h(x)$ fonksiyonu düğüm değerlerini geçemez. u_i ise; $u^h(x)$ fonksiyonunun $x = x_i$ düğüm noktalarına karşılık gelen, destek bölgesindeki

hayali skaler değerler yani, hayali yer değiştirme değerlerinin vektörüdür. Bu eşitlikte, bilinmeyen alan fonksiyonunun yaklaşım ve düğüm değerleri kullanılarak oluşturulan fonksiyon, ağırlıklandırılmış artıktır. Ağırlıklandırılmış yerel artık denklemler minimize edilerek, $a_i(x)$ katsayıları bulunur. Yani bu durum; J nin, $a_i(x)$ katsayılarına göre kısmi diferansiyelinin alınarak, sıfıra eşitlenmesi ile mümkündür. Dolayısıyla;

$$\frac{\partial J}{\partial a_i(x)} = 0 \quad (5.25)$$

şeklinde ifade edilir ve bu ise, aşağıdaki doğrusal ilişkiler dizisine yol açar;

$$A(x)a_i(x) = B(x)u_i \quad (5.26)$$

Burada u_i , yani; destek bölgesindeki hayali yer değiştirmelerin vektörü, $i = \overline{0, n}$ için;

$$u_i = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}^T \quad (5.27)$$

şeklinde ifade edilir. $A(x)$, moment matrisi olarak adlandırılır ve;

$$A(x) = P^T W P = \sum_{i=0}^n w_i(x) P(x_i) P^T(x_i) = \sum_{i=0}^n \bar{w}_i(x - x_i) P(x_i) P^T(x_i) \quad (5.28)$$

şeklinindedir. Bu matris simetrik bir kare matristir ve burada, matris çarpımının birleşme özelliğinin varlığı da unutulmamalıdır. B matrisine ise; Vandermonde matrisi denir ve

$$B(x) = P^T W = \begin{bmatrix} w_0(x)P(x_0) & w_1(x)P(x_1) & \dots & w_n(x)P(x_n) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

şeklinde yazılır. Buradan, $a_i(x)$ katsayılarının elde edilebilmesi için; (5.26) eşitliğinde, her iki taraf $A^{-1}(x)$ ile genişletilerek yeniden düzenlenirse;

$$a_i(x) = A^{-1}(x)B(x)u_i \quad (5.30)$$

elde edilir ve bulunan bu eşitlik, (5.8) eşitliğinde yerine yazılması halinde;

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^m P^T(x)a_i(x) = \sum_{i=0}^m P^T(x)A^{-1}(x)B(x)u_i \quad (5.31)$$

yaklaşım fonksiyonu elde edilecektir. Burada, u_i hayali yer değiştirme değerleri dışında kalan ifadeler, x noktasının destek bölgesinde seçilen n tane düğüme karşılık gelen hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonlarının vektörüdür ve bu ise;

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^m P^T(x)A^{-1}(x)B(x)u_i = \sum_{i=0}^n \phi_i(x)u_i \quad (5.32)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\phi_i(x)$ şekil fonksiyonlarının vektörü olup, matris formunda;

$$\phi_i(x) = P^T(x)A^{-1}(x)B(x) \quad (5.33)$$

biçimindedir [21-42]. Buradan görüleceği üzere, ağırlık fonksiyonları; A ve B matrisleri ile şekil fonksiyonlarının eldesinde devreye girdiğinden, çözüm için önem arz etmektedir. Ağırlık fonksiyonlarının doğru seçilmesi halinde, hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları tüm çözüm bölgesinde sürekli olmaktadır. Şekil fonksiyonlarının sürekliliği; P , A ve B nin sürekliliğine, aynı zamanda; A ve B nin oluşumunda ağırlık fonksiyonları etkili olduğundan, ağırlık fonksiyonlarının da sürekliliğine bağlıdır. Bu nedenle, hareketli en küçük kareler yaklaşımının performansında ağırlık fonksiyonu etkin rol oynamaktadır. Bu kapsamda ağırlık fonksiyonları Bölüm 5.3.2 de ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

5.3.1.1 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı (HEKY)

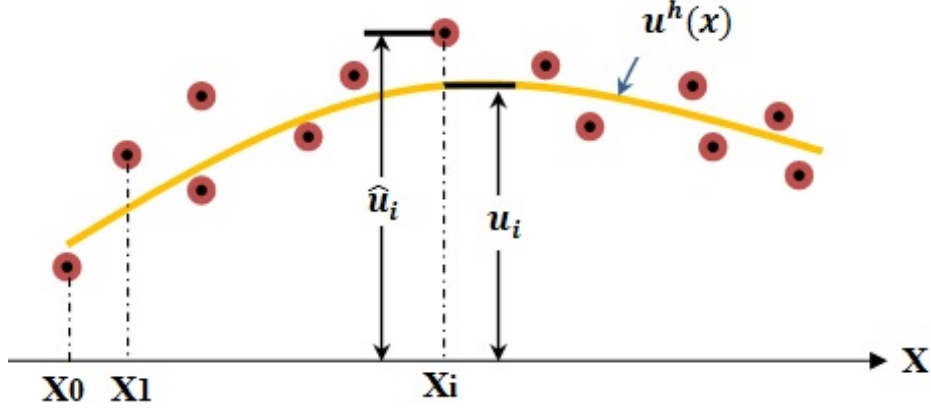
Hareketli en küçük kareler yaklaşımı, yüzey oluşumu için tasarlanmış, Lancaster vd. tarafından da dağılık veri yaklaşımı için kullanılmıştır. Aynı zamanda, fonksiyonların seri gösterimi için, bir yöntem olarak ortaya atılmıştır [43].

Hareketli en küçük kareler, alan düğümlerini kullanarak destek bölgesinde spesifik bir nokta için oluşturulur. Burada seçilen n düğüm sayısı, (5.28) eşitliğindeki A matrisinin yaklaşım kararlılığını sağlamak için yeterli olmalıdır. Düğüm sayısının teorikte en iyi değeri mümkün olmadığından, sayısal deneylerle bulunabilir. Tezde de, ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi şekil fonksiyonları oluşturulurken yaygın olarak kullanılan bu yaklaşım yönteminin çözüm prosedürü incelenecektir.

5.3.1.2 Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı Çözüm Prosedürü

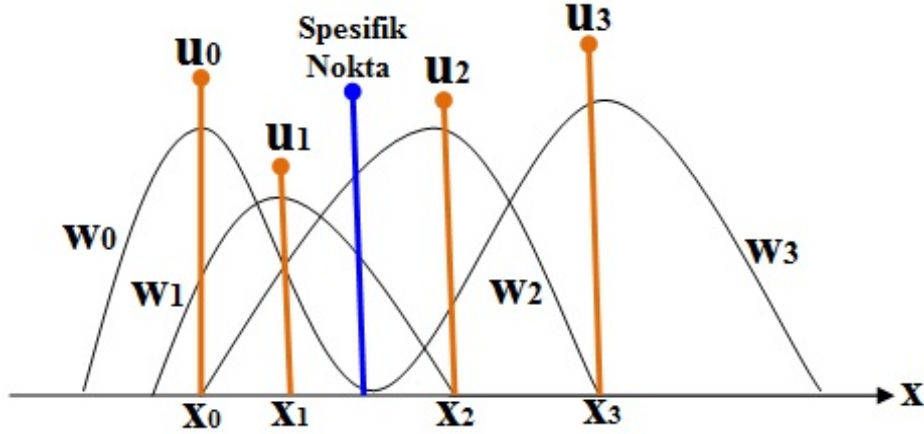
Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları elde edilirken, spesifik bir nokta için Bölüm 5.3.1.3 te ele alınacak olan yaklaşımlardan herhangi biri, yaklaşım fonksiyonu olarak seçilir ve fonksiyona bağlı düğümlerdeki yerel artık denklemler yazılır. Devamında, yerel artık denklemler ağırlıklandırılarak minimize edilir ve $i = \overline{1, n}$ için, $a_i(x)$ katsayıları bulunur. Bu katsayılar, yerel yaklaşım fonksiyonunda yerine yazıldıktan sonra da, şekil fonksiyonları elde edilir. Son olarak, spesifik noktada oluşturulan yerel yaklaşım, genel yaklaşıma dönüştürülerek prosedür tamamlanır.

Hareketli en küçük kareler yaklaşımında kullanılan düğüm sayısı n , bilinmeyen katsayıların sayısından çok daha büyük olduğundan Şekil 5.12 de görüldüğü üzere $u^h(x)$ fonksiyonu düğüm değerlerini geçemez.



Şekil 5.12 Yaklaşım fonksiyonuna göre düğüm noktalarının durumları [20].

Hareketli en küçük kareler yaklaşımının amacı; x_i noktalarında, u_i hayali skaler değerler yardımı ile sürekli bir $u^h(x)$ fonksiyonu oluşturmaktır. Kısaca yöntem; \hat{u}_i kesin düğüm değerleriyle, uygulanan u_i eğri değerleri yani hareketli en küçük kareler yaklaşımı ile elde edilen hayali skaler değerler arasındaki farkı en aza indirmeyi amaçlar. Hareketli en küçük kareler yaklaşımını anlamak için, Şekil 5.13 te belirtilen örnek incelenmelidir. Burada, yaklaşım yapılmak istenen değerler $i = \overline{0, 3}$ için u_i değerleridir.



Şekil 5.13 Spesifik noktanın örnek dört düğüm noktasına göre durumu.

Bu kapsamda; öncelikle [44] kaynağında ele alınan işlem adımları genişletilerek, iki ve üç boyutta yaklaşım fonksiyonlarının eldesinde uygulanmıştır. Böylece destek bölgesinde ele alınacak örnek dört düğüm noktasında, iki ve üç boyutta yerel yaklaşım fonksiyonu olarak, genelleme yapabilmek adına doğrusal yaklaşım fonksiyonu seçilmiş ve yaklaşım fonksiyonlarının davranışı araştırılmıştır.

5.3.1.3 Seçilen Spesifik Bir Nokta İçin Kullanılabilecek Yaklaşım Fonksiyonları

Bir boyutlu problemler için seçilebilecek yaklaşımlardan; sabit, doğrusal, karesel ve kübik yaklaşımlar sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$u^h(x) = a_0, \quad (5.34)$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1x, \quad (5.35)$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad (5.36)$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad (5.37)$$

$$\vdots = \vdots$$

İki boyutlu problemler için sabit, doğrusal, karesel ve kübik yaklaşımlar sırasıyla;

$$u^h(x, y) = a_0, \quad (5.38)$$

$$u^h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y, \quad (5.39)$$

$$u^h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2, \quad (5.40)$$

$$u^h(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \\ + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \quad (5.41)$$

$$\vdots = \vdots$$

Üç boyutlu problemler için sabit, doğrusal, karesel ve kübik yaklaşımlar sırasıyla;

$$u^h(x, y, z) = a_0, \quad (5.42)$$

$$u^h(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z, \quad (5.43)$$

$$u^h(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 \\ + a_7xy + a_8xz + a_9yz, \quad (5.44)$$

$$u^h(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 \\ + a_7xy + a_8xz + a_9yz + a_{10}x^3 + a_{11}y^3 + a_{12}z^3 \\ + a_{13}x^2y + a_{14}x^2z + a_{15}xy^2 + a_{16}y^2z \\ + a_{17}xz^2 + a_{18}yz^2 + a_{19}xyz, \quad (5.45)$$

$$\vdots = \vdots$$

şeklinde olup, daha büyük boyutlara genişletilebilir.

5.3.1.3.1 Bir Boyutlu Problemlerde, Sabit Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü

Burada, (5.34) – (5.37) arasındaki eşitliklerden herhangi biri, bir boyutlu problemlerde kullanılacak yaklaşımlar olup; önce (5.34) eşitliğinden yararlanarak Bölüm 5.3.1.2 de belirtilen hareketli en küçük kareler yaklaşımının çözüm prosedürüne uygulanacaktır.

1. Adım: Yerel Yaklaşım Fonksiyonunun Belirlenmesi

Bu adımda; yaklaşımın derecesi belirlenecektir. Şekil 5.13 te görüldüğü üzere, spesifik herhangi bir nokta için (Burada spesifik nokta y olarak isimlendirilmiştir.), yerel yaklaşım fonksiyonu olarak sabit yaklaşımın aşağıdaki gibi;

$$u^h(y) = a_0(y) \quad (5.46)$$

seçilmesiyle hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonları elde edilmeye çalışılacaktır.

2. Adım: Düzgümlerdeki Yerel Artık Denklemlerin Eldesi

Bu adımda; $i = \overline{0, 3}$ için u_i yer değiştirme değerlerine, (5.46) eşitliğinde belirtildiği haliyle yaklaşım yapılarak yerel artık denklemler sırasıyla,

$$R_0(y) = a_0 - u_0, \quad (5.47)$$

$$R_1(y) = a_0 - u_1, \quad (5.48)$$

$$R_2(y) = a_0 - u_2, \quad (5.49)$$

$$R_3(y) = a_0 - u_3 \quad (5.50)$$

yazıldıktan sonra bu denklemler ağırlıklandırılır. Ağırlıklandırılmış J artık terimine, (5.24) eşitliğinde daha önce kısmen değinilmiştir ve burada hatırlanarak, ayrıntılı olarak incelenirse;

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=0}^n w_i [P^T(x_i) a_i(x) - \hat{u}_i]^2 = \sum_{i=0}^n w_i(y) [u^h(y) - \hat{u}_i]^2 \\ &= \sum_{i=0}^n w_i(y) (R_i(y))^2 = \sum_{i=0}^n w_i(y) R_i^2(y) \end{aligned} \quad (5.51)$$

şeklinde ifade edilir ve buradan ağırlıklandırılmış yerel artık terim, $i = \overline{0, 3}$ için;

$$J = w_0(y)R_0^2(y) + w_1(y)R_1^2(y) + w_2(y)R_2^2(y) + w_3(y)R_3^2(y) \quad (5.52)$$

şeklinde yazılabilir.

3. Adım: Ağırlıklandırılmış Yerel Artık Denkleminin Minimizasyonu

Bu adımda; yerel artık denklemler ağırlıklandırıldıktan sonra, seçilen yerel yaklaşım fonksiyonundaki $i = \overline{0, n}$ için, $a_i(x)$ katsayılarının eldesinde kısmi diferansiyel işlemi uygulanarak sıfıra eşitlenir. Burada, yerel yaklaşım fonksiyonu olarak sabit yaklaşım alındığından, sadece a_0 katsayısına göre işlem yapılacaktır. Yani,

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \quad (5.53)$$

yazılması ile yerel artık denklem minimize edilmiş olur. Dolayısıyla, (5.52) eşitliğinden yola çıkılarak, öncelikle ağırlıklandırılmış yerel artık terim;

$$\begin{aligned} J &= w_0(y)R_0^2 + w_1(y)R_1^2 + w_2(y)R_2^2 + w_3(y)R_3^2 \\ &= w_0(y)(a_0 - u_0)^2 + w_1(y)(a_0 - u_1)^2 + w_2(y)(a_0 - u_2)^2 + w_3(y)(a_0 - u_3)^2 \end{aligned} \quad (5.54)$$

şeklinde yazılır ve bu eşitlikten yararlanarak; (5.53) eşitliği oluşturulursa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_0} &= 2w_0(a_0 - u_0) + 2w_1(a_0 - u_1) + 2w_2(a_0 - u_2) + 2w_3(a_0 - u_3) \\ &= 2a_0w_0 - 2u_0w_0 + 2a_0w_1 - 2u_1w_1 + 2a_0w_2 - 2u_2w_2 + 2a_0w_3 - 2u_3w_3 \\ &= 2a_0(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) - 2(w_0u_0 + w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3) = 0, \\ &\Rightarrow 2a_0(w_0 + w_1 + w_2 + w_3) = 2(w_0u_0 + w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3), \\ &\Rightarrow a_0 = \frac{w_0u_0 + w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3}{w_0 + w_1 + w_2 + w_3} \end{aligned} \quad (5.55)$$

a_0 katsayısı bulunur ve bu $a_i(x)$ katsayıları dördüncü adımda yerine yazılarak yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Aynı zamanda; burada, $i = \overline{0, 3}$ için, $\sum w_i \neq 0$ dir.

4. Adım: Spesifik Nokta İçin Yerel Yaklaşımın Eldesi

Bu adımda; (5.55) eşitliği ile bulunan a_0 katsayısı, yerel yaklaşım olarak seçilen (5.46) eşitliğindeki sabit yaklaşımda yerine yazılırsa;

$$u^h(y) = a_0(y) = \frac{w_0(y)u_0 + w_1(y)u_1 + w_2(y)u_2 + w_3(y)u_3}{w_0(y) + w_1(y) + w_2(y) + w_3(y)} = \frac{\sum w_i(y)u_i}{\sum w_i(y)}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (5.56)$$

spesifik noktadaki yerel yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Burada $\sum w_i(y) \neq 0$ olup, bu adımdan sonra yerel yaklaşım genel yaklaşıma çevrilmelidir.

5. Adım: Yerel Yaklaşımın Genel Yaklaşımına Dönüştürülmesi

Bu son adımda ise; (5.56) eşitliğinde y görülen yerlere, x yazılmasıyla;

$$u^h(x) = a_0(x) = \frac{\sum w_i(x)u_i}{\sum w_i(x)} \quad (5.57)$$

genel yaklaşım elde edilir ve bu eşitlik (3.7) eşitliğindeki formata benzemektedir. Böylece; yaklaşım fonksiyonu, şekil fonksiyonları ile yer değiştirme değerlerine bağlı olarak elde edilmektedir. Bu son eşitlikten, u_i değerlerinin çıkartılması ile;

$$\phi_i = \sum \frac{w_i(x)}{\sum w_i(x)} \quad (5.58)$$

hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları elde edilir [19]. Burada üçüncü adımdan sonraki kısım, daha yüksek boyuttan problemleri de kapsayacak genel formun eldesi adına (5.26) – (5.33) eşitlikleri arasındaki bilgiler ele alınarak yeniden hesaplanacak olursa; bir boyutlu problemlerde incelenen örnek dört düğüm noktası ve sabit yaklaşım için taban matrisi (5.9) eşitliğinden yararlanarak;

$$P^T = \begin{bmatrix} P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

şeklinde yazılır. Ağırlık matrisi W , bir köşegen matristir ve,

$$W = \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

biçimindedir ve şekil fonksiyonlarının eldesi için gereken, A , A^{-1} ve B matrisleri, sırasıyla;

$$\begin{aligned} A &= P^T W P \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) \end{bmatrix} = \gamma_1 \end{aligned} \quad (5.61)$$

elde edilir ve buradan A matrisinin tersi;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\gamma_1} \quad (5.62)$$

şeklinde bulunur. B matrisi ise;

$$\begin{aligned}
B &= P^T W \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_0(x) & w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

şeklinde dir. Buradan (5.30) eşitliğinden yararlanarak $a_0(x)$ katsayısı,

$$a_0(x) = \frac{w_0(x)u_0 + w_1(x)u_1 + w_2(x)u_2 + w_3(x)u_3}{w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_3(x)} \tag{5.64}$$

bulunur. Yani, istenilen yaklaşım fonksiyonu elde edilmiş olunur. A , A^{-1} ve B matrisleri, (5.33) eşitliğindeki denklemde yerine yazılırsa, buradan da şekil fonksiyonları elde edilir.

5.3.1.3.2 Bir Boyutlu Problemlerde, Doğrusal Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü

Bir önceki bölümde, (5.34) eşitliğinden yararlanarak bir boyutlu problemler için hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları elde edilmiştir. Bu kısımda ise; (5.35) eşitliğinden yararlanarak, Bölüm 5.3.1.2 deki hareketli en küçük kareler yaklaşımının çözüm prosedürü uygulanacaktır.

1. Adım: Yerel Yaklaşım Fonksiyonunun Belirlenmesi

Bu adımda; Şekil 5.13 te olduğu gibi, spesifik bir nokta için, yerel yaklaşım fonksiyonu olarak (5.35) eşitliği ile verilen doğrusal yaklaşımın;

$$u^h(x) = a_0 + a_1x \tag{5.65}$$

seçilmesi ile ilk adım gerçekleştirilmiş olur.

2. Adım: Dügümlerdeki Yerel Artık Denklemlerin Eldesi

Bu adımda; $i = \overline{0, 3}$ için, u_i yer değıştirme değerlerine, (5.65) eşitliğinde belirtildiği haliyle yaklaşım yapılarak yerel artık denklemler, sırasıyla;

$$R_0(x) = a_0 + a_1x_0 - u_0, \tag{5.66}$$

$$R_1(x) = a_0 + a_1x_1 - u_1, \tag{5.67}$$

$$R_2(x) = a_0 + a_1x_2 - u_2, \tag{5.68}$$

$$R_3(x) = a_0 + a_1x_3 - u_3 \tag{5.69}$$

elde edilir ve bu denklemler ağırlıklandırıldıktan sonra minimize edilerek, $i = \overline{0,1}$ için, $a_i(x)$ katsayıları bulunur.

3. Adım: Ağırlıklandırılmış Yerel Artık Denklemin Eldesi ve Minimizasyonu

Bu adımda; yerel artık denklemler ikinci adımdaki gibi yazıldıktan sonra, ağırlıklandırılmış yerel artık denklem, $i = \overline{0,3}$ için (5.51) eşitliğinde belirtildiği üzere;

$$\begin{aligned}
J &= w_0 R_0^2 + w_1 R_1^2 + w_2 R_2^2 + w_3 R_3^2 \\
&= w_0 (a_0 + a_1 x_0 - u_0)^2 + w_1 (a_0 + a_1 x_1 - u_1)^2 \\
&\quad + w_2 (a_0 + a_1 x_2 - u_2)^2 + w_3 (a_0 + a_1 x_3 - u_3)^2
\end{aligned} \tag{5.70}$$

bulunur ve burada yerel yaklaşım fonksiyonu olarak doğrusal yaklaşım alındığından a_0 ve a_1 katsayılarına göre kısmi diferansiyel alınarak, sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0 \tag{5.71}$$

ağırlıklandırılmış yerel artık denklem minimize edilmiş olur. Böylece, ilk olarak a_0 katsayısına göre kısmi diferansiyel alınıp, elde edilen ifade sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_0} &= 2w_0 (a_0 + a_1 x_0 - u_0) + 2w_1 (a_0 + a_1 x_1 - u_1) \\
&\quad + 2w_2 (a_0 + a_1 x_2 - u_2) + 2w_3 (a_0 + a_1 x_3 - u_3) \\
&= 2w_0 a_0 + 2w_0 a_1 x_0 - 2w_0 u_0 + 2w_1 a_0 + 2w_1 a_1 x_1 - 2w_1 u_1 \\
&\quad + 2w_2 a_0 + 2w_2 a_1 x_2 - 2w_2 u_2 + 2w_3 a_0 + 2w_3 a_1 x_3 - 2w_3 u_3 \\
&= 2a_0 (w_0 + w_1 + w_2 + w_3) + 2a_1 (w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3) \\
&\quad - 2(w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3) = 0,
\end{aligned} \tag{5.72}$$

a_1 katsayısına göre kısmi diferansiyelinin alınmasıyla, elde edilen ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_1} &= 2w_0 x_0 (a_0 + a_1 x_0 - u_0) + 2w_1 x_1 (a_0 + a_1 x_1 - u_1) \\
&\quad + 2w_2 x_2 (a_0 + a_1 x_2 - u_2) + 2w_3 x_3 (a_0 + a_1 x_3 - u_3) \\
&= 2w_0 x_0 a_0 + 2w_0 x_0^2 a_1 - 2w_0 x_0 u_0 + 2w_1 x_1 a_0 + 2w_1 x_1^2 a_1 - 2w_1 x_1 u_1 \\
&\quad + 2w_2 x_2 a_0 + 2w_2 x_2^2 a_1 - 2w_2 x_2 u_2 + 2w_3 x_3 a_0 + 2w_3 x_3^2 a_1 - 2w_3 x_3 u_3 \\
&= 2a_0 (w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3) + 2a_1 (w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2) \\
&\quad - 2(w_0 x_0 u_0 + w_1 x_1 u_1 + w_2 x_2 u_2 + w_3 x_3 u_3) = 0
\end{aligned} \tag{5.73}$$

elde edilir. (5.72) ve (5.73) eşitliklerindeki değerlere karşılık gelecek şekilde;

$$\gamma_1 : = \sum_{i=0}^3 w_i = w_0 + w_1 + w_2 + w_3, \quad (5.74)$$

$$\gamma_2 : = \sum_{i=0}^3 w_i x_i = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3, \quad (5.75)$$

$$\gamma_3 : = \sum_{i=0}^3 w_i x_i^2 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2, \quad (5.76)$$

$$\gamma_4 : = \sum_{i=0}^3 w_i u_i = w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3, \quad (5.77)$$

$$\gamma_5 : = \sum_{i=0}^3 w_i x_i u_i = w_0 x_0 u_0 + w_1 x_1 u_1 + w_2 x_2 u_2 + w_3 x_3 u_3 \quad (5.78)$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ve γ_5 ifadeleri tanımlanırsa, (5.72) ve (5.73) eşitlikleri sırası ile;

$$2a_0\gamma_1 + 2a_1\gamma_2 - 2\gamma_4 = 0, \quad (5.79)$$

$$2a_0\gamma_2 + 2a_1\gamma_3 - 2\gamma_5 = 0 \quad (5.80)$$

olur ve (5.79) eşitliği $-\gamma_3$ ile (5.80) eşitliği γ_2 ile genişletilerek taraf tarafa toplanırsa,

$$a_0 = \frac{\gamma_2\gamma_5 - \gamma_4\gamma_3}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3} \quad (5.81)$$

bulunur. (5.79) eşitliği γ_2 ile (5.80) eşitliği de $-\gamma_1$ ile genişletilerek taraf tarafa toplanırsa,

$$a_1 = \frac{\gamma_2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_5}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3} \quad (5.82)$$

bulunur ve elde edilen $i = \overline{0,1}$ için bu $a_i(x)$ katsayıları, yerel yaklaşım fonksiyonunda yerine yazılır. Diğer taraftan (5.79) ve (5.80) eşitlikleri matris formunda;

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix}$$

yazılarak eşitliğin solundaki ilk matrisin tersinin alınması ve eşitliğin sağındaki matris ile çarpılması sonucu $i = \overline{0,1}$ için, $a_i(x)$ katsayılarının sırasıyla, (5.81) ve (5.82) eşitliğindeki hali ile elde edilebileceği görülür. Bu adımdan sonra, $a_i(x)$ katsayıları dördüncü adımda yerine yazılarak yaklaşım fonksiyonu elde edilecektir.

4. Adım: Spesifik Nokta İçin Yerel Yaklaşımın Eldesi

Bu adımda; (5.81) ve (5.82) eşitlikleri ile bulunan a_0 ve a_1 katsayıları, yerel yaklaşım olarak belirlenen (5.65) eşitliğindeki doğrusal yaklaşımda yerine yazılırsa yaklaşım fonksiyonu;

$$u^h(x) = \frac{\gamma_2\gamma_5 - \gamma_4\gamma_3}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3} + \frac{\gamma_2\gamma_4 - \gamma_1\gamma_5}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3}x = \frac{\gamma_5(\gamma_2 - \gamma_1x) - \gamma_4(\gamma_3 - \gamma_2x)}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3} \quad (5.83)$$

elde edilir. Buradan da, şekil fonksiyonunun açık bir şekilde ifade edilebilmesi için (5.58) eşitliğinde olduğu gibi yazıldıktan sonra, u_i değerlerinin bu ifadenin dışında tutulmasıyla, ilk düğüm noktası için şekil fonksiyonu;

$$\phi_0 = \frac{w_0 x_0 \gamma_2 - w_0 \gamma_3}{\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3} + \frac{w_0 \gamma_2 - w_0 x_0 \gamma_1}{\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3} x \quad (5.84)$$

şeklindedir. Diğer düğüm noktalarındaki şekil fonksiyonları da, aynı şekilde elde edilebilir. Burada üçüncü adımdan sonraki kısım, daha yüksek boyuttan problemleri de kapsayacak genel formu elde etmek adına (5.26) – (5.33) eşitlikleri arasındaki bilgiler ele alınarak yeniden hesaplanacak olursa; bir boyutlu problemlerde incelenen örnek dört düğüm noktası ve doğrusal yaklaşım için taban matrisi (5.10) eşitliğinden yararlanarak;

$$P^T = \begin{bmatrix} P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) \\ P_1(x_0) & P_1(x_1) & P_1(x_2) & P_1(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

şeklinde elde edilebilir [45]. Ağırlık matrisi W ; burada (5.60) eşitliğindeki gibidir. Şekil fonksiyonlarının eldesi için gerekli olan, A , A^{-1} ve B matrisleri, sırasıyla;

$$\begin{aligned} A &= P^T W P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_0(x) & w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \\ x_0 w_0(x) & x_1 w_1(x) & x_2 w_2(x) & x_3 w_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_0 + w_1 + w_2 + w_3 & x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 \\ x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 & w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.86)$$

elde edilir. A matrisinin tersi ise;

$$A^{-1} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (5.87)$$

şeklindedir ve bu matris elemanlarına karşılık gelen ifadeler, sırasıyla;

$$a_{11} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3}, \quad a_{12} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3}, \quad a_{21} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3}, \quad a_{22} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3}$$

şeklindedir. Vandermonde matrisi B ise aşağıdaki gibi;

$$\begin{aligned} B &= P^T W \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_0(x) & w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \\ x_0 w_0(x) & x_1 w_1(x) & x_2 w_2(x) & x_3 w_3(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.88)$$

elde edilir. A , A^{-1} ve B matrisleri bulunduğundan sonra bulunan, bu değerler, (5.33) eşitliğindeki denklemde yerine yazılırsa, şekil fonksiyonları elde edilir.

5.3.1.3.3 İki Boyutlu Problemlerde, Doğrusal Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü

Bir boyutlu problemler için ilk olarak, çok boyutlu problemlere temel teşkil etmesi adına (5.34) ve (5.35) eşitliklerinden yararlanılarak, hareketli en küçük kareler yaklaşımı çözüm prosedürü uygulanmıştır. Bu kısımda ise, iki boyutlu problemler için hareketli en küçük kareler yaklaşımı çözüm prosedürünün nasıl uygulanacağı araştırılacaktır. Bu kapsamda; Bölüm 5.3.1.3 teki, (5.38) – (5.41) arasındaki eşitliklerden herhangi biri de iki boyutlu problemler için yaklaşım fonksiyonu olarak seçilebileceği gibi, araştırma açısından (5.39) eşitliğindeki doğrusal yaklaşım tercih edilmiş ve Şekil 5.13 teki gibi, örnek dört düğüm noktası ele alınarak, hareketli en küçük kareler yaklaşımı çözüm prosedürü incelenmiştir.

1. Adım: Yerel Yaklaşımın Belirlenmesi

Bu adımda, Şekil 5.13 te olduğu gibi, spesifik bir nokta için, yerel yaklaşım fonksiyonu olarak (5.39) eşitliği ile verilen doğrusal yaklaşım;

$$u^h(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (5.89)$$

seçilerek, hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları elde edilecektir.

2. Adım: Dügümlerdeki Yerel Artık Denklemlerinin Eldesi

Bu adımda; $i = \overline{0, 3}$ için, u_i yer değiştirme değerlerine, (5.89) eşitliğinde belirtildiği haliyle yaklaşım yapılarak yerel artık denklemler, sırasıyla;

$$R_0(x, y) = a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 - u_0, \quad (5.90)$$

$$R_1(x, y) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 - u_1, \quad (5.91)$$

$$R_2(x, y) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 - u_2, \quad (5.92)$$

$$R_3(x, y) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 - u_3 \quad (5.93)$$

elde edilir ve bu denklemler ağırlıklandırıldıktan sonra minimize edilerek, $i = \overline{0, 2}$ için, $a_i(x)$ katsayıları bulunur.

3. Adım: Ağırlıklandırılmış Yerel Artık Denkleminin Minimizasyonu

Bu adımda; yerel artık denklemler ikinci adımdaki gibi yazıldıktan sonra, ağırlıklandırılmış yerel artık denklem, $i = \overline{0, 3}$ için (5.51) eşitliğinde belirtildiği üzere;

$$\begin{aligned} J &= w_0R_0^2 + w_1R_1^2 + w_2R_2^2 + w_3R_3^2 \\ &= w_0(a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 - u_0)^2 + w_1(a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 - u_1)^2 \\ &\quad + w_2(a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 - u_2)^2 + w_3(a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 - u_3)^2 \\ &= w_0 \left(\begin{array}{l} a_0^2 + 2a_0(a_1x_0 + a_2y_0) + 2(a_1a_2x_0y_0) \\ + a_1^2x_0^2 + a_2^2y_0^2 + u_0^2 - 2u_0(a_0 + a_1x_0 + a_2y_0) \end{array} \right) \\ &\quad + w_1 \left(\begin{array}{l} a_0^2 + 2a_0(a_1x_1 + a_2y_1) + 2(a_1a_2x_1y_1) \\ + a_1^2x_1^2 + a_2^2y_1^2 + u_1^2 - 2u_1(a_0 + a_1x_1 + a_2y_1) \end{array} \right) \\ &\quad + w_2 \left(\begin{array}{l} a_0^2 + 2a_0(a_1x_2 + a_2y_2) + 2(a_1a_2x_2y_2) \\ + a_1^2x_2^2 + a_2^2y_2^2 + u_2^2 - 2u_2(a_0 + a_1x_2 + a_2y_2) \end{array} \right) \\ &\quad + w_3 \left(\begin{array}{l} a_0^2 + 2a_0(a_1x_3 + a_2y_3) + 2(a_1a_2x_3y_3) \\ + a_1^2x_3^2 + a_2^2y_3^2 + u_3^2 - 2u_3(a_0 + a_1x_3 + a_2y_3) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5.94)$$

bulunur ve burada yerel yaklaşım fonksiyonu olarak doğrusal yaklaşım alındığından a_0, a_1 ve a_2 katsayılarına göre kısmi diferansiyel alınarak, sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0 \quad (5.95)$$

ağırlıklandırılmış yerel artık denklem minimize edilmiş olur. Böylece, ilk olarak a_0 katsayısına göre kısmi diferansiyel alınıp, elde edilen ifade sifira eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_0} &= a_0 (w_0 + w_1 + w_2 + w_3) \\
&+ a_1 (x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3) \\
&+ a_2 (y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3) \\
&- (u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) = 0,
\end{aligned} \tag{5.96}$$

a_1 katsayısına göre kısmi diferansiyelinin alınıp, elde edilen ifadenin sifira eşitlenmesi ile;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_1} &= a_0 (x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3) \\
&+ a_1 (w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2) \\
&+ a_2 (x_0 y_0 w_0 + x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2 + x_3 y_3 w_3) \\
&- (x_0 u_0 w_0 + x_1 u_1 w_1 + x_2 u_2 w_2 + x_3 u_3 w_3) = 0,
\end{aligned} \tag{5.97}$$

a_2 katsayısına göre kısmi diferansiyelinin alınıp, elde edilen ifadenin sifira eşitlenmesi ile;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial a_2} &= a_0 (y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3) \\
&+ a_1 (x_0 y_0 w_0 + x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2 + x_3 y_3 w_3) \\
&+ a_2 (w_0 y_0^2 + w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2 + w_3 y_3^2) \\
&- (y_0 u_0 w_0 + y_1 u_1 w_1 + y_2 u_2 w_2 + y_3 u_3 w_3) = 0
\end{aligned} \tag{5.98}$$

elde edilir. Burada (5.96) – (5.98) aralığındaki eşitlik değerlerine karşılık gelecek şekilde; $i = \overline{1, 5}$ için γ_i ifadeleri, sırasıyla; (5.74) – (5.78) aralığındaki eşitliklerde tanımlandığından, hatırlamak için tekrar;

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: = \sum_{i=0}^3 w_i = w_0 + w_1 + w_2 + w_3, \\
\gamma_2 &: = \sum_{i=0}^3 x_i w_i = x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3, \\
\gamma_3 &: = \sum_{i=0}^3 w_i x_i^2 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2, \\
\gamma_4 &: = \sum_{i=0}^3 u_i w_i = u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3, \\
\gamma_5 &: = \sum_{i=0}^3 x_i u_i w_i = x_0 u_0 w_0 + x_1 u_1 w_1 + x_2 u_2 w_2 + x_3 u_3 w_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. $i = \overline{6, 9}$ için, γ_i ifadeleri sırasıyla tanımlanacak olursa;

$$\gamma_6 : = \sum_{i=0}^3 y_i w_i = y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3, \quad (5.99)$$

$$\gamma_7 : = \sum_{i=0}^3 w_i y_i^2 = w_0 y_0^2 + w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2 + w_3 y_3^2, \quad (5.100)$$

$$\gamma_8 : = \sum_{i=0}^3 x_i y_i w_i = x_0 y_0 w_0 + x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2 + x_3 y_3 w_3, \quad (5.101)$$

$$\gamma_9 : = \sum_{i=0}^3 y_i u_i w_i = y_0 u_0 w_0 + y_1 u_1 w_1 + y_2 u_2 w_2 + y_3 u_3 w_3 \quad (5.102)$$

olur ve bu tanımlamalardan sonra, (5.96) – (5.98) aralığındaki eşitlikler, sırasıyla;

$$a_0 \gamma_1 + a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_6 - \gamma_4 = 0, \quad (5.103)$$

$$a_0 \gamma_2 + a_1 \gamma_3 + a_2 \gamma_8 - \gamma_5 = 0, \quad (5.104)$$

$$a_0 \gamma_6 + a_1 \gamma_8 + a_2 \gamma_7 - \gamma_9 = 0 \quad (5.105)$$

şeklinde yazılabilir ve bu üç denklem matris biçiminde;

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_6 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_8 \\ \gamma_6 & \gamma_8 & \gamma_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_9 \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

yazılırsa, buradan a_0 , a_1 ve a_2 katsayıları;

$$a_0 = \frac{\gamma_4 (\gamma_8^2 - \gamma_3 \gamma_7) + \gamma_5 (\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_6 \gamma_8) + \gamma_9 (\gamma_3 \gamma_6 - \gamma_2 \gamma_8)}{\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7}, \quad (5.107)$$

$$a_1 = \frac{\gamma_5 (\gamma_6^2 - \gamma_1 \gamma_7) - \gamma_9 (\gamma_2 \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_8) + \gamma_4 (\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_6 \gamma_8)}{\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7}, \quad (5.108)$$

$$a_2 = \frac{\gamma_9 (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3) - \gamma_5 (\gamma_2 \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_8) + \gamma_4 (\gamma_3 \gamma_6 - \gamma_2 \gamma_8)}{\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7} \quad (5.109)$$

bulunur. Bu adımdan sonra, $a_i(x)$ katsayıları dördüncü adımda yerine yazılarak yaklaşım fonksiyonu elde edilir.

4. Adım: Spesifik Nokta İçin Yerel Yaklaşımın Eldesi

Bu adımda; (5.107) – (5.109) arasındaki eşitlikler ile bulunan a_0 , a_1 ve a_2 katsayıları, yerel yaklaşım olarak belirlenen (5.89) eşitliğindeki doğrusal yaklaşımda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u^h(x, y) &= \frac{\gamma_4 (\gamma_8^2 - \gamma_3 \gamma_7) + \gamma_5 (\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_6 \gamma_8) + \gamma_9 (\gamma_3 \gamma_6 - \gamma_2 \gamma_8)}{\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7} \\ &+ \left(\frac{\gamma_5 (\gamma_6^2 - \gamma_1 \gamma_7) - \gamma_9 (\gamma_2 \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_8) + \gamma_4 (\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_6 \gamma_8)}{\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7} \right) x \\ &+ \left(\frac{\gamma_9 (\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3) - \gamma_5 (\gamma_2 \gamma_6 - \gamma_1 \gamma_8) + \gamma_4 (\gamma_3 \gamma_6 - \gamma_2 \gamma_8)}{\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7} \right) y \end{aligned} \quad (5.110)$$

elde edilir. Buradan da şekil fonksiyonunun açık bir şekilde ifade edilebilmesi için, u_i değerlerini de bu ifadenin dışında tutarak, şekil fonksiyonları oluşturulur. Üçüncü adımdan sonraki kısım, daha yüksek boyuttan problemleri de kapsayacak genel formun eldesi adına (5.26)–(5.33) eşitlikleri arasındaki bilgiler ele alınarak yeniden hesaplanacak olursa; iki boyutlu problemlerde incelenen örnek dört düğüm noktası ve doğrusal yaklaşım için taban matrisi (5.14) eşitliğinden yararlanılarak;

$$P^T = \begin{bmatrix} P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) \\ P_1(x_0) & P_1(x_1) & P_1(x_2) & P_1(x_3) \\ P_2(y_0) & P_2(y_1) & P_2(y_2) & P_2(y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

şeklinde oluşturulur. Ağırlık matrisi W ise; burada (5.60) eşitliğindeki gibidir. Şekil fonksiyonlarının eldesi için gerekli olan, A , A^{-1} ve B matrisleri, sırasıyla;

$$\begin{aligned} A &= P^T W P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}, \\ \Rightarrow A = P^T W P &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_5 & \gamma_7 \\ \gamma_3 & \gamma_7 & \gamma_6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (5.112)$$

elde edilir ve buradan moment matrisi A nın tersi ise;

$$A^{-1} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (5.113)$$

şeklindedir ve bu matris elemanlarına karşılık gelen ifadeler, sırasıyla;

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\gamma_7^2 - \gamma_5\gamma_6}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\ a_{12} &= \frac{\gamma_2\gamma_6 - \gamma_3\gamma_7}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\ a_{13} &= \frac{\gamma_3\gamma_5 - \gamma_2\gamma_7}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\ a_{21} &= \frac{\gamma_2\gamma_6 - \gamma_3\gamma_7}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\ a_{22} &= \frac{\gamma_3^2 - \gamma_1\gamma_6}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= -\frac{\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_7}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\
a_{31} &= \frac{\gamma_3\gamma_5 - \gamma_2\gamma_7}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\
a_{32} &= -\frac{\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1\gamma_7}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}, \\
a_{33} &= \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_5}{\gamma_6\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_3\gamma_7 + \gamma_5\gamma_3^2 + \gamma_1\gamma_7^2 - \gamma_1\gamma_5\gamma_6}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Vandermonde matrisi B ise;

$$\begin{aligned}
B &= P^T W \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0x_0 & w_1x_1 & w_2x_2 & w_3x_3 \\ w_0y_0 & w_1y_1 & w_2y_2 & w_3y_3 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \tag{5.114}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. A , A^{-1} ve B matrisi bulunduktan sonra bulunan bu değerler, (5.33) eşitliğindeki denklemde yerine yazılırsa, şekil fonksiyonları elde edilir.

5.3.1.3.4 Üç Boyutlu Problemlerde, Doğrusal Yaklaşım İçin Çözüm Prosedürü

İki boyutlu problemler için (5.39) eşitliğinden yararlanılarak hareketli en küçük kareler yaklaşımının çözüm prosedürü uygulanmıştır. Bu kısımda ise; üç boyutlu problemler için hareketli en küçük kareler yaklaşımı çözüm prosedürünün uygulanması araştırılacaktır. Bu kapsamda; Bölüm 5.3.1.3 teki, üç boyutlu problemler için seçilebilecek yaklaşımlardan herhangi biri de yaklaşım fonksiyonu olarak seçilebileceği gibi, araştırma açısından doğrusal yaklaşım tercih edilmiş ve Şekil 5.13 teki gibi, örnek dört düğüm noktası ele alınarak, hareketli en küçük kareler yaklaşımı çözüm prosedürü incelenmiştir.

1. Adım: Yerel Yaklaşımın Belirlenmesi

Bu adımda; Şekil 5.13 te olduğu gibi, spesifik bir nokta için, yerel yaklaşım fonksiyonu olarak (5.43) eşitliği ile verilen doğrusal yaklaşım;

$$u^h(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \tag{5.115}$$

seçilerek hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları elde edilecektir.

2. Adım: Dügümlerdeki Yerel Artık Denklemlerinin Eldesi

Bu adımda; $i = \overline{0,3}$ için, u_i yer değiştirme değerlerine, (5.115) eşitliğinde belirtildiği haliyle yaklaşım yapılarak artık denklemler, sırasıyla;

$$R_0(x, y, z) = a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 - u_0, \quad (5.116)$$

$$R_1(x, y, z) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 - u_1, \quad (5.117)$$

$$R_2(x, y, z) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2 - u_2, \quad (5.118)$$

$$R_3(x, y, z) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 - u_3 \quad (5.119)$$

elde edilir ve bu denklemler ağırlıklandırıldıktan sonra minimize edilerek, $i = \overline{0,3}$ için, $a_i(x)$ katsayıları bulunur.

3. Adım: Ağırlıklandırılmış Yerel Artık Denkleminin Minimizasyonu

Bu adımda; yerel artık denklemler ikinci adımdaki gibi yazıldıktan sonra, ağırlıklandırılmış yerel artık denklem, $i = \overline{0,3}$ için (5.51) eşitliğinde belirtildiği üzere;

$$\begin{aligned} J &= w_0R_0^2 + w_1R_1^2 + w_2R_2^2 + w_3R_3^2 \\ &= w_0(a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 - u_0)^2 + w_1(a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 - u_1)^2 \\ &\quad + w_2(a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2 - u_2)^2 + w_3(a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 - u_3)^2 \\ &= w_0 \left(\begin{aligned} &a_0^2 + 2a_0(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0) \\ &+ 2(a_1a_2x_0y_0 + a_1a_3x_0z_0 + a_2a_3y_0z_0) \\ &+ a_1^2x_0^2 + a_2^2y_0^2 + a_3^2z_0^2 + u_0^2 - 2u_0(a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0) \end{aligned} \right) \\ &\quad + w_1 \left(\begin{aligned} &a_0^2 + 2a_0(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1) \\ &+ 2(a_1a_2x_1y_1 + a_1a_3x_1z_1 + a_2a_3y_1z_1) \\ &+ a_1^2x_1^2 + a_2^2y_1^2 + a_3^2z_1^2 + u_1^2 - 2u_1(a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1) \end{aligned} \right) \\ &\quad + w_2 \left(\begin{aligned} &a_0^2 + 2a_0(a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2) \\ &+ 2(a_1a_2x_2y_2 + a_1a_3x_2z_2 + a_2a_3y_2z_2) \\ &+ a_1^2x_2^2 + a_2^2y_2^2 + a_3^2z_2^2 + u_2^2 - 2u_2(a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2) \end{aligned} \right) \\ &\quad + w_3 \left(\begin{aligned} &a_0^2 + 2a_0(a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3) \\ &+ 2(a_1a_2x_3y_3 + a_1a_3x_3z_3 + a_2a_3y_3z_3) \\ &+ a_1^2x_3^2 + a_2^2y_3^2 + a_3^2z_3^2 + u_3^2 - 2u_3(a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3) \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (5.120)$$

bulunur ve burada yerel yaklaşım fonksiyonu olarak doğrusal yaklaşım alındığından, $i = \overline{0, 3}$ için $a_i(x)$ katsayılarına göre kısmi diferansiyel alınarak, sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_3} = 0 \quad (5.121)$$

ağırlıklandırılmış yerel artık denklem minimize edilmiş olur. Buradan, ilk olarak a_0 katsayısına göre kısmi diferansiyeli alınıp, elde edilen ifade sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_0} &= a_0 (w_0 + w_1 + w_2 + w_3) + a_1 (x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3) \\ &\quad + a_2 (y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3) + a_3 (z_0 w_0 + z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3) \\ &\quad - (u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3) = 0, \end{aligned} \quad (5.122)$$

a_1 katsayısına göre kısmi diferansiyelinin alınıp, elde edilen ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile;

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_1} &= a_0 (x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3) + a_1 (w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2) \\ &\quad + a_2 (x_0 y_0 w_0 + x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2 + x_3 y_3 w_3) \\ &\quad + a_3 (x_0 z_0 w_0 + x_1 z_1 w_1 + x_2 z_2 w_2 + x_3 z_3 w_3) \\ &\quad - (x_0 u_0 w_0 + x_1 u_1 w_1 + x_2 u_2 w_2 + x_3 u_3 w_3) = 0, \end{aligned} \quad (5.123)$$

a_2 katsayısına göre kısmi diferansiyelinin alınıp, elde edilen ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile;

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_2} &= a_0 (y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3) + a_1 (x_0 y_0 w_0 + x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2 + x_3 y_3 w_3) \\ &\quad + a_2 (w_0 y_0^2 + w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2 + w_3 y_3^2) + a_3 (y_0 z_0 w_0 + y_1 z_1 w_1 + y_2 z_2 w_2 + y_3 z_3 w_3) \\ &\quad - (y_0 u_0 w_0 + y_1 u_1 w_1 + y_2 u_2 w_2 + y_3 u_3 w_3) = 0, \end{aligned} \quad (5.124)$$

ve son olarak a_3 katsayısına göre kısmi diferansiyelinin alınıp, elde edilen ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile;

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_3} &= a_0 (z_0 w_0 + z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3) + a_1 (x_0 z_0 w_0 + x_1 z_1 w_1 + x_2 z_2 w_2 + x_3 z_3 w_3) \\ &\quad + a_2 (y_0 z_0 w_0 + y_1 z_1 w_1 + y_2 z_2 w_2 + y_3 z_3 w_3) + a_3 (w_0 z_0^2 + w_1 z_1^2 + w_2 z_2^2 + w_3 z_3^2) \\ &\quad - (z_0 u_0 w_0 + z_1 u_1 w_1 + z_2 u_2 w_2 + z_3 u_3 w_3) = 0 \end{aligned} \quad (5.125)$$

elde edilir. Burada (5.122)–(5.125) aralığındaki eşitlik değerlerine karşılık gelecek şekilde; $i = \overline{1, 9}$ için γ_i ifadeleri, sırasıyla; (5.74)–(5.78) ve (5.99)–(5.102) aralığındaki eşitliklerde

tanımlandığından, hatırlamak için tekrar;

$$\gamma_1 : = \sum_{i=0}^3 w_i = w_0 + w_1 + w_2 + w_3,$$

$$\gamma_2 : = \sum_{i=0}^3 x_i w_i = x_0 w_0 + x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3,$$

$$\gamma_3 : = \sum_{i=0}^3 w_i x_i^2 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2,$$

$$\gamma_4 : = \sum_{i=0}^3 u_i w_i = u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3,$$

$$\gamma_5 : = \sum_{i=0}^3 x_i u_i w_i = x_0 u_0 w_0 + x_1 u_1 w_1 + x_2 u_2 w_2 + x_3 u_3 w_3,$$

$$\gamma_6 : = \sum_{i=0}^3 y_i w_i = y_0 w_0 + y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3,$$

$$\gamma_7 : = \sum_{i=0}^3 w_i y_i^2 = w_0 y_0^2 + w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2 + w_3 y_3^2,$$

$$\gamma_8 : = \sum_{i=0}^3 x_i y_i w_i = x_0 y_0 w_0 + x_1 y_1 w_1 + x_2 y_2 w_2 + x_3 y_3 w_3,$$

$$\gamma_9 : = \sum_{i=0}^3 y_i u_i w_i = y_0 u_0 w_0 + y_1 u_1 w_1 + y_2 u_2 w_2 + y_3 u_3 w_3$$

yazılabilir. $i = \overline{10, 14}$ için, γ_i ifadeleri sırasıyla tanımlanacak olursa;

$$\gamma_{10} : = \sum_{i=0}^3 z_i w_i = z_0 w_0 + z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3, \quad (5.126)$$

$$\gamma_{11} : = \sum_{i=0}^3 w_i z_i^2 = w_0 z_0^2 + w_1 z_1^2 + w_2 z_2^2 + w_3 z_3^2, \quad (5.127)$$

$$\gamma_{12} : = \sum_{i=0}^3 x_i z_i w_i = x_0 z_0 w_0 + x_1 z_1 w_1 + x_2 z_2 w_2 + x_3 z_3 w_3, \quad (5.128)$$

$$\gamma_{13} : = \sum_{i=0}^3 y_i z_i w_i = y_0 z_0 w_0 + y_1 z_1 w_1 + y_2 z_2 w_2 + y_3 z_3 w_3, \quad (5.129)$$

$$\gamma_{14} : = \sum_{i=0}^3 z_i u_i w_i = z_0 u_0 w_0 + z_1 u_1 w_1 + z_2 u_2 w_2 + z_3 u_3 w_3 \quad (5.130)$$

olur ve bu tanımlamalardan sonra, (5.122) – (5.125) aralığındaki eşitlikler, sırasıyla;

$$a_0 \gamma_1 + a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_6 + a_3 \gamma_{10} - \gamma_4 = 0, \quad (5.131)$$

$$a_0 \gamma_2 + a_1 \gamma_3 + a_2 \gamma_8 + a_3 \gamma_{12} - \gamma_5 = 0, \quad (5.132)$$

$$a_0 \gamma_6 + a_1 \gamma_8 + a_2 \gamma_7 + a_3 \gamma_{13} - \gamma_9 = 0, \quad (5.133)$$

$$a_0 \gamma_{10} + a_1 \gamma_{12} + a_2 \gamma_{13} + a_3 \gamma_{11} - \gamma_{14} = 0 \quad (5.134)$$

şeklinde yazılabilir ve bu dört denklem matris biçiminde;

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_6 & \gamma_{10} \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_8 & \gamma_{12} \\ \gamma_6 & \gamma_8 & \gamma_7 & \gamma_{13} \\ \gamma_{10} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_9 \\ \gamma_{14} \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

yazılır ve burada η , ζ ve θ ;

$$\eta : = -\gamma_2^2\gamma_{13}^2 + \gamma_7\gamma_{11}\gamma_2^2 - 2\gamma_{11}\gamma_2\gamma_6\gamma_8 + 2\gamma_2\gamma_6\gamma_{12}\gamma_{13} + 2\gamma_2\gamma_8\gamma_{10}\gamma_{13} - 2\gamma_7\gamma_2\gamma_{10}\gamma_{12},$$

$$\zeta : = -\gamma_6^2\gamma_{12}^2 + \gamma_3\gamma_{11}\gamma_6^2 + 2\gamma_6\gamma_8\gamma_{10}\gamma_{12} - 2\gamma_3\gamma_6\gamma_{10}\gamma_{13} - \gamma_8^2\gamma_{10}^2 + \gamma_1\gamma_{11}\gamma_8^2,$$

$$\theta : = -2\gamma_1\gamma_8\gamma_{12}\gamma_{13} + \gamma_3\gamma_7\gamma_{10}^2 + \gamma_1\gamma_7\gamma_{12}^2 + \gamma_1\gamma_3\gamma_{13}^2 - \gamma_1\gamma_3\gamma_7\gamma_{11}$$

şeklinde tanımlanırsa, $i = \overline{0, 3}$ için $a_i(x)$ katsayıları, sırasıyla;

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\gamma_4(\gamma_{11}\gamma_8^2 - 2\gamma_8\gamma_{12}\gamma_{13} + \gamma_7\gamma_{12}^2 + \gamma_3\gamma_{13}^2 - \gamma_3\gamma_7\gamma_{11})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_{14}(\gamma_8^2\gamma_{10} - \gamma_3\gamma_7\gamma_{10} + \gamma_2\gamma_7\gamma_{12} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_8\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_9(\gamma_6\gamma_{12}^2 - \gamma_3\gamma_6\gamma_{11} + \gamma_2\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_3\gamma_{10}\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_5(\gamma_2\gamma_{13}^2 - \gamma_2\gamma_7\gamma_{11} + \gamma_6\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_7\gamma_{10}\gamma_{12} - \gamma_6\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{13})}{\eta + \zeta + \theta}, \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma_5(\gamma_{11}\gamma_6^2 - 2\gamma_6\gamma_{10}\gamma_{13} + \gamma_7\gamma_{10}^2 + \gamma_1\gamma_{13}^2 - \gamma_1\gamma_7\gamma_{11})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_{14}(\gamma_6^2\gamma_{12} + \gamma_2\gamma_7\gamma_{10} - \gamma_1\gamma_7\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_8\gamma_{10})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_9(\gamma_8\gamma_{10}^2 + \gamma_2\gamma_6\gamma_{11} - \gamma_1\gamma_8\gamma_{11} - \gamma_2\gamma_{10}\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_{10}\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_4(\gamma_2\gamma_{13}^2 - \gamma_2\gamma_7\gamma_{11} + \gamma_6\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_7\gamma_{10}\gamma_{12} - \gamma_6\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{13})}{\eta + \zeta + \theta}, \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\gamma_9(\gamma_{11}\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_{10}\gamma_{12} + \gamma_3\gamma_{10}^2 + \gamma_1\gamma_{12}^2 - \gamma_1\gamma_3\gamma_{11})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_{14}(\gamma_2^2\gamma_{13} - \gamma_1\gamma_3\gamma_{13} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{10} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{10} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_5(\gamma_8\gamma_{10}^2 + \gamma_2\gamma_6\gamma_{11} - \gamma_1\gamma_8\gamma_{11} - \gamma_2\gamma_{10}\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_{10}\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_4(\gamma_6\gamma_{12}^2 - \gamma_3\gamma_6\gamma_{11} + \gamma_2\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_3\gamma_{10}\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta}, \end{aligned} \quad (5.138)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\gamma_{14}(\gamma_7\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_6\gamma_8 + \gamma_3\gamma_6^2 + \gamma_1\gamma_8^2 - \gamma_1\gamma_3\gamma_7)}{\eta + \zeta + \theta} \\ &\quad - \frac{\gamma_9(\gamma_2^2\gamma_{13} - \gamma_1\gamma_3\gamma_{13} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{10} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{10} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_5 (\gamma_6^2 \gamma_{12} + \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{10} - \gamma_1 \gamma_7 \gamma_{12} - \gamma_2 \gamma_6 \gamma_{13} + \gamma_1 \gamma_8 \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{10})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{\gamma_4 (\gamma_8^2 \gamma_{10} - \gamma_3 \gamma_7 \gamma_{10} + \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{12} + \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{13} - \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \end{aligned} \quad (5.139)$$

bulunur. Bu adımdan sonra, $a_i(x)$ katsayıları dördüncü adımda yerine yazılacaktır.

4. Adım: Spesifik Nokta İçin Yerel Yaklaşımın Eldesi

Bu adımda (5.136) – (5.139) arasındaki eşitlikler ile bulunan a_0 , a_1 , a_2 ve a_3 katsayıları, yerel yaklaşım olarak belirlenen (5.115) eşitliğindeki doğrusal yaklaşımda yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u^h(x, y, z) = & \frac{\gamma_4 (\gamma_{11} \gamma_8^2 - 2\gamma_8 \gamma_{12} \gamma_{13} + \gamma_7 \gamma_{12}^2 + \gamma_3 \gamma_{13}^2 - \gamma_3 \gamma_7 \gamma_{11})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{-\gamma_{14} (\gamma_8^2 \gamma_{10} - \gamma_3 \gamma_7 \gamma_{10} + \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{12} + \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{13} - \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{-\gamma_9 (\gamma_6 \gamma_{12}^2 - \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{11} + \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{11} + \gamma_3 \gamma_{10} \gamma_{13} - \gamma_2 \gamma_{12} \gamma_{13} - \gamma_8 \gamma_{10} \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{-\gamma_5 (\gamma_2 \gamma_{13}^2 - \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{11} + \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{11} + \gamma_7 \gamma_{10} \gamma_{12} - \gamma_6 \gamma_{12} \gamma_{13} - \gamma_8 \gamma_{10} \gamma_{13})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & +x \left(\frac{\gamma_5 (\gamma_{11} \gamma_6^2 - 2\gamma_6 \gamma_{10} \gamma_{13} + \gamma_7 \gamma_{10}^2 + \gamma_1 \gamma_{13}^2 - \gamma_1 \gamma_7 \gamma_{11})}{\eta + \zeta + \theta} \right. \\ & \frac{-\gamma_{14} (\gamma_6^2 \gamma_{12} + \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{10} - \gamma_1 \gamma_7 \gamma_{12} - \gamma_2 \gamma_6 \gamma_{13} + \gamma_1 \gamma_8 \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{10})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{-\gamma_9 (\gamma_6 \gamma_{12}^2 - \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{11} + \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{11} + \gamma_3 \gamma_{10} \gamma_{13} - \gamma_2 \gamma_{12} \gamma_{13} - \gamma_8 \gamma_{10} \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \left. \frac{-\gamma_4 (\gamma_2 \gamma_{13}^2 - \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{11} + \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{11} + \gamma_7 \gamma_{10} \gamma_{12} - \gamma_6 \gamma_{12} \gamma_{13} - \gamma_8 \gamma_{10} \gamma_{13})}{\eta + \zeta + \theta} \right) \\ & +y \left(\frac{\gamma_9 (\gamma_{11} \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_{10} \gamma_{12} + \gamma_3 \gamma_{10}^2 + \gamma_1 \gamma_{12}^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_{11})}{\eta + \zeta + \theta} \right. \\ & \frac{-\gamma_{14} (\gamma_2^2 \gamma_{13} - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_{13} + \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{10} - \gamma_2 \gamma_6 \gamma_{12} - \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{10} + \gamma_1 \gamma_8 \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{-\gamma_5 (\gamma_8 \gamma_{10}^2 + \gamma_2 \gamma_6 \gamma_{11} - \gamma_1 \gamma_8 \gamma_{11} - \gamma_2 \gamma_{10} \gamma_{13} + \gamma_1 \gamma_{12} \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_{10} \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \left. \frac{-\gamma_4 (\gamma_6 \gamma_{12}^2 - \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{11} + \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{11} + \gamma_3 \gamma_{10} \gamma_{13} - \gamma_2 \gamma_{12} \gamma_{13} - \gamma_8 \gamma_{10} \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \right) \\ & +z \left(\frac{\gamma_{14} (\gamma_7 \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \gamma_6 \gamma_8 + \gamma_3 \gamma_6^2 + \gamma_1 \gamma_8^2 - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_7)}{\eta + \zeta + \theta} \right. \\ & \frac{-\gamma_9 (\gamma_2^2 \gamma_{13} - \gamma_1 \gamma_3 \gamma_{13} + \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{10} - \gamma_2 \gamma_6 \gamma_{12} - \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{10} + \gamma_1 \gamma_8 \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \frac{-\gamma_5 (\gamma_6^2 \gamma_{12} + \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{10} - \gamma_1 \gamma_7 \gamma_{12} - \gamma_2 \gamma_6 \gamma_{13} + \gamma_1 \gamma_8 \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{10})}{\eta + \zeta + \theta} \\ & \left. \frac{-\gamma_4 (\gamma_8^2 \gamma_{10} - \gamma_3 \gamma_7 \gamma_{10} + \gamma_2 \gamma_7 \gamma_{12} + \gamma_3 \gamma_6 \gamma_{13} - \gamma_2 \gamma_8 \gamma_{13} - \gamma_6 \gamma_8 \gamma_{12})}{\eta + \zeta + \theta} \right) \end{aligned} \quad (5.140)$$

elde edilir. Buradan da şekil fonksiyonunun açık bir şekilde ifade edilebilmesi için, u_i değerlerini de bu ifadenin dışında tutarak, şekil fonksiyonları oluşturulmuş olunur. Burada üçüncü adımdan sonraki kısım, daha yüksek boyuttan problemleri de kapsayacak genel formu elde etmek adına (5.26) – (5.33) eşitlikleri arasındaki bilgiler ele alınarak yeniden hesaplanacak olursa; üç boyutlu problemlerde incelenen örnek dört düğüm noktası ve doğrusal yaklaşım için taban matrisi (5.18) eşitliğinden yararlanılarak;

$$P^T = \begin{bmatrix} P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) & P_0(1) \\ P_1(x_0) & P_1(x_1) & P_1(x_2) & P_1(x_3) \\ P_2(y_0) & P_2(y_1) & P_2(y_2) & P_2(y_3) \\ P_3(z_0) & P_3(z_1) & P_3(z_2) & P_3(z_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

şeklinde elde edilir. Ağırlık matrisi W ise; burada (5.60) eşitliğindeki gibidir. Şekil fonksiyonlarının eldesi için gerekli olan, A , A^{-1} ve B matrisleri, sırasıyla;

$$\begin{aligned} A &= P^T W P \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_6 & \gamma_{10} \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_8 & \gamma_{12} \\ \gamma_6 & \gamma_8 & \gamma_7 & \gamma_{13} \\ \gamma_{10} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.142)$$

elde edilir. Buradan moment matrisi A nın tersi ise;

$$A^{-1} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (5.143)$$

şeklindedir ve bu matrise karşılık gelen ifadeler, sırası ile;

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\gamma_{11}\gamma_8^2 - 2\gamma_8\gamma_{12}\gamma_{13} + \gamma_7\gamma_{12}^2 + \gamma_3\gamma_{13}^2 - \gamma_3\gamma_7\gamma_{11}}{\eta + \zeta + \theta}, \\ a_{12} &= -\frac{\gamma_2\gamma_{13}^2 - \gamma_2\gamma_7\gamma_{11} + \gamma_6\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_7\gamma_{10}\gamma_{12} - \gamma_6\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{13}}{\eta + \zeta + \theta}, \\ a_{13} &= -\frac{\gamma_6\gamma_{12}^2 - \gamma_3\gamma_6\gamma_{11} + \gamma_2\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_3\gamma_{10}\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= -\frac{\gamma_8^2\gamma_{10} - \gamma_3\gamma_7\gamma_{10} + \gamma_2\gamma_7\gamma_{12} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_8\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{21} &= -\frac{\gamma_2\gamma_{13}^2 - \gamma_2\gamma_7\gamma_{11} + \gamma_6\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_7\gamma_{10}\gamma_{12} - \gamma_6\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{13}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{22} &= \frac{\gamma_{11}\gamma_6^2 - 2\gamma_6\gamma_{10}\gamma_{13} + \gamma_7\gamma_{10}^2 + \gamma_1\gamma_{13}^2 - \gamma_1\gamma_7\gamma_{11}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{23} &= -\frac{\gamma_8\gamma_{10}^2 + \gamma_2\gamma_6\gamma_{11} - \gamma_1\gamma_8\gamma_{11} - \gamma_2\gamma_{10}\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_{10}\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{24} &= -\frac{\gamma_6^2\gamma_{12} + \gamma_2\gamma_7\gamma_{10} - \gamma_1\gamma_7\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_8\gamma_{10}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{31} &= -\frac{\gamma_6\gamma_{12}^2 - \gamma_3\gamma_6\gamma_{11} + \gamma_2\gamma_8\gamma_{11} + \gamma_3\gamma_{10}\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_8\gamma_{10}\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{32} &= -\frac{\gamma_8\gamma_{10}^2 + \gamma_2\gamma_6\gamma_{11} - \gamma_1\gamma_8\gamma_{11} - \gamma_2\gamma_{10}\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_{12}\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_{10}\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{33} &= \frac{\gamma_{11}\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_{10}\gamma_{12} + \gamma_3\gamma_{10}^2 + \gamma_1\gamma_{12}^2 - \gamma_1\gamma_3\gamma_{11}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{34} &= -\frac{\gamma_2^2\gamma_{13} - \gamma_1\gamma_3\gamma_{13} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{10} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{10} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{41} &= -\frac{\gamma_8^2\gamma_{10} - \gamma_3\gamma_7\gamma_{10} + \gamma_2\gamma_7\gamma_{12} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{13} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_8\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{42} &= -\frac{\gamma_6^2\gamma_{12} + \gamma_2\gamma_7\gamma_{10} - \gamma_1\gamma_7\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{13} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{13} - \gamma_6\gamma_8\gamma_{10}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{43} &= -\frac{\gamma_2^2\gamma_{13} - \gamma_1\gamma_3\gamma_{13} + \gamma_3\gamma_6\gamma_{10} - \gamma_2\gamma_6\gamma_{12} - \gamma_2\gamma_8\gamma_{10} + \gamma_1\gamma_8\gamma_{12}}{\eta + \zeta + \theta}, \\
a_{44} &= \frac{\gamma_7\gamma_2^2 - 2\gamma_2\gamma_6\gamma_8 + \gamma_3\gamma_6^2 + \gamma_1\gamma_8^2 - \gamma_1\gamma_3\gamma_7}{\eta + \zeta + \theta}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Vandermonde matrisi B ise;

$$\begin{aligned}
B &= P^T W \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_0x_0 & w_1x_1 & w_2x_2 & w_3x_3 \\ w_0y_0 & w_1y_1 & w_2y_2 & w_3y_3 \\ w_0z_0 & w_1z_1 & w_2z_2 & w_3z_3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}
\end{aligned} \tag{5.144}$$

şeklinde bulunur ve bu A , A^{-1} ve B matrisleri (5.33) eşitliğindeki denklemde yerine yazılırsa, şekil fonksiyonları elde edilir.

Dolayısıyla bir, iki ve üç boyutlu problemler için yaklaşım fonksiyonları bu şekilde elde edilir ve şekil fonksiyonlarının ağırlık fonksiyonlarına bağlı olduğu görülebilir. Bu kapsamda şekil fonksiyonlarını etkileyen bu ağırlık fonksiyonları, Bölüm 5.3.2 de ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

5.3.2 Ağırlık Fonksiyonunun Oluşturulması

Şekil fonksiyonları, ağırlık fonksiyonlarından elde edildiğinden, çözümün doğruluğu ve kararlılığı için büyük öneme sahiptir. Bununla birlikte, sonlu elemanlar yöntemindeki çözümün hassasiyetini etkileyen eleman boyutunun rolünü üstlenir. Ağırlık fonksiyonları oluşturulurken;

Çizelge 5.2 Ağırlık fonksiyonlarının durumları [18].

$\bar{W}(x - x_i) > 0$, destek bölgesi içinde çözüm yapıldığını gösterir.
$\bar{W}(x - x_i) = 0$, destek bölgesi dışında çözüm yapıldığını gösterir.
$\bar{W}(x - x_i)$, x noktasında ilgilenilen noktadan monoton olarak azalır.
$\bar{W}(x - x_i)$, özellikle Ω_s sınırında yeterince düzgündür.

durumları dikkate alınarak seçim yapılır. Çizelgede belirtilen son koşul, destek bölgesi değiştiğinden düğümlerin düzgün bir şekilde dahil edilmesini ya da hariç tutulmasını sağlar. Buradaki gereklilikler karşılanırsa, ağırlık fonksiyonunun seçimi az ya da çok keyfi olur. Ağırlık fonksiyonlarının eldesinde çok sık kullanılan fonksiyonlardan bazıları; spline ve Gauss (üstel/eksponansiyel) fonksiyonları olup, aşağıdaki alt bölümde ayrıntıları ile ele alınacaktır.

5.3.2.1 Ağırlık Fonksiyonlarının Çeşitleri

1. Üçüncü Dereceden (Kübik) Spline Fonksiyonu:

Üçüncü dereceden (kübik) spline fonksiyon, ikinci dereceden sürekliliğe sahiptir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir [18, 21-22, 26, 40].

$$w(r_i) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r_i^2 + 4r_i^3 & , r_i \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3 & , \frac{1}{2} < r_i \leq 1 \\ 0 & , r_i > 1 \end{cases} \quad (5.145)$$

2. Dördüncü Dereceden Spline Fonksiyonu:

Dördüncü dereceden spline fonksiyon, üçüncü dereceden sürekliliğe sahiptir ve bu;

$$w(r_i) = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & , r_i \leq 1 \\ 0 & , r_i > 1 \end{cases} \quad (5.146)$$

şeklinde ifade edilebilir [22, 24-25, 28-31, 35, 38, 42]. Burada dördüncü dereceden spline fonksiyonunun nasıl elde edildiği araştırılacak olursa;

$$\bar{w}_i(r_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^l b_j \bar{r}_i^j & , 0 \leq \bar{r}_i^j \leq 1 \\ 0 & , \bar{r}_i^j > 1 \end{cases} \quad (5.147)$$

ifadesindeki; l spline fonksiyonunun sırası, b_j ise gerekli koşullar tarafından belirlenebilen katsayılardır. Örneğin, dördüncü dereceden bir spline fonksiyonunun genel yapısı;

$$w(r_i) = \begin{cases} b_0 + b_1 \bar{r}_i + b_2 \bar{r}_i^2 + b_3 \bar{r}_i^3 + b_4 \bar{r}_i^4 & , 0 \leq \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & , \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (5.148)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, ağırlık fonksiyonun sırasıyla, şu koşulları yerine getirmesini beklenir. İlk durumda; ağırlık fonksiyonu destek bölgesinin merkezinde $\bar{r}_i = 0$ dır ve;

$$\begin{aligned} \bar{w}_i|_{\bar{r}_i=0} &= 1, \\ \Rightarrow 1 - 6 \times (0)^2 + 8 \times (0)^3 - 3 \times (0)^4 &= 1, \\ \Rightarrow b_0 + b_1 \times (0) + b_2 \times (0)^2 + b_3 \times (0)^3 + b_4 \times (0)^4 &= 1, \\ \Rightarrow b_0 &= 1 \end{aligned} \quad (5.149)$$

şeklinde dir. İkinci durumda; ağırlık fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden diferansiyellerinin, destek bölgesinin sınırında sıfır olduğudur. Burada $\bar{r}_i = 1$ in bulunduğu belirtilir ve;

$$\begin{aligned} \bar{w}_i|_{\bar{r}_i=1} &= 0, \\ \Rightarrow 1 - 6 \times (1)^2 + 8 \times (1)^3 - 3 \times (1)^4 &= 0, \\ \Rightarrow b_0 + b_1 \times (1) + b_2 \times (1)^2 + b_3 \times (1)^3 + b_4 \times (1)^4 &= 0, \\ \Rightarrow b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}_i=1} &= 0, \\ \Rightarrow b_1 + 2b_2 \bar{r}_i + 3b_3 \bar{r}_i^2 + 4b_4 \bar{r}_i^3 &= 0, \\ \Rightarrow b_1 + 2b_2 \times (1) + 3b_3 \times (1)^2 + 4b_4 \times (1)^3 &= 0, \\ \Rightarrow b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.151)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_i^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} \Big|_{\bar{r}_i=1} &= 0, \\
\Rightarrow 2b_2 + 6b_3 r_i + 12b_4 r_i^2 &= 0, \\
\Rightarrow 2b_2 + 6b_3 \times (1) + 12b_4 \times (1)^2 &= 0, \\
\Rightarrow 2b_2 + 6b_3 + 12b_4 &= 0
\end{aligned} \tag{5.152}$$

şeklinde dir. Son durum ise, ağırlık fonksiyonunun birinci dereceden diferansiyelinin $\bar{r}_i = 0$ olduğu destek bölgesinin merkezinde sıfır olduğunu belirtir. Bu durum;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}_i=0} &= 0, \\
\Rightarrow b_1 + 2b_2 r_i + 3b_3 r_i^2 + 4b_4 r_i^3 &= 0, \\
\Rightarrow b_1 + 2b_2 \times (0) + 3b_3 \times (0)^2 + 4b_4 \times (0)^3 &= 0, \\
\Rightarrow b_1 &= 0
\end{aligned} \tag{5.153}$$

şeklinde ifade edilir. Buradan (5.149) – (5.153) arasındaki eşitlikler birlikte kullanılarak;

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1, \\ b_1 = 0, \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \Rightarrow b_2 + b_3 + b_4 = -1, \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 0 \Rightarrow 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 = 0, \\ 2b_2 + 6b_3 + 12b_4 = 0 \end{array} \right. \tag{5.154}$$

denklem kümesi bulunur ve matris formunda bu ifadeler yeniden yazılacak olursa;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.155}$$

şeklinde elde edilir ve buradan b_i ler;

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -6, b_3 = 8 \text{ ve } b_4 = -3$$

bulunur ve (5.148) eşitliğinde yerine yazılması ile, (5.146) eşitliğindeki dördüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonu elde edilir. Benzer şekilde, diğer spline fonksiyonları da elde edilebilir [18].

3. Gauss (Üstel/Eksponansiyel) Fonksiyon:

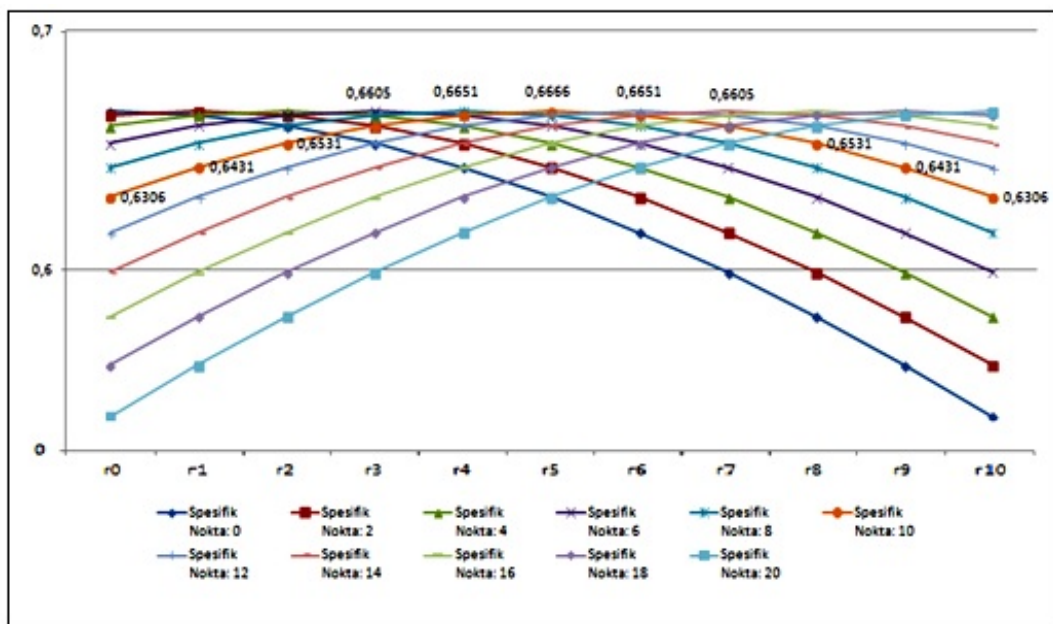
Gauss ağırlık fonksiyonu r_i değişkenine bağlı olarak şu şekilde;

$$w(r_i) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^2} = \exp - \left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^2 & , r_i \leq 1 \\ 0 & , r_i > 1 \end{cases} \quad (5.156)$$

yazılabilir. Burada; λ , sabit bir şekil parametresi ve r_i , ağırlık fonksiyonu parametresi;

$$r_i = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2}}{a_I \times d_{ort}} = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2}}{r_w} = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w} \quad (5.157)$$

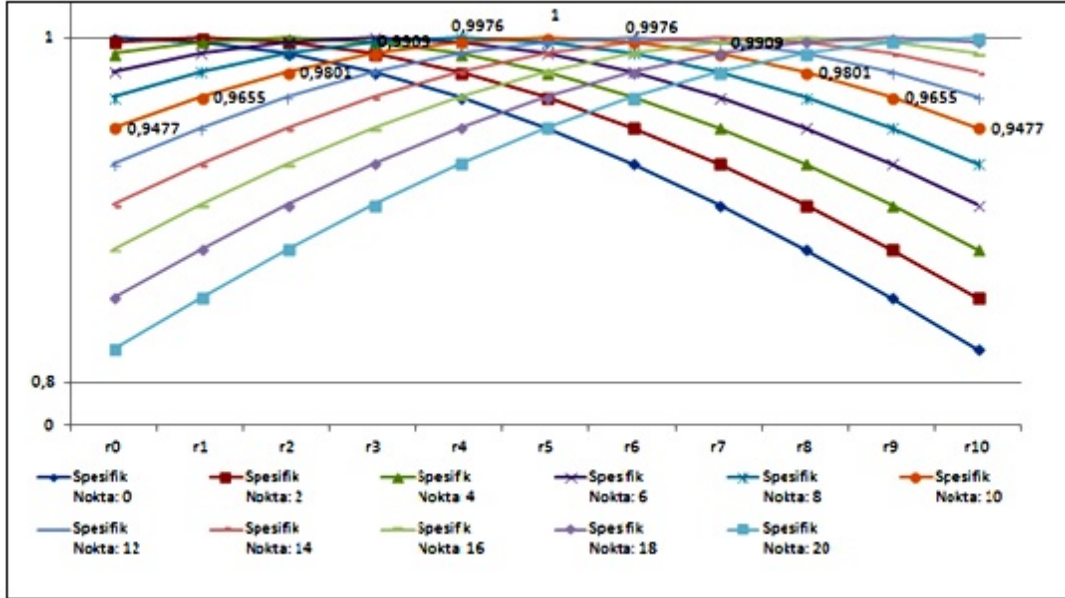
dir. d_i , x_i düğümü ile spesifik x noktası arasındaki mesafedir. r_w ise, ağırlık fonksiyonu için etkileşim yarıçapıdır ve keyfi olarak belirlenir. Uygun bir ağırlık fonksiyonu ve P nin seçilmesi ile şekil fonksiyonları, (5.33) eşitliğinde yerine yazılarak elde edilebilir. Ağırlık fonksiyonları olarak spline veya Gauss fonksiyonları seçilmektedir [18, 25 ,27 ,30, 32-34, 37, 39]. Aşağıda Şekil 5.14 ve Şekil 5.15 te $x \in [0, 20]$ aralığında, düğümler arası mesafenin 2 cm, etkileşim yarıçapının $r_w = 10^2$ olduğu varsayılarak oluşturulan üçüncü ve dördüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonları yer almaktadır. Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4 te ise, belirtilen spesifik noktalara karşılık gelen üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık fonksiyonlarının aldıkları değerler yer almaktadır. Şekil 5.16 da ise, yine aynı koşullar altında ve $\lambda = 0.1$ olduğu varsayılarak oluşturulan Gauss ağırlık fonksiyonu yer almaktadır. Çizelge 5.5 te ise, belirtilen spesifik noktalara karşılık gelen Gauss ağırlık fonksiyonlarının aldıkları değerler yer almaktadır.



Şekil 5.14 Üçüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonu.

Çizelge 5.3 Üçüncü der. spline ağırlık fonksiyonunun spesifik noktalardaki değerleri.

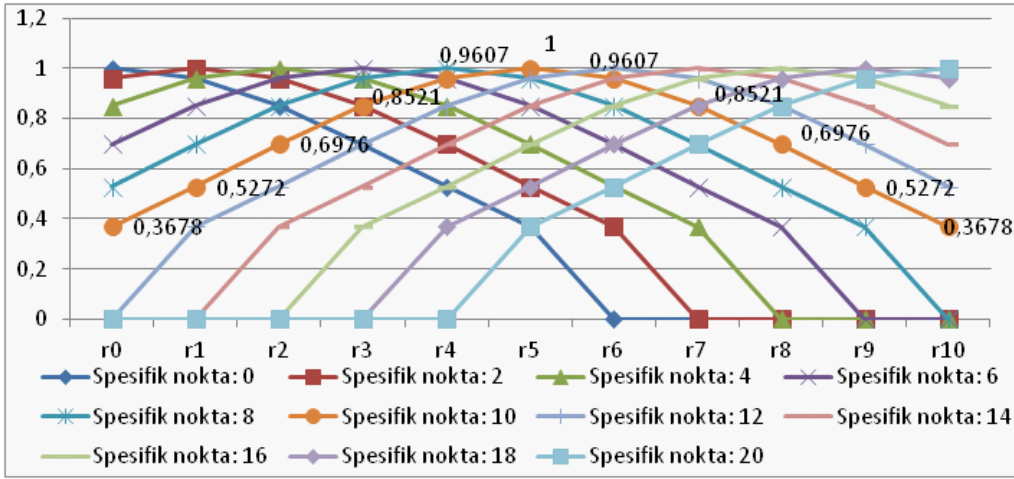
	Spesifik Nokta: 0	Spesifik Nokta: 2	Spesifik Nokta: 4	Spesifik Nokta: 6	Spesifik Nokta: 8	Spesifik Nokta: 10	Spesifik Nokta: 12	Spesifik Nokta: 14	Spesifik Nokta: 16	Spesifik Nokta: 18	Spesifik Nokta: 20
r0	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431	0,6306	0,6159	0,5992	0,5806	0,5603	0,5386
r1	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431	0,6306	0,6159	0,5992	0,5806	0,5603
r2	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431	0,6306	0,6159	0,5992	0,5806
r3	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431	0,6306	0,6159	0,5992
r4	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431	0,6306	0,6159
r5	0,6306	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431	0,6306
r6	0,6159	0,6306	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531	0,6431
r7	0,5992	0,6159	0,6306	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605	0,6531
r8	0,5806	0,5992	0,6159	0,6306	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651	0,6605
r9	0,5603	0,5806	0,5992	0,6159	0,6306	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666	0,6651
r10	0,5386	0,5603	0,5806	0,5992	0,6159	0,6306	0,6431	0,6531	0,6605	0,6651	0,6666



Şekil 5.15 Dördüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonu.

Çizelge 5.4 Dördüncü der. spline ağırlık fonksiyonunun spesifik noktalardaki değerleri.

	Spesifik Nokta: 0	Spesifik Nokta: 2	Spesifik Nokta: 4	Spesifik Nokta: 6	Spesifik Nokta: 8	Spesifik Nokta: 10	Spesifik Nokta: 12	Spesifik Nokta: 14	Spesifik Nokta: 16	Spesifik Nokta: 18	Spesifik Nokta: 20
r0	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655	0,9477	0,9268	0,9031	0,8772	0,8491	0,8192
r1	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655	0,9477	0,9268	0,9031	0,8772	0,8491
r2	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655	0,9477	0,9268	0,9031	0,8772
r3	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655	0,9477	0,9268	0,9031
r4	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655	0,9477	0,9268
r5	0,9477	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655	0,9477
r6	0,9268	0,9477	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801	0,9655
r7	0,9031	0,9268	0,9477	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909	0,9801
r8	0,8772	0,9031	0,9268	0,9477	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976	0,9909
r9	0,8491	0,8772	0,9031	0,9268	0,9477	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1	0,9976
r10	0,8192	0,8491	0,8772	0,9031	0,9268	0,9477	0,9655	0,9801	0,9909	0,9976	1

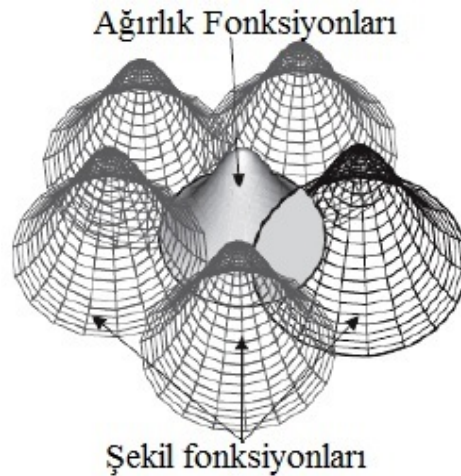


Şekil 5.16 Gauss ağırlık fonksiyonu.

Çizelge 5.5 Gauss ağırlık fonksiyonununun spesifik noktalardaki değerleri.

	Spesifik nokta: 0	Spesifik nokta: 2	Spesifik nokta: 4	Spesifik nokta: 6	Spesifik nokta: 8	Spesifik nokta: 10	Spesifik nokta: 12	Spesifik nokta: 14	Spesifik nokta: 16	Spesifik nokta: 18	Spesifik nokta: 20
r0	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678	0	0	0	0	0
r1	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678	0	0	0	0
r2	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678	0	0	0
r3	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678	0	0
r4	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678	0
r5	0,3678	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272	0,3678
r6	0	0,3678	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976	0,5272
r7	0	0	0,3678	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521	0,6976
r8	0	0	0	0,3678	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607	0,8521
r9	0	0	0	0	0,3678	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1	0,9607
r10	0	0	0	0	0	0,3678	0,5272	0,6976	0,8521	0,9607	1

5.3.2.2 Ağırlık Fonksiyonlarının Çözümüne Olan Etkileri



Şekil 5.17 Ağırlık fonksiyonlarının şekil fonksiyonlarına göre durumu [17, 24, 29].

Ağırlık fonksiyonları, şekil fonksiyonlarının oluşturulmasında en önemli hususlardan biri olup, çözümü etkilemesinden dolayı incelenmelidir. Bölüm 5.2.3 te, r_w değerine ilişkin

bilgiler verilmiştir. Burada, r_w nin çözüm bölgesindeki durumu ağırlık fonksiyonlarını etkilemektedir. Yani; r_w nin artırılması sonucunda, fonksiyonlar daha geniş bölgeleri kapsayacağından, her düğüm noktası için bir ağırlık oluşturacaktır. Bu durum çözüm hassasiyetini etkileyeceğinden her ne kadar olumlu gibi gözüke de, aslında r_w nin çok büyük seçilmesi durumunda ağırlıklandırılmak istenen yerel artık ifade R , gereğinden daha büyük bir ağırlık değeri ile çarpılacaktır. Dolayısıyla; r_w , ağırlık fonksiyonlarını ve buna bağlı olarak şekil fonksiyonlarını etkileyeceğinden, doğrudan çözümü etkileyecektir.

5.4 SİSTEM DENKLEMİNİN OLUŞTURULMASI

Ağsız yöntemlerde, zayıf ve güçlü formlar kullanılarak sistem denklemleri oluşturulur. Denklemler öncelikle matris formunda, sonra da tüm çözüm bölgesi için genel matris formunda yazılır. Burada, sistem denkleminin oluşturulması, sonlu elemanlardaki gibidir. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde, yerel simetrik zayıf form ağırlıklandırılmış artık yöntemin bir çeşididir ve doğrusal sistem denklemini bulmak için kullanılmaktadır. Her alan düğümünün doğrusal denklem kümeleri, sistem denklemini bulmak için toplanır. Petrov-Galerkin formülasyonunda, ağırlık ve şekil fonksiyonu için bölgelerinin aynı olması gerekmez.

5.5 DOĞRUSAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM SİSTEMİ

Çözümün çıktıları, alan yer değiştirme değerleridir. Hareketli en küçük kareler yaklaşımı Kronecker delta özelliğini sağlamadığından, bu yer değiştirmeler hayalidir. Böylece, bir noktanın yer değiştirme değeri, noktanın destek bölgesindeki alan düğümünün hayali yer değiştirme değerlerine yapılacak hareketli en küçük kareler yaklaşımı ile bulunur. Dolayısıyla, bu durum sonlu elemanlar yöntemi ile hemen hemen aynıdır. Tek fark, ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde çözüm için, ters simetrik matrislere gerek duyulur.

5.5.1 Sınır Koşullarının Uygulanması

Sonlu elemanlar yönteminde, şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliğini sağlar ve bu nedenle sınır koşulları denkleme doğrudan yazılarak uygulanır. Ancak, ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde sınır koşullarının uygulanması, sonlu elemanlardan biraz farklıdır. Burada, hareketli en küçük kareler yaklaşımı şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliğini

sağlamadığından sınır koşulları sisteme; doğrudan uygulama, penaltı, Lagrange çarpanları gibi yöntemler sayesinde uygulanabilir.

Doğrudan Uygulama Yöntemi

Bu yöntemde katsayılar matrisine tanımlanan sınır koşulları;

$$u_i = \hat{u}_i \quad (5.158)$$

doğrudan uygulanır ve (3.17) eşitliğinin elemanları olan genel katsayılar matrisi $[K]$;

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1(i-1)} & 0 & K_{1(i+1)} & \cdots & K_{1(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(i-1)1} & \cdots & K_{(i-1)(i-1)} & 0 & K_{(i-1)(i+1)} & \cdots & K_{(i-1)(2N)} \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ K_{(i+1)1} & \cdots & K_{(i+1)(i-1)} & 0 & K_{(i+1)(i+1)} & \cdots & K_{(i+1)(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(2N)1} & \cdots & K_{(2N)(i-1)} & 0 & K_{(2N)(i+1)} & \cdots & K_{(2N)(2N)} \end{bmatrix} \quad (5.159)$$

ve genel kuvvet matrisi $\{F\}$;

$$F_j \rightarrow \begin{cases} \hat{u}_i & i = j \\ F_j - K_{ji}\hat{u}_i & i \neq j \end{cases} \quad (5.160)$$

olacak şekilde değiştirilir [18].

Penaltı Yöntemi

Bu yöntemde; sınır koşulunun uygulanacağı i . düğüm noktası seçilerek, işlem adımları bu düğüm noktası üzerinden gösterilmeye çalışılacaktır. M serbestlik derecesine sahip bir eşitliğin genel yapısı aşağıdaki gibidir;

$$K_{i1}u_1 + K_{i2}u_2 + \cdots + K_{iM}u_M = F_i \quad (5.161)$$

eşitliğinde katsayılar matrisinin köşegenindeki en büyük K_{ii} terimi, bu terimden çok büyük penaltı katsayısı α ile çarpılır ve bu eşitliğe dahil edilir. α nın çok daha büyük değerlere sahip olması demek, çözümün daha hassas elde edilmesini sağlar. Dolayısıyla;

$$K_{i1}u_1 + K_{i2}u_2 + \cdots + \alpha K_{ii}u_i + \cdots + K_{iM}u_M = \alpha K_{ii}\hat{u}_i \quad (5.162)$$

dir. Penaltı katsayısının çok büyük seçilmesinin sebebi; $\alpha K_{ii}u_i$ teriminin diğer terimlerle karşılaştırıldığında baskın olması gereğindedir. Bu terim ne kadar büyük olursa, (5.162) eşitliğinin diğer terimleri bu terimin yanında ihmal edilebilecektir. Dolayısıyla,

$$\alpha K_{ii}u_i \cong \alpha K_{ii}\hat{u}_i \quad (5.163)$$

olur ve buradaki esas amaç (5.162) eşitliğini, (5.163) eşitliğine dönüştürmektir. Buradan,

$$\alpha K_{ii}u_i - \alpha K_{ii}\hat{u}_i \cong 0 \Rightarrow \alpha(K_{ii}u_i - K_{ii}\hat{u}_i) \cong 0 \Rightarrow \alpha(u_i - \hat{u}_i) \cong 0 \quad (5.164)$$

eşitliği sınır koşullarının uygulanabilmesi için ağırlıklandırılmalı ve integre edilmelidir. İntegrasyon işlemi, bir boyutlu problemler için ele alındığında bir nokta üzerinde belirtileceğinden bu terim, integrasyon işleminden sonra;

$$[\alpha(u_i - \hat{u}_i)W] \cong 0, \quad (5.165)$$

eşitliğindeki gibi elde edilmiş olacaktır. Burada W ağırlık fonksiyonudur ve kullanılan formülasyona göre değişebilir. $[K]$ ise;

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1(i-1)} & K_{1i} & K_{1(i+1)} & \cdots & K_{1(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(i-1)1} & \cdots & K_{(i-1)(i-1)} & K_{(i-1)i} & K_{(i-1)(i+1)} & \cdots & K_{(i-1)(2N)} \\ K_{i1} & \vdots & K_{i(i-1)} & \alpha K_{ii} & K_{i(i+1)} & \vdots & K_{i2N} \\ K_{(i+1)1} & \cdots & K_{(i+1)(i-1)} & K_{(i+1)i} & K_{(i+1)(i+1)} & \cdots & K_{(i+1)(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{(2N)1} & \cdots & K_{(2N)(i-1)} & K_{2Ni} & K_{(2N)(i+1)} & \cdots & K_{(2N)(2N)} \end{bmatrix}, \quad (5.166)$$

biçimindedir. $\{F\}$ nin, i . terimi ise;

$$F_j \rightarrow \begin{cases} \alpha K_{ii}\hat{u}_i & i = j \\ F_j & i \neq j \end{cases} \quad (5.167)$$

gibi değiştirilerek uygulanır [44].

5.6 KULLANILAN YÖNTEMİN AVANTAJ VE DEZAVANTAJLARI

Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemini kullanmanın pek çok avantajı mevcuttur. Bazıları; birleştirmeler için genel arka plan hücresi (Eleman bağımsız Galerkin yönteminde olduğu gibi) gerekmez. Çözüm prosedürü, sonlu elemanlar yöntemi ile hemen hemen aynıdır. Bu yöntemde şekil fonksiyonlarının genel uyumluluğu gerekmez.

Dezavantajları ise; bir miktar maliyet olmadan ortaya çıkmamaktadır. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi, sonlu elemanlar yöntemine göre hesaplama açısından çok daha maliyetlidir. Bununla beraber, eklenen değişkenler, asimetrik sistem matrisi, yerel destek bölgelerinin boyutları ve ağırlık fonksiyonlarının seçimi sayılabilir.



BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde, sonlu elemanlar ve ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemlerinin çözüm prosedürleri karşılaştırılmış, yöntemlerin benzer ve farklı yönleri ele alınmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminde; bir boyutlu problemler için ısıtılan çubuk ve yay örneği incelenmiş, iki boyutlu problemler için de yine ısıtılan plaka örneği ele alınmıştır. Aynı zamanda bu yöntemde; sayısal modelleme için yüksek boyutlara çıkıldığında, elemanlar için ağ oluşturmada zorluklar yaşanmış ve teknolojik yazılımlara ihtiyaç duyulmuştur. Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan nümerik yaklaşımlarda her ne kadar makul derecede teknolojik yazılım mevcut olsa da, son zamanlarda geliştirilen ağsız yöntemler alanında hali hazırda kullanılabilir yazılım neredeyse yok denecek kadar azdır.

Ağsız yerel Petrov Galerkin yöntemi için; bir, iki ve üç boyutta hareketli en küçük kareler yaklaşımından yararlanılmış ve şekil fonksiyonları oluşturulmaya çalışılmıştır. Burada; ağsız yerel Petrov-Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları elde edilirken, hareketli en küçük kareler yaklaşımı yerine, birimin parçalanması yöntemi, çekirdek yöntemi ve buna benzer başka yöntemlerde uygulanabilir.

Üçüncü ve dördüncü dereceden spline ağırlık fonksiyonları ile Gauss ağırlık fonksiyonunun $x \in [0, 20]$ kapalı aralığında spesifik noktalardaki değerleri incelenmiştir. Farklı değerler ve değişik çözüm bölgeleri ele alınarak ağırlık fonksiyonları yeniden test edilebilir. Ağsız yerel Petrov-Galerkin yöntemi iki ve daha büyük boyutlu problemler için geliştirilebilir.

Tezde, her ne kadar doğrusal yaklaşımlar üzerinde durulmuş olsada, doğrusal olmayan yaklaşımlar üzerinden de aynı işlem adımları incelenebilir. Bölüm 5.3.1.3 te belirtilen diğer yaklaşımlar (karesel, kübik, ...), yaklaşım fonksiyonu olarak seçilebilir ve uygun değişkenler yardımı ile test edilerek şekil fonksiyonları oluşturulabilir.



KAYNAKLAR

- [1]- **Bakioğlu M** (2011) *Sayısal Analiz*. ISBN: 978-975-511-353-3, Birsen Yayınevi, İstanbul, 543 s.
- [2]- **Uzun İ** (2000) *Nümerik Analiz*. 2. Basım, ISBN: 975-486-952-7, Beta Basım Yayıım Dağıtım A.Ş., İstanbul, 297 s.
- [3]- **Karagöz İ** (2011) *Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*. 3. Baskı, ISBN: 978-605-133-112-6, Nobel Akademik Yayıncılık ve Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara, 484 s.
- [4]- **Burden R L and Faires J D** (2011) *Numerical Analysis*. Ninth Edition, ISBN-13: 978-0-538-73351-9, Boston, 872 pp.
- [5]- **Hamming R W** (1971) *Introduction to Applied Numerical Analysis*. Computer Science Series, McGraw-Hill, USA, 331 pp.
- [6]- **Hacısalihoglu H H** (Ed.) (1990) *Lineer Cebir*. Schaum' s outlines 2. Baskı, ISBN: 975-591-079-4, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 453 s.
- [7]- **Cangül İ N** (Ed.) (2013) *Matematik Cilt 1*. ISBN: 978-605-133-629-9, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara, 564 s.
- [8]- **Bayram M** (2009) *Nümerik Analiz*. ISBN: 978-975-511-523-8, Birsen Yayınevi, İstanbul, 495 s.
- [9]- **Atkinson K E** (1988) *An Introduction to Numerical Analysis*. Second Edition, ISBN: 0-471-62489-6, John Wiley & Sons, USA, 693 pp.
- [10]- **Chapra S C and Canale R P** (2015) *Numerical Method for Engineers*. Seventh Edition, ISBN: 978-0-07-339792-4, McGraw-Hill Education, New York, 970 pp.
- [11]- **Omurtag M H** (2010) *Çubuk Sonlu Elemanlar*. ISBN: 978-975-511-537-5, Birsen Yayınevi, İstanbul, 291 s.
- [12]- **Liu G R** (2003) *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. ISBN: 0-8493-1238-8, CRC Pres, 674 pp.
- [13]- **Belytschko T, Lu Y Y and Gu L** (1994) Elements-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 (2): 229-256.
- [14]- **Kothnur V S, Mukherjee S and Mukherjee Y X** (1999) Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method. *International Journal of Solids and Structures*, 36: 1129-1147.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [15]- **Mukherjee Y X and Mukherjee S** (1997) The boundary node method for potential problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40: 797-815.
- [16]- **Sladek J, Sladek V and Mang H A** (2002) Meshless local boundary integral equation method for simply supported and clamped plates resting on elastic foundation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191: 5943-5959.
- [17]- **Al-Mahmud H N, Mehbes H K and Nassar A A** (2014) Benefits of Using Non-consolidated Domain Influence in Meshless Local Petrov-galerkin (Mlpg) Method for Solving Lefm Problems. *Universal Journal of Mechanical Engineering*, 2 (1): 20-27.
- [18]- **Liu G R and Gu Y T** (2005) *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. ISBN: 1-4020-3228-5, Springer, Netherlands, 479 pp.
- [19]- **Atluri S N and Shen S** (2002) The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. *CMES*, 3 (1): 11-51.
- [20]- **Zhu T and Atluri S N** (1998) A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, 21: 211-222.
- [21]- **Aykaç S ve Çağdaş İ U** (2004) Burulma Problemlerinin Sonlu Nokta Sıralama Yöntemi ile Çözümü. *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6 (1): 91-98.
- [22]- **Nguyen V P, Rabczuk P, Bordas S and Duflot M** (2008) Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 763-813.
- [23]- **Liu G R, Dai K Y, Lim K M and Gu Y T** (2002) A point interpolation mesh free method for static and frequency analysis of two- dimensional piezoelectric structures. *Computational Mechanics*, Springer- Verlag, 29: 510-519.
- [24]- **Lin H and Atluri S N** (2000) Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Convection-Diffusion Problems. *CMES*, 1 (2): 45-60.
- [25]- **Atluri S N and Zhu T** (1998) A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, 22: 117-127.
- [26]- **Yin Y, Yao LQ and Cao Y** (2013) A 3D shell-like approach using element-free Galerkin method for analysis of thin and thick plate structures. *Acta Mechanica Sinica*, 29 (1): 85-98.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [27]- **Sataprahm C and Luadsong A** (2014) The meshless local Petrov-Galerkin method for simulating unsteady incompressible fluid flow. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22: 501-510.
- [28]- **Li D, Lin Z and Li S** (2008) Numerical Analysis of Mindlin Shell By Meshless Local Petrov-Galerkin Method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 21 (2): 160-169.
- [29]- **Lin H and Atluri S N** (2001) The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equations. *CMES*, 2 (2): 117-142.
- [30]- **Zhu T, Zhang J D and Atluri S N** (1998) A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, 21: 223- 235.
- [31]- **Sladek J, Sladek V and Hon Y C** (2006) Inverse heat conduction problems by meshless local Petrov- Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30: 650-661.
- [32]- **Sellountos E J and Polyzos D** (2005) A meshless local boundary integral equation method for solving transient elastodynamic problems. *Computational Mechanics*, 35: 265-276.
- [33]- **Shivanian E** (2015) Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for three-dimensional nonlinear wave equations via moving least squares approximation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50: 249-257.
- [34]- **Mirzaei D and Dehghan M** (2010) Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approximation to the two dimensional sine-Gordon equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233: 2737-2754.
- [35]- **Atluri S N and Shen S** (2005) The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. *Advances in Computational Mathematics*, 23: 73-93.
- [36]- **Ebrahimnejad M, Fallah N and Khoei A R** (2015) Adaptive refinement in the meshless finite volume methods for elasticity problems. *Computers and mathematics with Applications*, 69: 1420-1443.
- [37]- **Pal P and Bhattacharyya S K** (2013) Slosh Dynamics of liquid-filled composite containers-A two dimensional meshless local Petrov-Galerkin approach. *Journal of Fluids and Structures*, 39: 60-75.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [38]- **Skumar N, Dolbow J, Devan A, Yvonnet J, Chinesta F, Ryckelynck D, Lorong P, Alfaro I, Martinez M A, Cueto E and Doblaré M** (2005) Meshless Methods and Partition of Unity Finite Elements. *International Journal of Forming Processes*, 8, 409-427.
- [39]- **Ching H K and Batra R C** (2001) Determination of Crack Tip Fields in Linear Elastostatics by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method. *CMES*, 2 (2): 273-289.
- [40]- **Zhang X and Zhang P** (2015) Meshless modeling of natural convection problems in non-rectangular cavity using the variational multiscale element free Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 61, 287-300.
- [41]- **Han Z and Atluri S N** (2011) A Truly- Meshless Galerkin Method, Through the MLPG “Mixed” Approach. *Journal of Marine Science and Tecnology*, 19 (4): 444-452.
- [42]- **Liu G R and Gu Y T** (2003) A meshfree method: meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-D solids. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, 33: 2-14.
- [43]- **Lancaster P and Salkauskas K** (1981) Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computation*, 37 (155): 141-158.
- [44]- **Çalışkan S** (2006) Eleman Bağımsız Galerkin ve Yerel Petrov-Galerkin Ağsız Yöntemlerinin Bir Boyutlu Mühendislik Problemlerine Uygulanması. *Yüksek Lisans Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Trabzon, 128 s.
- [45]- **Dawn R P and Ivatury S R** (2002) *Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Bending Problems*. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Virginia, 145 pp.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Ankara'nın Çamlıdere ilçesinde doğdu. Lise öğrenimini yine Ankara'da tamamladı. 2009 yılında kazandığı Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Tokat'ta Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nden pedagojik formasyon eğitimi aldı ve yine aynı yıl içerisinde de Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2012 yılında Adalet Bakanlığı'nda memur olarak göreve başladı ve halen bu görevde devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik Bölümü, 67100

Tel: (0 505) 487 59 75

E-posta: kemal_yurtoglu@hotmail.com