ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HİPERBOLİK İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DERYA DOĞAN

EYLÜL 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HİPERBOLİK İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya DOĞAN

DANIŞMAN: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

ZONGULDAK
Eylül 2019

KABUL:

Derya DOĞAN tarafından hazırlanan "Bir Hiperbolik İntegro-Diferensiyel Denklem için Bir Ters Problem" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 11/09/2019

Danışman: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Tufan TURACI ....
Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../2019

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Derya DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR HİPERBOLİK İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

Derya DOĞAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Eylül 2019, 41 sayfa

Bu tez çalışmasında, hiperbolik integro-diferensiyel denklemler için bir ters problem ele alınmıştır. Bu kapsamda Klibanov ve Timonov (2004), Cavaterra, Lorenzi ve Yamamoto (2006) da elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problemin önemi ve tarihçesi kısaca sunulmuştur. İkinci bölümde, tezde geçen bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, kararlılığın araştırılmasında kilit rol oynayan bazı Carleman değerlendirmeleri üzerinde durulmuştur. Son olarak, dördüncü bölümde ise, ele alınan ters problemin çözümünün kararlılığı Cavaterra, Lorenzi ve Yamamoto (2006) ışığında incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegro-diferensiyel denklem, ters problem, kararlılık, Carleman değerlendirmesi.

Bilim Kodu: 403.06.00.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

AN INVERSE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Derya DOĞAN

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

September 2019, 41 pages

In this thesis, an inverse problem for hyperbolic integro-differential equations is considered. For this purpose, the results which were obtained in the papers Klibanov and Timonov (2004), Cavaterra, Lorenzi and Yamamoto (2006) are discussed. The thesis consists of four chapters. In the first chapter, importance and a brief history of the problem are presented. In the second chapter, some basic definitions and theorems which are used in the thesis are given. In the third chapter, some Carleman estimates which are the key tools in the investigation of stability are considered. Finally, in the fourth chapter, based on the work Cavaterra, Lorenzi and Yamamoto (2006), the stability of solution of the inverse problem is discussed.

Keywords: Integro-differential equation, inverse problem, stability, Carleman estimate.

Science Code: 403.06.00.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine her danıştığımda bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, gelecekteki mesleki hayatımda da verdiği bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Fikir ve tavsiyeleri ile bu çalışmaya katkıda bulunan, benimle tüm bilgilerini paylaşan, en iyisi olması için elinden gelenin fazlasını yapan sevgili hocam Arş. Gör. Dr. Özlem KAYTMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm çalışmalarım boyunca yanımda olan sevgili manevi kardeşlerim Merve ve Volkan KÖKTÜRK'e, yine bu yoldaki her engelle karşılaştığımda bana yol gösteren sevgili arkadaşım Nurullah ÇOŞKUN'a, ailemin yokluğunu hissettirmeyen sevgili kuzenim Mehtap KILIÇ'a ve eşi Erdem KILIÇ'a, herşeyden önemlisi beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\Omega, \mathrm{D}, \mathrm{Q}$	: Verilen bölgeler
$\Omega(\varepsilon), \mathrm{Q}(\varepsilon)$	: Verilen alt bölgeler
$\overline{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
φ	: Ağırlık fonksiyonu
χ	: Kesme fonksiyonu
s	: Büyük parametre
ν	: $\partial\Omega$ sınırına göre birim dış normal vektörü
$C^2(\overline{\Omega})$	: $\overline{\Omega}$ bölgesinde tanımlı *2*. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	: Ω bölgesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^2(\Omega)$	: Kendisi ve 2. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$'ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$\partial_\nu u$	: Birim dış normal vektörüne göre türev; $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$
$\partial_t u$	: u fonksiyonunun t değişkenine göre kısmi türevi; $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$
$\partial_{x_i} u$	: u fonksiyonunun x_i değişkenine göre kısmi türevi; $\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$
$\partial_{x_j} u$	: u fonksiyonunun x_j değişkenine göre kısmi türevi; $\partial_{x_j} u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$
Δ	: Laplace operatörü; $\Delta=\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$
$\nabla_{x,t} u$	: u fonksiyonunun x vektörüne ve t değişkenine göre gradienti; $\nabla_{x,t} u=(\nabla u, \partial_t u)=(\partial_1 u, \ldots, \partial_n u, \partial_t u)$
Γ	: Sınırın bir parçası
$(. \, , .)$	: $\mathbb{R}^n$'de skaler çarpım

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada, hiperbolik integro-diferensiyel denklemler için bir ters problemin çözümünün kararlılığı Carleman değerlendirmesi yardımıyla araştırılmıştır. Eliptik, hiperbolik ve parabolik operatörler için Carleman değerlendirmeleri ile ilgili literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Bunlara örnek olarak Hörmander (1963), Isakov (1990, 1993, 2005), Klibanov ve Timonov (2004), Lavrent'ev, Romanov ve Shishat'skiĭ (1986) verilebilir. Hiperbolik integro-diferensiyel denklem yani integral içeren bir hiperbolik denklem ise Cecilia Cavaterra, Alfredo Lorenzi ve Masahiro Yamamoto'nun 2006 yılında yayınladıkları "A stability result via Carleman estimates for an inverse source problem related to a hyperbolic integro-differential equation" başlıklı makalesinde yer almıştır. Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen makale tartışılacaktır.

Kabul edelim ki $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge olsun.
Bu çalışma kapsamında

$$(Pu)(x,t) \equiv \partial_t^2 u(x,t) - p(x)\Delta u(x,t) - \int_0^t K(x,t,\eta)\Delta u(x,\eta)d\eta$$
$$-L(u)(x,t) = F(x,t), x\epsilon\Omega, t > 0 \tag{1.1}$$

hiperbolik integro-diferensiyel denklemi ele alınmıştır.
Burada

$$L(u)(x,t) = \sum_{j=1}^{n} q_j(x)\,\partial_{x_j}u(x,t) + q_{n+1}(x)\,\partial_t u(x,t) + q_0(x)u(x,t)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t H_j(x,t,\eta)\partial_{x_j} u(x,\eta)d\eta + \int_0^t H_{n+1}(x,t,\eta)\partial_t u(x,\eta)d\eta$$
$$+\int_0^t H_0(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta$$

olarak tanımlıdır.

Bu denklemde $p \in C^2(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ üzerinde $p > 0$, $q_j \in C(\overline{\Omega})$, $j = 0, \dots, n+1$, $K \in C^2\big(\overline{\Omega} \times E(T)\big), H_j \in C\big(\overline{\Omega} \times E(T)\big)$, $j = 0, \dots, n+1$ öyle ki $\partial_t H_j \in C(\overline{\Omega} \times E(T))$ olduğunu kabul edelim. Burada $E(T) = \{(t,\eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \eta \leq t \leq T\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

(1.1) denklemi başta viskoelastisite olmak üzere birçok alanda ortaya çıkmaktadır. Diferensiyel denklemler için ters problemler başta doğal bilimler ve teknoloji olmak üzere birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Bu problemler, bir bölgede sınır ölçümlerinden bir diferensiyel denklemin değişken katsayılarının veya sağ tarafının belirlenmesini içerir. Hem direkt problemin çözümünün hem de katsayının belirlenmesi gerektiğinde bu tür problemler lineer olmayan problemler olarak adlandırılır. Genellikle Hadamard anlamında kötü konulmuş problemlerdir. Daha açık bir ifade ile varlık, teklik ve kararlılık koşullarından en az birinin sağlanmadığı problem çeşitleridir (Klibanov and Timonov 2004).

Örneğin fiziksel bir olayın matematiksel modeli sıklıkla $Lu = f$ şeklinde verilir. Eğer $\|u\| \leq C\|Lu\|$ ön değerlendirmesi varsa bu durumda bütün Hadamard şartları sağlanır. Uygulamada karşılaşılan tüm ters problemler için bu tür değerlendirmeleri elde etmek maalesef olanaksızdır. Bu durum, klasik analiz çerçevesinde ters problemlerin çözümünde zorluğa yol açmaktadır. Son 40 yılda ters problemlerin çözümlerinin tekliğinin ve kararlılığının araştırılmasında önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar örneğin Lavrent'ev et al. (1986), Khaïdarov (1987), Isakov (1990, 1993, 2005), Klibanov (1992), Yamamoto (1999), Bukhgeim (2000), Kubo (2000), Imanuvilov ve Yamamoto (2001a, 2001b, 2005), Klibanov ve Timonov (2004), Klibanov ve Yamamoto (2006), Klibanov (2013), Bellassoued ve Yamamoto (2017) de görülebilir. Uygulamalı matematikçiler tarafından Carleman değerlendirmeleri katsayı ters problemlerinin büyük bir sınıfı için global teklik ve kararlılığın elde edilmesinde önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. 1939 yılında İsveçli matematikçi Torcio Carleman tarafından geliştirilen bu yöntem, çözüm ve türevlerinin bir ağırlıklı norma göre ön değerlendirmesi olup başlangıçta bir eliptik denklem için Cauchy probleminin çözümünün tekliğinin gösterilmesi amacıyla kullanılmıştır. 80'li yılların başında bu yöntem Bukhgeim ve Klibanov (1981) tarafından katsayı ters problemine uygulanmıştır. O tarihten bu yana Carleman değerlendirmeleri yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.

(1.1) denkleminin $p(x)$ ve $q(x)$ katsayılarına karşılık gelen çözümleri $v = v(x,t)$ ve $w = w(x,t)$ olsun. Bu durumda

$$\partial_t^2 v(x,t) - p(x)\Delta v(x,t) - \int_0^t K(x,t,\eta)\Delta v(x,\eta)d\eta - L(v)(x,t) = F(x,t)\,,$$

$$\partial_t^2 w(x,t) - q(x)\Delta w(x,t) - \int_0^t K(x,t,\eta)\Delta w(x,\eta)d\eta - L(w)(x,t) = F(x,t)$$

denklemleri taraf tarafa çıkartılır ise

$$\partial_t^2 (v-w)(x,t) - p(x)\Delta (v-w)(x,t) - \int_0^t K(x,t,\eta)\Delta (v-w)(x,\eta)d\eta - L(v-w)(x,t)$$

$$= (p-q)\Delta w$$

elde edilir. Burada $u = v - w, f = p - q$ ve $r(x,t) = \Delta w$ olarak alınırsa

$$(Pu)(x,t) \equiv \partial_t^2 u(x,t) - p(x)\Delta u(x,t) - \int_0^t K(x,t,\eta)\Delta u(x,\eta)d\eta - L(u)(x,t)$$

$$= r(x,t)f(x) \tag{1.2}$$

denklemi elde edilir.

Bu tez kapsamında**,** (1.2) denklemi ve

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x\epsilon\Omega \tag{1.3}$$

koşullarından,

$\mathrm{u}|_{\Gamma\times(0,T)}$, $\partial_\nu \mathrm{u}|_{\Gamma\times(0,T)}$

ek bilgileri yardımıyla $f \in \Omega(\delta)$ fonksiyonunun elde edilmesi ters problemi ele alınmıştır. Burada $\varepsilon > 0$ keyfi bir sabit ve $r \in W^{1,\infty}(0,T; L^\infty(\Omega))$ olarak verilmiştir.

Yukarıda $\Gamma, \partial\Omega$ sınırının bir açık alt kümesini göstermektedir. Bu problem aslında bir "çift Cauchy" problemi olarak adlandırılabilir, çünkü $t = 0$ ve Γ da Cauchy koşulları verilmiştir. Dikkat edilirse burada tam olmayan sınır koşulları verilmiştir. Çünkü u ve türevleri tüm sınırda değil sınırın bir parçasında yani Γ alt sınırında verilmektedir.

Bu tezde aşağıdaki iki önemli problem tartışılacaktır:

1) İntegral terim içeren (1.1) denklemi için bir Carleman değerlendirmesinin elde edilmesi,

2) (1.2) denklemindeki kaynak terimin x'e bağlı bilinmeyen çarpanı için Hölder değerlendirmesinin elde edilmesi.

Farklı tipten ters problemlere örnek olarak $K(x,t,\eta)$ çekirdeğinin zamana bağlı çarpanının bulunması problemi Wolfersdorf (1993), Cavaterra ve Lorenzi (1995), Cavaterra ve Grasseli (1997), Lorenzi ve Yahkno (1997), Cavaterra (1998), Janno ve Wolfersdorf (1998), Kabanikhin ve Lorenzi (1999), Lorenzi (1999), Lorenzi ve Messina (2003, 2004), Janno ve Lorenzi (2006), Lorenzi ve Romanov (2006) çalışmalarında ele alınmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir:

Tanım 2.1 (Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $D(\Omega)$ ile gösterilir:
i) Bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır öyle ki $k \in \mathbb{N}$ için $supp\ \varphi_k \in K$ dır.
ii) Her $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n)\ ve\ k \to \infty$ için $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi\,(x)$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün yakınsak ise $k \to \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$ yakınsar denir.
$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1971).

Tanım 2.2 (Genelleşmiş Türev) $f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^\alpha f(\Omega)$ genelleşmiş türevi,
$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi),\ \ \varphi \in D(\Omega)$
eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1971).

Tanım 2.3 ($C^m(\Omega)$ Uzayı) Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge olsun. Her negatif olmayan bir m tamsayısı için $|\alpha| \le m$ olmak üzere $D^\alpha \varphi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olacak şekilde tüm φ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzay $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayları, Ω bölgesinde sırasıyla $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarına ait ve Ω da kompakt supporta sahip tüm fonksiyonların kümesidir (Adams and Fournier 2003).

Tanım 2.4 ($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı, $C^\infty(\Omega)$'da Ω bölgesinde kompakt supporta sahip tüm fonksiyonların kümesidir (Adams and Fournier 2003).

Tanım 2.5 ($L^p(\Omega)$ Uzayı) Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge ve p bir pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir (Adams and Fournier 2003).

Tanım 2.6 ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) Eğer Ω bölgesi üzerinde hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa, o taktirde Ω bölgesi üzerinde ölçülebilir bir u fonksiyonu bu bölgede esas olarak sınırlıdır (essential bounded) denir. K sabitlerinin en büyük alt sınırı Ω üzerinde $|u|$'nun esas supremumu olarak adlandırılır ve $ess\ sup_{x\epsilon\Omega}|u(x)|$ şeklinde gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_\infty = ess\ sup_{x\epsilon\Omega}|u(x)|$$

şeklinde verilir (Adams and Fournier 2003).

Tanım 2.7 ($H^k(\Omega)$ Uzayı) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu cümleye ait bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

i) $H^k(\Omega)$ lineer uzaydır *ve* $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$;

ii) $H^k(\Omega)$ üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f_1 D^\alpha \bar{f}_2 dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

biçimindedir;

iii) $\partial\Omega \in C^k(\Omega)$ ise $C^\infty(\bar{\Omega})$ uzayı, $H^k(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur;

iv) $\partial\Omega \in C^k(\Omega)$ ise $H^k(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır (Mikhailov 1978).

Tanım 2.8 ($C([0,T];X)$ Uzayı) X bir Banach uzayı olmak üzere, $u : [0,T] \to X$ tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C([0,T];X)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm

$\|u\|_{C([0,T];X)} := max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X < \infty$

biçiminde tanımlanır (Evans 1997).

Tanım 2.9 ($W^{1,p}([0,T];X)$ **Uzayı)** X bir Banach uzayı olmak üzere, kendisi ve birinci mertebeden genelleşmiş türevi ***(*** $L^p\ ([0,T];X)$ uzayına ait olan tüm u fonksiyonlarının uzayı ***(*** $W^{1,p}([0,T];X)$ ile gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{W^{1,p}([0,T];X)} := \begin{cases} \int_0^T \left(\|u(t)\|_x^p + \|u'(t)\|_x^p dt\right)^{1/p}, 1 \le p < \infty \\ ess\ sup_{0\le t\le T}\ (\|u(t)\|_x + \|u'(t)\|_x), (p = \infty) \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Açıktır ki

$H^1([0,T];X) = W^{1,2}([0,T];X)$

dir (Evans 1997).

Tanım 2.10 (İç Çarpım Uzayı) Bir iç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış vektör uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım $X \times X$'den X'in bir K skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür, yani X'in her x ve y vektör çifti, (x,y) ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmiştir:

1) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$,

2) $(cx,y) = c(x,y)$,

3) $(x,y) = (y,x)$,

4) $(x,x) \ge 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Kreyszig 1989).

Tanım 2.11 (Normlu Uzay) X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\vec{x} \in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$\|.\|: X \to \mathbb{R}$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Her $\vec{x}, \vec{y} \in X$ ve her $\lambda \in R$ için

1) $\|\vec{x}\| \ge 0$ *ve* $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$,

2) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|.\|\vec{x}\|$,

3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

dir (Pişkin 2017).

Tanım 2.12 (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$|\langle x, y\rangle| \leq |x|.|y|$

dir (Evans 1997).

Tanım 2.13 (Green Formülleri) $\partial\Omega \in C^1$ ve $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$ olsun. Bu durumda $\boldsymbol{\nu}$, $\partial\Omega$ yüzeyinin dış normali, $\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$ ve $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}$ olmak üzere

1)$\int_{\Omega} \Delta f dx = \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \boldsymbol{\nu} dS$,

2)$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \nabla f . \nabla g dx = \int_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot dS - \int_{\Omega} g \Delta f dx$,

3) $\int_{\boldsymbol{\Omega}} g \Delta f dx - \int_{\Omega} f \Delta g dx = \int_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot \boldsymbol{\nu} dS - \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \boldsymbol{\nu} dS$

eşitlikleri sağlanır (Evans 1997).

Tanım 2.14 (Landau Sembolleri) f ve g, S kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Her $x \in S$ *için* $|f(x) \,/\, g(x)|$ oranı sınırlı ise, $f(x)$ ile $g(x)$ arasındaki bağıntı $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. Eğer x bir x_0 değerine (söz konusu değer sonsuz olabilir) yaklaşırken $f(x) \,/\, g(x)$ oranı sıfıra yaklaşıyorsa, o takdirde $f(x) = o(g(x))$ olarak yazılabilir (Narkiewicz 2000).

Tanım 2.15 (Diferensiyel Denklem) Bazı bilim dallarında bir problemin çözümü, problemin özelliklerini taşıyan matematiksel bağıntı (veya matematiksel model) kurulmasını gerektirir. Böyle bir bağıntı, genellikle bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlerine göre türevlerini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar. Böyle bir denkleme diferensiyel denklem denir. Eğer bilinmeyen fonksiyon bir tek bağımsız değişkene bağımlı ise, diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon iki ya da daha çok bağımsız değişkene bağımlı ise, diferensiyel denkleme kısmi diferensiyel denklem denir (Çağlıyan ve Çelebi 2010).

Tanım 2.16 (Kısmi Türevli Denklemlerin Sınıflandırılması) İkinci mertebeden iki değişken içeren lineer kısmi türevli denklem

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy,} u_x, u_y$ fonksiyonları için sırasıyla $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2, \alpha, \beta$ gösterimleri kullanılırsa (2.1) denklemi için

$P(\alpha,\beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f$

şeklinde α ve β ya bağlı ikinci dereceden bir polinom elde edilir.

(2.1) denkleminin çözümünün matematiksel özellikleri büyük oranda $P(\alpha,\beta)$ polinomunun cebirsel özellikleri tarafından belirlenir. $P(\alpha,\beta)$ ve (2.1) denklemi $b^2 - ac$ diskriminantının pozitif, negatif veya sıfır olmasına göre sırasıyla hiperbolik, eliptik ve parabolik olarak sınıflandırılır. Dikkat edilirse (2.1) denkleminin tipi onun esas kısmı yani u'nun en yüksek mertebeden türevlerini içeren terimler tarafından belirlenir ve bu sınıflandırma a, b ve c katsayıları sabit olmadıkça xy düzleminde noktaya bağlı olarak değişir (Duchateau and Zachmann 1986).

Daha genel olarak ikinci mertebeden n değişkenli bir lineer kısmi türevli denklem

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x) \qquad (2.3)$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ ise (2.3) denkleminin temel kısmı $a_{ij} = a_{ji}$ olacak şekilde düzenlenebilir. Bu sebepten $A = [a_{ij}]$ matrisi simetrik olarak kabul edilebilir. Lineer cebirden bilinmektedir ki her reel simetrik $n \times n$ tipindeki matrisin n tane reel özdeğeri vardır. Bu özdeğerler, $I; n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere $det(A - \lambda I)$'nın yani n. dereceden bir polinomunun kökleridir. Kabul edelim ki x^0 çalışılan bölgedeki keyfi bir nokta olsun. Pozitif özdeğerlerinin sayısını $n_+ = n_+(x^0)$, negatif özdeğerlerinin sayısını $n_- = n_-(x^0)$ ve sıfır özdeğerlerinin sayısı $n_0 = n_0(x^0)$ ile gösterelim. Burada

$n = n_+ + n_- + n_0$ olduğu açıktır.

Eğer $n_+ = n$ veya $n_- = n$ ise (2.3) denklemi x^0 noktasında eliptik tiptedir denir.

Eğer $n_+ = n - 1$ ve $n_- = 1$ veya $n_+ = 1$ ve $n_- = n - 1$ ise (2.3) denklemi x^0 noktasında hiperbolik tiptedir denir.

Eğer $n_0 = 0$ ve $1 < n_+ < n - 1$ ise (2.3) denklemi x^0 noktasında ultrahiperbolik tiptendir denir.

Eğer $n_0 > 0$ ise *(2.3)* denklemi x^0 noktasında parabolik tiptendir denir .

Açıktır ki a_{ij} katsayılarından herhangi biri sabit değil ise (2.3) denkleminin tipi noktaya bağlı olarak değişecektir (Mikhailov 1978).

Tanım 2.17 (İntegral Denklem) Bir $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. Bu denklemlerin en genel şekli, $g(x)$ ve $h(x)$ integrasyon limitleri, λ sabit bir parametre, $K(x,t)$, x ve t değişkenlerine bağlı çekirdek adı verilen bilinen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt$$

dir. İntegral denklemlerin bir çok tipi vardır. Bu denklemleri karakterize etmek için integrasyon limitlerine bağlı iki yol kullanılabilir.

1) İntegrasyon limitlerinin her ikisi de sabit olan denklemler Fredholm integral denklemleri olarak adlandırılır ve bu denklemlerin genel formu a ve b sabit olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt.$$

$f(x) = 0$ ise denkleme homojen Fredholm integral denklemi adı verilir. Denklem

$$u(x) = \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt$$

formundadır.

2) İntegrasyon limitlerinin en az biri değişken olan denklemler Volterra integral denklemleri olarak adlandırılır ve bu denklemlerin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt.$$

$f(x) = 0$ ise denkleme homojen Volterra integral denklemi adı verilir:

$$u(x) = \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

formundadır (Daymaz 2018).

Tanım 2.18 (Ters Problem) Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki, bu problemlerin çözümleri için ayrıca ek bilgiye ihtiyaç duyulur. Aynı ek bilgiye göre problemdeki denklemi ve koşulları, yani denklemin bir ya da birkaç katsayısını, denklemin sağ tarafını ya da koşullardan biri ya da birkaçını çözümle birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere ters problem denir. Bu problemlerin karakteristik özelliği, genellikle Hadamard anlamında kötü konulmuş olmalarıdır (Amirov 2001).

BÖLÜM 3

CARLEMAN DEĞERLENDİRMELERİ

Bu bölümde, (1.1) hiperbolik integro-diferensiyel denklemi için ispatı Cavaterra, Lorenzi ve Yamamoto (2006)'da verilmiş olan bir Carleman değerlendirmesi tartışılacaktır. Bundan sonraki adımlarda C>0, s>0 parametresinden bağımsız farklı pozitif sabitleri göstermektedir. İlk olarak hiperbolik operatörler için Klibanov ve Timonov (2004) de verilen ve Teorem 2.2.4 olarak isimlendirilen bir noktasal Carleman değerlendirmesi incelenecektir.

3.1 HİPERBOLİK OPERATÖR İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

$\mathrm{D} = \{|x| < \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi bir yuvar olmak üzere $Q_T' = \mathrm{D} \times (-T, T)$ bölgesi verilsin. Ayrıca $a(x) \geq sabit > 0$, $a \in C^1(\overline{\mathrm{D}})$ ve $b(x,t), c(x,t) \in C(\overline{Q_T'})$ olsun.

3.1.1 Yanal Veriler ile Bir Cauchy Problemi

f, p ve q fonksiyonları verildiğinde

$$Lw = a(x)w_{tt} - \Delta w - \sum_{j=1}^{n} b^j(x,t)w_j + c(x,t)w = f(x,t) \tag{3.1}$$

denklemini ve

$$w|_{S_T'} = p(x,t),\ \partial_\nu w|_{S_T'} = q(x,t) \tag{3.2}$$

koşullarını sağlayan $w \in C^2(\bar{Q}_T')$ fonksiyonunun bulunması problemini ele alalım. Burada $S_T' = \partial\mathrm{D} \times (-T, T)$, Q_T' silindirinin yanal yüzeyidir.

L hiperbolik operatörünün temel kısmı

$$L_0 w = a(x)w_{tt} - \Delta w \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Ayrıca $x_0 \in \mathbb{R}^n, \eta \in (0,1)$ olmak üzere

$$\psi(x,t) = |x - x_0|^2 - \eta t^2 \tag{3.4}$$

fonksiyonu ve buna bağlı olarak Carleman ağırlık fonksiyonu

$$\mathcal{W}(x,t) = e^{s\psi(x,t)} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\mathcal{W}(x,t)$ fonksiyonunun seviye yüzeyleri

$$H_c = \{|x - x_0|^2 - \eta t^2 = sabit\}$$

hiperboloidleri olsun. Ayrıca aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$G_c = \{(x,t): |x - x_0|^2 - \eta t^2 > c\} \cap \{(x,t): x \in \mathrm{D}\},\ \forall\ c>0. \tag{3.6}$$

Açıkça $(x_0, 0) \notin G_c$ ve eğer $G_c \neq \emptyset$ ise bu durumda $\bar{G_c}$ da $|\nabla\psi| \neq 0$ dır.

Teorem 3.1 L_0, (3.3) eşitliğinde verilen hiperbolik operatör olsun. Kabul edelim ki $a(x) \in C^1(\overline{D})$ katsayısı için

$$1 \leq a(x) \leq a_1,\ a_1 = sabit \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{2} + (x - x_0) \cdot \nabla a \geq 0, \forall x \in \overline{D} \tag{3.8}$$

şartları sağlansın. Ayrıca

$$P = P(x_0, D) = max_{x\in\overline{D}}|x - x_0| \tag{3.9}$$

olsun. Bir $\eta > 0$ sayısı

$$\sqrt{\eta} \leq \sqrt{\eta_0} = min\left[\frac{1}{4(a_1^2 + P\|a\|_{C^1(\overline{D})})}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(n+3)a_1}}\right] \tag{3.10}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilsin. Ayrıca $c > 0$ için $G_c \neq \emptyset$ ve $G_c \subset Q_T'$ olsun. Bu durumda yeterince büyük $s_0 = s_0(D, \eta, c, x_0) > 1$ ve $C = C(D, \eta, c, x_0) > 0$ sayıları vardır öyle ki her $w \in C^2(\overline{G_c})$ ve $s \geq s_0$ için aşağıdaki noktasal Carleman değerlendirmesi sağlanır:

$$(L_0 w)^2 \mathcal{W}^2 \geq Cs(|\nabla w|^2 + w_t^2 + s^2 w^2)\mathcal{W}^2 + \nabla \cdot U + V_t. \tag{3.11}$$

Burada (U, V) vektör fonksiyonu

$$|(U,V)| \leq Cs(|\nabla w|^2 + w_t^2 + s^2 w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.12}$$

eşitsizliğini ve V fonksiyonu

$$|V| \leq Cs^3(|t|w_t^2 + |t||\nabla w|^2 + |\nabla w||w_t| + |w||w_t| + |t|w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.13}$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece eğer $w(x,0) = 0$ veya $w_t(x,0) = 0$ ise bu durumda

$$V(x,0) = 0 \tag{3.14}$$

elde edilir (Teorem 2.2.4, Klibanov and Timanov 2004).

Burada $a \geq 1$ kabulü işlemlerde kolaylık olması açısından yapılmıştır. Genel durum $a \geq a_0 = sabit$ şeklinde ele alınabilir. Bu durumda $\tau = t\,/\sqrt{a_0}$ değişken değişimi yapılarak daha özel bir duruma indirgenebilir. $a \equiv sabit$ olması durumunda benzer bir sonuç Lavrent'ev vd. (1986) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca $a \neq sabit$ olma durumu daha da karmaşıktır. Böyle bir durum için Isakov (1990), Hörmander (1963) de verilen Carleman ağırlık fonksiyonu ile ilgili şartı kullanarak ispat yapmıştır.

İspat. Burada C farklı pozitif sabitleri, $O(1\ /\ s)$ sembolü kendisi ve birinci türevi

$$\left|O\left(\frac{1}{s}\right)\right| \leq \frac{K_0}{s}, \forall s > 1 \tag{3.15}$$

şartını sağlayan ve $C^1(\bar{Q}_T')$ uzayına ait olan fonksiyonları göstersin. Ayrıca $K_0 = K_0(D, x_0)$ pozitif sayı olsun. Ağırlık fonksiyonunu kullanarak $v = w \cdot \mathcal{W}$ şeklinde yeni bir bilinmeyen fonksiyon tanımlansın ve $L_0(w)$ operatörü v'ye göre ifade edilsin. O halde

$$w = ve^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)},$$

$$w_t = v_t e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v2s\eta t e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$= (v_t + 2s\eta t v)e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)},$$

$$w_{tt} = v_{tt}e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v_t\, 2s\eta t e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v_t\, 2s\eta t e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$+ v4s^2\eta^2 t^2 e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v2s\eta e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$= \left(v_{tt} + 4s\eta t\, v_t + 4s^2\left(\eta^2 t^2 + \frac{\eta}{2s}\right)v\right)\mathcal{W}^{-1}$$

$$= \left(v_{tt} + 4s\eta t\, v_t + 4s^2\left(\eta^2 t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right)\mathcal{W}^{-1},$$

$$w_{x_i} = v_{x_i}e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v\big(-2s(x_i - x_{0i})\big)e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$= \big(v_{x_i} - 2s(x_i - x_{0i})v\big)e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)},$$

$$w_{x_i x_i} = v_{x_i x_i}e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v_{x_i}\big(-2s(x_i - x_{0i})\big)e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$+ v_{x_i}\big(-2s(x_i - x_{0i})\big)e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$+ v(2s)e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)} + v\, 4s^2|x - x_0|^2 e^{s(\eta t^2 - |x-x_0|^2)}$$

$$= \left[v_{x_i x_i} - 4s(x_i - x_{0i})v_{x_i} + 4s^2\left(|x - x_0|^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right]\mathcal{W}^{-1}$$

yazılabilir.

Böylece

$$(L_0 w)^2\mathcal{W}^2 = (aw_{tt} - \Delta w)^2\mathcal{W}^2$$

$$= (a\left(v_{tt} + 4s\eta t\, v_t + 4s^2\left(\eta^2 t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right)\mathcal{W}^{-1}$$

$$-\left[v_{x_ix_i} - 4s(x_i - x_{0i})v_{x_i} + 4s^2\left(|x-x_0|^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right]\mathcal{W}^{-1})^2\,\mathcal{W}^2$$

$$=\left\{\left[av_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right] + 4sa\eta t v_t + \ 4s\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i}\right\}^2$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$z_1 = av_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v,$

$z_2 = 4sa\eta t v_t,$

$z_3 = 4s\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i}$

değişkenlerini tanımlayalım. Bu durumda

$$(L_0w)^2\mathcal{W}^2 \geq z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 \tag{3.16}$$

yazılabilir.

(3.16) eşitsizliğindeki her bir terimi ayrı ayrı ele alalım.

Adım 1. İlk olarak $2z_1z_2$ terimini değerlendirelim:

$$\begin{aligned}
2z_1z_2 &= 2\left[av_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right][4sa\eta t v_t] \\
&= 8a^2s\eta t v_t v_{tt} - 8sa\eta t v_t\Delta v - 32s^3a\eta t v v_t\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \\
&= [4sa^2\eta t v_t^2]_t - 4sa^2\eta v_t^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(-8sa\eta t v_t v_{x_i}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} 8sa\eta t v_{tx_i}v_{x_i} \\
&\quad + 8s\eta t v_t\sum_{i=1}^{n} a_{x_i}v_{x_i} + \left[-16s^3a\eta\left(t|x-x_0|^2 - a\eta^2t^3 + tO\left(\frac{1}{s}\right)\right)v^2\right]_t \\
&\quad +16s^3a\eta\left[|x-x_0|^2 - 3a\eta^2t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2 \\
&= -4sa^2\eta v_t^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} 4sa\eta t v_{x_i}^2\right)_t - 4sa\eta|\nabla v|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(-8sa\eta t v_t v_{x_i}\right)_{x_i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} 8sa\eta t v_{tx_i}v_{x_i} + 16s^3a\eta\left[|x-x_0|^2 - 3a\eta^2t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2 \\
&\quad + \left[4s\eta t v_t^2 - 16s^3a\eta\left(t|x-x_0|^2 - a\eta^2t^3 + tO\left(\frac{1}{s}\right)\right)v^2\right]_t
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 4sa\eta t v_{x_i}^2\right)_t = \sum_{i=1}^{n} 4sa\eta v_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} 4sa\eta t\, v_{x_i t} v_{x_i}$$

eşitliğinden faydalanılmıştır.

Böylece

$$2z_1 z_2 = -4sa\eta(av_t^2 + |\nabla v|^2) + 8s\eta t v_t \sum_{i=1}^{n} a_{x_i} v_{x_i} + 16s^3 a\eta\left[|x-x_0|^2 - 3a\eta^2 t^2\ \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right] v^2$$

$$+\nabla . U_1 + (V_1)_t \tag{3.17}$$

elde edilir. Burada (U_1, V_1) fonksiyonları

$$|(U_1, V_1)| \le Cs(|\nabla w|^2 + w_t^2 + s^2 w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.18}$$

eşitsizliğini sağlar ve

$$V_1 = 4sa^2\eta t v_t^2 + 4sa\eta t|\nabla v|^2 - 16s^3 a\eta\left(t|x-x_0|^2 - a\eta^2 t^3 + t\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right) v^2 \tag{3.19}$$

şeklindedir. $|(U_1, V_1)|$ için yapılan değerlendirmeye u fonksiyonunu da dahil etmek için v yerine $w = v \cdot \mathcal{W}^{-1}$ yazılır.

Adım 2. Şimdi $2z_1 z_3$ terimini değerlendirelim:

$$2z_1 z_3 = 2\left[a(x)v_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2 t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right) v\right]\left[4s\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i}\right]$$

$$= 8s\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})\, v_{x_i}\left[a(x)v_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2 t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right) v\right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} 8as(x_i - x_{0i})v_{x_i} v_t\right)_t - \sum_{i=1}^{n} 8as(x_i - x_{0i})v_{x_i t} v_t - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} 8s(x_i - x_{0i})v_{x_i} v_{x_j x_j}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[16s^3(x_i - x_{0i})\left(|x-x_0|^2 - a\eta^2 t^2 \quad + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right) v^2\right)\right]_{x_i}$$

$$+16s^3\left[(n+2)|x-x_0|^2 - na\eta^2 t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right] v^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-4s(x_i - x_{0i})av_t^2)_{x_i} + 4s[na + (x-x_0)\cdot\nabla a]v_t^2$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(-8s(x_i - x_{0i})v_{x_i} v_{x_j})\right]_{x_j} + 8s|\nabla v|^2$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} 8s(x_i - x_{0i})v_{x_i x_j} v_{x_j}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[16s^3(x_i - x_{0i})\left(|x - x_0|^2 - a\eta^2 t^2 \quad + O\left(\frac{1}{s}\right)v^2\right)\right]_{x_i}$$

$$+16s^3\left[(n+2)|x - x_0|^2 - na\eta^2 t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2$$

$$+\left(8asv_t \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i}\right)_t$$

$$= 4s[na + (x - x_0)\cdot \nabla a]v_t^2 + 8s|\nabla v|^2$$

$$+16s^3\left[(n+2)|x - x_0|^2 - a\eta^2 t^2 + O\left(\tfrac{1}{s}\right)\right]v^2 + \nabla \cdot U_2 + (V_2)_t$$

dir. Daha sonra (3.7) ve (3.8) yardımıyla

$$2z_1 z_3 \geq 4s\left(n - \frac{1}{2}\right)v_t^2 - 4s(n-2)|\nabla v|^2 + 16s^3\left[(n+2)|x - x_0|^2 - na\eta^2 t^2 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2$$
$$+\nabla \cdot U_2 + (V_2)_t \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada

$$|(U_2, V_2)| \leq Cs(|\nabla w|^2 + w_t^2 + s^2 w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.21}$$

ve

$$V_2 = 8asv_t \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i} \tag{3.22}$$

şeklindedir.

Adım 3. Şimdi $2z_1z_2 + 2z_1z_3$ terimini değerlendirelim:

Kabul edelim ki $P = P(x_0, \mathrm{D})$, (3.9) da tanımlanan bir sayı olsun. Bu durumda her $x \in \overline{\mathrm{D}}$ için $|x - x_0| \leq P$ olur. Böylece G_c kümesinde $\eta|t| \leq P\sqrt{\eta}$ yazılabilir. Bu değerlendirme ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$-8s\eta t v_t \sum_{i=1}^{n} a_{x_i} v_{x_i} = -8s\eta t v_t(\nabla a, \nabla v)$$
$$\geq -8s\eta|t||v_t||\nabla v|\|a\|_{C^1(\overline{\mathrm{D}})}$$
$$\geq -4s\sqrt{\eta}P\|a\|_{C^1(\overline{\mathrm{D}})}(v_t^2 + |\nabla v|^2) \tag{3.23}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\xi = \sqrt{\eta}P\|a\|_{C^1(\overline{\mathrm{D}})} \tag{3.24}$$

bulunur. Böylece (3.7), (3.17) ve (3.23) değerlendirmelerinden

$$2z_1z_2 \geq -4s(a_1^2\eta + \xi)v_t^2 - 4s(a_1\eta + \varepsilon)|\nabla v|^2 + 16s^3\eta\left[|x - x_0|^2 - 3a_1\eta^2t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2$$
$$+\nabla \cdot U_1 + (V_1)_t$$

eşitsizliği elde edilir. Kabul edelim ki

$U_3 = U_1 + U_2 \qquad V_3 = V_1 + V_2$

olsun. Bu durum da (3.18)-(3.22) değerlendirmeleri yardımıyla

$$2z_1z_2 + 2z_1z_3 \geq 4s\left(n - \frac{1}{2} - a_1^2\eta - \xi\right)v_t^2 - 4s(n - 2 + a_1\eta + \xi)|\nabla v|^2$$
$$+16s^3\left[(n + 2 + \eta)|x - x_0|^2 - (n + 3\eta)a_1\eta^2t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2$$
$$+\nabla \cdot U_3 + (V_3)_t \tag{3.25}$$

bulunur. Burada

$$|(U_3, V_3)| \leq Cs(|\nabla w|^2 + w_t^2 + s^2w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.26}$$

ve

$$V_3 = 4sa^2\eta t v_t^2 + 4sa\eta t|\nabla v|^2 + 8asv_t\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i}$$
$$-16s^3a\eta\left(t|x - x_0|^2 - a\eta^2t^3 + t\mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right)v^2 \tag{3.27}$$

şeklindedir.

Adım 4. Şimdi z_1^2 terimini değerlendirelim:

Bu şekilde (3.25) de bulunan $|\nabla v|^2$ ifadesinin negatif işareti dengelenmiş olur ve pozitif bir katsayı elde edilir. b daha sonra seçilecek pozitif bir sayı olmak üzere

$$z_1^2 = \left[av_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x - x_0|^2 - a\eta^2t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right)v + sbv\right]^2$$
$$\geq 2sbv\left[av_{tt} - \Delta v - 4s^2\left(|x - x_0|^2 - a\eta^2t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right)v\right]$$
$$= (2sabvv_t)_t - 2sabv_t^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(-2sbvv_{x_i}\right)_{x_i} + 2sb|\nabla v|^2$$
$$-8s^3b\left[|x - x_0|^2 - a\eta^2t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2$$

yazılabilir. $a \geq 1$ olduğundan

$$z_1^2 \geq 2sb|\nabla v|^2 - 2sa_1bv_t^2 - 8s^3b\left[|x - x_0|^2 - \eta^2t^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{s}\right)\right]v^2 + \nabla \cdot U_4 + (V_4)_t \tag{3.28}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$|(U_4,V_4)| \leq Csb(|\nabla w|^2 + w_t^2 + s^2w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.29}$$

ve

$$V_4 = 2sabvv_t \tag{3.30}$$

şeklindedir.

Adım 5. Son olarak $z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3$ terimini değerlendirelim:

(3.25) ve (3.28) toplanırsa

$$\begin{aligned} z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 \geq 4s\left[n - \frac{1}{2} - a_1^2\eta - \xi - \frac{b}{2}\right]v_t^2 + 4s\left[2 + \frac{b}{2} - a_1\eta - n - \xi\right]|\nabla v|^2 \\ +16s^3\left[\left(n + 2 + \eta - \tfrac{b}{2}\right)|x - x_0|^2 - \left(na_1 + 3a_1\eta - \tfrac{b}{2}\right)n^2t^2 \right. \\ \left. +O\left(\tfrac{1}{s}\right)\right]v^2 + \nabla\cdot U + V_t \end{aligned} \tag{3.31}$$

olur. Burada (3.26), (3.27), (3.29), (3.30) yardımıyla

$(U,V) = (U_3,V_3) + (U_4,V_4)$,

$$|(U,V)| \leq Cs(|\nabla w|^2 + w_t^2 + bs^2w^2)\mathcal{W}^2 \tag{3.32}$$

ve

$$\begin{aligned} V = 4sa^2\eta t v_t^2 + 4sa\eta t|\nabla v|^2 + 8asv_t\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})v_{x_i} + 2sabvv_t \\ -16s^3a\eta\left(t|x - x_0|^2 - a\eta^2t^3 + tO\left(\tfrac{1}{s}\right)\right)v^2 \end{aligned} \tag{3.33}$$

bulunur. (3.13), (3.33) değerlendirmesi ve $v = w.\mathcal{W}$ bağıntısından elde edilir. (3.31) eşitsizliğindeki v_t^2, $|\nabla v|^2$ ve v^2 ifadelerinin pozitif katsayılı olması için $b = 2(n-1)$ sayısını seçelim. Bu durumda (3.24) den

$$n - \tfrac{1}{2} - a_1^2\eta - \xi - \tfrac{b}{2} = \tfrac{1}{2} - a_1^2\eta - \sqrt{\eta}P\|a\|_{C^1(\bar{D})}, \tag{3.34}$$

$$2 + \tfrac{b}{2} - a_1\eta - n - \xi = 1 + a_1\eta - \xi \geq 1 - \sqrt{\eta}P\|a\|_{C^1(\bar{D})}, \tag{3.35}$$

$$\left(n + 2 + \eta - \tfrac{b}{2}\right)|x - x_0|^2 - \left(na_1 + 3a_1\eta - \tfrac{b}{2}\right)\eta^2t^2 \geq 3|x - x_0|^2 - (n+3)a_1\eta^2t^2 \tag{3.36}$$

yazılabilir. Daha sonra (3.10) yardımıyla

$$\tfrac{1}{2} - a_1^2\eta - \sqrt{\eta}P\|a\|_{C^1(\bar{D})} \geq \tfrac{1}{4}, \tag{3.37}$$

$$1 - \sqrt{\eta}P\|a\|_{C^1(\bar{D})} \geq \tfrac{3}{4}, \tag{3.38}$$

$$3|x - x_0|^2 - [(n+3)a_1\eta]\eta t^2 \geq 3(|x - x_0|^2 - \eta t^2) \geq 3c \tag{3.39}$$

olarak bulunur. (3.16), (3.31), (3.32)-(3.39) eşitsizliklerinden

$(L_0 w)^2 \mathcal{W}^2 \geq s v_t^2 + 3s|\nabla v|^2 + 48 c s^3 v^2 + \nabla \cdot U + V_t$

olur. $w = v \cdot \mathcal{W}^{-1}$ orijinal fonksiyonuna dönülür ise (3.11) ve (3.12) eşitsizlikleri elde edilir.■

3.2 HİPERBOLİK İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN BİR CARLEMAN DEĞERLENDİRMESİ

Bu bölümde, ele alınan ters problemin çözümünün kararlılığı araştırılırken kullanılan, (1.1) hiperbolik integro-diferensiyel denklemi için bir Carleman değerlendirmesi verilmiştir. Burada birinci bölümdeki kabullerimize ek olarak

$$\frac{1}{2} p(x)^2 - \nabla p(x) \cdot (x - x_0) \geq 0, \qquad x \in \bar{\Omega} \tag{3.40}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ noktasının varlığı kabul edilmiştir.

Öncelikle

$$\varphi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 \tag{3.41}$$

ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\beta > 0$; Ω, p, x_0'a bağlı yeterince küçük bir sabittir. Ayrıca $R > 0$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$Q(\varepsilon) = \{(x,t) \in \Omega \times (0,\infty) : \varphi(x,t) > R^2 + \varepsilon\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{x \in \Omega : |x - x_0| > (R^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}\} \tag{3.42}$$

alt bölgelerini tanımlayalım. Diğer yandan

$$\overline{\Omega(0)} \subset \Omega \cup \bar{\Gamma} \tag{3.43}$$

olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.1 de (3.11) eşitsizliğinin $Q(\varepsilon)$ üzerinde integrali alınır, U ve V fonksiyonlarının özellikleri kullanılırsa aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.2 Kabul edelim ki $p = p(x) \in C^2(\Omega)$ fonksiyonu (3.40) şartını sağlasın. $\beta > 0$ sayısı yeterince küçük olsun. Ayrıca $w(x,0) = 0$ veya $\partial_t w(x,0) = 0$ şartı sağlansın. Bu durumda $s_0 > 0$ ve $C > 0$ sabitleri vardır öyle ki her $s > s_0$ ve her $w(x,t) \in C^2(\overline{Q(\varepsilon)})$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t} w\right|^2 + s^3 |w|^2\right) e^{2s\varphi}\, dxdt \leq C \int_{Q(\varepsilon)} \left|\partial_t^2 w - p(x)\Delta w\right|^2 e^{2s\varphi}\, dxdt$$

$$+Ce^{Cs}\int_{\partial Q(\varepsilon)\setminus(Q(\varepsilon)\cap\{t=0\})}(\left|\nabla_{x,t}w\right|^2+|w|^2)\,dS$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.1

Her $w\in L^2\big(Q(\varepsilon)\big)$ *için*

$$\int_{Q(\varepsilon)}\left(\int_0^t|w(x,\xi)|d\xi\right)^2e^{2s\varphi}dxdt\le\frac{C}{s}\int_{Q(\varepsilon)}|w(x,t)|^2e^{2s\varphi}\,dxdt$$

dir.

Lemma 3.1, bu tezde ele alınan ters problem için bir Carleman değerlendirmesi elde edilmesinde kullanılmaktadır.

İspat. Öncelikle

$$te^{2s\varphi(x,t)}=-\frac{1}{4\beta s}\partial_t(e^{2s\varphi})$$

yazılabilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_{Q(\varepsilon)}\left(\int_0^t|w(x,\xi)|d\xi\right)^2e^{2s\varphi}dxdt&\le\int_{Q(\varepsilon)}t\left(\int_0^t|w(x,\xi)|^2d\xi\right)e^{2s\varphi}dxdt\\&=\int_{Q(\varepsilon)}t\,e^{2s\varphi}\left(\int_0^t|w(x,\xi)|^2d\xi\right)dxdt\\&=\int_{Q(\varepsilon)}-\frac{1}{4\beta s}\partial_t(e^{2s\varphi})\left(\int_0^t|w(x,\xi)|^2d\xi\right)dxdt\\&\le\int_{\Omega(\varepsilon)}\int_0^T-\frac{1}{4\beta s}\partial_t(e^{2s\varphi})\left(\int_0^t|w(x,\xi)|^2d\xi\right)dtdx\\&=\int_{\Omega(\varepsilon)}\left\{\int_0^{l(x)}-\frac{1}{4\beta s}\partial_t(e^{2s\varphi})\left(\int_0^t|w(x,\xi)|^2d\xi\right)dt\right\}dx\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$l(x)=\left(\frac{[|x-x_0|^2-R^2-\varepsilon]}{\beta}\right)^{1/2}$$

olarak tanımlanmıştır. Buradan kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_{Q(\varepsilon)}\left(\int_0^t |w(x,\xi)|d\xi\right)^2 e^{2s\varphi}dx$$

$$\leq \frac{1}{4\beta s}\left\{-e^{2s(R^2+\varepsilon)}\int_{\Omega(\varepsilon)}\left(\int_0^{l(x)}|w(x,\xi)|^2 d\xi\right)dx \quad +\int_{Q(\varepsilon)}|w(x,\xi)|^2 e^{2s\varphi}dxdt\right\}$$

$$\leq \frac{1}{4\beta s}\int_{Q(\varepsilon)}|w(x,\xi)|^2 e^{2s\varphi}dxdt$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 3.1'in ispatı tamamlanır. ■

Teorem 3.3 Kabul edelim ki $u \in H^2(Q(\varepsilon))$ fonksiyonu (1.1) denklemini ve

$u(x,0)=0$ veya $\partial_t u(x,0)=K(x,0,0)=0,\ x \in \Omega(0)$ (3.44)

koşullarını sağlasın. Bu durumda bir $s_0 > 0$ sayısı ve u fonksiyonundan bağımsız bir $C = C(s_0) > 0$ sabiti vardır öyle ki her $s \geq s_0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)}(s|\nabla_{x,t}u|^2 + s^3u^2)\,e^{2s\varphi}dxdt \leq C\int_{Q(\varepsilon)}|F|^2e^{2s\varphi}dxdt + Ce^{Cs}\|u\|^2_{(1),\Sigma} \qquad (3.45)$$

sağlanır. Burada $\Sigma = \partial Q(\varepsilon) \setminus (\Omega(\varepsilon)\times\{0\})$ ve

$\|u\|^2_{(1),\Sigma}=\int_{\partial Q(\varepsilon)\setminus(\Omega(\varepsilon)\times\{0\})}(|\nabla_{x,t}u|^2 + u^2)dS$

şeklinde tanımlanmıştır.

Uyarı 1: Eğer $u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0,\ x \in \Omega(0)$ başlangıç koşulları alınırsa (3.44) koşullarındaki $K(x,0,0)=0$ şartı kaldırılabilir.

Uyarı 2: φ ağırlık fonksiyonunda $\beta = \beta(\Omega,p,x_0)>0$ sayısının yeterince küçük seçilmesi gerekmektedir. Özel olarak $p \equiv 1$ olarak alınırsa herhangi bir $\beta \in (0,1)$ seçilebilir. (3.45) eşitsizliği Carleman değerlendirmesi olarak adlandırılır.

(1.1) denklemindeki

$$\int_0^t K(x,t,\eta)\Delta u(x,\eta)d\eta$$

terimini değerlendirmek için (3.44) ek bilgisinin varlığını kabul etmemiz gerekir. Diğer bir deyişle genel bir Carleman değerlendirmesi

$\{(x,t) \in \Omega\times[-T,T]: \varphi(x,t) > R^2+\varepsilon\}$

genişletilmiş bölgesinde ispatlanabilirken

$\{(x,t) \in \Omega \times [0,T]: \varphi(x,t) > R^2+\varepsilon\}$

bölgesi için ispatlanamaz.

Ters probleme $t > 0$ için genel bir Carleman değerlendirmesi uygulayabilmek için çözüm $t < 0$ aralığına genişletilmelidir. Böyle bir genişlemede yukarıda verilen integral terimi dolayısıyla farklı araçlara gerek duyulur. Tersine $(0,T)$ aralığında (3.44) şartı altında bir ters problem için u fonksiyonunu $(-T,0)$ aralığına genişletmek gerekmez ve doğrudan (3.45) Carleman değerlendirmesi uygulanabilir.

ispat. İlk olarak yeni bir fonksiyon tanımlayalım:

$$v(x,t) = p(x)u(x,t) + \int_0^t K(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta\,, x \in \Omega, t > 0. \tag{3.46}$$

(3.46) eşitliğinden,

$$\partial_t v(x,t) = p(x)\partial_t u(x,t) + \int_0^t \partial_t K(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta + K(x,t,t)u(x,t),$$

$$\partial_t^2 v(x,t) = p(x)\partial_t^2 u(x,t) + \int_0^t \partial_t^2 K(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta + \partial_t K(x,t,t)u(x,t)$$
$$+\partial_t\big(K(x,t,t)\big)u(x,t) + K(x,t,t)\partial_t u(x,t),$$

$$\nabla v(x,t) = \nabla \mathrm{p(x)u(x,t)} + \mathrm{p(x)}\nabla \mathrm{u(x,t)} + \int_0^t \nabla K(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta + \int_0^t K(x,t,\eta)\nabla u(x,\eta)d\eta,$$

$$\Delta v(x,t) = p(x)\Delta u(x,t) + \int_0^t K(x,t,\eta)\Delta u(x,\eta)d\eta + 2\nabla p(x)\cdot\nabla u(x,t) + u(x,t)\Delta p(x)$$
$$+2\int_0^t \nabla K(x,t,\eta)\nabla u(x,\eta) + \int_0^t u(x,\eta)\,\Delta K(x,t,\eta)d\eta$$

elde edilir. Buradan kolayca görülür ki v fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\partial_t^2 v(x,t) - p(x)\Delta v(x,t) \equiv p(x)F(x,t) + L_1(u)(x,t). \tag{3.47}$$

Burada

$$L_1(u)(x,t) = p(x)L(u)(x,t) + \{\partial_t\big(K(x,t,t)\big) + \partial_t K(x,t,t) - p(x)\Delta p(x)\}u(x,t)$$
$$+K(x,t,t)\partial_t u(x,t) - 2p(x)\nabla p(x).\nabla u(x,t)$$
$$+\int_0^t [\partial_t^2 K(x,t,\eta) - p(x)\Delta K(x,t,\eta)]u(x,\eta)\,d\eta$$
$$-2p(x)\int_0^t \nabla K(x,t,\eta)\cdot\nabla u(x,\eta)d\eta$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$v(x,0) = 0 \text{ veya } \partial_t v(x,0) = 0,\ x \in \Omega(0) \tag{3.48}$$

başlangıç koşulları sağlanır. $(\partial_t K)(x,t,t) = \partial_t K(x,t,\eta)|_{\eta=t}$' dır ve (3.48) şartları kullanılarak Teorem 3.2, (3.47) eşitliğine uygulanır. Sonuç olarak $s \geq s_0$ pozitif sabitleri vardır öyle ki $s > s_0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t} v\right|^2 + s^3 v^2\right) e^{2s\varphi} dxdt \leq C\int_{Q(\varepsilon)} |pF|^2 e^{2s\varphi} dxdt + C\int_{Q(\varepsilon)} |L_1(u)|^2 e^{2s\varphi} dxdt$$
$$+Ce^{Cs}\|u\|^2_{(1),\Sigma} \tag{3.49}$$

elde edilir. Burada $\Sigma = \partial Q(\varepsilon) \setminus (\Omega(\varepsilon) \times \{0\})'$dır. Katsayı ve çekirdek ile ilgili bilgilerimizden

$$|L_1(u)(x,t)| \leq \left| p(x)\left[\left|\sum_{j=1}^{n} q_j(x)\, \partial_{x_j} u(x,t)\right| + |q_{n+1}(x)\partial_t u(x,t)| + |q_0(x)u(x,t)|\right.\right.$$
$$+\left|\sum_{j=1}^{n}\int_0^t H_j(x,t,\eta)\partial_{x_j} u(x,\eta)d\eta\right| + \left|\int_0^t H_{n+1}(x,t,\eta)\partial_t\, u(x,\eta)d\eta\right|$$
$$\left.\left.+\int_0^t H_0(x,t,\eta)u(x,\eta)d\eta\right]\right| + \left|\{\partial_t\big(K(x,t,t)\big) + \partial_t K(x,t,t)\right.$$
$$\left.-p(x)\Delta p(x)\}u(x,t)\right| + |K(x,t,t)\partial_t u(x,t)| + |2p(x)\nabla p(x).\nabla u(x,t)|$$
$$+\left|\int_0^t [\partial_t^2 K(x,t,\eta) - p(x)\Delta K(x,t,\eta)]u(x,\eta)\, d\eta\right|$$
$$+\left|2p(x)\int_0^t \nabla K(x,t,\eta)\nabla u(x,\eta)d\eta\right|$$

$$\leq C|\nabla_x u(x,t)| + C|\,\partial_t u(x,t)| + C|u(x,t)|$$
$$+C\left|\int_0^t \nabla_x u(x,\eta)\, d\eta\right| + C\left|\int_0^t \partial_t u(x,\eta)\, d\eta\right| + C\left|\int_0^t u(x,\eta)\, d\eta\right|$$
$$+C|u(x,t)| + C|\partial_t u(x,t)| + C|\nabla u(x,t)|$$
$$\leq C\big(\left|\nabla_{x,t} u(x,t)\right| + |u(x,t)|\big) + C\int_0^t \big(\left|\nabla_{x,t} u(x,\eta)\right| + |u(x,\eta)|\big)d\eta \tag{3.50}$$

olur. Sonuç olarak (3.49) eşitsizliğinden her $s \geq s_0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t} v\right|^2 + s^3 v^2\right) e^{2s\varphi}\, dxdt$$
$$\leq C\int_{Q(\varepsilon)} |F|^2\, e^{2s\varphi} dxdt + C\int_{Q(\varepsilon)} \left(\left|\nabla_{x,t} u\right|^2 + u^2\right) e^{2s\varphi} dxdt$$

$$+C\int_{Q(\varepsilon)}\left(\int_0^t\left(\left|\nabla_{x,t}u(x,\eta)\right|+|u(x,\eta)|\right)d\eta\right)^2 e^{2s\varphi}dxdt+Ce^{Cs}\|u\|^2_{(1),\Sigma} \tag{3.51}$$

bulunur.

$\overline{\Omega}$ da $p>0$ ve (3.46)'dan

$$u(x,t)=\frac{1}{p(x)}v(x,t)-\int_0^t\frac{K(x,t,\eta)}{p(x)}u(x,\eta)d\eta \tag{3.52}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 3.1'den

$$\int_{Q(\varepsilon)}u^2e^{2s\varphi}\,dxdt\le C\int_{Q(\varepsilon)}v^2e^{2s\varphi}dxdt+\frac{C}{s}\int_{Q(\varepsilon)}u^2\,e^{2s\varphi}dxdt$$

olur. Yeterince büyük $s\ge s_0$ alındığında sağ taraftaki ikinci terim, eşitsizliğin sol tarafındaki terim içine absorbe edilerek

$$\int_{Q(\varepsilon)}u^2e^{2s\varphi}\,dxdt\le C\int_{Q(\varepsilon)}v^2e^{2s\varphi}dxdt \tag{3.53}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.52) eşitliğinden

$$\int_{Q(\varepsilon)}\left|\nabla_{x,t}u\right|^2e^{2s\varphi}\,dxdt\le C\int_{Q(\varepsilon)}\left(s\left|\nabla_{x,t}v\right|^2+v^2\right)e^{2s\varphi}dxdt \tag{3.54}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.51) eşitsizliğinin sol tarafında (3.53) ve (3.54) yerine yazılır. (3.51) eşitsizliğinin sağ tarafındaki üçüncü terime Lemma 3.1 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_{Q(\varepsilon)}\left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2+s^3u^2\right)e^{2s\varphi}dxdt&\le C\int_{Q(\varepsilon)}\left(s\left|\nabla_{x,t}v\right|^2+s^3v^2\right)e^{2s\varphi}dxdt\\&\le C\int_{Q(\varepsilon)}\left(\left|\nabla_{x,t}u\right|^2+u^2\right)e^{2s\varphi}dxdt\\&\quad+C\int_{Q(\varepsilon)}F^2\,e^{2s\varphi}dxdt+Ce^{Cs}\|v\|^2_{(1),\Sigma}\\&\le C\int_{Q(\varepsilon)}\left(\left|\nabla_{x,t}u\right|^2+u^2\right)e^{2s\varphi}dxdt\\&\quad+C\int_{Q(\varepsilon)}F^2\,e^{2s\varphi}dxdt+Ce^{Cs}\|u\|^2_{(1),\Sigma}\end{aligned} \tag{3.55}$$

yazılabilir. Son eşitsizliği elde etmek için (3.46) eşitliği yardımıyla

$$\|v\|^2_{(1),\Sigma}\le C\|u\|^2_{(1),\Sigma} \tag{3.56}$$

olduğu kullanıldı. Tekrar yeterince büyük $s>0$ alınarak (3.55) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim sol taraftaki terim içine absorbe edilir. Böylece Teorem 3.3'ün kanıtı tamamlanmış olur. ■

Şimdi Teorem 3.3'ü aşağıdaki gibi değiştirelim:

Sonuç 3.1 $u \in H^2(Q(\varepsilon))$ fonksiyonu, (1.1) denklemini sağlasın ve $x \in \Omega(\varepsilon)$ için $u(x,0) = 0$ olsun. Bu durumda $s_0 > 0$ ve u fonksiyonundan bağımsız bir $C = C(s_0) > 0$ sabiti vardır, öyle ki her $s \geq s_0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2 + s^3u^2\right) e^{2s\varphi}\, dxdt \leq C \int_{Q(\varepsilon)} |F|^2 e^{2s\varphi} dxdt$$

$$+Ce^{Cs} \int_{\partial Q(\varepsilon)\cap(\Gamma\times(0,\infty))} \left(\left|\nabla_{x,t}u\right|^2 + u^2\right) dS$$

$$+Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)} \|u\|^2_{H^1(Q(\varepsilon))} \tag{3.57}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İlk olarak $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ fonksiyonu $0 \leq \chi \leq 1$ ve

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in Q(3\varepsilon), \\ 0, & (x,t) \in Q(\varepsilon) \setminus Q(2\varepsilon) \end{cases} \tag{3.58}$$

olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca yeni bir $v = \chi u$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $\partial Q(\varepsilon) \cap \{\Gamma \times (0,\infty) \cup (\Omega(\varepsilon) \times \{0\})\}$ sınırı üzerinde $|v| = \left|\nabla_{x,t}v\right| = 0$ ve $\Omega(\varepsilon)$ üzerinde $v = 0$ olur. Teorem 3.3'den, her $s \geq s_0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t}(\chi u)\right|^2 + s^3|\chi u|^2\right) e^{2s\varphi} dxdt$$

$$\leq C \int_{Q(\varepsilon)} |F|^2 e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{Cs} \int_{\partial Q(\varepsilon)\cap(\Gamma\times(0,\infty))} \left(\left|\nabla_{x,t}(\chi u)\right|^2 + |\chi u|^2\right) dS \tag{3.59}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2 + s^3u^2\right) e^{2s\varphi}\, dxdt = \left(\int_{Q(3\varepsilon)} + \int_{Q(\varepsilon)\setminus Q(3\varepsilon)}\right)\left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2 + s^3u^2\right) e^{2s\varphi} dxdt$$

eşitliği ve Q(3ε) da χ=1 ve $(x,t) \in Q(\varepsilon) \setminus Q(3\varepsilon)$ için $\varphi \leq \mathbb{R}^2 + 3\varepsilon$ olduğu kullanılırsa

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2 + s^3u^2\right) e^{2s\varphi} dxdt$$

$$\leq \int_{Q(3\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t}(\chi u)\right|^2 + s^3|\chi u|^2\right) e^{2s\varphi} dxdt + Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)} \|u\|^2_{H^1(Q(\varepsilon))}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2 + s^3u^2\right) e^{2s\varphi} dxdt$$

$$\leq C \int_{Q(\varepsilon)} |F|^2 e^{2s\varphi} dxdt + Ce^{Cs} \int_{\partial Q(\varepsilon)\cap(\Gamma\times(0,\infty))} \left(\left|\nabla_{x,t}(u)\right|^2 + |u|^2\right) dS$$

$$+Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)} \|u\|^2_{H^1(Q(\varepsilon))}$$

elde edilir. Böylece Sonuç 3.1'in ispatı tamamlanmış olur.■

BÖLÜM 4

HİPERBOLİK İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde, (1.2) denklemi, (1.3) başlangıç şartları ve $u|_{\Gamma\times(0,T)}$, $\partial_\nu u|_{\Gamma\times(0,T)}$ ek bilgileri yardımıyla $f \in \Omega(\delta)$ fonksiyonunun bulunması ters probleminin çözümünün kararlılığı araştırılacaktır. Bu kapsamda Caveterra vd. (2006)'da verilen sonuçlar tartışılacaktır.

4.1 KARARLILIK DEĞERLENDİRMELERİ

Yukarıda verilen ters problemin çözümünün kararlılığı Imanuvilov ve Yamamoto (2001b) tarafından verilen yöntem kullanılarak yapılacaktır. Bu yöntem aslında Bukhgeim ve Klibanov (1981)'de geliştirilen yönteme dayanmaktadır.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki $u \in C^3\big([0,T];L^2(\Omega)\big) \cap C^2\big([0,T];H^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T];H^2(\Omega)\big)$ fonksiyonu (1.2) denklemini ve (1.3) koşulunu sağlasın. (1.1) denklemindeki katsayılar için regülerlik koşullarına ek olarak $\partial_t K \in C^2(\bar{\Omega} \times E(T))$ olsun. Ayrıca her $x \in \bar{\Omega}$ için

$$|r(x,0)| > 0 \tag{4.1}$$

ve

$$T > \frac{sup_{x\in\Omega(0)}|x - x_0|}{\sqrt{\beta}} \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda her $\delta > 0$ için $C = C(\Omega,T,p,x_0,\beta,\delta,r,R) > 0$ ve $\kappa = \kappa(\Omega,T,p,x_0,\beta,\delta,r,R) \in (0,1)$ sabitleri vardır, öyle ki

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\Omega(\delta))} \leq {} & C\left(\|u\|_{H^1(Q(0))} + \|\partial_t u\|_{H^1(Q(0))} + \|f\|_{L^2(\Omega(0))}\right)^{1-\kappa} \\ & \times \left(\|u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|\partial_t u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))}\right)^{\kappa} \\ & + C\left(\|u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|\partial_t u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))}\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\left(\|u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|\partial_t u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))}\right)$ gözlem verisidir ve (4.3) eşitsizliği $\left(\|u\|_{H^1(Q(0))} + \|\partial_t u\|_{H^1(Q(0))} + \|f\|_{L^2(\Omega(0))}\right)$ ön sınır şartına bağlı Hölder tipi koşullu kararlılığı göstermektedir.

İspat. Cavaterra, Lorenzi ve Yamamoto (2006)'da yer alan ispatın genel adımları aşağıda verilmiştir:

1) Carleman değerlendirmesinin uygulanabilmesi için söz konusu fonksiyonların $\partial\left(\Omega \times (0,T)\right)$ sınırının bir parçasında sıfır olması gerekir. Bu nedenle (3.58) ile verilen bir kesme fonksiyonu tanımlanmıştır.

2) Eğer u fonksiyonunun t değişkenine göre türevi alınırsa, başlangıç koşulunda ve J'nin sağ tarafında $f = f(x)$ bilinmeyen fonksiyonu ortaya çıkar.

3) $s > 0$ büyük parametresini içeren Carleman değerlendirmesi, t değişkenine göre türevi alınmış denkleme uygulanarak $f(x)$'in ağırlıklı L^2-normuna göre bir değerlendirmesi $\Gamma \times (0,T)$ üzerindeki sınır verilerinin uygun normları yardımıyla elde edilir.

4) Carleman ağırlık fonksiyonu yardımıyla J'deki $|f(x)|^2$ fonksiyonunun katsayısı $s \to \infty$ için sıfır olur. Böylece J fonksiyonundaki f'yi içeren terim absorbe edilebilir.

İlk olarak, (4.2) bağıntısından $x \in \Omega(0)$ için $\beta T^2 > |x - x_0|^2$ yazılabilir. Ayrıca $(x,t) \in Q(\varepsilon)$ olduğundan

$\varphi(x,t) > R^2 + \varepsilon$

ve böylece

$|x - x_0|^2 > |x - x_0|^2 - \beta t^2 > R^2 + \varepsilon$

olur. O halde $x \in \Omega(0)$ ve $|x - x_0|^2 - \beta t^2 > 0$ olacağından $0 < t < T$ bulunur. Dolayısıyla $Q(\varepsilon) \subset \Omega \times (0,T)$ olur.

u fonksiyonu (1.2) denklemini ve (1.3) koşulunu sağlasın. Kolaylık açısından aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:

$$N = \|u\|_{H^1(\Gamma\times(0,T))} + \|\partial_t u\|^2_{H^1(\Gamma\times(0,T))},$$

$$M = \|u\|^2_{H^1(Q(0))} + \|\partial_t u\|^2_{H^1(Q(0))} + \|f\|^2_{L^2(\Omega(0))}. \tag{4.4}$$

Burada N sadece veriye dayanan bir büyüklüktür. M ise u ve f fonksiyonlarının ön sınır koşuluyla ilgilidir. Sonuç 3.1, (1.2) denklemine uygulanırsa

$$\int\limits_{Q(\varepsilon)} \left(s\left|\nabla_{x,t} u\right|^2 + s^3 u^2\right) e^{2s\varphi}\,dxdt \le C \int\limits_{Q(\varepsilon)} |f|^2 e^{2s\varphi}\,dxdt + Ce^{Cs}N + Cs^3 e^{2s\left(R^2+3\varepsilon\right)}M \tag{4.5}$$

elde edilir. Diğer taraftan (1.2) denkleminden,

$$\Delta u(x,t) = -\int_0^t \frac{K(x,t,\eta)}{p(x)} \Delta u(x,\eta) d\eta + \frac{1}{p(x)} \partial_t^2 u(x,t) - \frac{1}{p(x)} L(u)(x,t)$$

$$-\frac{1}{p(x)} r(x,t) f(x), \qquad (x,t) \in Q(\varepsilon)$$

eşitliği bulunur. Bu nedenle Lemma 3.1'den

$$\int_{Q(\varepsilon)} |\Delta u|^2 e^{2s\varphi} dxdt \leq \frac{C}{s} \int_{Q(\varepsilon)} |\Delta u|^2 e^{2s\varphi} dxdt + C \int_{Q(\varepsilon)} |\partial_t^2 u|^2 e^{2s\varphi} dxdt$$

$$+C \int_{Q(\varepsilon)} \left(\left|\nabla_{x,t} u\right|^2 + |u|^2 \right) e^{2s\varphi}\, dxdt + \mathrm{C} \int_{Q(\varepsilon)} f^2\, e^{2s\varphi} dxdt$$

olur. Böylece yeterince büyük $s > 0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)} |\Delta u|^2 e^{2s\varphi} dxdt \leq C \int_{Q(\varepsilon)} |\partial_t^2 u|^2 e^{2s\varphi} dxdt \; + C \int_{Q(\varepsilon)} \left(\left|\nabla_{x,t} u\right|^2 + |u|^2 \right) e^{2s\varphi}\, dxdt$$

$$+\mathrm{C} \int_{Q(\varepsilon)} f^2\, e^{2s\varphi} dxdt \qquad (4.6)$$

yazılabilir. Daha sonra (1.2) denkleminin t'ye göre türevi alınırsa

$$\partial_t^3 u(x,t) - p(x)\Delta \partial_t u(x,t) - \int_0^t (\partial_t K)(x,t,\eta) \Delta u(x,\eta) d\eta - K(x,t,t)\Delta u(x,t)$$

$$-\partial_t L(u)(x,t) = (\partial_t r)(x,t) f(x)$$

denklemi elde edilir ve $w = \partial_t u$ olarak yazılırsa

$$\partial_t^2 w(x,t) - p(x)\Delta w(x,t) = K(x,t,t)\Delta u(x,t) + \int_0^t (\partial_t K)(x,t,\eta)\Delta u(x,\eta) d\eta$$

$$+\partial_t L(u)(x,t) + (\partial_t r)(x,t) f(x), (x,t) \in Q(\varepsilon) \qquad (4.7)$$

ve $w(x,0) = 0, x \in \Omega(\varepsilon)$ bulunur. Ayrıca

$$\partial_t L(u)(x,t) = \sum_{j=1}^n q_j(x)\, \partial_j \partial_t u(x,t) + \; q_{n+1}(x)\, \partial_t^2 u(x,t) + \; q_0(x) \partial_t u(x,t)$$

$$+ H_{n+1}(x,t,t)\partial_t u(x,t) + \sum_{j=1}^n H_j(x,t,t)\partial_j u(x,t) + H_0(x,t,t) u(x,t)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \partial_t H_j(x,t,\eta)\partial_j u(x,\eta)d\eta+\int_0^t \partial_t H_{n+1}(x,t,\eta)\partial_t u(x,\eta)d\eta$$

$$+\int_0^t H_0(x,t,\eta)u(x,\eta)d_\eta, x\in\Omega, 0<t<T$$

olduğundan

$$|\partial_t L(u)(x,t)|\le C\left(\left|\nabla_{x,t}\partial_t u(x,t)\right|+\left|\nabla_{x,t}u(x,t)\right|+|u(x,t)|\right)$$
$$+C\int_0^t\left(\left|\nabla_{x,t}u(x,\eta)\right|+|u(x,\eta)|\right)d\eta,\quad x\in\Omega, 0<t<T \tag{4.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

(1.1) de $L=K=0$ olarak alınıp $w=\partial_t u$ fonksiyonuna ve $\partial_t^2-p(x)\Delta$ operatörüne Sonuç 3.1 uygulanırsa her $s\ge s_0$ için

$$\int_{Q(\varepsilon)}\left(s\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2+s^3|\partial_t u|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\le C\int_{Q(\varepsilon)}|f|^2 e^{2s\varphi}dxdt+C\int_{Q(\varepsilon)}\left(|\Delta u|^2+\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2+\left|\nabla_{x,t}u\right|^2+|u|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$
$$+Ce^{Cs}N+Cs^3e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki $\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2$ terimini içeren integral yeterince büyük $s>0$ için sol tarafa absorbe edilebilir. Böylece

$$\int_{Q(\varepsilon)}\left(s\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2+s^3|\partial_t u|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\le C\int_{Q(\varepsilon)}|f|^2 e^{2s\varphi}dxdt+C\int_{Q(\varepsilon)}(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2+|u|^2)e^{2s\varphi}dxdt$$
$$+Ce^{Cs}N+Cs^3e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.5), (4.6) ve (4.9) eşitsizlikleri birleştirilir ve $s>0$ yeterince büyük seçilirse

$$\int_{Q(\varepsilon)}\left(|\Delta u|^2+s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2+s\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2+s^3|\partial_t u|^2+s^3u^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$\le C\int_{Q(\varepsilon)}|f|^2 e^{2s\varphi}dxdt+Ce^{Cs}N+Cs^3e^{2s\left(R^2+3\varepsilon\right)}M \tag{4.10}$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi $z = \chi(\partial_t u)e^{s\varphi}$ fonksiyonunu tanımlayalım. z fonksiyonunun bu şekilde tanımlanması, $e^{2s\varphi}$ ağırlık fonksiyonuyla f fonksiyonunu içeren başlangıç değerinin değerlendirilmesi için gereklidir. Bu durumda $\partial_t^2 z$ ve Δz ifadelerini hesaplayalım:

$$\partial_t z = \partial_t\chi(\partial_t u)e^{s\varphi} + \chi(\partial_t^2 u)e^{s\varphi} + \chi\partial_t u s e^{s\varphi}\partial_t\varphi,$$

$$\partial_t^2 z = e^{s\varphi}\chi\partial_t^3 u + e^{s\varphi}(\partial_t^2\chi)\partial_t u + s e^{s\varphi}\chi(\partial_t u)[\partial_t^2\varphi + s(\partial_t\varphi)^2] + 2e^{s\varphi}(\partial_t\chi)\partial_t^2 u$$
$$+2s e^{s\varphi}(\partial_t\chi)(\partial_t u)\partial_t\varphi + 2s e^{s\varphi}\chi(\partial_t^2 u)\partial_t\varphi,$$

$$\nabla z = \nabla\chi(\partial_t u)e^{s\varphi} + \chi\nabla(\partial_t u)e^{s\varphi} + \chi(\partial_t u)s\nabla\varphi e^{s\varphi},$$

$$\Delta z = e^{s\varphi}\chi\Delta\partial_t u + e^{s\varphi}(\Delta\chi)\partial_t u + s e^{s\varphi}\chi\partial_t u[\Delta\varphi + s|\nabla\varphi|^2] + 2e^{s\varphi}\nabla\chi\nabla\partial_t u$$
$$+2s e^{s\varphi}\chi\nabla(\partial_t u)\nabla\varphi + 2s e^{s\varphi}(\partial_t u)\nabla\chi\nabla\varphi.$$

Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikler ve (4.7)'den z'nin aşağıdaki denklemin çözümü olduğu görülür:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 z - p\Delta z = {} & [\chi\{\partial_t L(u) + (\partial_t r)f\} + (\partial_t^2\chi)(\partial_t u) + s\chi(\partial_t u)\{\partial_t^2\varphi + s(\partial_t\varphi)^2\} + 2(\partial_t\chi)\partial_t^2 u \\ & + 2s(\partial_t\chi)(\partial_t u)\partial_t\varphi + 2s\chi(\partial_t^2 u)\partial_t\varphi - p(x)(\Delta\chi)\partial_t u \\ & - sp(x)\chi(\partial_t u)\{\Delta\varphi + s|\nabla\varphi|^2\} - 2p(x)\nabla\chi.\nabla\partial_t u - 2p(x)s\chi\nabla(\partial_t u).\nabla\varphi \\ & - 2sp(x)(\partial_t u)\nabla\chi.\nabla\varphi]e^{s\varphi} \\ & + \chi e^{s\varphi}\left\{K(x,t,t)\Delta u(x,t) + \int_0^t (\partial_t K)(x,t,\eta)\Delta u(x,\eta)d\eta\right\} \\ & \equiv J(u). \end{aligned} \tag{4.11}$$

O halde

$$\begin{aligned}|J(u)(x,t)| \le {} & Ce^{s\varphi}\big(s\left|\nabla_{x,t}u(x,t)\right| + |u(x,t)| + s\left|\nabla_{x,t}(\partial_t u)(x,t)\right| + s^2|\partial_t u(x,t)| \\ & + |\Delta u(x,t)|\big) + Ce^{s\varphi}|f(x)| \\ & + Ce^{s\varphi}\int_0^t \big(\nabla_{x,t}u(x,\eta) + |u(x,\eta)| + |\Delta u(x,\eta)|\big)d\eta \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer

$$-\partial_t{}^2 z + p\Delta z = -J(u)$$

eşitliği $2\partial_t z$ ile çarpılır ve $Q(\varepsilon)$ üzerinde integral alınırsa

$$-\int_{Q(\varepsilon)} 2\big(\partial_t{}^2 z\big)\,\partial_t z dxdt + \int_{Q(\varepsilon)} 2(\partial_t z)\,p\Delta z dxdt = -2\int_{Q(\varepsilon)} J(u)(\partial_t z)dxdt \tag{4.13}$$

elde edilir. z'nin tanımından

$|\partial_t z(x,t)| \le Cs|\partial_t u(x,t)|e^{s\varphi} + C\left|\partial_t{}^2 u(x,t)\right|e^{s\varphi}, (x,t) \in Q(\varepsilon)$

ve

$|\nabla z(x,t)| \le Cs|\partial_t u(x,t)|e^{s\varphi} + C\left|\nabla_{x,t}\partial_t u(x,t)\right|e^{s\varphi}, (x,t) \in Q(\varepsilon)$

olduğu görülür. Ayrıca $(\nu, \nu_{n+1}) = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_{n+1})$, $\partial Q(\varepsilon)$ sınırına göre birim dış normal vektörünü göstermektedir. Böylece (1.3) koşulu ve (3.58) kesme fonksiyonu tanımından $\partial Q(\varepsilon) \setminus \left(\Gamma \times (0,T)\right) \setminus (\Omega(\varepsilon) \times \{0\})$ sınırında $z = \left|\nabla_{x,t} z\right| = 0$; $\Omega(\varepsilon) \times \{0\}$ bölgesinde $\nu_{n+1} = 0$ elde edilir. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$- \int_{Q(\varepsilon)} 2\left(\partial_t{}^2 z\right) \partial_t z dxdt + \int_{Q(\varepsilon)} 2(\partial_t z)\, p \Delta z dxdt$$

$$= - \int_{Q(\varepsilon)} \partial_t(|\partial_t z|^2) dxdt - \int_{Q(\varepsilon)} p \partial_t(|\nabla z|^2) dxdt + 2 \int_{\partial Q(\varepsilon)} (\partial_t z) p \nabla z \cdot \nu dS$$

$$-2 \int_{Q(\varepsilon)} \nabla p \cdot (\nabla z)(\partial_t z) dxdt$$

$$= \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_t z(\cdot,0)|^2 dx + 2 \int_{\partial Q(\varepsilon) \cap (\Gamma \times (0,T))} p(\partial_t z) \nabla z \cdot \nu dS$$

$$-2 \int_{Q(\varepsilon)} \nabla p \cdot (\nabla z)(\partial_t z) dxdt$$

$$\ge \int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_t z(\cdot,0)|^2 dx + 2 \int_{\partial Q(\varepsilon) \cap \left(\Gamma \times (0,T)\right)} p(\partial_t z) \nabla z \cdot \nu dS$$

$$-C \int_{Q(\varepsilon)} (|\nabla z|^2 + |\partial_t z|^2) dxdt$$

olarak bulunur. O halde

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_t z(\cdot,0)^2| dx$$

$$\le -2 \int_{Q(\varepsilon)} J(u)(\partial_t z) dxdt + 2 \int_{\partial Q(\varepsilon) \cap (\Gamma \times (0,T))} |p||\partial_t z||\nabla z \cdot \nu| dS$$

$$+ \int_{Q(\varepsilon)} \left(s^2|\partial_t u|^2 + \left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2\right) e^{2s\varphi} dxdt \qquad (4.14)$$

olduğu görülür. (4.12) yardımıyla

$$\left|-2\int\limits_{Q(\varepsilon)} J(u)(\partial_t z)dxdt\right|$$

$$\leq C\int\limits_{Q(\varepsilon)}\left(s\left|\nabla_{x,t}u\right|+|u|+s\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|+s^2|\partial_t u|+|\Delta u|\right)(|\partial_t^2 u|+s|\partial_t u|)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$+C\int\limits_{Q(\varepsilon)}|f|(|\partial_t^2 u|+s|\partial_t u|)\,e^{2s\varphi}dxdt$$

$$+\int\limits_{Q(\varepsilon)} e^{2s\varphi}(|\partial_t^2 u|+s|\partial_t u|)\left(\int\limits_0^t\left(\left|\nabla_{x,t}u(x,\eta)\right|+|u(x,\eta)|+|\Delta u(x,\eta)|\right)d\eta\right)dxdt$$

elde edilir. Diğer taraftan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$s^2\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right||\partial_t u|\leq s\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2+s^3|\partial_t u|^2$$

ve

$$|f|(|\partial_t^2 u|+s|\partial_t u|)\leq|f|^2+2|\partial_t^2 u|^2+2s^2|\partial_t u|^2$$

bulunur. Lemma 3.1 kullanılarak

$$\left|-2\int\limits_{Q(\varepsilon)} J(u)(\partial_t z)dxdt\right|$$

$$\leq C\int\limits_{Q(\varepsilon)}\left(|u|^2+|\Delta u|^2+s\left|\nabla_{x,t}u\right|^2+s\left|\nabla_{x,t}\partial_t u\right|^2+s^3|\partial_t u|^2\right)e^{2s\varphi}dxdt$$

$$+C\int\limits_{Q(\varepsilon)}|f|^2e^{2s\varphi}\,dxdt$$

değerlendirmesi yapılır. Böylece (4.10) eşitsizliğinden

$$\left|-2\int\limits_{Q(\varepsilon)} J(u)(\partial_t z)dxdt\right|\leq C\int\limits_{Q(\varepsilon)} f^2e^{2s\varphi}dxdt+Ce^{Cs}N+Cs^3e^{2s\left(R^2+3\varepsilon\right)}M \tag{4.15}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak N'nin (4.4) tanımı dikkate alınırsa (4.13)- (4.15)'den

$$\int\limits_{\Omega(\varepsilon)}|\partial_t z(x,0)|^2dx$$

$$\leq C\int\limits_{\Gamma\times(0,T)}(|\partial_t z|^2+|\nabla z|^2)dS+C\int\limits_{Q(\varepsilon)} f^2e^{2s\varphi}\,dxdt+Ce^{Cs}N+Cs^3e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M$$

$$\leq C \int\limits_{Q(\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi}\, dxdt + Ce^{Cs}N + Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M \qquad (4.16)$$

eşitsizliği bulunur. (1.2) denklemi ve (1.3) koşulundan $x \in \Omega(\varepsilon)$ için

$(\partial_t z)(x,0) = \chi(x,0)(\partial_t^2 u)(x,0)e^{s\varphi(x,0)} = \chi(x,0)r(x,0)f(x)e^{s\varphi(x,0)}$

yazılabilir. Böylece (4.1) eşitsizliği, (3.58) tanımı ve (4.16) eşitsizliğinden

$$\int\limits_{\Omega(3\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq C \int\limits_{\Omega(\varepsilon)} |\partial_t z(x,0)|^2\, dx$$

$$\leq C \int\limits_{Q(\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi}\, dxdt + Ce^{Cs}N + Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M \qquad (4.17)$$

olduğu görülür.

Şimdi aşağıdaki eşitsizlikleri ele alalım:

$$\int\limits_{Q(3\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi} dxdt = \int\limits_{\Omega(3\varepsilon)} |f(x)|^2\, e^{2s\varphi(x,0)} \left(\int\limits_0^{(|x-x_0|^2-(R^2+3\varepsilon))^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{-1}{2}}} e^{2s(\varphi(x,t)-\varphi(x,0))} dt \right) dx$$

$$\leq \int\limits_{\Omega(3\varepsilon)} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-2s\beta t^2} dt \right) dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\beta}} \frac{1}{\sqrt{s}} \int\limits_{\Omega(3\varepsilon)} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx$$

ve

$$\int_{Q(\varepsilon)\setminus Q(3\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi} dxdt \leq CMe^{2s(R^2+3\varepsilon)}.$$

Buradan

$$\int_{Q(\varepsilon)} |f(x)|^2 e^{2s\varphi} dxdt = \left(\int_{Q(3\varepsilon)} + \int_{Q(\varepsilon)\setminus Q(3\varepsilon)} \right) |f(x)|^2 e^{2s\varphi} dxdt$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{s}} \int_{\Omega(3\varepsilon)} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx + CMe^{2s(R^2+3\varepsilon)}$$

yazılabilir. Bu nedenle (4.17)’den

$$\int_{\Omega(3\varepsilon)} f^2 e^{2s(x,0)} dx \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \int_{\Omega(3\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx + Ce^{Cs}N + Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M, \qquad s \geq s_0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece yeterince büyük s için

$$\int_{\Omega(3\varepsilon)} f^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq Ce^{Cs}N + Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M, \qquad s \geq s_0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$e^{2s(R^2+4\varepsilon)}\|f\|^2_{L^2(\Omega(4\varepsilon))} \leq \int\limits_{\Omega(4\varepsilon)} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx \leq \int\limits_{\Omega(3\varepsilon)} |f(x)|^2 e^{2s\varphi(x,0)} dx$$

$$\leq Ce^{Cs}N + Cs^3 e^{2s(R^2+3\varepsilon)}M, \qquad s \geq s_0$$

elde edilir. Daha sonra yukarıdaki eşitliğin her tarafı $e^{2s(R^2+4\varepsilon)}$ ile bölünürse yeterince büyük bir $C > 0$ için

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega(4\varepsilon))} \leq Ce^{Cs}N + Ce^{-2\varepsilon s}M \leq Ce^{Cs}N + Ce^{-\varepsilon s}M \tag{4.18}$$

elde edilir. Bu durumda $C > 0, Ce^{Cs_0}$ ile yer değiştirirse her $s > 0$ için (4.18) sağlanır. Değerlendirmenin tamamlanması için iki farklı durum ele alınacaktır.

1.Durum. $M \leq N$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega(4\varepsilon))} \leq 2Ce^{Cs}N$$

bulunur.

2. Durum. $M > N$ olsun. $s > 0$ seçilirse

$$Ce^{Cs}N = Ce^{-\varepsilon s}M$$

eşitliğinden

$$e^{Cs+\varepsilon s} = \frac{M}{N},$$

$$\log e^{s(C+\varepsilon)} = \log\left(\frac{M}{N}\right),$$

$$s(C+\varepsilon) = \log\left(\frac{M}{N}\right),$$

$$s = \frac{1}{C+\varepsilon}\log\left(\frac{M}{N}\right) > 0$$

bulunur. (4.18) eşitsizliğinde s yerine yazılırsa

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega(4\varepsilon))} \leq Ce^{\frac{C}{C+\varepsilon}\log\left(\frac{M}{N}\right)}N + Ce^{\frac{-\varepsilon}{C+\varepsilon}\log\left(\frac{M}{N}\right)}M$$

$$= C\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{C}{C+\varepsilon}} N + C\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{-\varepsilon}{C+\varepsilon}} M$$

$$= CM^{\frac{C}{C+\varepsilon}}N^{1-\frac{C}{C+\varepsilon}} + CM^{1-\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}}N^{\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}}$$

$$= CM^{\frac{C}{C+\varepsilon}} N^{\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}} + CM^{\frac{C}{C+\varepsilon}} N^{\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}}$$

$$= 2CM^{\frac{C}{C+\varepsilon}} N^{\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}}$$

$$\leq CM^{\frac{C}{C+\varepsilon}} N^{\frac{\varepsilon}{C+\varepsilon}}$$

olarak bulunur. Burada $\kappa = \frac{\varepsilon}{C+\varepsilon} \in (0,1)$ dır.

Böylece 1. ve 2. Durum birleştirilerek

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega(4\varepsilon))} \leq CN + CN^{\kappa} M^{1-\kappa}$$

elde edilir. Son olarak, $\delta = 4\varepsilon$ olarak seçilirse Teorem 4.1'in ispatı tamamlanmış olur. ■

4.2 SONUÇ

İlk olarak 1939 yılında Torcio Carleman tarafından kullanılan ve daha sonra kısmi türevli denklemler teorisinde önemli bir uygulama alanı bulan Carleman eşitsizlikleri, Klibanov ve Bukhgeim (1981) ile ters problemler teorisinde teklik ve kararlılık araştırmalarında önemli bir araç haline gelmiştir.

Bu tez çalışmasında Klibanov ve Timonov (2004), Cavaterra, Lorenzi ve Yamamoto (2006)'da elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. İlk olarak hiperbolik operatörler için Klibanov ve Timonov (2004)'de verilen ve Teorem 2.2.4 olarak isimlendirilen bir noktasal Carleman değerlendirmesi incelenmiştir. Daha sonra Cavaterra, Lorenzi ve Yamamoto (2006)'nın hiperbolik integro-diferensiyel denklem için bir ters kaynak probleminin çözümünün kararlılığı üzerine yapmış oldukları çalışmalar tartışılmıştır. Bu çalışmalarda temel araç Carleman değerlendirmeleridir. Ayrıca, bu yöntemin farklı tipten integro-diferensiyel denklemler için ters problemler üzerinde uygulanabilir olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

Adams R A and Fournier J J F (2003) *Sobolev Spaces*. 2nd edition, ISBN:0-12-044143-8, Elsevier, Academic Press, Amsterdam, 305 pp.

Amirov A (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. 1st edition, ISBN: 90-6764-352-1, VSP, Utrecht, 201 pp.

Bellassoued M and Yamamoto M (2017) *Carleman estimates and applications to inverse problems for hyperbolic systems*. ISBN: 978-4-431-56598-7, Springer, Japan, 260 pp.

Bukhgeim A L (2000) *Introduction to the Theory of Inverse Problems*. 2nd edition, ISBN: 978-1-4419-8473-9, VSP, Utrecht, 307 pp.

Bukhgeim A L and Klibanov M V (1981) Global uniqueness of class of multidimensional inverse problems. *Soviet Mathematics Doklady*, 24: 244-247.

Cavaterra C (1998) An inverse problem for a viscoelastic Timoshenko beam model. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 17 (1): 67-87.

Cavaterra C and Grasselli M (1997) On an inverse problem for a model of linear viscoelastic Kirchhoff plate. *Journal of Integral Equations and Applications*, 9 (3): 179-218.

Cavaterra C and Lorenzi A (1995) An identification problem for the Maxwell equations in a non homogeneous dispersive medium. *Differential and Integral Equations*, 8 (5): 1167-1190.

Cavaterra C, Lorenzi A and Yamamoto M (2006) A stability result via Carleman estimates for an inverse source problem related to a hyperbolic integro-differential equation. *Computational and Applied Mathematics*, 25 (2-3): 229-250.

Çağlıyan M ve Çelebi O (2013) *Kısmi Diferensiyel Denklemler*. 3. Baskı, Dora Yayınları, Bursa, 276 s.

Daymaz T (2018) Lineer İntegral Denklemler İçin Bazı Çözüm Yöntemleri. *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul, 93 s.

Duchateau P and Zachmann D W (1986) *Schaum's outline of Theory and Problems of. Partial differential equations.* 1st edition, ISBN: 9780070178977, McGraw-Hill, New York, 241 pp.

Evans L C (1997) *Partial Differential Equations*. 1st edition, American Mathematical Society, Berkeley, 662 pp.

Hörmander L (1963) *Linear Partial Differential Operators*. Springer, Berlin, 285 pp.

Imanuvilov O Yu and Yamamoto M (2001a) Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 26 (7-8): 1409-1425.

Imanuvilov O Yu and M Yamamoto M (2001b) Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations. *Inverse Problems*, 17 (4): 717-728.

Imanuvilov O Yu and Yamamoto M (2005) Carleman estimates for the non-stationary Lame system and the application to an inverse problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 11 (1): 1-56.

Isakov V (1990) *Inverse Source Problems*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 193 pp.

Isakov V (1993) Carleman type estimates in an anisotropic case and applications. *Journal of Differential Equations*, 105 (2): 217-238.

Isakov V (2005) *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 286 pp.

Janno J and Lorenzi A (2006) A parabolic integrodifferential identification problem in a barrelled smooth domain. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 25 (1): 103-130.

Janno J and Wolfersdorf L V (1998) Inverse problems for identification of memory kernels in thermo-and poro-viscoelasticity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21 (16): 1495-1517.

Kabanikhin S I and Lorenzi A (1999) *Identification Problems of Wave Phenomena*. VSP, Utrecht.

Khaĭdarov A (1987) Carleman estimates and inverse problems for second order hyperbolic equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 58 (1): 267-277.

Klibanov M V (1992) Inverse problems and Carleman estimates. *Inverse Problems*, 8 (4): 575-596.

Klibanov M V (2013) Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21 (4): 477-560.

Klibanov M V and Timonov A (2004) *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications*. VSP, Utrecht, 279 pp.

Klibanov M V and Yamamoto M (2006) Lipschitz stability of an inverse problem for an acoustic equation. *Applicable Analysis*, 85 (5): 515-538.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Kreyszig E (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York, 704 pp.

Kubo M (2000) Uniqueness in inverse hyperbolic problems-Carleman estimate for boundary value problems. *Journal of Mathematics of Kyoto University, 40* (3): 451-473.

Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishat'skiĭ S P (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. 1 st edition. ISBN:0-82180896-6, American Mathematical Society, Providence, 291 pp.

Lorenzi A (1999) A multidimensional identification problem related to a hyperbolic integro-differential equation. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 18 (2): 407-435.

Lorenzi A and Messina F (2003) Identification problems for Maxwell integro-differential equations related to media with cylindric symmetries. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 11 (4): 411-437.

Lorenzi A and Messina F (2004) Gevrey type results in the identification of lower order coefficients in linear hyperbolic integrodifferential equations. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems,* 12 (3): 297-336.

Lorenzi A and Romanov V G (2006) Stability estimates for an inverse problem related to viscoelastic media. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 14 (1): 57-82.

Lorenzi A and Yakhno V G (1997) An identification problem related to an isotropic stratified viscoelastic cylindrical body. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems,* 5 (1): 29-54.

Mikhailov V P (1978) *Partial Differential Equations*. Revised from the 1976 Russian edition, Mir Publishers, Moskow, 396 pp.

Narkiewicz W (2000) The Development of Prime Number Theory. Springer, 448 pp.

Pişkin E (2017) *Sobolev Uzayları*. 1. Baskı, Seçkin Yayınları, 147 s.

Vladimirov V S (1971) *Equations of Mathematical Physics*. MIR, Moscow, 436 pp.

Wolfersdorf L V (1993) On identification of memeory kernels in linear viscoelasticity. *Mathematische Nachrichten*, *161* (1): 203-217.

Yamamoto M (1999) Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 78 (1): 65-98.

ÖZGEÇMİŞ

Derya DOĞAN, 1993 yılında Tunceli'de doğdu. İlkokulu ve ortaokulu İstanbul İhsan Kurşunoğlu İlköğretim Okulu'nda, liseyi İstanbul Mehmet Rauf Lisesi'nde tamamladı. 2011 yılında kazandığı Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2015 yılında mezun oldu. 2016 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Fetih mah. Somuncubaba sok. No:65\3 Ataşehir\İSTANBUL

Tel: (+90) 507 837 85 62
E-posta: dryadogann@gmail.com