ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER VE FONKSİYONEL DENKLEMLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEVZEM MISIRLI

TEMMUZ 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER VE FONKSİYONEL DENKLEMLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nevzem MISIRLI

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Temmuz 2019

KABUL:

Nevzem MISIRLI tarafından hazırlanan "Diferensiyel Denklemler için Bazı Ters Problemler ve Fonksiyonel Denklemler" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 10/07/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa YILDIZ ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mukaddes ÖKTEN TURACI ....
Karabük Üniversitesi, Yenice Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../20....

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Nevzem MISIRLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER VE FONKSİYONEL DENKLEMLER

Nevzem MISIRLI

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN
Temmuz 2019, 45 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde; bilim ve mühendislikte ortaya çıkan birçok karmaşık durumu tanımlamakta kullanılan lineer olmayan evrim denklem sistemleri için bazı ters problemler incelenmiştir. Üçüncü bölümde; bir parametreli fonksiyonel denklem için lineer olmayan bir problem ele alınmıştır. Son bölümde ise; lineer fonksiyonel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı metotlar tartışılmış ve ayrıca diferensiyel-fark denklemleri için ters problemlerle ilgili olarak uygulamalara yer verilmiştir. Bu çalışma kapsamında, Anikonov vd. (2016), Anikonov (2012) ve Anikonov (2017) makaleleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Evrim denklemleri, Ters problem, Fonksiyonel denklem.

Bilim Kodu: 403.02.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOME INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL EQUATIONS

Nevzem MISIRLI

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. İsmet GÖLGELEYEN
July 2019, 45 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter of this thesis, some basic definitions and theorems which are necessary in the subsequent chapters are given. In the second chapter, we consider some inverse problems for systems of nonlinear evolution equations that are used to describe many complex phenomena arising in science and engineering. In the third chapter, we consider a nonlinear problem for the functional equation with a parameter. In the last chapter, we discuss some methods for constructing solutions to linear functional equations and present their applications to inverse problems for a differential-difference equations. In this context, the papers by Anikonov et al. (2016), Anikonov (2012) and Anikonov (2017) are examined.

Keywords: Evolution equations, Inverse problem, Functional equation.

Science Code: 403.02.00

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamın her aşamasında yardımlarını eksik etmeyen danışman hocam; Sayın Dr. Öğr. Üyesi İsmet Gölgeleyen' e ve tüm yaşamım boyunca yanımda olan, maddi manevi hiçbir yardımını esirgemeyen aileme en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bir bölge
$\mathbb{N}$	: $\{1,2,3,\dots\}$
$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$	: $\{0,1,2,\dots\}$
$\mathbb{R}^n$	: *n* boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{C}^n$	: *n* boyutlu kompleks uzay
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı *k*. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$\lambda^{[k]}(x)$	: *k*. mertebeden iterasyon
$L^1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\frac{\partial w_j}{\partial t}$	: w_j fonksiyonunun *t* değişkenine göre kısmi türevi

BÖLÜM 1

GENEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1 (Banach Uzayı) *Bir normlu vektör uzayı, normdan indirgenen metrik ile tam ise bir Banach uzayı olarak adlandırılır [32].*

Tanım 1.2 (Fonksiyonel Denklem) *Bir fonksiyonun belli bir noktadaki değerini başka bir noktadaki değeri ile ilişkilendiren denklemlere fonksiyonel denklemler denir [7].*

Tanım 1.3 (Diferensiyel Denklem) *Bir bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini içeren denkleme diferensiyel denklem denir [20].*
Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece bir bağımsız değişkene bağlı ise diferensiyel denklem bir adi diferensiyel denklemdir. Eğer bilinmeyen fonksiyon iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı ise diferensiyel denklem bir kısmi diferensiyel denklemdir [20].

Tanım 1.4 (Fark Denklemi) $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ *bağımsız değişken ve* x *bilinmeyen fonksiyon olmak üzere*

$$F\left(n, x\left(n\right), x\left(n+1\right), ..., x\left(n+k\right)\right) = 0$$

eşitliğine bir fark denklemi denir [12].

Tanım 1.5 (Diferensiyel-Fark Denklemi) *Değişkeni, bilinmeyen fonksiyonu, onun türevlerini ve artımlarını içeren denkleme diferensiyel-fark denklemi denir. Örneğin,* k *bir sayı,* $y = y\left(x\right)$ *bilinmeyen fonksiyon,* $\Delta y = y\left(x+h\right) - y\left(x\right)$ *olmak üzere* $y' = k\Delta y$ *bir diferensiyel-fark denklemidir [21].*

Tanım 1.6 (Evrim Denklemi) *Bağımsız değişkenlerinden biri* t *zaman olan kısmi diferensiyel denklemlere evrim denklemleri denir. Evrim denklemleri* $K\left[u\right]$; u *ve* u *nun* x *değişkenine göre türevlerinin tanımlı bir fonksiyonu olmak üzere:*

$$u_t = K\left[u\right] \tag{1.1}$$

formundadır. Eğer $K[u]$; u'ya göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer evrim denklemleri ve u'ya göre lineer değil ise, bu tip denklemlere de lineer olmayan evrim denklemleri denir [4].

Örnek 1.1 (Ters Problem) *$x_1, ..., x_n$ sıfırları (kökleri) verildiğinde n-yinci dereceden bir p polinomunu bulunuz. Bu problem aşağıdaki direkt problemin tersidir:*
Verilen bir p polinomunun $x_1, ..., x_n$ köklerini bulunuz. Bu örnekte ters problemi çözmek daha kolaydır. Bu çözüm c bir keyfi sabit olmak üzere $p(x) = c(x - x_1)...(x - x_n)$ dir [24].

Örnek 1.2 (Ters Problem) *Verilen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ noktalarında $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ değerlerini alan n-yinci dereceden bir p polinomunu bulunuz. Bu problem $x_1, ..., x_n$ noktalarında verilen bir polinomun hesaplanması probleminin tersidir. Ters problem Lagrange interpolasyon problemidir [24].*

Örnek 1.3 (Ters Problem) *Reel, simetrik $n \times n$ tipindeki bir A matrisi ve $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reel sayıları verildiğinde, $A + D$ matrisi $\lambda_1, ..., \lambda_n$ özdeğerlerine sahip olacak şekilde diagonal bir D matrisini bulunuz. Bu problem, verilen $A + D$ matrisinin özdeğerlerinin hesaplanması probleminin tersidir [24].*

Örnek 1.4 (Ters Problem) *Aşağıdaki ters problem zeka testlerinde kullanılmaktadır:*
Bir dizinin ilk birkaç $a_1, ..., a_k$ terimleri verildiğinde, dizinin genel kuralını bulunuz; yani tüm n için a_n yi bulunuz. Genellikle bulunan kuralı göstermek için sadece bir sonraki iki veya üç terim sorulur. Bu durumda direkt problem genel kuralı verildiğinde (a_n) dizisinin değerlendirilmesidir. Bu tür ters problemlerin genellikle pek çok çözüme sahip olduğu açıktır ve bu sebepten dolayı onların zeka testlerinin kullanılması bir eleştiri konusudur [24].

Tanım 1.7 (Tam Fonksiyon) *Kompleks z değişkenli bir f fonksiyonu, eğer z_0 ın bir komşuluğundaki her bir noktada bir türeve sahipse bir z_0 noktasında analitiktir (holomorf) denir. Tüm sonlu düzlemin her noktasında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir [14].*

Teorem 1.1 (Paley-Wiener) *Kabul edelim ki, A ve C pozitif sabitler ve f bir tam fonksiyon, öyle ki $\forall z$ için*

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$$

ve ayrıca

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{1.2}$$

dur. Bu durumda $F \in L^2(-A, A)$ *vardır, öyle ki* $\forall z$ *için*

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) \, e^{itz} dt$$

eşitliği sağlanır [34].

Tanım 1.8 (Fourier Dönüşümü) *Bir* f *fonksiyonu her sonlu* $[-L, \ L]$ *aralığında parçalı sürekli ve* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt$ *integrali yakınsak olsun. O takdirde,*

$$F\{f\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{-iwx} dt = F(w)$$

ifadesine f *nin Fourier dönüşümü adı verilir [5].*

Teorem 1.2 (Sabit Nokta) $f : [a, b] \to [a, b]$ *fonksiyonu sürekli ise* $f(c) = c$ *olacak şekilde bir* $c \in [a, b]$ *vardır [15].*

Tanım 1.9 (Daralma Dönüşümü) X, *bir* N *normlu uzayının bir alt kümesi olsun. Her* $x, y \in X$ *için* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha \, \|x - y\| \, ,$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\alpha \in [0, 1)$ *sayısı varsa, bu durumda* T *ye bir daralma dönüşümü denir [19].*

Teorem 1.3 (Daralma Dönüşümü) X *bir Banach uzayının kapalı alt kümesi olmak üzere, eğer* $T : X \to X$ *dönüşümü bir daralma dönüşümü ise* $Tx = x$ *olacak şekilde bir tek* $x \in X$ *vardır [19].*

BÖLÜM 2

LİNEER OLMAYAN BİR EVRİM DENKLEMLERİ SİSTEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLER

Lineer olmayan evrim denklem sistemleri bilim ve mühendislikte ortaya çıkan birçok karmaşık durumu tanımlamakta kullanılan matematiksel modellerdir. Son yıllarda, bu teoride önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Ancak, bu çalışmaların birçoğunda direkt problemler üzerine odaklanılmıştır ve ters problemlerle ilgili sınırlı sayıda çalışma yapılmıştır. Kinetik ve diğer evrim denklemleri için bazı ters problemler [6] da ele alınmıştır.

Bu bölümde, lineer olmayan diferensiyel ve diferensiyel-fark evrim denklem sistemleri için iki ters problem çalışılmıştır. İlk olarak, verilen veriler kullanılarak problemler fonksiyonel denklem sistemlerine indirgenmiş ve daha sonra [25] te verilen araçlar yardımıyla çözüm elde edilmiştir.

Bu bölümde, ilk olarak bir

$$\Omega = \{(x,t) : (x,t) \in D \times [a,b]\}$$

bölgesinde

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} = A_j w_j(x,t) + f_j(x) B_j w_j(x,t) + g_j(w_1, w_2, ..., w_n), \; j = 1, 2, ..., n \tag{2.1}$$

lineer olmayan evrim denklem sistemi ele alınmıştır. (2.1) sistemi daha açık olarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_1}{\partial t} &= A_1 w_1(x,t) + f_1(x) B_1 w_1(x,t) + g_1(w_1, w_2, ..., w_n), \\
\frac{\partial w_2}{\partial t} &= A_2 w_2(x,t) + f_2(x) B_2 w_2(x,t) + g_2(w_1, w_2, ..., w_n), \\
&\vdots \\
\frac{\partial w_n}{\partial t} &= A_n w_n(x,t) + f_n(x) B_n w_n(x,t) + g_n(w_1, w_2, ..., w_n)
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ olmak üzere $D = \{x : |x| < \tau\}$ açık bir küme; a ve b sabit katsayılar; A_j, B_j operatörleri yeterince diferensiyellenebilir ve sadece x değişkenine bağlı sonlu diferensiyel operatörler olsun.

[9] da (2.1) sistemi için bazı ters problemlerin çözümleri, fonksiyonel denklemler teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Geçmiş zaman verileri kullanılarak yapılan bazı klasik çalışmalar şunlardır: Kepler Kanunu'nu kullanarak Isaac Newton yerçekimi potansiyelini; Faraday ve Ampere'in kanunlarını kullanarak James Clerk Maxwell elektromanyetik alan için diferensiyel denklemleri elde etmiştir. Daha yakın zamanda, dünya ekonomisi için dinamik sistem teorisinin kurucusu olarak bilinen Jay Wright Forrester, 1900 ve 1970 yılları arasındaki deneysel verileri kullanmıştır.

Problem 2.1 *(2.1) sisteminden aşağıdaki verileri sağlayan $f_j(x)$, $g_j(z)$ sürekli fonksiyonlarının bulunması problemini ele alalım:*

$$\begin{aligned} w_j(x,t)|_{t=a} &= \varphi_{ja}(x), \ \left.\frac{\partial w_j}{\partial t}(x,t)\right|_{t=a} = \psi_{ja}(x), \\ w_j(x,t)|_{t=b} &= \varphi_{jb}(x), \ \left.\frac{\partial w_j}{\partial t}(x,t)\right|_{t=b} = \psi_{jb}(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Burada $j = 1, 2, ..., n$; $x \in D \subset \mathbb{R}^n$; $z \in \mathbb{R}^n$ dir. $\varphi_a(x)$, $\varphi_b(x)$, $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ vektör fonksiyonları aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır:

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) &= (\varphi_{1a}(x), \varphi_{2a}(x), ..., \varphi_{na}(x)), \ \varphi_b(x) = (\varphi_{1b}(x), \varphi_{2b}(x), ..., \varphi_{nb}(x)), \\ \psi_a(x) &= (\psi_{1a}(x), \psi_{2a}(x), ..., \psi_{na}(x)), \ \psi_b(x) = (\psi_{1b}(x), \psi_{2b}(x), ..., \psi_{nb}(x)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kabul edelim ki, $\varphi_a(x)$, $\varphi_b(x) \in D$, $x \in D$ ve $y = \varphi_a(x)$ dönüşümü $x = \varphi_a^{-1}(y)$ ters dönüşümüne sahip olsun. $\lambda(x)$ vektör fonksiyonu ve $R_j(x)$, $S_j(x)$ fonksiyonelleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \varphi_a^{-1}(\varphi_b(x)), \ R_j(x) = \frac{B_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)}}{B_j\varphi_{jb}(x)}, \\ S_j(x) &= \frac{A_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} - A_j\varphi_{jb}(x) + \psi_{jb} - \psi_{ja}(\lambda(x))}{B_j\varphi_{jb}}. \end{aligned}$$

Burada $j = 1, 2, ..., n$; $B_j\varphi_{jb}(x) \neq 0$ dır.

(2.1) deki denklemlerin $w_j(x,t)$, $j = 1, 2, ..., n$ çözümlerinin var olduğu ve (2.2) verilerinin $\lambda(x)$ vektör fonksiyonu ve $R_j(x)$, $S_j(x)$ fonksiyonları D üzerinde en azından sürekli olacak şekilde verildiği kabul edilmektedir. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ uzayının n boyutu (2.1) sistemindeki denklem sayısına eşit olarak alınmaktadır. Aşağıda Anikonov vd. (2016) da elde edilen bir sonuç verilmiştir.

Teorem 2.1 *Eğer*

$$|R_j(x)| \leq q_j,\ \ |S_j(x)| \leq a_j,\ j = 1, 2, ..., n,\ x \in D$$

olacak şekilde $q_j \in (0,1)$ *ve* $a_j > 0$ *sabitleri varsa, bu durumda Problem 2.1 in çözümü aşağıdaki formüller ile verilir:*

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{k-1} R_j\left(\lambda^{[s]}(x)\right) S_j\left(\lambda^{[s]}(x)\right), \tag{2.4}$$

$$g_j(z) = \psi_{ja}\left(\varphi_a^{-1}(z)\right) - A_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\varphi_a^{-1}(z)} - f_j\left(\varphi_a^{-1}(z)\right) B_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\varphi_a^{-1}(z)}. \tag{2.5}$$

Burada $\lambda^{[k]}(x) = \underbrace{\lambda(\lambda(...(\lambda(x))...))}_{k}$, $\lambda^{[k+1]}(x) = \lambda(\lambda^{[k]}(x))$, $k = 0, 1, 2, ...,$ *ve* $\lambda^{[0]}(x) = x$ *dır.*

İspat. (2.1) de $t = a$ ve $t = b$ alınırsa (2.2) ve (2.3) ten

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial w_j}{\partial t}\right|_{t=a} &= A_j w_j|_{t=a} + f_j(x)\, B_j w_j|_{t=a} + g_w|_{t=a}, \\ \left.\frac{\partial w_j}{\partial t}\right|_{t=b} &= A_j w_j|_{t=b} + f_j(x)\, B_j w_j|_{t=b} + g_w|_{t=b} \end{aligned}$$

ve böylece

$$\psi_{ja}(x) = A_j\varphi_{ja}(x) + f_j(x)B_j\varphi_{ja}(x) + g_j(\varphi_a(x)), \tag{2.6}$$

$$\psi_{jb}(x) = A_j\varphi_{jb}(x) + f_j(x)B_j\varphi_{jb}(x) + g_j(\varphi_b(x)),\ j = 1, 2, ..., n \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.6) da x yerine $\lambda(x) = \varphi_a^{-1}(\varphi_b(x))$ alırsak

$$\psi_{ja}(\lambda(x)) = A_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} + f_j(\lambda(x))\, B_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} + g_j(\varphi_b(x)) \tag{2.8}$$

bulunur. (2.8) den (2.7) çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \psi_{ja}(\lambda(x)) - \psi_{jb}(x) &= A_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} + f_j(\lambda(x))\, B_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} \\ &\quad - A_j\varphi_{jb}(x) - f_j(x)B_j\varphi_{jb}(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlik $g_j(\varphi_b(x))$ fonksiyonlarını içermez. O halde

$$f_j(x) = \underbrace{\frac{\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)}}{\varphi_{jb}(x)}}_{R_j(x)} f_j(\lambda(x)) + \underbrace{\frac{A_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} - A_j\varphi_{jb}(x) - \psi_{ja}(\lambda(x)) + \psi_{jb}(x)}{B_j\varphi_{jb}(x)}}_{S_j(x)}$$

olmak üzere

$$f_j(x) = R_j(x)f_j(\lambda(x)) + S_j(x) \tag{2.9}$$

formunda $f_j(x)$ için (2.9) fonksiyonel denklemi elde edilir. Fonksiyonel denklemlerin teori ve uygulamasına ilişkin sayısal örnekler [25, 26] da bulunabilir. (2.9) fonksiyonel denkleminde $f_j(x)$ i bulmak için [26] da aşağıdaki formül verilmiştir:

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{s=0}^{k-1} R_j(\lambda^{[s]}(x))S_j(\lambda^{[k]}(x)).$$

Burada şu vurgulanmalıdır ki, eğer $R_j(x)$, $S_j(x)$ ve $\lambda(x)$ sürekli fonksiyonlar ise, bu durumda $f_j(x)$ de süreklidir [26]. Diğer taraftan, eğer $y = \varphi_a^{-1}(z)$ ise, o zaman (2.6) dan $g_j(z)$ fonksiyonu aşağıdaki formül ile hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} g_j(z) &= \psi_{ja}(\varphi_a^{-1}(z)) - A_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\varphi_a^{-1}(z)} \\ &\quad - f_j(\varphi_a^{-1}(z))\ \ B_j\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\varphi_a^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

Böylece Teorem 2.1 ispatlanmış olur. ■

Uyarı 2.1 *(2.4) formülü*

$$f_j(x) = S_j(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{s=0}^{k-1} R_j(\lambda^{[s]}(x))S_j(\lambda^{[k]}(x)) \tag{2.10}$$

şeklinde yazılabilir. Aslında, (2.9) fonksiyonel denkleminden yararlanılarak aşağıdaki bağıntılar sağlanır. Bunun için (2.9) eşitliğinde x yerine $\lambda(x)$ alınıp bu eşitlik $R_j(x)$ ile k defa çarpılırsa;

$$R_j(x)f_j(\lambda(x)) = R_j(x)R_j(\lambda(x))f_j(\lambda^{[2]}(x)) + R_j(x)S_j(\lambda(x)),$$

$$\vdots$$

$$\prod_{s=0}^{k-1} R_j(\lambda^{[s]}(x))f_j\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = \prod_{s=0}^{k-1} R_j(\lambda^{[s]}(x))R_j(\lambda^{[k]}(x))f_j(\lambda^{[k+1]}(x))$$

$$+\prod_{s=0}^{k-1} R_j\left(\lambda^{[s]}(x)\right)S_j\left(\lambda^{[k]}(x)\right), \ \ k \geq 1, \tag{2.11}$$

$$\vdots$$

elde edilir. (2.9) ve (2.11) toplanarak (2.10) formülüne ulaşılır. Ayrıca (2.10) serisi yakınsaktır; çünkü (2.10) formülü ve Teorem 2.1 in hipotezi yardımıyla

$$a_j + q_j a_j + q_j^2 a_j + ... = a_j(1 + q_j + q_j^2 + ...) = a_j \frac{1}{1 - q_j}$$

majorant serisi elde edilir.

Örnek 2.1 *(2.1) de* $n = 1$, $a = 0$, $b = T$, $j = 1$, $A_1(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $B_1(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$, $w_j(x,t) = w(x,t)$, $f_j(x) = f(x)$, $g_j(z) = g(z)$ *alınırsa*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g\left(w\left(x,t\right)\right), \; 0 \le x \le \tau, 0 \le t \le T \qquad (2.12)$$

denklemi ve

$$\begin{aligned} w(x,t)|_{t=0} &= \varphi_0(x), \;\; \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\bigg|_{t=0} = \psi_0(x), \\ w(x,t)|_{t=T} &= \varphi_T(x), \;\; \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\bigg|_{t=T} = \psi_T(x) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

verileri elde edilir. Burada $0 \le |\varphi_0(x)| \le \tau$, $0 \le |\varphi_T(x)| \le \tau$ *dur.*

Bu durumda ilgili ters problem, (2.12)-(2.13) bağıntılarından $f(x)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemi olarak ortaya çıkar.
O zaman (2.12)-(2.13) ten $f(x)$ ve $g(z)$ fonksiyonları için

$$\psi_0(x) = \varphi_0''(x) + f(x)(\varphi_0'(x))^2 + g(\varphi_0(x)), \qquad (2.14)$$

$$\psi_T(x) = \varphi_T''(x) + f(x)(\varphi_T'(x))^2 + g(\varphi_T(x)) \qquad (2.15)$$

denklem sistemi elde edilir. (2.14) te x yerine $\lambda(x) = \varphi_0^{-1}(\varphi_T(x))$ yazılır ve (2.15) dikkate alınırsa;

$$\psi_T(x) - \psi_0(\lambda(x)) = \varphi_T^n(x) + f(x)(\varphi_T'(x))^2 - f(\lambda(x))(\varphi_0'(y))^2\Big|_{y=\lambda(x)} - \varphi_0''(y)\Big|_{y=\lambda(x)}$$

bulunur. Son eşitlik

$$f(x) = R(x)f(\lambda(x)) + S(x) \qquad (2.16)$$

şeklinde $f(x)$ için bir fonksiyonel denklemdir, burada

$$R(x) = \frac{(\varphi_0'(y))^2\big|_{y=\lambda(x)}}{\left(\varphi_T'(x)\right)^2}, \; S(x) = \frac{\varphi_0''(y)\big|_{y=\lambda(x)} - \varphi_T''(x) + \psi_T(x) - \psi_0(\lambda(x))}{\left(\varphi_T'(x)\right)^2}$$

dir. Ayrıca dikkat edilirse $R(x)$ ve $S(x)$ fonksiyonları sadece verilere bağlıdır.

O halde, eğer $|R(x)| \leq q \leq 1$, $|S(x)| \leq \alpha$, $0 \leq x \leq \tau$ ise, o zaman aşağıdaki formüller elde edilir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{k-1} R(\lambda^{[s]}(x)) S\left(\lambda^{[k]}(x)\right), \tag{2.17}$$

$$g(z) = \psi_0\left(\varphi_0^{-1}(z)\right) - \varphi_0'(y)\Big|_{y=\varphi_0^{-1}(z)} - f\left(\varphi_0^{-1}(z)\right)\left(\varphi_0'(y)\right)^2\Big|_{y=\varphi_0^{-1}(z)}. \tag{2.18}$$

(2.17) de $S(x) = 0$ ise, bu durumda $f(x) = 0$ olur ve Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov denklemi bulunmuş olur. Bu denklem biyoloji, kimya, genetik gibi pek çok alanda reaksiyon-difüzyon olaylarının modellenmesinde önemli rol oynar.

Uyarı 2.2 *(2.16) da $c > 1$ sabiti için $S(x) = 0$ ve $R(x) = c$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Schröder denklemi olarak adlandırılan ve en önemli iteratif fonksiyonel denklemlerinden biri olan*

$$sf(x) = f(\lambda(x)), \ s = \frac{1}{c} \tag{2.19}$$

denklemi elde edilir [26].

$R(x) = 1$ durumu için aşağıdaki örnek verilebilir:

Örnek 2.2 *$k > 0$, $s > 0$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\frac{(\partial w)^2}{\partial x} + g(w), \ 0 \leq x \leq \tau, \ 0 \leq t \leq 1, \\
w\big|_{t=0} &= \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}, \ \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{1+x^2}, \\
w\big|_{t=1} &= \frac{1}{\pi}\arctan(\gamma + x) + \frac{1}{2}, \ \ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=1} = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{1+(\gamma+x)^2}
\end{aligned}$$

bağıntılarından $f(x)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının bulunması ters problemini ele alalım. Burada

$$\lambda(x) = \gamma + x, \ R(x) = 1, \ S(x) = 0$$

olsun. Bu durumda $f(x) = f(x + \gamma)$ fonksiyonel denklemi elde edilir ve bu denklem çok sayıda çözüme sahiptir. Çünkü

$$g(z) = \frac{\gamma}{\pi}\sin^2 \pi z\left(1 - \frac{k}{\gamma}\sin 2\pi z\right) - f(\varphi_0^{-1}(z))\, B_{\varphi_0}(y)\big|_{y=\varphi_0^{-1}(z)}$$

dir. Eğer $f(x) = 0$ ise, o zaman $g(z) = \frac{\gamma}{\pi}\sin^2 \pi z(1 - \frac{k}{\gamma}\sin 2\pi z)$ olur. Yani, problemin çözümlerinden biri

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{\pi}\arctan(\gamma t + x) + \frac{1}{2},\ f(x) = 0, \\ g(z) &= \frac{\gamma}{\pi}\sin^2 \pi z(1 - \frac{k}{\gamma}\sin 2\pi z) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Lemma 2.2 *E bir Banach uzayı ve $x \in E$, $\lambda(x) \in E$, $\alpha > 0$ sabit sayı olmak üzere $\lambda(x)$ fonksiyonu*

$$\lambda(x) = \frac{x}{(1 + ||x||^{\alpha})^{1/\alpha}}$$

özel formunda verilirse, bu durumda

$$\lambda^{[k]}(x) = \frac{x}{(1 + k\,||x||^{\alpha})^{1/\alpha}},\ k \geq 1$$

dir.

İspat. Lemma 2.2 tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanabilir; bunun için

$$\lambda^{[k]}(x) = \frac{x}{(1 + k\,||x||^{\alpha})^{1/\alpha}}$$

olduğu kabul edilerek

$$\lambda^{[k+1]}(x) = \frac{x}{(1 + (k+1)\,||x||^{\alpha})^{1/\alpha}}$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir. Buna göre

$$\begin{aligned} \lambda^{[k+1]}(x) &= \lambda\left(\lambda^{[k]}(x)\right) \\ &= \frac{\lambda^{[k]}(x)}{\left(1 + \left|\left|\lambda^{[k]}(x)\right|\right|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}} \\ &= \frac{\frac{x}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{1/\alpha}}}{\left(1 + \left(\frac{\|x\|}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}} \\ &= \frac{\frac{x}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{1/\alpha}}}{\frac{(1+(k+1)\|x\|^{\alpha})^{1/\alpha}}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{1/\alpha}}} \\ &= \frac{x}{(1 + (k+1)\,\|x\|^{\alpha})^{1/\alpha}} \end{aligned}$$

yazılabilir. ■

Sonuç 2.1 *Eğer*

$$\varphi_T(x) = \varphi_0 \left(\frac{x}{(1+|x|^{\alpha})^{1/\alpha}} \right)$$

bağıntısı sağlanırsa

$$\lambda(x) = \varphi_0^{-1}(\varphi_T(x)) = \frac{x}{(1+|x|^{\alpha})^{1/\alpha}}$$

olur ve (2.17) çözümü

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{k-1} R \left(\frac{x}{(1+s\,|x|^{\alpha})^{1/\alpha}} \right) S \left(\frac{x}{(1+k\,|x|^{\alpha})^{1/\alpha}} \right)$$

şeklinde yazılabilir.

2.1 DİFERENSİYEL-FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere

$$w_j\left(x, t+h\right) = A_j w_j(x,t) + f_j\left(x\right) B_j w_j\left(x, t\right) + g_j\left(w_1\left(x, t\right), ..., w_n(x,t)\right) \tag{2.20}$$

diferensiyel-fark denklem sistemini

$$\begin{aligned} w_j|_{t=a} &= \varphi_{ja}(x),\ w_j\left(x, a+h\right) = \psi_{ja}(x), \\ w_j|_{t=b} &= \varphi_{jb}(x),\ w_j\left(x, b+h\right) = \psi_{jb}(x) \end{aligned} \tag{2.21}$$

koşulları ile birlikte ele alalım. Burada h bir sabit, A_j, B_j sadece x değişkenine bağlı operatörler, $|x| \leq \tau$, $a \leq t \leq b$ ve $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ dir.
(2.20) sistemi değişik sosyal ve ekonomik problemlerin modellenmesinde önemlidir. Özel olarak, organizmaların popülasyonlarının değişiminde, kontrol sistemlerinde ve ekonomik çalışmalarda ortaya çıkar [11, 31].

Problem 2.2 *(2.20)-(2.21) sisteminden $f_j(x)$ ve $g_j(w)$ sürekli fonksiyonlarının bulunması problemini ele alalım.*

Problem 2.2 için [9] da elde edilen sonuç aşağıda sunulmuştur.

Teorem 2.3 *Eğer* $q_j \in (0,1)$ *ve* $\alpha_j > 0$ *sabitleri*

$|R_j(x)| \le \alpha_j, \ \ |S_j(x)| \le \alpha_j, \ j = 1, 2, ..., n, \ x \in D$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde mevcutsa, bu durumda (2.20)-(2.21) ters probleminin çözümü aşağıdaki eşitliklerle verilir:

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{k-1} R_j\left(\lambda^{[s]}(x)\right) S_j\left(\lambda^{[k]}(x)\right), \\ g_j(z) &= \psi_{ja}\left(\varphi_a^{-1}(z)\right) - A_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\varphi_a^{-1}(z)} - f_j\left(\varphi_a^{-1}(z)\right) B_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\varphi_a^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

Teorem 2.2 nin ispatı, Teorem 2.1 in ispatına benzer biçimde yapılır.

İspat. (2.20) de $t = a$ ve $t = b$ alınırsa (2.21) den

$$\begin{aligned} w_j(x, a+h) &= A_j w_j|_{t=a} + f_j(x) B_j w_j|_{t=a} + g_j|_{t=a}, \\ w_j(x, b+h) &= A_j w_j|_{t=b} + f_j(x) B_j w_j|_{t=b} + g_j|_{t=b} \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\psi_{ja}(x) = A_j \varphi_{ja}(x) + f_j(x) B_j \varphi_{ja}(x) + g_j(\varphi_a(x)), \tag{2.22}$$

$$\psi_{jb}(x) = A_j \varphi_{jb}(x) + f_j(x) B_j \varphi_{jb}(x) + g_j(\varphi_b(x)), \ j = 1, 2, ..., n \tag{2.23}$$

elde edilir. (2.22) de x yerine $\lambda(x) = \varphi_a^{-1}(\varphi_b(x))$ alınırsa

$$\psi_{ja}(\lambda(x)) = A_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} + f_j(\lambda(x)) B_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} + g_j(\varphi_b(x)) \tag{2.24}$$

bulunur. (2.24) ten (2.23) çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} \psi_{ja}(\lambda(x)) - \psi_{jb}(x) &= A_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} + f_j(\lambda(x)) B_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} \\ &\quad - A_j \varphi_{jb}(x) - f_j(x) B_j \varphi_{jb}(x) \end{aligned} \tag{2.25}$$

yazılabilir. O halde

$$f_j(x) = \underbrace{\frac{\varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)}}{\varphi_{jb}(x)}}_{R_j(x)} f_j(\lambda(x)) + \underbrace{\frac{A_j \varphi_{ja}(y)\big|_{y=\lambda(x)} - A_j \varphi_{jb}(x) - \psi_{ja}(\lambda(x)) + \psi_{jb}(x)}{B_j \varphi_{jb}(x)}}_{S_j(x)}$$

olmak üzere

$$f_j(x) = R_j(x) f_j(\lambda(x)) + S_j(x) \tag{2.26}$$

fonksiyonel denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü yukarıda belirtildiği şekilde [26] da verilmiştir. Böylece Teorem 2.2 ispatlanmış olur. ■

Görüldüğü gibi (2.1) ve (2.20) denklemleri için ele alınan ters problemler çalışılırken iki önemli konu ortaya çıkmaktadır; Birincisi, ele alınan ters problemlerle ilgili fonksiyonel denklemin incelenmesi ve ikincisi ise $|x| \leq \tau$, $|y| \leq \tau$ bölgesinde $x = \varphi_a^{-1}(y)$ ters dönüşümünün bulunmasıdır.

Örnek 2.3 *Bu örnekte*

$$w(x,t+h) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + g(w), \ 0 \leq x \leq \tau, \ 0 \leq t \leq T \tag{2.27}$$

diferensiyel-fark denkleminden

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \varphi_0(x), \ w(x,h) = \psi_0(x), \\ w(x,T) &= \varphi_T(x), \ w(x,T+h) = \psi_T(x) \end{aligned} \tag{2.28}$$

koşulları altında $f(x)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının belirlenmesi problemini ele alalım. Burada $0 \leq |\varphi_0(x)| \leq \tau$, $0 \leq |\varphi_T(x)| \leq \tau$ *dur.*

Örnek 2.3, Örnek 2.1 de verilen (2.16) fonksiyonel denklemiyle aynı olan bir fonksiyonel denkleme indirgenebilir. Böylece çözüm (2.17)-(2.18) yardımıyla elde edilebilir.

BÖLÜM 3

BİR PARAMETRELİ BİR FONKSİYONEL DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bir fonksiyonun belli bir noktadaki değerini başka bir noktadaki değeri ile ilişkilendiren denklemlere fonksiyonel denklemler denir [7]. Matematiksel analiz, geometri, cebir problemlerinin birçoğu fonksiyonel denklemlerin ortaya çıkmasına sebep olur. Özellikle, somut bir problemdeki simetri koşulu, bu problem için fonksiyonel denklemi oluşturur.

Fonksiyonel denklemlerin klasik örnekleri, Cauchy, D' Alambert, Abel, Schröder denklemleri, Euler gama fonksiyonu, Riemann zeta fonksiyonu için denklemler olarak verilebilir. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi [1, 26] da bulunabilir.

Bu bölümde p değişken parametreli

$$pw(x,p) = w(\lambda(x), p) + a(x,p)$$

fonksiyonel denklemlerinden $w(x,p)$, $\lambda(x)$ fonksiyonlarının aynı anda araştırıldığı lineer olmayan bir problem ele alınmıştır. Özel sınıflara ait olan $w(x,p)$ ve $\lambda(x)$ fonksiyonları için çözüm formülleri verilmiştir.

Problem 3.1 *E, x elemanlarından oluşan $\|x\|$ normu ile bir Banach uzayı,*

$$E_A = \{x \in E : \|x\| \leq A\}$$

kümesi E de bir yuvar ve $A > 0$ sabit olsun. $\lambda(x)$, E_A dan kendi üzerine sürekli bir dönüşüm, $w(x,p)$ ve $a(x,p)$, p, $|p| < 1$ sayısal parametresine bağlı E den E ye sürekli dönüşümler olsun. Aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$pw(x,p) = w(\lambda(x), p) + a(x,p), \quad \|x\| \leq A, \tag{3.1}$$

burada $p \in \mathbb{R}$, $|p| < 1$ dir. p sabiti için $a(x,p)$ ve $\lambda(x)$ verildiğinde, (3.1) den $w(x,p)$ yi bulma problemi, fonksiyonel denklemlerin lineer teorisinin bir problemidir.

Bu konu ile ilgili olarak [26] dan iki örnek verelim.

[26, s. 122] de, $0 \leq x \leq A$, $w(x)$ reel fonksiyonu ile ilgili

$$pw(x) = w(\lambda w x)$$

Schröder'in fonksiyonel denklemi incelenmiştir. p sayısı ve $\lambda(x)$ reel fonksiyonu sabittir ve

$$0 < p < 1,\ 0 < \lambda(x) < x,\ \lambda'(x) \neq 0,\ x \neq 0,\ \lambda'(0) = p,\ \lambda \in C^2([0, A])$$

bağıntılarını sağlar. Bu durumda Schröder denkleminin tek diferensiyellenebilir çözümü $w(x)$, $w'(0) = 1$, monotondur ve

$$w(x) = \lim_{k \to \infty} p^{-k} \lambda^{[k]}(x)$$

formülü ile verilir. Burada $\lambda^{[0]}(x) = x$ olmak üzere

$$\lambda^{[k]}(x) = \underbrace{\lambda(\lambda(...(\lambda(x))))}_{k}$$

dır. Banach uzaylarında daha genel bir fonksiyonel denklem olarak

$$w(x) = g(x)\, w(\lambda(x)) + a(x)$$

alınabilir. Bu fonksiyonel denklemin $|g(x)| < q < 1$, $\|a(x)\| \leq L$ koşulları altında $w(x)$ çözümü aşağıdaki gibidir:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} g\left(\lambda^{[j]}(x)\right) a\left(\lambda^{[k]}(x)\right)$$

[26, s. 149].

Problem 3.2 *Bu bölümde, değişken bir p parametreli ve p den bağımsız bilinmeyen bir $\lambda(x)$ fonksiyonuna sahip (3.1) fonksiyonel denklemleri için farklı bir problem ele alınacaktır. $w(x,p)$ ve $a(x,p)$ fonksiyonlarının p ye göre analitik olduğunu varsayalım. Daha açık olarak $|p| < 1$, $\|x\| \leq A$ bölgesinde*

$$pw(x,p) = w(\lambda(x), p) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, p^k \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlayan $w(x,p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k(x)\, p^k$ ve $\lambda(x)$ fonksiyonlarının bulunması problemini ele alalım. Burada $A > 0$ olmak üzere $a_k(x)$ sabit sürekli fonksiyonlar ve $|p| < 1$, $\|x\| \leq A$ için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, p^k$ serisi yakınsaktır. Başka bir deyişle, ele alınan problem, fonksiyonel denklem için bir ters problemdir.

(3.1) deki değişken parametre aşağıdaki nedenlerden dolayı ortaya çıkmaktadır. Örneğin, p kontrol parametresidir ve değişir. Veya, değişken parametre, $\lambda(x)$ in bağımsız olduğu değişkenlere göre olan diferensiyel denklemlerdeki Fourier dönüşümünün bir sonucu olarak ortaya çıkar.

Özel olarak, $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayındaki

$$-i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u(\lambda(x),t) + R(x,t),\ i^2=-1,\ \frac{\partial \lambda}{\partial t}=0,\ t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n$$

evrim denkleminin her iki tarafında t ye göre Fourier dönüşümü alınırsa değişken parametreli (3.1) tipindeki bir denklem elde edilir. Bu durumda sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar $u(x,t)$, $R(x,t)$, t ye göre sonlu olacaksa, o zaman onların Fourier dönüşümleri $w(x,p)$, $a(x,p)$, Paley-Wiener Teoreminden p ye göre tam fonksiyonlar olur.

h, küçük bir parametre ve $u(x,t)$ da x e göre sonsuz diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\lambda(x) = x + h\mu(x)$ ise verilen seride h ye göre $u(x+h\mu(x),t)$ kullanılırsa,

$$-i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x,t)(\mu(x)h)^\alpha + R(x,t),\ m\geq 1$$

diferensiyellenebilir yaklaşık bağıntıları elde edilir. Bu nedenle, ele alınan problem, diferensiyel denklemler için ters problemler ile bağlantılıdır.

İlk olarak bilinen $a_k(x)$, $k=0,1,2,...$ fonksiyonları yardımıyla $w(x,p)$, $\lambda(x)$ fonksiyonlarının belirlenmesi problemi için formal sonuçları verelim, burada

$$a(x,p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)p^k$$

olarak ele alınmaktadır.

Lemma 3.1 *$\lambda(x)$ fonksiyonu,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0,\ \lambda^{[0]}(x) = x \in E_A \tag{3.3}$$

denkleminin bir kökü olsun. Burada

$$\lambda^{[k]}(x) = \underbrace{\lambda(\lambda(...(\lambda(x))))}_{k}$$

şeklindedir. $w(x,p)$ fonksiyonu

$$w(x,p) = \sum_{k,s=0}^{\infty} a_{k+1+s}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)p^k \tag{3.4}$$

formal serisi ile verilsin. Bu durumda $\lambda(x)$ ve $w(x,p)$

$$pw(x,p) = w(\lambda(x), p) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) p^k$$

fonksiyonel denklemini sağlar.

İspat. Aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
pw(x,p) &= \sum_{k,s=0}^{\infty} a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right) p^{k+1} \\
&= \sum_{k=0,s=1}^{\infty} a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right) p^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(x) p^{k+1} \\
&\quad + \sum_{s=0}^{\infty} a_s\left(\lambda^{[s]}(x)\right) \\
&= \sum_{k=0,s=1}^{\infty} a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right) p^{k+1} + \sum_{s=1}^{\infty} a_s\left(\lambda^{[s]}(x)\right) + a(x,p) \\
&= \sum_{k,s=0}^{\infty} a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s+1]}(x)\right) p^{k} + a(x,p) \\
&= w(\lambda(x), p) + a(x,p).
\end{aligned}$$

Lemma 3.1 den görüldüğü gibi asıl problem, (3.3) denkleminin çözümlerini ve (3.4) serisinin yakınsaklığını bulmaktır. ■

Eğer $z = a_1(x)$ fonksiyonu $x = b(z)$ ters fonksiyonuna sahipse, o zaman (3.3) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\lambda = B\lambda, \; B\lambda(x) = b\left(-\left(a_0(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right)\right).$$

(3.3) denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı ile ilgili problemlerin, B operatörünün sabit noktalarının teorisi ile bağlantılı olduğu açıktır.

Şimdi E uzayının $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Reel öklid uzayı olduğu durumda Sabit Nokta Teoremini kullanarak Lemma 3.1 in formal ispatının yeter koşulunu formüle edeceğiz. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $a_k(x)$, $k = 0, 1, 2, ...$ vektör fonksiyonlarının bilindiğini kabul edelim:

1) $z = a_1(x)$ dönüşümü $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ye gider; $b(0) = 0$ olacak şekilde $x = b(z)$ tek bir ters dönüşüme sahiptir ve $|b(z) - b(y)| \leq L|z - y|$, $|y| \leq A$, $|z| \leq A$, $L \in (0,1]$ sabit bir sayıdır.

2) $a_k(x)$ vektör fonksiyonları, $a_k(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, ...$ olacak şekilde $|x| \leq A$ bölgesinde

$$|a_k(x) - a_k(y)| \leq L_k |x - y|, \quad |x| \leq A, \quad |y| \leq A$$

bağıntılarını sağlar, burada $L_0 > 0$, $L_1 > 0$, $L_k \geq 0$, $k = 2, 3, ...$, sabit sayılardır, öyle ki

$$L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k < 1, \quad \frac{1}{1-M} L \sum_{k=2}^{\infty} L_k = q, \quad 0 \leq q < 1$$

dir. Burada M, $\psi(t) = 0$ denkleminin köküdür, ve

$$\psi(t) = L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k t^k - t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

konveks fonksiyonu, $(0, 1)$ aralığında tek bir $t = M$ reel köküne sahiptir, çünkü 2). koşul ve $\psi(0) = L_0 > 0$ ile

$$\psi(1) = L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k - 1 < 0$$

dir.

Q, $f(0) = 0$, olan $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ olacak şekilde $|x| \leq A$, $\|f_1 - f_2\| = \sup_{|x| \leq A} |f_1(x) - f_2(x)|$ uzaklığına sahip tüm sürekli $f \in \mathbb{R}^n$ vektör fonksiyonlarının bir tam metrik uzayı olsun. Burada M,

$$L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k M^k = M$$

denkleminin köküdür ve A, L_0, L, L_k sabitleri 1) ve 2) koşullarını sağlar.

Teorem 3.2 *1) ve 2) koşulları altında,* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0$ *denklemi tek bir* $\lambda \in Q$ *çözümüne sahiptir, öyle ki* $|p| < p_0$, $|x| \leq A$, $p_0 < 1$ *için*

$$w(x, p) = \sum_{k,s=0}^{\infty} a_{k+1+s}\left(\lambda^{[s]}(x)\right) p^k$$

serisi düzgün olarak yakınsaktır ve $\lambda(x)$ *ve* $w(x, p)$ *fonksiyonları*

$$pw(x, p) = w(\lambda(x), p) + a(x, p), \quad |x| \leq A, \quad |p| < p_0$$

fonksiyonel denklemini sağlar.

İspat. $\lambda \in Q$ için

$$\left|\lambda^{[k]}(x)\right| \leq M^k |x| \leq M^k A, \quad \left|a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right| \leq M^k L_k A$$

eşitsizlikleri dikkate alınarak, $a_0(x) + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)$ serisinin düzgün olarak yakınsak olduğunu ve tüm terimleri sürekli olduğu için x e bağlı sürekli vektör fonksiyon olduğunu görüyoruz. $b(z)$ sürekli olduğu için $b\left(-\left(a_0(x) + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right)\right)$ vektör fonksiyonu da süreklidir. Şimdi $\lambda(x)$ ile ilgili

$$a_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0$$

denklemini göz önüne alalım ve aşağıdaki gibi yeniden yazalım:

$$\lambda(x) = b\left(-\left(a_0(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right)\right) \equiv B\lambda(x).$$

B operatörünün, Q kümesini kendisine dönüştürdüğünü ve q sabiti ile bir daralma operatörü olduğunu gösterelim. Öncelikle dikkat edelim ki, eğer her $L_k = 0$, $k = 2, 3, ...$ ise, o zaman $\lambda(x) = b(-a_0(x))$ dır. Gerçekten, eğer böyle değilse, bu durumda

$$\left|a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) - a_k\left(\lambda^{[k]}(y)\right)\right| \leq L_k M^k |x-y|$$

eşitsizliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|B\lambda(x)| - |B\lambda(y)| &= \left| b\left(-\left(a_0(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \lambda^{[k]}(x)\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - b\left(-\left(a_0(y) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \lambda^{[k]}(y)\right)\right)\right| \\
&\leq \left[|a_0(x) - a_0(y)| + \sum_{k=2}^{\infty}\left|a_k\lambda^{[k]}(x) - a_k\lambda^{[k]}(y)\right|\right] \\
&\leq L\left[L_0|x-y| + \sum_{k=2}^{\infty} L_k\left|\lambda^{[k]}(x) - \lambda^{[k]}(y)\right|\right] \\
&\leq L\left[L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k M^k\right]|x-y| \\
&= L\left[L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k M^k - M\right]|x-y| + LM|x-y| \\
&= LM|x-y| \leq M|x-y|
\end{aligned}$$

elde edilir; yani

$$|B\lambda(x)| - |B\lambda(y)| \leq M|x-y|, \ B(0) = 0$$

ve böylece $B\lambda \in Q$ dır. Geriye B operatörünün $q = \frac{1}{1-M} L \sum_{k=2}^{\infty} L_k$ sabiti ile daralma operatörü olduğunu göstermek kalıyor. Gerçekten,

$$|B\lambda_1(x) - B\lambda_2(x)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} LL_k \left| \lambda_1^{[k]}(x) - \lambda_2^{[k]}(x) \right|$$

dir.

$$\begin{aligned} \lambda_1(\lambda_1(x) - \lambda_2(\lambda_2(x))) &\leq |\lambda_1(\lambda_1(x) - \lambda_1(\lambda_2(x)))| \\ &\quad + |\lambda_1(\lambda_2(x) - \lambda_2(\lambda_2(x)))| \\ &\leq M|\lambda_1(x) - \lambda_2(x)| + \|\lambda_1 - \lambda_2\| \\ &\leq (M+1)\|\lambda_1 - \lambda_2\| \end{aligned}$$

olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler ifade edilir:

$$\begin{aligned} \left| \lambda_1^{[k]}(x) - \lambda_2^{[k]}(x) \right| &\leq \left| \lambda_1 \left(\lambda_1^{[k-1]}(x) - \lambda_1 \left(\lambda_2^{[k-1]}(x) \right) \right) \right| \\ &\quad + \left| \lambda_1 \left(\lambda_2^{[k-1]}(x) - \lambda_2 \left(\lambda_2^{[k-1]}(x) \right) \right) \right| \\ &\leq M \left| \lambda_1^{[k-1]}(x) - \lambda_2^{[k-1]}(x) \right| + \|\lambda_1 - \lambda_2\| \\ &\leq (MM_{k-1} + 1)\|\lambda_1 - \lambda_2\| = M_k \|\lambda_1 - \lambda_2\|. \end{aligned}$$

Burada $M_2 = M + 1$, $M_k = MM_{k-1} + 1$, $k = 3, 4, ...$ sayıları reküirans bağıntıları ile tek olarak tanımlıdır. Bu durumda

$$M_k = \frac{1 - M^k}{1 - M} = 1 + M + ... + M^{k-1} < \frac{1}{1 - M}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} |B\lambda_1(x) - B\lambda_2(x)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} LL_k \|\lambda_1 - \lambda_2\| \\ &\leq \frac{1}{1-M} \sum_{k=2}^{\infty} LL_k \|\lambda_1 - \lambda_2\| \\ &= q\|\lambda_1 - \lambda_2\| \end{aligned}$$

yazılabilir. x keyfi olduğu için

$$\|B\lambda_1(x) - B\lambda_2(x)\| \leq q\|\lambda_1 - \lambda_2\|$$

bir daralma tahmini elde edilir. Böylece (3.3) denkleminin tek bir $\lambda \in Q$ çözümüne sahip olduğu ispatlanmış olur. ■

Şimdi (3.4) serisinin $|x| \leq A$, $|p| < p_0 < 1$ için düzgün yakınsak olduğunu gösterelim, burada p_0 keyfidir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)\, p_0^k,\ \ w_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{k+1+s}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)$$

ifadelerini ele alalım. Böylece

$$\begin{aligned} |w_k(x)| &\leq \sum_{s=0}^{\infty}\left|a_{k+1+s}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)\right| \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} L_{k+1+s} M^s |x| \leq \frac{A}{1-M}\sum_{s=0}^{\infty} L_{k+1+s} = \widetilde{q}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

bulunur. $|w_k(x)| \leq \widetilde{q}_k$ tahmini $|x| \leq A$, $|p| < p_0 < 1$ için (3.4) serisinin düzgün yakınsak olduğunu garanti eder. Lemma 3.1 ile $w(x,p)$ ve $\lambda(x)$ fonksiyonları (3.2) eşitliğini sağlar. Sonuç olarak, eğer teoremlerin şartları sağlanmazsa, denklemin çözümünün tek olmaması örneğini göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ nin n boyutu 1 e eşit ve belirli bir $m \geq 2$ için $a_{m+j}(x) = 0$, $j = 1, ...$ olsun. Bu durumda

$$a_0(x) + \sum_{k=1}^{m} a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0 \tag{3.5}$$

denklemi sonlu bir mertebeye sahiptir. Ayrıca $b_0 = e^{-a_0(x)}$, $b_k = e^{-a_k(x)}$, $k = 1, 2, ..., m$ olsun. (3.5) denklemi

$$b_0(x) = \prod_{k=1}^{m} b_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) \tag{3.6}$$

formunu sağlar. $x > 0$ için $b_0 = \beta_0 x^{\alpha_0}$, $b_k = \beta_k x^{\alpha_k}$ olsun, burada $\beta_0 \neq 0$, $\beta \neq 0$, α_0, α_k belirli reel sayılardır. b_k için (3.6) denkleminin $\lambda(x)$ çözümünü $\lambda(x) = \lambda_0 x^z$ şeklinde arayacağız. Eğer z,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k z^k - \alpha_0 = 0 \tag{3.7}$$

denkleminin bir kökü ise ve

$$\lambda_0 = \left(\frac{\beta_0}{\beta^m}\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left(1+z+...+z^{k-1}\right)}},\ \ \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left(1+z+...+z^{k-1}\right) \neq 0$$

ise, o zaman (3.6) denkleminin çözümü $\lambda(x) = \lambda_0 x^z$ fonksiyonudur.

Gerçekten, $\lambda_0 x^z$ ifadesini, $b_0(x) = \beta_0 x^{\alpha_0}$, $b_k(x) = \beta x^{\alpha_k}$ için (3.6) denkleminde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \beta_0 x^{\alpha_0} &= \beta^m \prod_{k=1}^{m} \lambda_0^{\alpha_k\left(1+z+...+z^{k-1}\right)} x^{\alpha_k z^k} \\ &= \beta^m \lambda_0^{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left(1+z+...+z^{k-1}\right)} x^{\sum_{k=1}^{m} a_k z^k} \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada

$$\alpha_0 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k z^k,\ \beta_0 = \beta^m \lambda_0^{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \left(1+z+\ldots+z^{k-1}\right)}$$

için (3.8) eşitlikleri doğrudur.

(3.7) denklemi birçok reel köke sahip olabileceğinden, (3.6) denklemi de birçok çözüme sahip olabilir.

BÖLÜM 4

FONKSİYONEL DENKLEMLER VE TERS PROBLEMLERE UYGULAMALARI

Bu bölümde lineer fonksiyonel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı metotlar tartışılmış ve ayrıca diferensiyel-fark denklemleri için ters problemlerle ilgili olarak bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Kabul edelim ki, X, x elemanlarının bir kümesi; $\lambda(x)$, X den X e bir dönüşüm; E, x e bağlı $w(x)$ elemanlarından oluşan bir Banach uzayı ve $A(x)$, x e bağlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $w(x) \in E$ için bir lineer fonksiyonel denklem,

$$w(x) = A(x)\, w(\lambda(x)) + a(x) \tag{4.1}$$

formunda bir denklemdir, burada verilenler $\lambda(x) \in X$ ve $a(x) \in A$ dır.

Fonksiyonel denklemlerin bazı uygulamaları ile ilgili teorik sonuçlara ve çeşitli örneklere [13, 25] ten ulaşılabilir.

Aşağıda iki örnek incelenecektir:

$0 \le x \le x_0$ olmak üzere $w(x)$ reel değerli fonksiyonu için fonksiyonel Schröder denklemi

$$pw(x) = w(\lambda(x)),$$

[25] te ele alınmıştır. Burada $0 \le \lambda(x) \le x$, $0 < p < 1$, $\lambda'(x) \ne 0$, $\lambda'(0) = p$, $\lambda(x) \in C^2([0, x_0])$ ve p sabittir. Bu durumda bir diferensiyellenebilir $w(x)$ tek çözümü, $w'(0) = 1$, monotondur ve aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$w(x) = \lim_{k\to\infty} p^{-k} \lambda^{[k]}(x), \tag{4.2}$$

burada $\lambda^{[k]} = \underbrace{\lambda(\lambda(\ldots(\lambda(x))))}_{k}$, ifadesi $k.$ mertebeden bir iterasyonu göstermektedir (bk. [25]). Daha genel ikinci örnek, E Banach uzayındaki bir $w(x)$ fonksiyonu için

$$w(x) = A(x)\, w(\lambda(x)) + a(x),$$

fonksiyonel denklemidir. Burada $A(x)$ reel değerli fonksiyondur, öyle ki $0 < |A(x)| \leq q < 1$ ve $\|a(x)\| \leq \alpha$ dır. Aşağıdaki formül [26] da elde edilmiştir:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} A\left(\lambda^{[j]}(x)\right) a\left(\lambda^{[k]}(x)\right). \tag{4.3}$$

Burada X bir topolojik uzaydır.

4.1 FONKSİYONEL DENKLEMLER ÜZERİNE BAZI TEMEL SONUÇLAR

(4.3) teki serinin yakınsaklığı için $|A(x)| \leq q < 1$ eşitsizliği temel bir şarttır. $\lambda(x)$ ile ilgili ek koşullar altında, $|A(x)| \leq 1$ eşitsizliğinin gösterilmesi yeterlidir (bk. aşağıdaki Teorem 4.1 ve 4.2). $\widetilde{E}$, $\|x\|$ $\left(x \in \widetilde{E}\right)$ normu ile donatılmış ve E yi kapsayan bir başka Banach uzayı olsun. Örneğin $\widetilde{E} = \mathbb{R}^n$, $E = \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ alalım.

Teorem 4.1 *(4.1) denkleminde, $X = \widetilde{E}$ olsun ve aşağıdaki kabuller sağlansın:*

1) $|A(x)| \leq 1$ *ve* $A(x) \neq 0$.

2) $\|\lambda(x)\| \leq \frac{\|x\|}{\left(1+\|x\|^{\frac{1}{\alpha}}\right)}$, $0 < \alpha < 1$.

3) $\|\alpha(x)\| \leq \beta\|x\|$, $\beta > 0$, *burada* α *ve* β *sabittir.*

Bu durumda

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} A\left(\lambda^{[j]}(x)\right) a\left(\lambda^{[k]}(x)\right)$$

serisi $x \in \widetilde{E}$ *için yakınsaktır ve (4.1) denklemi için bir çözümdür.*

İspat. $\widetilde{E}$ normlu uzayından kendi üzerine tanımlı $\lambda(x)$ dönüşümü eğer

$$\|\lambda(x)\| \leq \frac{\|x\|}{(1+\|x\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

eşitsizliğini sağlarsa, o zaman

$$\left\|\lambda^{[k]}(x)\right\| \leq \frac{\|x\|}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

dır. Gerçekten de,

$$F(z) = \frac{z}{(1+kz^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}, \; k \geq 1, \; \alpha > 0$$

fonksiyonu $z \geq 0$ için

$$F'(z) = \frac{1}{(1+kz^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}+1}} > 0$$

türevine sahiptir ve sonuç olarak, artandır. Tümevarımdan,

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda^{[k+1]}(x)\right\| &\leq \frac{\left\|\lambda^{[k]}(x)\right\|}{\left(1+\left\|\lambda^{[k]}(x)\right\|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \\
&\leq \frac{\frac{\|x\|}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}}{\left(1+\left(\frac{\|x\|}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \\
&= \frac{\|x\|}{(1+(k+1)\|x\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman, 1)-3) kabullerinden, $k \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left\|\prod_{j=0}^{k-1} A\left(\lambda^{[j]}(x)\right) a\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right\| \\
\leq\ &\left|\prod_{j=0}^{k-1} A\left(\lambda^{[j]}(x)\right)\right| \left|a\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right| \\
\leq\ &\beta\left\|\lambda^{[k]}(x)\right\| \leq \frac{\beta\|x\|}{(1+k\|x\|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}} < \beta\frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{\alpha} > 1$ için

$$\beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}$$

majorant serisi yakınsaktır. Böylece Teorem 4.1 ispatlanmış olur. ■

$\lambda^{[k]}(x)$ iterasyonlarının hesaplanması çok zahmetli olabileceğinden özel bir $\lambda(x)$ kullanılması faydalıdır.

Teorem 4.2 *(4.1) denkleminde $X = \widetilde{E}$ olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:*

1) $|A(x)| \leq 1$ *ve* $A(x) \neq 0$.

2) $\lambda(x) = v^{-1}(pv(x))$, *burada* $0 < p < 1$, $y = v(x)$, $\widetilde{E} \to \widetilde{E}$ *bir dönüşüm ve tersi* $x = v^{-1}(y)$ *olsun, öyle ki* $\|v^{-1}(y)\| \leq \beta\|y\|$, $\beta > 0$ *dir.*

3) $\|a(x)\| \leq \beta_1\|x\|$, $\beta_1 > 0$.

Bu durumda

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}A\left(v^{-1}\left(p^{j}v(x)\right)\right)a\left(v^{-1}\left(p^{k}v(x)\right)\right)$$

serisi $x\in\widetilde{E}$ için yakınsaktır ve (4.1) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. İlk olarak, eğer $\lambda(x)=v^{-1}(pv(x))$ ise $\lambda^{[k]}(x)=v^{-1}\left(p^{k}v(x)\right)$ olduğu ispatlanacaktır. Gerçekten tümevarım yönteminden,

$$\begin{aligned}\lambda^{[k+1]}(x) &= \lambda\left(\lambda^{[k]}(x)\right)=\lambda\left(v^{-1}\left(p^{[k]}v(x)\right)\right)\\ &= v^{-1}\left(pv\left(v^{-1}\left(p^{[k]}v(x)\right)\right)\right)\\ &= \lambda(x)\\ &= v^{-1}\left(p^{k+1}v(x)\right)\end{aligned}$$

dir. 1)-3) kabullerini kullanırsak, $k\geq 1$ için

$$\begin{aligned}&\left\|\prod_{j=0}^{k-1}A\left(\lambda^{|j|}(x)\right)a\left(\lambda^{|k|}(x)\right)\right\|\\ \leq\ &\prod_{j=0}^{k-1}\left|A\left(\lambda^{|j|}(x)\right)\right|\left\|a\left(\lambda^{|k|}(x)\right)\right\|\\ \leq\ &\beta_1\left\|\lambda^{[k]}(x)\right\|\\ \leq\ &\beta_1\left\|v^{-1}\left(p^{k}v(x)\right)\right\|\\ <\ &\beta\beta_1p^{k}\left\|v(x)\right\|\end{aligned}$$

değerlendirmesini elde ederiz. Teoremin varsayımı gereği $0<p<1$ dir. Bu nedenle,

$$\beta\beta_1\left\|v(x)\right\|\sum_{k=1}^{\infty}p^{k}$$

majorant serisi yakınsaktır. Böylece Teorem 4.2 ispatlanmış olur. ■

Şimdi Schröder tipindeki

$$\mu w(x)=w(\lambda(x)) \tag{4.4}$$

denklemini ele alalım. Burada $x\in\mathbb{C}^n$, $w(x)\in\mathbb{C}^n$, $\lambda(x)\in\mathbb{C}^n$, μ, köşegen elemanları kompleks sabitler olan n. mertebeden bir köşegen matris, $\mathbb{C}^n$ $n-$boyutlu kompleks uzaydır, ve $\lambda(x)$, $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ e bir holomorfik dönüşümdür. (4.4) denkleminin bir holomorfik çözümünün varlığı, [10] daki holomorfik dönüşümler hakkındaki Ziegel teoremi ile bağlantılıdır. (4.4) denkleminin holomorfik çözümü aşağıdaki şekilde formüle edilebilir:

Lemma 4.3 *Kabul edelim ki, λ, $\mathbb{C}^n$ den $\mathbb{C}^n$ e holomorfik dönüşümü $\lambda(0) = 0$, μx köşegensel kısma sahip olsun. Burada μ, bir köşegensel matris olup μ_k, $k = 1, 2, ..., n$, elemanları*

$$\left|\mu_s - \mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}...\mu_n^{k_n}\right| \geq C\left(k_1 + k_2 + ... + k_n\right)^{-\gamma}, \ s = 1, 2, ..., n$$

eşitsizliklerini sağlar. Ayrıca $C > 0$ ve $\gamma > 0$ sabitler olup $k_j \geq 0$, $k_1 + k_2 + ... + k_n > 1$ olacak şekilde tamsayılardır. Bu durumda sıfırın bir komşuluğunda bir $w(x)$ holomorfik diffeomorfizmi vardır, $w(0) = 0$, öyle ki $\mu w(x) = w(\mu(x))$ dir.

İspat. Ziegel teoreminden, sıfırın bir komşuluğunda $\mu w(x) = w\left(\lambda\left(w^{-1}(x)\right)\right)$, $w(0) = 0$ olarak temsil edilen bir $\lambda(x)$ holomorfik dönüşümü bir holomorfik diffeomorfizmdir [10]. x yerine $w(x)$ alınırsa, $\mu w(x) = w(\lambda(x))$ eşitliği elde edilir. Böylece Lemma 4.3 ün ispatı tamamlanmış olur. ■

4.2 FONKSİYONEL DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde,

$$w(x) = A(x)\, w(\lambda(x)) + a(x), \ \ \{x : |x| \leq R_0, \ R_0 > 0\}$$

fonksiyonel denklemini sağlayan vektör değerli $w(x)$ ve $\lambda(x)$ fonksiyonlarının bulunması ters problemi ele alınacaktır. Burada $A(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $a(x)$ vektör değerli fonksiyon olup

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$$

yakınsak serisi ile gösterilsin. Burada $a_k(x)$ ler bilinen vektör değerli fonksiyonlar olsun. $D = \{x : |x| \leq R_0, \ R_0 > 0\}$ bölgesi $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $(n \geq 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ Reel Öklid uzayında kapalı bir bölge; $\lambda(x)$, $\lambda(0) = 0$ olan D den D ye sürekli bir fonksiyon; $a(x) = (a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x))$, $a(0) = 0$ şartını sağlayan sürekli vektör değerli bir fonksiyon ve $A(x) \neq 0$ reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun.
$w(x) = (w_1(x), w_2(x), ..., w_n(x))$ vektör değerli fonksiyonu için

$$w(x) = A(x)\, w(\lambda(x)) + a(x) \tag{4.5}$$

fonksiyonel denklemini ele alalım. Buradaki esas kabul; bilinen sürekli $a(x), x \in D$ vektör değerli fonksiyonunun $a_k(0) = 0$ olacak şekilde $a_k(x)$ sürekli vektör değerli fonksiyonları için

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \tag{4.6}$$

yakınsak serisi ile verilmesidir.

Özel olarak, $a(x)$ in bir baza göre yazılımı (4.6) nın önemli bir örneğidir. Şöyle ki, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_k(x), ..., x \in D$, en azından sürekli $\varphi_k(x)$ fonksiyonlarından oluşan bir ortonormal baz olsun.

$$a_k(x) = c_k \varphi_k(x)$$

diyelim, burada

$$c_k = \int_D \varphi_k(x)\, a(x)\, dx$$

sabit bir vektördür. $n = 1$ durumunda, $\varphi_k(x)$ için klasik polinomları, trigonometrik fonksiyonları vb. alabiliriz.

Dikkat edilirse, $A(x)$ ve $a_k(x)$ üzerindeki koşullar ile (4.5) ve (4.6) bağıntıları sadece $w(x)$ i değil aynı zamanda $\lambda(x)$ i de ifade eder.

Bir örnekle başlayalım. Kabul edelim ki, sürekli vektör değerli fonksiyon $a(x)$,

$$a(x) = a_0(x) + a_1(x),\ a_0(x) = 0,\ a_1(0) = 0$$

şeklinde iki sürekli terimin toplamı olarak yazılabilsin, burada vektör değerli fonksiyon $z = a_1(x), x = b(z)$ sürekli ters fonksiyonuna sahip olsun. Örneğin, $n = 1$ durumunda, sınırlı salınımlı $a(x)$ fonksiyonu $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$ formunda gösterilir, burada $a_0(x)$ ve $a_1(x)$ monoton fonksiyonlardır, öyle ki fonksiyonlardan biri artandır, diğeri ise azalandır. Sonuç olarak, $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$ için $w(x)$ ve $\lambda(x)$ fonksiyonlarının formüllerinin mevcut olduğu görülür.

Lemma 4.4 *Eğer $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$ ifadesinde $a_0(x)$ ve $a_1(x)$, $a_0(0) = 0, a_1(0) = 0$ olacak şekilde $x \in D$ için sürekli ve $z = a_1(x)$ vektör değerli fonksiyonu $x = b(z), z \in D$ tersine sahipse, bu durumda $-\frac{a_0(x)}{A(x)} \in D$ için,*

$$w = a_1(x),\ \lambda(x) = b\left(-\frac{a_0(x)}{A(x)}\right)$$

vektör değerli fonksiyonları

$$w(x) = A(x)\, w(\lambda(x)) + a(x)$$

fonksiyonel denklemi için bir çözüm oluşturur.

Daha genel bir durumda, $A(x)$, $a_k(x)$ ve $a(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

1) $0 < A_0 < A(x) \leq 1.$

2) $x \in D$, $z = a_1(x)$ vektör değerli fonksiyonu $x = b(z)$, $z \in D$ sürekli tersine sahiptir, öyle ki $|b(z) - b(y)| \leq L\,|z - y|$, $z \in D$, $y \in D$, $L > 0$, $\frac{L}{A_0} < 1$ dir.

3) $|a_k(x) - a_k(y)| \leq L_k\,|x - y|$, $k = 0, 1, 2, ...$, $L_k > 0$, $L_0 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} L_k < 1$, ve ayrıca $k_0 \geq 2$ ve p sayıları, $L_k \leq p^k$, $k \geq k_0$, $0 < p < 1$ olacak şekilde vardır.

4) $\psi(t) = L_0 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} L_k t^k - t$, $\psi(0) = L_0 > 0$, $\psi(1) < 0$ konveks fonksiyonu $0 < t < 1$ üzerinde tek bir M köküne sahiptir ve

$$q = \frac{L \sum\limits_{k=2}^{\infty} L_k}{A_0 (1 - M)}$$

sayısı $0 < q < 1$ eşitsizliğini sağlar.

$\lambda^{[k]}(x)$ ifadesi $\lambda(x)$ in

$$\lambda^{[k+1]}(x) = \lambda\left(\lambda^{[k]}(x)\right), \; \lambda^{[0]}(x) = x$$

eşitliği ile tanımlanan iterasyonu olsun. Kolaylık sağlaması için

$$\prod_{j=1}^{0} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) = 1$$

olsun.

Q, tüm sürekli vektör değerli $f(x)$, $x \in D$, $f(0) = 0$ fonksiyonlarının metrik uzayı olsun. Bu uzay üzerinde uzaklık

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{|x| \leq R_0} |f_1(x) - f_2(x)| = \|f_1(x) - f_2(x)\|$$

eşitliği ile verilsin ve $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$ şartını sağlasın, burada M, $\psi(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$, denkleminin köküdür.

Teorem 4.5 *$a_k(x)$ ve $A(x)$, 1) ve 4) şartlarını sağlasın. Bu durumda*

$$a_0(x) + \sum_{k,s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0$$

iterasyon denklemi tek bir $\lambda(x) \in Q$ çözümüne sahiptir ve

$$w(x) = \sum_{k,s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)$$

serisi $x \in D$ için düzgün yakınsaktır, ayrıca vektör değerli fonksiyonlar

$$w(x) = A(x)\, w(\lambda(x)) + a_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

fonksiyonel denklemini sağlar.

İspat. Öncelikle $x \in D$ için

$$a_0(x) + \sum_{k,s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right), \tag{4.7}$$

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right) \tag{4.8}$$

serilerinin mutlak ve düzgün yakınsaklığını ispatlayalım. $|\lambda(x)| \leq M|x|$ olduğundan,

$$\left|\lambda^{[k]}(x)\right| \leq M^k |x| \leq M^k R_0$$

dır. Üçüncü kabulümüz hesaba katılırsa $k \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \left|a_0(x) + \sum_{k,s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right| &\leq |a_0(x)| + \left|a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)\right| \\ &\leq L_0(x) + L_k\left|\lambda^{[k]}(x)\right| \\ &\leq \left|L_0(x) + L_k M^k\right| |x| \\ &\leq R_0\left(L_0(x) + L_k M^k\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Açıktır ki

$$L_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L_k M^k$$

majorant serisi yakınsaktır. O halde

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)$$

serisinin $x \in D$ için düzgün yakınsak olduğunu ispatlayalım. $k+s+1 \geq k_0$ için

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)\right| &\leq \left|a_{k+s+1}\left(\lambda^{[s]}(x)\right)\right| \\ &\leq p^{k+s+1} = pp^k p^s\end{aligned}$$

dir. $0 < p < 1$ olduğundan,

$$\sum_{k+s+1 \geq k_0}^{\infty} p^{k+s+1}$$

majorant serisi yakınsaktır. $\lambda(x) \in Q$ olsun.

$$a_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0$$

iterasyon denkleminin tek bir $\lambda(x) \in Q$ çözümüne sahip olduğunu gösterelim. Aslında, bu iterasyon denklemi

$$a_0(x) + A(x)\, a_1(\lambda(x)) + \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) = 0$$

formunda yazılabilir. $z = a_1(x)$ in tersi olan sürekli vektör değerli $b(z)$ fonksiyonunu kullanırsak, $\lambda(x)$ e göre ikinci çeşit denklemleri aşağıdaki gibi ifade ederiz:

$$\lambda(x) = b\left(\frac{-a_0 - \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)}{A(x)}\right) \equiv B\lambda.$$

Şimdi B operatörünün Q dan Q ya bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Öncelikle, $L_k = 0$, $k = 2, 3, ...$ için $a(x) = a_0(x) + a_1(x)$ olduğu Lemma 4.4 den görülür. O halde $k = 2, 3, ...$ için $L_k \neq 0$ olduğunu kabul edelim. ■

Öncelikle $B\lambda(x) \in Q$ olduğunu ispatlayalım. Eğer $|\lambda(x)| \leq M|x|$ ise, yukarıdaki argüman

$$\left|\lambda^{[k]}(x)\right| \leq M^k |x|$$

olduğunu gösterir ve sonuç olarak, ikinci kabulümüzdeki $\frac{L}{A_0} \leq 1$ şartından

$$\begin{aligned}
|B\lambda(x)| &= \left| b\left(-\frac{a_0 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} A\left(\lambda^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right)}{A(x)} \right) \right| \\
&\leq L\left(-\frac{|a_0| + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left| a_k\left(\lambda^{[k]}(x)\right) \right|}{|A(x)|} \right) \\
&\leq \frac{L}{A_0}\left(L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k \left| \lambda^{[k]}(x) \right| \right) \leq \frac{L}{A_0}\left(L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k M^k \right)|x| \\
&= \frac{L}{A_0}\left(L_0 + \sum_{k=2}^{\infty} L_k M^k - M \right)|x| + \frac{L}{A_0} M|x| = \frac{L}{A_0} M|x| \leq M|x|
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman, $B\lambda(x) \in Q$ dir.

Şimdi, B operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
&|B\lambda_1(x) - B\lambda_2(x)| \\
&= \left| b\left(-\frac{a_0 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} A\left(\lambda_1^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda_1^{[k]}(x)\right)}{A(x)} \right) \right. \\
&\quad \left. - b\left(-\frac{a_0 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k} A\left(\lambda_2^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda_2^{[k]}(x)\right)}{A(x)} \right) \right| \\
&\leq L\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\prod\limits_{j=1}^{k} A\left(\lambda_1^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda_1^{[k]}(x)\right) - \prod\limits_{j=1}^{k} A\left(\lambda_2^{[j-1]}(x)\right) a_k\left(\lambda_2^{[k]}(x)\right)}{A(x)} \right| \\
&\leq \frac{L}{A_0}\sum_{k=2}^{\infty} \left| a_k\left(\lambda_1^{[k]}(x)\right) - a_k\left(\lambda_2^{[k]}(x)\right) \right| \leq \frac{L}{A_0}\sum_{k=2}^{\infty} L_k \left| \lambda_1^{[k]}(x) - \lambda_2^{[k]}(x) \right|
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınarak

$$|B\lambda_1(x) - B\lambda_2(x)| \leq \frac{L}{A_0}\sum_{k=2}^{\infty} L_k \left| \lambda_1^{[k]}(x) - \lambda_2^{[k]}(x) \right|, \tag{4.9}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse,

$$\begin{aligned}
& \left|\lambda_1\left(\lambda_1(x)\right)-\lambda_2\left(\lambda_2(x)\right)\right| \\
\leq\ & \left|\lambda_1\left(\lambda_1(x)\right)-\lambda_1\left(\lambda_2(x)\right)\right|+\left|\lambda_1\left(\lambda_2(x)\right)-\lambda_2\left(\lambda_2(x)\right)\right| \\
\leq\ & M\left|\lambda_1(x)-\lambda_2(x)\right|+\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\| \\
\leq\ & (M+1)\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|
\end{aligned}$$

olup

$$\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|=\sup_{|x|\leq R_0}\left|\lambda_1(x)-\lambda_2(x)\right|$$

dir. $k\geq 3$ için,

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_1^{[k]}(x)-\lambda_2^{[k]}(x)\right| &= \left|\lambda_1\left(\lambda_1^{[k-1]}(x)\right)-\lambda_2\left(\lambda_2^{[k-1]}(x)\right)\right| \\
&\leq \left|\lambda_1\left(\lambda_1^{[k-1]}(x)\right)-\lambda_1\left(\lambda_2^{[k-1]}(x)\right)\right| \\
&\quad +\left|\lambda_1\left(\lambda_2^{[k-1]}(x)\right)-\lambda_2\left(\lambda_2^{[k-1]}(x)\right)\right| \\
&\leq M\left|\lambda_1^{[k-1]}(x)-\lambda_2^{[k-1]}(x)\right|+\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\| \\
&\leq \left(MM_{k-1}+1\right)\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|=M_k\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|
\end{aligned}$$

dir, burada $M_k=MM_{k-1}+1$, $M_2=M+1$, $k=3,4,...$ tekrar ederek bulunur ve

$$M_k=1+M+...+M^{k-1}=\frac{1-M^k}{1-M}<\frac{1}{1-M}$$

olarak ifade edilmiştir. Böylece

$$\begin{aligned}
\left|B\lambda_1(x)-B\lambda_2(x)\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{L}{A_0}L_kM_k\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\| \\
&\leq \frac{L}{A_0(1-M)}\sum_{k=2}^{\infty}L_k\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|=q\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\left\|B\lambda_1-B\lambda_2\right\|\leq q\left\|\lambda_1-\lambda_2\right\|$$

olur. Dördüncü kabulümüzde $0<q<1$ olduğundan, B operatörü bir daralma dönüşümüdür.

Sabit nokta teoreminden, $\lambda(x)=B\lambda(x)$ denklemi için tek bir $\lambda(x)\in Q$ çözümü vardır. Böylece, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

4.3 TERS PROBLEMLER İÇİN BAZI UYGULAMALAR

Geçmiş zaman verileri yardımıyla diferensiyel ve diğer denklemlerin oluşturulması büyük öneme sahiptir. Klasik çalışmalara bakıldığında I. Newton'un, yerçekim potansiyelini Kepler'in gezegen hareketi kanunlarını kullanarak hesaplamış olduğunu görürüz. J. C. Maxwell ise elektromanyetik alan denklemlerini Faraday ve Ampér kanunlarından elde etmiştir. Günümüzde benzer bir durum farklı evrim süreçlerinin matematiksel modellemesinde gözlemlenir. Örneğin; J. W. Forrester, 1900-1970 yılları arasındaki deneysel verileri kullanarak, adi diferansiyel denklemlerin katsayılarını hesaplamak sureti ile dünya ekonomisi için bir dinamik denklem sistemi elde etmiştir [18, 29].

Bulunan bu denklemler, aslında yeterince uzun bir zaman aralığında bu denklemlerin çözümleri olarak yorumlanan doğal fonksiyonların varlığı ile belirlenir. [8] de, geçmiş zamana ait üç veri verildiğinde, çok boyutlu lineer olmayan bir diferensiyel-fark denklem sisteminin fonksiyonel denklemlere indirgenmesinin pek çok durumda mümkün olduğu gösterilmektedir.

Kabul edelim ki, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Öklid uzayı ve A_j, B_j, $j = 1, 2, ..., n$, operatörleri $x \in \mathbb{R}^n$ e bağlı diferensiyel operatörler olsun.

Aşağıdaki özelliklere sahip $w_j^0(x)$, $w_j^h(x)$, $w_j^{2h}(x)$, $j = 1, 2, ..., n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, fonksiyonlarını göz önüne alalım:

1) $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^n$ ye $y = w_0(x) = (w_1^0(x), w_2^0(x), ..., w_n^0(x))$ dönüşümü, en azından sürekli $x = w_0^{-1}(y)$ tersine sahiptir ve vektör değerli $\lambda(x) = w_0^{-1}(w_h(x))$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de en azından süreklidir, burada $w_h(x) = \left(w_1^h(x), w_2^h(x), ..., w_n^h(x)\right)$, $w_h(x) \neq w_0(x)$ dır.

2) A_j, B_j operatörleri ve $w_j^0(x)$, $w_j^h(x)$, $w_j^{2h}(x)$ fonksiyonları, aşağıdaki fonksiyonlar $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ve sürekli olacak şekilde verilsin:

$$R_j(x) = \frac{B_j w_j^0(y)\big|_{y=\lambda(x)}}{B_j w_j^h(x)},$$

$$a_j(x) = \frac{w_j^{2h}(x) - w_j^h(\lambda(x)) + A_j w_j^0(y)\big|_{y=\lambda(x)} - A_j w_j^h(x)}{B_j w_j^h(x)}.$$

Eğer A_j, B_j sadece x e bağlı sonsuz şekilde diferensiyellenebilir katsayıları olan sonlu mertebeden lineer diferensiyel operatörler ve $B_j w_j^h(x) \neq 0$ ise, bu durumda

$\lambda(x)$, $R_j(x)$ ve $a_j(x)$ in regülerliği (özellikle, süreklilik) için, $w_j^0(x)$, $w_j^h(x)$, $w_j^{2h}(x)$ fonksiyonlarının sonsuz diferensiyellenebilirliliği gerekir. Yukarıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}^n$ uzayının tümünde tanımlı olduğu durumu düşünelim. Bazı değişiklikler yaparak sadece sonlu bölgeleri düşünmek mümkündür.

Sürekli veya ayrık t zamanlı (bk. [3, 11]) diferensiyel-fark denklem sistemini ele alacağız:

$$w_j(t+h,x) = A_j w_j(t,x) + f_j(x) B_j w_j(t,x) + g_j(w_1(t,x), w_2(t,x), ..., w_n(t,x)), \quad (4.10)$$

burada $h \neq 0$ belirli bir sabit, $j = 1, 2, ..., n$, $f_j(x)$, $g_j(z)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ bilinmeyenler olup, ayrıca $w_j^0(x)$, $w_j^h(x)$, $w_j^{2h}(x)$, (4.10) sistemi için $w_j(t,x)$ çözümüne göre geçmiş zaman verileri olsun. Burada çözümün varlığı kabul edilmektedir.

Teorem 4.6 *Kabul edelim ki, $w_j(t,x)$ ler,*

$$w_j(t+h,x) = A_j w_j(t,x) + f_j(x) B_j w_j(t,x) + g_j(w_1(t,x), w_2(t,x), ..., w_n(t,x)) \quad (4.11)$$

diferensiyel-fark denklemlerinin $f_j(x)$, $g_j(x)$ fonksiyonları için,

$$w_j|_{t=0} = w_j^0(x), \quad w_j|_{t=h} = w_j^h(x), \quad w_j|_{t=2h} = w_j^{2h}(x) \quad (4.12)$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda $\forall j = 1, 2, ..., n$, $x \in \mathbb{R}^n$ için $f_j(x)$ fonksiyonu

$$f_j(x) = R_j(x) f_j(\lambda(x)) + a_j(x) \quad (4.13)$$

fonksiyonel denkleminin bir çözümüdür ve $g_j(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonu aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$g_j(z) = w_j^h\left(w_0^{-1}(z)\right) - A_j w_j^0(y)\big|_{y=w_0^{-1}(z)} - f_j\left(w_0^{-1}(z)\right) - B_j w_j^0(y)\big|_{y=w_0^{-1}(z)}. \quad (4.14)$$

İspat. (4.11) denklem sistemini (4.12) verisi ile düşünelim. (4.12) şartları (4.11) de yerine yazılırsa, $f_j(x)$, $g_j(z)$, $j = 1, 2, ..., n$ fonksiyonları için aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$w_j^h(x) = A_j w_j^0(x) + f_j(x) B_j w_j^0(x) + g_j(w_0(x)), \quad (4.15)$$

$$w_j^{2h}(x) = A_j w_j^h(x) + f_j(x) B_j w_j^h(x) + g_j(w_h(x)). \quad (4.16)$$

(4.15) te x için $\lambda(x) = w_0^{-1}(w_h(x))$ vektör değerli fonksiyonunu yerine koyarsak, (4.15) ve (4.16) yı aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$w_j^h(\lambda(x)) = A_j w_j^0(y)\big|_{y=\lambda(x)} + f_j(\lambda(x))\, B_j w_j^0(y)\big|_{y=\lambda(x)} + g_j(w_h(x)),$$

$$w_j^{2h}(x) = A_j w_j^h(x) + f_j(x)\, B_j w_j^h(x) + g_j(w_h(x)).$$

Eğer $g_j(w_h(x))$ yok edilirse, $f_j(x)$ için (4.13) fonksiyonel denklemini elde ederiz:

$$f_j(x) = R_j(x)\, f_j(\lambda(x)) + a_j(x).$$

(4.15) ten

$$g_j(z) = w_j^h\left(w_0^{-1}(z)\right) - A_j w_j^0(y)\big|_{y=w_0^{-1}(z)} - f_j\left(w_0^{-1}(z)\right) - B_j w_j^0(y)\big|_{y=w_0^{-1}(z)}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Uyarı 4.1 *$f_j(x)$ fonksiyonunu önce (4.15) ve (4.16) da hesaba katmazsak, $g_j(z)$ için*

$$g_j(z) = \widetilde{R}_j(z)\, g_j\left(\widetilde{\lambda}(z)\right) + \widetilde{a}_j(z)$$

fonksiyonel denklemini elde ederiz, burada

$$\widetilde{\lambda}(z) = w_h\left(w_0^{-1}(z)\right), \ \widetilde{R}_j(z) = \left.\frac{B_j w_j^0(x)}{B_j w_j^h(x)}\right|_{x=w_0^{-1}(z)}, \quad B_j w_j^h\big|_{x=w_0^{-1}(z)},$$

$$\widetilde{a}_j(z) = \widetilde{R}_j(z)\left[A_j w_j^h(x) - w_j^{2h}(x)\right]\big|_{x=w_0^{-1}(z)} - \left[A_j w_j^0(x) - w_j^h(x)\right]\big|_{x=w_0^{-1}(z)}$$

dir. Bu durumda $B_j w_j^0(x) \neq 0$, $B_j w_j^h(x) \neq 0$ olduğunu kabul edersek, $f_j(x)$ fonksiyonunu

$$f_j(x) = \frac{w_j^h(x) - A_j w_j^0(x) - g_j(w_0(x))}{B_j w_j^0(x)} = \frac{w_j^{2h}(x) - A_j w_j^h(x) - g_j\left(w_j^h(x)\right)}{B_j w_j^h(x)}$$

formülü ile hesaplarız.

Sonuç 4.1 *$\forall j = 1, 2, ..., n$ için $a_j(x) \in \mathbb{R}^1$, $R_j(x) \in \mathbb{R}^1$, $f_j(x) \in \mathbb{R}^1$, $\widetilde{E} = \mathbb{R}^n$ olsun ve Teorem 4.1 in kabulleri sağlansın. Bu durumda (4.13) fonksiyonel denklemi tek bir*

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{s=0}^{k-1} R_j\left(\lambda^{[s]}(x)\right) a_j\left(\lambda^{[k]}(x)\right)$$

çözümüne sahiptir ve $g_j(z)$ fonksiyonu

$$g_j(z) = w_j^h\left(w_0^{-1}(z)\right) - A_j w_j^0(y)\big|_{y=w_0^{-1}(z)} - f_j\left(w_0^{-1}(z)\right) - B_j w_j^0(y)\big|_{y=w_0^{-1}(z)}$$

ile bulunur.

Benzer sonuçlar, Teorem 4.2 nin kabulleri altında $a_j = 0$ ve $R_j = \frac{1}{\mu_j}$ için Lemma 4.1 ve (4.3) formülü kullanılarak elde edilir.

Sonuç 4.2 *Eğer*

$$w_h(x) = w_0\left(\frac{x}{(1+|x|^{\alpha})^{1/\alpha}}\right)$$

ise, bu durumda

$$\lambda(x) = w_0^{-1}(w_h(x)) = \frac{x}{(1+|x|^{\alpha})^{1/\alpha}},\ 0<\alpha<1$$

dir. Böylece Sonuç 4.1 e dayanarak,

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\prod_{s=0}^{k-1} R_j\left(\frac{x}{(1+s|x|^{\alpha})^{1/\alpha}}\right) a_j\left(\frac{x}{(1+k|x|^{\alpha})^{1/\alpha}}\right)$$

olur.

Sonuç olarak, bu bölümde söz konusu denklem sistemleri için ele alınan ters problemlerin çözümleri araştırılırken, iki önemli konu gündeme gelmektedir. Bunlar; $y = w_0(x)$ dönüşümünün tersinin bulunması ve fonksiyonel denklemlerin çözümüdür.

KAYNAKLAR

[1] Aczél J (1966) *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic Press, New York, 509 pp.

[2] Aczél J and Dhombres J (1989) *Functional Equations in Several Variables with Applications to Mathematics, Information Theory and to the Natural and Social Sciences.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 480 pp.

[3] Akhromeeva T S, Kurdyumov S P and Malinetskiy G G (1988) *Paradoxes of The World of The Unsteady Structures*. In: Computers and Nonlinear Phenomena, Nauka, Moscow.

[4] Aksoy E (2010) Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin *N* - Soliton Çözümleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kütahya, 69 s.

[5] Altın A (2011) *Fourier Analizi*. Gazi Kitabevi, Ankara, 126 s.

[6] Anikonov Y E (2001) *Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations*. VSP, Utrecht, 270 pp.

[7] Anikonov Y E (2012) The Identification Problem for The Functional Equation with A Parameter. *De Gruyter*, DOI 10.1515/jip-2012-0048.

[8] Anikonov Y E (2017) Remark on Funtional Equations and Applications. *Journal of Mathematical Sciences*, DOI 10.1007/s10958-017-3263-1.

[9] Anikonov Y E, Gölgeleyen İ and Yıldız M (2016) Identification Problems for Systems of Nonlinear Evolution Equations and Functional Equations. *Springer Open Journal*, DOI 10.1186/s13662-016-0877-4.

[10] Arnold V I (1978) *Supplementary Chapters to The Theory of Ordinary Differential Equations*. Nauka, Moscow, 304 pp.

[11] Bellman R and Cooke K L (1963) *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York, 462 pp.

[12] Bereketoğlu H ve Kutay V (2012) *Fark Denklemleri*. Gazi Kitabevi, Ankara, 304 s.

[13] Brive B (2003) Sums of An Entire Function in Certain Weighted L^2 Spaces. *Publ. Mat. Barc*. 47 (1), 211–236.

[14] Brown J W and Churchill R V (2008) *Complex Variables and Applications*. Mc Graw - Hill Higher Education, 468 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

[15] Bülbül A (2011) *Genel Topoloji.* Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, 312 s.

[16] Cheng S S and Li W (2008) *Analytic Solutions of Functional Equations.* World Scientific, Hackensack, 296 pp.

[17] Debnath L (2011) *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, Boston, 860 pp.

[18] Forrester J W (1971) *World Dynamics*. Pegasus Communications, Waltham, 144 pp.

[19] Griffel D H (1985) *Applied Functional Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 390 pp.

[20] Hacısalihoğlu H H (1993) *Diferensiyel Denklemler*. Shaum's Outlines Series Mc Graw–Hill, 357 s.

[21] Hacısalihoğlu H H, Hacıyev A, Kalantarov V, Sabuncuoğlu A, Brown L M, İbikli E, Brown S (2000) *Matematik Terimleri Sözlüğü*. TDK Yayınları, Ankara, 686 s.

[22] Jones G S (1962) On the nonlinear differential-difference equation $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1 + f(x)\}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 440 – 469.

[23] Kannappan P (2009) *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer-Verlag, New York, 810 pp.

[24] Kirsch A (1996) *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems.* Springer Science & Business Media, New York, 300 pp.

[25] Kuczma M (1968) *Functional Equations in a Single Variable*. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 383 pp.

[26] Kuczma M, Choczewski B and Ger R (1990) *Iterative Functional Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 552 pp.

[27] Kurdyumov S P, Malinetskiy G G, Potapov A B and Samarskiy A A (1988) *The Structures in Nonlinear Medium*. In: Computers and Nonlinear Phenomena, Nauka, Moscow.

[28] Leung A W (2009) *Nonlinear Systems of Partial Differential Equations: Applications to Life and Physical Sciences*. World Scientific, Singapore, 544 pp.

[29] Makhov S A (2007) *Mathematical Modelling of The World Economics and Sustainable Development Based on The Model of Forrester*. In: News in Synergetics. New Actuality. New Problems. New Generation, Nauka, Moscow.

[30] Pelyukh G P and Sharkovskii A N (1974) *Introduction to the Theory of Functional Equations* . Naukova Dumka, Kiev, 119 pp.

[31] Poluektov R A, Pykh Y A and Shvytov J A (1980) Dynamical Models of Ecological Systems. *Gidrometeoizdat*, Leningrad, 101-147.

[32] Soykan Y (2012) *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 531 s.

[33] Zheng S (2004) *Nonlinear Evolution Equations*. CRC Press, Boca Raton, 304 pp.

[34] Walter R (1987) *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill Book Company, Singapore, 416 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Nevzem Mısırlı 1991 yılında Zonguldak' ta doğdu. 2014 yılında Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü'nden mezun olduktan sonra 2016 yılında aynı üniversitede Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına başladı.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Matematik Bölümü.

Tel: 0 372 291 11 00

E-posta: nevzem.misirli@fbe.karaelmas.edu.tr