

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURCU KÖKEN

EYLÜL 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu KÖKEN

DANIŞMAN: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

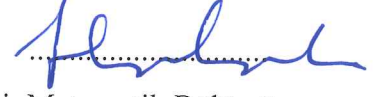
EYLÜL 2019

KABUL:

Burcu KÖKEN tarafından hazırlanan “Genel Schrödinger Denklemi İçin Bir Ters Problem” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 03/09/2019

Danışman: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



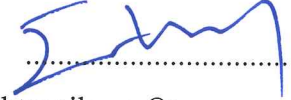
Üye: Doç. Dr. Haydar ARSLAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Erkan TAŞDEMİR

Kırklareli Üniversitesi, Pınarhisar Meslek Yüksekokulu, Elektronik ve Otomasyon Bölümü



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./09/2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”


Burcu KÖKEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENEL SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

Burcu Köken

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Eylül 2019, 63 sayfa

Bu tez çalışmasında, genel Schrödinger denklemi Cauchy başlangıç şartları ile birlikte ele alınmıştır. Sınırsız bir bölgede, çözüm hakkında verilen bir ek bilgi yardımıyla denklemin sağ tarafındaki bilinmeyen fonksiyonun bulunması probleminin çözümünün teklifi araştırılmıştır. Bu kapsamda Amirov ve Yamamoto (2008) de elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Burada çözümün reel değerli bir fonksiyon olduğu kabul edilmiştir. Tezin ilk bölümünde, bazı yardımcı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, Schrödinger denkleminin fiziksel boyutu ele alınmış olup belirli koşullar altında bazı özel çözümleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde, ispat için gerekli olan bazı yardımcı önermeler sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise ele alınan ters problemin çözümünün teklifi araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genel Schrödinger denklemi, ters problem, çözümün teklifi

Bilim Kodu: 403.06.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

AN INVERSE PROBLEM FOR A GENERAL SCHRÖDINGER EQUATION

Burcu Köken

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

September 2019, 63 pages

In this thesis, a general Schrödinger equation is considered with Cauchy initial conditions. In an unbounded domain, by the help of additional data on the solution, the uniqueness of solution of the problem of finding unknown function on the right-hand side of equation is investigated. For this purpose, the results obtained by Amirov and Yamamoto (2008) are discussed where the solution is assumed to be a real valued function. In the first chapter of the thesis, some basic definitions and theorems are given. In the second chapter, the physical aspects of Schrödinger equation are considered and its solution is given under some specific conditions. In the third chapter, some lemmata which are necessary for the proof are presented. In the last chapter, the uniqueness of solution of the inverse problem is investigated.

Keywords: General Schrödinger equation, inverse problem, uniqueness of solution.

Science Code: 403.06.00



TEŞEKKÜR

Tezimin tüm aşamalarında yapıcı öneri ve eleştirileriyle çalışmanın zenginleşmesinde büyük pay sahibi olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e, tezin 2. bölümü hakkındaki fikir ve önerileriyle bana destek veren ve değerli zamanını bana ayıran kıymetli hocam, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fizik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Haydar ARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca her kararında yanımda olan annem, babam ve biricik kardeşim Burak İŞLER'e maddi ve manevi bütün desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte beni destekleyen, cesaretlendiren, bilgi ve donanımıyla yolumu aydınlatan eşim Abdullah Gül Üniversitesi, Malzeme Bilimi ve Nanoteknoloji Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi Dr. Ekin KÖKEN'e teşekkürlerimi sunarım. İyi günde kötü günde her zaman yanımda olan sevgisi ve güveniyle bana her zaman destek olan İlknur SAN'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| KABUL | ii |
| ÖZET..... | iii |
| ABSTRACT | iv |
| TEŞEKKÜR..... | v |
| İÇİNDEKİLER..... | vi |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | ix |
| ÇİZELGELER DİZİNİ | ix |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ..... | x |
| | |
| BÖLÜM 1 ÖN BİLGİLER | 1 |
| | |
| 1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER | 2 |
| | |
| BÖLÜM 2 KUANTUM MEKANİĞİ VE SCHRÖDINGER DENKLEMİ | 15 |
| | |
| 2.1 SCHRÖDINGER DENKLEMİ | 18 |
| 2.1.1 Kararlı Dalga | 19 |
| 2.1.2 Dalga Fonksiyonu ve Özellikleri..... | 19 |
| 2.2 TEK BOYUTTA ZAMANA BAĞLI SCHRÖDINGER DENKLEMİ..... | 20 |
| 2.3 TEK BOYUTTA ZAMANDAN BAĞIMSIZ SCHRÖDINGER DENKLEMİ | 22 |
| 2.4 SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ | 23 |
| 2.4.1 Zamandan Bağımsız Sistemlerde Schrödinger Denkleminin Çözümü..... | 24 |
| 2.4.1.1 Basamak Potansiyeline Doğru Gelen Parçacık | 27 |
| 2.4.2 Zamana Bağlı Sistemlerde Schrödinger Denkleminin Çözümü | 34 |
| 2.4.2.1 Tek Boyutlu Sonsuz Potansiyel Kuyusundaki Parçacık | 34 |

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| BÖLÜM 3 BAZI YARDIMCI ÖNERMELER | 39 |
| LEMMA 3.1 | 40 |
| LEMMA 3.2 | 42 |
| LEMMA 3.3 | 46 |
| BÖLÜM 4 GENEL SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN TERS PROBLEM | 47 |
| PROBLEM 4.1 | 47 |
| TEOREM 4.1 | 47 |
| BÖLÜM 5 SONUÇ | 57 |
| KAYNAKLAR | 59 |
| ÖZGEÇMİŞ | 63 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| <u>No</u> | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| Şekil 2.1 V yüksekliğindeki basamak potansiyeline doğru gelen parçacık | 28 |
| Şekil 2.2 Y Yansıma ve G geçme katsayılarının E/V nin fonksiyonu olarak değişimi | 34 |
| Şekil 2.3 Tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusunda hareket eden bir parçacık için sınır koşulları | 35 |
| Şekil.2.4 Tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusunda hareket eden parçacığın özfonksiyonlarının ve olasılık yoğunluklarının x'e göre değişimi..... | 37 |





ÇİZELGELER DİZİNİ

| <u>No</u> | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| Çizelge 1.1 Fourier Dönüşüm Tablosu | 13 |
| Çizelge 2.1 Tek Boyutlu Kuyuda Hareket Eden Bir Parçacığın Enerji Özdeğer Özfonksiyonları | 36 |





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- $i = \sqrt{-1}$: Sanal birim
- Q : Verilen bir bölge
- \bar{Q} : Q bölgesinin kapanışı
- ∂Q : Q bölgesinin sınırı
- $L^2(Q)$: Q üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
- $H^2(Q)$: Kendisi ve 2. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(Q)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
- $\mathcal{F}[u]$: u fonksiyonunun Fourier dönüşümü
- χ : Ağırlık fonksiyonu
- ∇u : u fonksiyonunun x değişkenine göre gradienti
- u_t : u fonksiyonunun t değişkenine göre kısmi türevi; $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$
- u_{x_i} : u fonksiyonunun x_i değişkenine göre kısmi türevi; $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$
- $u_{x_i x_j}$: u fonksiyonunun x_i ve x_j değişkenlerine göre kısmi türevi; $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında bir $Q = \{(x, t) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ bölgesinde,

$$Lu \equiv iu_t + \sum_{s,j=1}^n a_{sj}(x)u_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x, t)u_{x_j} + r(x, t)u = f(x, t)g(x, t) \quad (1.1)$$

Schrödinger denklemi

$$u(0, 'x, t) = u^0('x, t), u_{x_1}(0, 'x, t) = u^1('x, t), 'x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Cauchy şartları ile birlikte ele alınmıştır. Aynı bölgede, çözüm hakkında verilen ek bilgi yardımıyla denklemin sağ tarafındaki bilinmeyen fonksiyonun bulunması probleminin çözümünün tekliği araştırılmıştır. Bu amaçla Amirov ve Yamamoto (2008) de elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Tezin ilk bölümünde, bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde, Schrödinger denklemi fiziksel açıdan ele alınmış olup belirli koşullar altında bazı özel çözümlerine yer verilmiştir. Bu çözümler grafik ve tablolarla desteklenmiştir. Üçüncü bölümde, ispat için gerekli olan bazı yardımcı önermeler sunulmuştur. Dördüncü bölüm kapsamında, ele alınan ters problemin çözümünün tekliği araştırılmıştır.

Schrödinger denklemi için çeşitli ters problemlerin çözülebilirliği üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Baudouin ve Puel (2002), Bellassoued ve Choulli (2009), Cristofol ve Soccorsi (2011), Isakov (2006), Mercado vd. (2008), Triggiani ve Zhang (2015), Yuan ve Yamamoto (2010) dur.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez için gerekli olan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1 (Ters Problem) *Matematiksel fizikte; denklem, bölge ve koşullar verildiğinde problemin çözümünün bulunmasına direkt problem denir. Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki bunların çözümleri için ayrıca ek bilgi verilir. Aynı ek bilgiye göre problemdeki denklemin bir veya birkaç katsayısını veya sağ tarafını ya da sınır koşullarından bir veya bir kaçını çözüm ile birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere ters problemler denir (Gölgeleyen 2010).*

Tanım 1.2 ($C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ Uzayları) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, m negatif olmayan bir tam sayı ve $|\alpha| \leq m$ olsun. Her m sayısı için, $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olan tüm ϕ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. Özel olarak, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) \equiv \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ şeklinde tanımlanır (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.3 (Kompakt Support) $G \subset \mathbb{R}^n$ boş kümeden farklı olmak üzere, G 'nin \mathbb{R}^n 'de kapanışı \overline{G} şeklinde gösterilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve \overline{G} , \mathbb{R}^n 'in kompakt altkümresi (kapalı ve sınırlı) ise, $G \Subset \Omega$ olarak yazılır. u , G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonunun supportu

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

kümesi biçiminde tanımlanır. Buna göre $\text{supp}(u) \Subset \Omega$ ise, Ω bölgesinde u fonksiyonunun kompakt supportu vardır denir (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.4 ($C_0(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ Uzayları) $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları, sırasıyla $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ sınıfından olan ve Ω bölgesinde kompakt supporta sahip tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaylardır (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.5 ($L^p(\Omega)$ Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, p pozitif reel sayı olsun. Ω bölgesinde

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyoneli $L^p(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.6 ($H_0^k(\Omega)$ Uzayı) $H_0^k(\Omega)$ uzayı, $C_0^k(\bar{\Omega})$ uzayının $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ Sobolev normuna göre tamlanışıdır (Reddy 1998).

Tanım 1.7 ($H^k(\Omega)$ Sobolev Uzayı) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ 'ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. Bu cümleye ait bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

a) $H^k(\Omega)$ lineer uzaydır ve $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

b) $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} f_1 D^{\alpha} \bar{f}_2 dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir (Mikhailov 1978).

Tanım 1.8 (Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^{\infty}(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir. Bu uzay, $D(\Omega)$ ile gösterilir:

a) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır ki; $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\text{supp} \varphi_k \subset K$,

b) Her $(\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $D_{\varphi_k(x)}^{\alpha} \rightarrow D_{\varphi(x)}^{\alpha}$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise, $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$ yakınsar denir. $D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere, genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1971).

Tanım 1.9 (Genelleşmiş Türev) $f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^{\alpha} f$ genelleşmiş türevi,

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \varphi \in D(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 2002).

Teorem 1.1 (Bunyakovskii Eşitsizliği (Cauchy-Schwartz)) \mathcal{H} bir iç çarpım uzayı olmak üzere, her $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ için

$$|(h_1, h_2)|^2 \leq (h_1, h_1) \cdot (h_2, h_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Mikhailov 1978).

Teorem 1.2 (Fredholm Alternatif Teoremi I) A , bir \mathcal{H} Hilbert uzayı üzerinde self-adjoint, lineer, kompakt operatör olsun. Aşağıdaki iki denklemi ele alalım:

$$x = Ax + f, \tag{I}$$

$$x = Ax. \tag{H}$$

Burada (I) ve (H) denklemleri sırasıyla homojen olmayan ve homojen denklemleri gösterebiliriz.

i) Eğer (H) denkleminin tek çözümü $x = 0$ ise bu durumda (I) her $f \in H$ için bir tek x çözümüne sahiptir.

ii) Eğer (H) denklemi sıfırdan farklı çözümlere sahip ve f , (H) denkleminin tüm çözümlerine dik ise (I) denklemi bir çözüme sahiptir. (I) denkleminin sonsuz çözüme sahip olduğu durumda, bu çözümlerin herhangi ikisinin farkı (H) denkleminin çözümüdür. Yani x ve y , (I) denklemini sağlıyorsa $(x-y)$ de (H) denklemini sağlar (Griffel 2002).

Teorem 1.3 (Fredholm Alternatif Teoremi II) A , bir \mathcal{H} Hilbert uzayı üzerinde bir kompakt operatör olsun. Aşağıdaki dört denklemi ele alalım:

$$x = Ax + f, \tag{I}$$

$$y = A^*y + g, \tag{I^*}$$

$$x = Ax, \tag{H}$$

$$y = A^*y. \tag{H^*}$$

Burada f ve g , H 'nin bilinen elemanlarıdır. O halde iki alternatif söz konusudur:

i) (H) ve (H^{*}) denklemlerinin tek çözümü sıfırdır ve bu durumda (I) ve (I^{*}) her $f, g \in H$ için tek çözüme sahiptir.

ii) (H) ve (H^{*}) in sıfırdan farklı çözümleri vardır. Bu durumda:

f , (H^*) in her çözümüne dik ise (I) bir çözüme sahiptir. Aynı şekilde g , (H) nin her çözümüne dik ise (I^*) bir çözüme sahiptir (Griffel 2002).

Önerme 1.4 (Parametreye Bağlı İntegrallerin Sürekliliği) Bir (X, \mathcal{F}, μ) ölçüm uzayı verilsin. (a, b) aralığı \mathbb{R}' nin sınırlı veya sınırsız keyfi bir aralığı olsun. f , $(a, b) \times X$ üzerinde tanımlı \mathbb{R}' de veya \mathbb{C}' de değerler alan bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki her $t \in (a, b)$ için $x \rightarrow f(t, x)$ fonksiyonu integrallenebilir olsun.

Ayrıca

$$I(t) = \int_X f(t, x) d\mu, \quad t \in (a, b)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu tür bir fonksiyona örnek olarak $f \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü verilebilir:

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} f(x) dx.$$

Aşağıdaki önermeler

$$I : t \rightarrow \int_X f(t, x) d\mu$$

fonksiyonunun sürekliliği ve diferansiyellenebilirliği ile ilgili temel sonuçları vermektedir (González-Velasco 1995).

Önerme 1.5 (Süreklilik) Eğer hemen hemen her $x \in X$ için $x \rightarrow f(t, x)$ fonksiyonu $t^* \in (a, b)$ de sürekli ve hemen hemen her yerde $|f(t, x)| \leq g(x)$ olacak şekilde t^* in bir V komşuluğundaki tüm t ler için bir g integrallenebilir fonksiyonu varsa bu durumda I , t^* da süreklidir (González-Velasco 1995).

Önerme 1.6 (Türevlenebilme) Kabul edelim ki V , t^* in bir komşuluğu, $V \subset (a, b)$ olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) Hemen hemen tüm x ler için $t \rightarrow f(t, x)$ fonksiyonu, V üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olsun.

(ii) Her $t \in V$ için bir g integrallenebilir fonksiyonu vardır öyle ki hemen hemen her yerde

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$$

dir. Bu durumda I, t^* üzerinde diferansiyellenebilirdir ve

$$I'(t^*) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t^*, x) d\mu$$

dir (González-Velasco 1995)

Teorem 1.7 (Parseval Formülü) *Klasik Parseval (Plancherel) Teoremi 1910 yılında Michel Plancherel tarafından aşağıdaki formda verilmiştir:*

Kabul edelim ki $f \in L^2(\mathbb{R})$ olsun ve $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ fonksiyonu

$$\phi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x) e^{iyx} dx$$

şeklinde tanımlansın. $\phi_n, L^2(\mathbb{R})$ ' de bir Cauchy dizisi ve $L^2(\mathbb{R})$ 'de $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$ olsun.

Ayrıca $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ fonksiyonu

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \phi(y) e^{-iyx} dy$$

şeklinde tanımlansın. $\psi_n, L^2(\mathbb{R})$ ' de bir Cauchy dizisi ve $L^2(\mathbb{R})$ 'de $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ olsun. Bu

durumda, hemen hemen her yerde $\psi = f$ ve

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\phi(y)|^2 dy$$

dir. Genellikle bu teoremin ispatı $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alınarak yapılır, aslında bu teorem karesi integrallenebilir fonksiyonlarla ilgilidir. Diğer yandan, Plancherel Teoremi sıklıkla Schwartz Uzayında da verilmektedir (González-Velasco 1995).

Tanım 1.10 (Schwartz Uzayı) *Schwartz Uzayı; aşağıdaki şartları sağlayan, \mathbb{R} üzerindeki kompleks değerli f fonksiyonlarının bir kümesine denir ve $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ile gösterilir:*

i) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

ii) f ve tüm türevleri sonsuzda herhangi bir polinomdan daha hızlı sifıra gider. Yani

$\forall k, m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k f^{(m)}(x) = 0.$$

Bu uzay aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uzayın $L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leq p < \infty$) de yoğundur.

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uzayın $L^\infty(\mathbb{R})$ de yoğun değildir.

3) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uzayın \mathbb{C} üzerinde bir vektör uzayıdır (Herb and Sally 2011).

Teorem 1.8 (Plancherel-Parseval) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$i) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x) dx,$$

$$ii) \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \quad (\text{Gasquet and Witomski 2013}).$$

Teorem 1.9 (Fubini Teoremi) (i) Eğer $f, E \times F$ de negatif olmayan bir fonksiyon ise

$$\int_{E \times F} f(x, y) dx dy = \int_E dx \int_F f(x, y) dy = \int_F dy \int_E f(x, y) dx$$

dir. Bu üç integral $+\infty$ 'a eşit olabilir.

(ii) Eğer $f, E \times F$ üzerinde integrallenebilirse, $x \rightarrow f(x, y)$ fonksiyonu hemen hemen her y için integrallenebilirdir, $y \rightarrow f(x, y)$ fonksiyonu da hemen hemen her x için integrallenebilirdir ve (i) de verilen üç integral birbirine eşit ve sonludur.

(iii) f integrallenebilirdir ancak ve ancak-

$$\int_E dx \int_F |f(x, y)| dy \quad \text{veya} \quad \int_F dy \int_E |f(x, y)| dx$$

integralleri sonludur (Gasquet and Witomski 2013).

Tanım 1.11 (Fourier Dönüşümü) $f \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere f fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve eşlenik Fourier dönüşümü sırasıyla

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx, \quad (1.2)$$

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır (Gasquet and Witomski 2013).

Yukarıdaki integral ancak ve ancak $f \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunda anlamlıdır. Çünkü $|e^{\pm 2i\pi\xi x}| = 1$ dir. Ayrıca $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R})$ olduğunda $\overline{\mathcal{F}}$ operatörü, \mathcal{F} 'nin tersi olur ($\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$). O halde f ve \hat{f} fonksiyonları $L^1(\mathbb{R})$ uzayına ait olduğunda, hemen hemen her yerde $\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$ yazılabilir. Fourier dönüşümü literatürde farklı şekillerde tanımlanır. Bütün tanımlamalar aşağıdaki formdadır:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{C}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik\xi x} f(x) dx.$$

Burada C ve k sabit sayıları temsil etmektedir ve yukarıda $C = k = 2\pi$ olarak alınmıştır. Farklı kaynaklarda $C = 1, C = 2\pi, C = \sqrt{2\pi}, k = \pm 1$ ve $k = \pm 2\pi$ sayılarının çeşitli kombinasyonları kullanılır (González-Velasco 1995).

Örnek 1.1 $f = \chi_{[a,b]}$, $[a, b]$ aralığının karakteristik fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} b - a & \xi = 0 \\ \frac{\sin \pi(b-a)\xi}{\pi\xi} e^{-i\pi(a+b)\xi} & \xi \neq 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Burada $\left| \frac{\sin \pi(b-a)\xi}{\pi\xi} \right|$ integrallenebilir olmadığından $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ dir (Gasquet and Witomski 2013).

Teorem 1.10 (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise \hat{f} aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\mathcal{F}[f]$, \mathbb{R} üzerinde sürekli ve sınırlıdır.

ii) \mathcal{F} , $L^1(\mathbb{R})$ 'den $L^\infty(\mathbb{R})$ 'ye sürekli lineer operatördür ve

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad (1.3)$$

dir.

iii) $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

İspat. i) \hat{f} 'nin sürekliliği (1.1) integralinin ξ 'ye göre sürekliliğinden elde edilir.

$\xi \rightarrow e^{-2i\pi\xi x} f(x)$ fonksiyonu \mathbb{R}' de süreklidir ve $|f(x)|$ tarafından sınırlıdır. Unutmamak gerekir ki $f \in L^1(\mathbb{R})$ dir. Son olarak Önerme 1.3'den ispat tamamlanır.

ii) Her $\xi \in \mathbb{R}$ için $|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)| dx = \|f\|_1$ yazılabilir. Böylece \hat{f} sınırlıdır ve F fonksiyonu $L^1(\mathbb{R})$ 'den $L^\infty(\mathbb{R})$ 'ye süreklidir.

iii) $f = \chi_{[a,b]}$ ve $\xi \neq 0$ için $|\hat{f}(\xi)| \leq 1/\pi |\xi|$ yazılabilir. Böylece $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ olduğu görülür. Açıkça bu durum tüm basit fonksiyonlar için geçerlidir. Şimdi $f \in L^1(\mathbb{R})$ alalım.

Basit fonksiyonların kümesi $L^1(\mathbb{R})$ 'de yoğun olduğundan basit fonksiyonların bir g_n dizisi vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_1 = 0$ ve her n için $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{g}_n(\xi)| = 0$ dir. (ii)'den her n için

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}_n(\xi)| \leq \|f - g_n\|_1$$

eşitsizliği $\xi \in \mathbb{R}'$ ye göre düzgün olarak sağlanır. Buradan $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ bulunur

(Gasquet and Witomski 2013). ■

Teorem 1.11 f ve g lokal integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere f ve g 'nin Fourier dönüşümleri sırasıyla \hat{f} , \hat{g} olsun. Eğer α reel bir sayı ve a reel veya kompleks bir sabit ise aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$i) \widehat{f + g} = \hat{f} + \hat{g},$$

$$ii) \widehat{af} = a\hat{f},$$

$$iii) \widehat{f(x) \sin \alpha x} = \frac{\hat{f}(\xi - \alpha) - \hat{f}(\xi + \alpha)}{2i},$$

$$iv) \widehat{f(x) \cos \alpha x} = \frac{\hat{f}(\xi - \alpha) + \hat{f}(\xi + \alpha)}{2},$$

$$v) \widehat{f(x - \alpha)} = e^{-i\xi\alpha} \hat{f}(\xi),$$

$$vi) \widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \alpha \neq 0 \text{ (González-Velasco 1995)}.$$

Teorem 1.12 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, \mathbb{R} üzerinde integrallenebilir ve $x \rightarrow \pm\infty$ iken $f(x) \rightarrow 0$ olsun. Eğer f' parçalı sürekli ve \mathbb{R} üzerinde integrallenebilirse

$$\widehat{f'}(\xi) = i\omega \hat{f}(\xi) \tag{1.4}$$

dir (González-Velasco 1995).

Sonuç 1.1 Eğer $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ fonksiyonları yukarıdaki teoremin hipotezini sağlıyorsa

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = i\omega^n \hat{f}(\omega)$$

dir (González-Velasco 1995).

Önerme 1.13 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere iki fonksiyon olsun.

Bu durumda $f\hat{g}, \hat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ ve

$$\int f(t) \hat{g}(t) dt = \int \hat{f}(x) g(x) dx \tag{1.5}$$

dir (Gasquet and Witomski 2013).

İspat. \hat{g} fonksiyonunun sınırlı olduğu Riemann-Lebesgue teoreminden ispatlandığından $f\hat{g}$ fonksiyonu $L^1(\mathbb{R})$ uzayına aittir. Benzer şekilde $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ dir. (1.4) eşitliği Fubini teoreminin uygulaması olarak direkt elde edilir. $e^{-2i\pi tx} f(t)g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int f(t) \hat{g}(t) dt &= \int f(t) \left(\int e^{-2i\pi tx} g(x) dx \right) dt \\ &= \int g(x) \left(\int e^{-2i\pi tx} f(t) dt \right) dx = \int \hat{f}(x) g(x) dx \end{aligned}$$

yazılır. ■

Uyarı 1.1 $\overline{\mathcal{F}}$ ters dönüşümünün özellikleri \mathcal{F} dönüşümünün özellikleri ile aynıdır. Teorem (1.2) ve Önerme (1.4)'de i yerine $-i$ yazılarak $\overline{\mathcal{F}}$ ters dönüşümünün aynı özelliklere sahip olduğu görülür.

Önerme 1.14 (Türev) i) Eğer $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ise \hat{f} , n kez diferansiyellenebilir ve

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \left[(-2i\pi x)^k f(x) \right] \gamma(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

dir. Burada $\left[(-2i\pi x)^k f(x) \right] \gamma(\xi)$ ifadesi $\mathcal{F} \left[(-2i\pi x)^k f(x) \right] (\xi)$ anlamına gelmektedir.

ii) Eğer $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ve bütün $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ türevleri $L^1(\mathbb{R})$ uzayına ait ise

$$f^{(\widehat{k})}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

dir.

iii) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ sınırlı supportta sahipse $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ dir.

İspat. i) $h : \xi \rightarrow e^{-2i\pi\xi} f(x)$ fonksiyonu sonsuz mertebeden diferansiyellenebilirdir. Ayrıca $h^{(k)}(\xi) = (-2i\pi\xi)^k e^{-2i\pi\xi} f(x)$ ve $|h^{(k)}(\xi)| \leq 2\pi |x^k f(x)|$ dir. Burada Önerme 1.3 uygulanırsa $k = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \int (-2i\pi\xi)^k e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx$$

bulunur.

ii) $n = 1$ için ispatlayalım. $n \geq 2$ için tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir. $f' \in L^1(\mathbb{R})$ olduğundan \hat{f}' aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{f}'(\xi) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} e^{-2i\pi\xi x} f'(x) dx.$$

Kısmi integrasyon yöntemi yardımıyla

$$\int_{-a}^{+a} e^{-2i\pi\xi x} f'(x) dx = \left[e^{-2i\pi\xi x} f(x) \right]_{-a}^{+a} + \int_{-a}^{+a} (2i\pi\xi) e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx \quad (1.8)$$

elde edilir. $f(\pm a)$ fonksiyonunun $a \rightarrow +\infty$ için limitinin var olduğunu kabul edelim. f integrallenebilir olduğundan limiti 0 olmalıdır.

$a \rightarrow +\infty$ olduğundan (1.7) eşitliğinden $k = 1$ için

$$\int e^{-2i\pi\xi x} f'(x) dx = \int (2i\pi\xi) e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx \quad (1.9)$$

şeklinde yazılır. Şimdi $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a)$ limitinin varlığını gösterelim. f' sürekli diferansiyelenebilir olduğundan

$$f(a) = f(0) + \int_0^a f'(t) dt$$

dir. $f' \in L^1(\mathbb{R})$ olduğundan, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f'(t) dt$ limiti vardır ve bu nedenle $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a)$ limiti mevcuttur. Benzer şekilde $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(-a)$ limitinin varlığı da gösterilebilir.

iii) $f \in L^1(\mathbb{R})$ sınırlı supporta sahip ise ($K > 0$ için $|x|'$ ten büyük olan x 'ler için hemen hemen her yerde $f(x) = 0$ dır), kolayca görülebilir ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x^k f(x)$ integrelenebilir. Böylece (i)'den $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ yazılabilir

(Gasquet and Witomski 2013). ■

Uyarı 1.2 i) Eğer f kompleks değerli ise $\overline{f(x)} = \overline{f(x)}$, $f(x)$ 'in karmaşık eşleniği olarak gösterilir.

ii) f_σ fonksiyonu f 'in yansıması olup $f_\sigma(x) = f(-x)$ şeklinde tanımlanır

(Gasquet and Witomski 2013).

Önerme 1.15 (Eşlenik ve Yansıma) $f \in L^1(\mathbb{R})$ için aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) $\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(\overline{f})$,

ii) $(\mathcal{F}(f))_\sigma = \overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(f_\sigma)$.

iii) f çift (tek) ise \hat{f} çift (tek) tir.

iv) f reel ve çift (reel ve tek) ise \hat{f} reel ve çift (sanal ve tek) tir.

İspat. (i) ve (ii) direkt tanımdan elde edilir.

iii) f çift $\Leftrightarrow f = f_\sigma$ dır. (ii) den dolayı $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma$ olup \hat{f} çifttir. Benzer şekilde f tek ise \hat{f} tektir.

iv) f reel ve çift olsun. \hat{f} 'nin reel olduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(\overline{f}) = \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma) = \mathcal{F}(f)$ olduğunu biliyoruz. Eğer f reel ve tek ise $\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(f_\sigma) = -\mathcal{F}(f)$ 'dir ve bu eşitlik \hat{f} 'nin sanal olduğunu gösterir

(Gasquet and Witomski 2013). ■

Tanım 1.12 (Ters Fourier Dönüşümü) *Fourier dönüşümü bize zamansal bölgeden frekans bölgesine geçme imkanı tanır. Bu durumun tersi \mathcal{F} 'den elde edilir. Aslında $\overline{\mathcal{F}}$ bize Fourier dönüşümünün tersini verir. Bununla birlikte f 'nin integrallenebilir olması \hat{f} 'nin integrallenebilir olmasını gerektirmez. Bu nedenle f üzerinde ek şartlar verilmesi gerekmektedir (Gasquet and Witomski 2013).*

Teorem 1.16 *Eğer $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ise tüm noktalar için $\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$ 'dir. Burada f süreklidir (Gasquet and Witomski 2013).*

Önerme 1.17 *Eğer $f \in C^2(\mathbb{R})$ ve $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ ise \hat{f} integrallenebilirdir (Gasquet and Witomski 2013).*

Önerme 1.18 *f sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve $x \in \mathbb{R}$ için*

$$\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f_\sigma(x) = f(-x)$$

dir (Gasquet and Witomski 2013).

Çizelge 1.1 Fourier Dönüşüm Tablosu

| $f(t)$ | $F(\xi) = \mathcal{F}[f(t)]$ |
|---------------------------|--|
| $e^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{a+i\xi}$ |
| $e^{-at}u(-t)$ | $\frac{1}{a-i\xi}$ |
| $e^{-a t }$ | $\frac{2a}{a^2+\xi^2}$ |
| e^{-at^2} | $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\xi^2/4a}$ |
| $te^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{(a+i\xi)^2}$ |
| $ t e^{-a t }$ | $\frac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}$ |
| $\sin bte^{-at}u(t)$ | $\frac{b}{b^2+(a+i\xi)^2}$ |
| $\cos bte^{-at}u(t)$ | $\frac{a+i\xi}{b^2+(a+i\xi)^2}$ |
| $\frac{\cos bt}{a^2+t^2}$ | $\frac{\pi}{2a} (e^{-a \xi-b } + e^{-a \xi+b })$ |
| $\frac{\sin bt}{a^2+t^2}$ | $\frac{\pi}{2ai} (e^{-a \xi-b } - e^{-a \xi+b })$ |
| $\cos(at^2)$ | $(2a)^{-1/2} \cos(\frac{\xi^2}{4a} - \frac{\pi}{4})$ |
| $\sin(at^2)$ | $(2a)^{-1/2} \sin(\frac{\xi^2}{4a} + \frac{\pi}{4})$ |
| $\delta(t)$ | 1 |
| $\delta(t - t_0)$ | $e^{-i\xi t_0}$ |
| $\delta'(t)$ | $i\xi$ |
| $\delta^{(n)}(t)$ | $(i\xi)^n$ |
| $u(t)$ | $\pi\delta(\xi) + \frac{1}{i\xi}$ |
| $u(t - t_0)$ | $\pi\delta(\xi) + \frac{1}{i\xi}e^{-i\xi t_0}$ |
| 1 | $2\pi\delta(\xi)$ |
| a | $2\pi a\delta(\xi)$ |
| t^n | $2\pi(i)^n\delta^{(n)}(\xi)$ |
| $\frac{1}{t}$ | $\pi i - 2\pi i u(\xi) = i\pi \operatorname{sgn}(\xi)$ |
| t^{-2} | $-\pi \xi $ |
| $\frac{1}{t^n}$ | $\frac{(-i\xi)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i u(\xi)]$ |



BÖLÜM 2

KUANTUM MEKANIĞI VE SCHRÖDINGER DENKLEMİ

Kuantum mekaniğinin keşfi, ısıtılan cisimlerin ışınmasını açıklamak amacıyla 1900 yılında önerilen Planck yasası ile başlamıştır. Gelişimi Albert Einstein (1879-1955), Niels Bohr (1885-1962), Arthur H. Compton (1892-1962), Louis de Broglie (1892-1987), Werner Heisenberg (1901-1976), Max Born (1882-1970), John von Neumann (1902-1957), Paul Dirac (1902-1984) ve Wolfgang Pauli (1900-1958) gibi bilim insanlarının çalışmalarını kapsayan 27 yıllık bir döneme yayılmıştır. Schrödinger denkleminin (Erwin Schrödinger: 1887-1961) bulunmasıyla, esas olarak bugün bilinen şeklini almıştır.

Hidrojen ve helyum gibi gazların, ışınım ve soğurum spektrumlarının karmaşık yapıları, 19. yüzyılın başlarına kadar klasik fizik yasaları çerçevesinde birçok bilim adamı tarafından anlaşılamamıştır. Ancak, Niels Bohr klasik fizik yasalarını bir kenara koyup, 1912'de hidrojen atomu modelini inşa ederek atomun ışınım ve soğurum spektrumunu açıklamıştır. Fakat Niels Bohr, atom fiziğinin temel yasaları hakkında genel bir fikir verememiştir (Pais, 1991). Albert Einstein ise, "*Fotoelektrik Etki*" kuramı ile ışık ışınlarının foton adı verilen enerji paketlerinden oluştuğunu öne sürerek bir ışık demetinin, tıpkı küçük bilyeler gibi birbiri ardınca atılan parçacıklar ya da su yüzeyinde yayılan dalgalar gibi davranması gerektiğini ifade etmiştir. Bu kapsamda elektromanyetik ışınımın parçacık özelliklerine sahip bir olay olduğunu açıklamıştır (Karaoğlu 2008). Daha sonra, 1923 yılında Amerikalı Fizikçi Arthur Holly Compton, "*Compton Etkisi*" adında yeni bir özellik keşfetmiştir. Compton; bu yeni keşfettiği özellik sayesinde fotonlar arasındaki etki-leşmede sadece enerjinin korunması değil, momentumun da korunduğu sonucunu ortaya koymuştur (Dereli ve Verçin 2000). Bu araştırma sayesinde 1927 Nobel Fizik Ödülü'ne layık görülmüştür. Aynı yıllar içerisinde (1920-1927) Fransız Fizikçi Louis de Broglie, kuramsal açıdan her parçacığın aynı zamanda dalga özelliği göstermesi ve bu tür dalgaların dalga boylarının, parçacığın momentumuyla ters orantılı olması gerektiğini savunmuştur. Compton ve de Broglie'nin çalışmaları, parçacık enerjisi düşük atomların parçacık özelliği, parçacık e-

nerjisi yüksek atomların ise dalga özelliği gösterdiğini ortaya koymuştur (Budak ve Karabulut 2010). 1926 yılında Erwin Schrödinger, yeni bir fikirle ortaya çıkmış ve maddesel parçacıkların hareketini bir dalga denklemiyle ifade etmiştir. Bu ifadeye göre, bir elektronun parçacıktan çok, dalga olarak kabul edilmesi gerektiğini savunmuştur. Bu anlamda Schrödinger, Niels Bohr'un elektron yörüngelerinin daha anlamlı olacağını ileri sürmüştür. 1926 yılında Schrödinger denkleminin de içinde yer aldığı "*Quantization as an Eigenvalue Problem (Bir Özdeğer Sorunu Olarak Kuantizasyon)*" makalesini yayımlamıştır. Bu makale ile Schrödinger Denklemi bilim dünyasına giriş yapmıştır (Schrödinger 1926). Daha sonra Schrödinger, elektronları atomun içerisinde ve dışarısında madde dalgalarının sürekli hareketini öngören bir model tasarlamıştır. Kinetik enerjinin, (hareket enerjisi) klasik ifadesini; potansiyel enerjinin (konum enerjisi) klasik ifadesine ekleyerek Hamilton işlemcisini dalga fonksiyonuna uygulayıp işlemcinin fonksiyona nasıl dönüştüğünü göstermiştir (Schrödinger 1935). Schrödinger'in kuantum kuramı, açıklık kazandırmaya çalıştığı atom modeline göre orbital üzerinde yer alan elektronun, atom çekirdeğinin etrafını kuşatan bir enerji dalgasına benzetilmiştir. Schrödinger, atom çekirdeğini kuşatan bu enerji dalgasının durağan bir dalga oluşturması gerektiğini savunmuştur. Schrödinger adıyla aynı olan denklemde, denklemi sağlayan herhangi bir sayının, o sayıya denk gelen enerji seviyesini belirttiğini ve her dalga fonksiyonunun, o enerji halindeki sabit bir durumu temsil ettiğini savunmuştur (Schrödinger 1936). Zaman içerisinde Fizikçiler Schrödinger'in bu görüşüne "*Dalga Mekanikliği*" adını vermişlerdir. Schrödinger'in dalga mekaniğiyle ortaya koyduğu yeni görüşü, kuantum kuramına önemli katkılar veren Alman Fizikçi Werner Heisenberg'in matris mekaniğinin matematiksel dengi olduğu ileri sürülmüştür. Heisenberg'in Belirsizlik İlkesi (Uncertainty Principle) olarak ifade ettiği kuramına göre, atom altı bir parçacığın momentumu ve konumu ayrı ayrı belirlenebilir fakat ikisini birden aynı anda kesin olarak belirlemek mümkün değildir (Heisenberg 1983).

Günümüzde Schrödinger denklemi denilince insanların aklına gelen bir düşünce deneyidir. Schrödinger, bu düşünce deneyini 1935'te yayımlanan "*On the Present Situation in Quantum Mechanics (Kuantum Mekanikliğinin Şu Anki Durumu)*" başlıklı "*entanglement*" (dolanıklık) terimini kullandığı makalesinde önermiştir (Schrödinger 1935). Entanglement, iki ya da daha fazla parçacığın aynı kuantum durumuyla ifade edildiği durumlarda bu parçacığa bir etki olduğunda diğer parçacıkların da anında etkilenmesidir. Schrödinger'in deneyine göre bir kedi; radyoaktif madde, Geiger sayacı ve kapalı bir zehir şişesiyle

birlikte bir kutuya konur. Kapalı kutunun içindeki radyoaktif maddenin parçacık olarak bozunma olasılığı, bir zamanlayıcı yardımıyla tam olarak yarı yarıya olacak şekilde ayarlanmıştır. Düzenek, Geiger sayacının bozunmuş bir parçacığı tespit etmesi durumunda, zehir şişesinin kırılacağı, zehrin serbest kalacağı ve kedinin öleceği şeklinde tasarlanmıştır. Ancak bozunum gerçekleşmezse kedi yaşamaya devam edecektir. Schrödinger'in kuantum ölçüm kuramına göre kutu açılana kadar kedinin ölü ya da canlı olma durumu Geiger sayacının durumuyla dolanık olacaktır. Bu yüzden zamanlayıcı çalışana, araştırmacı kutuyu açana, kedi ve sayacın kuantum durumu iki olasılıktan birine çökene kadar kedi canlı ve ölü kuantum (*superposition*-üst üste gelme) durumunda olacaktır. Bu ikilemin dikkat çektiği başka bir nokta da mikroskobik ve makroskobik ölçekte olanlar arasındaki uyumsuzluktur. Schrödinger 1935'te yayımladığı makalesinde belirttiği gibi atom ölçeğindeki belirsizlik insan boyutları ölçeğinde dolanıklıkla ilişkiliniyordu (Schrödinger 1935). Bu tarz makroskobik durumlar var olmadığı için benzer şekilde mikroskobik ölçekteki belirsizlikler varolmamalıydı. Bu ikilemli kedi deneyi, bilim dünyasına "Schrödinger'in Kedisi" tabiriyle girmiştir ve kuantum mekaniğinin anlaşılmasında büyük rol oynamıştır (Lubkin 1979).

Kuantum Mekaniği 20. yüzyılın teknoloji gelişmelerine de kaynaklık etmiştir. Atomik saatler, dünyanın en hassas saatleridir. Bu saatler, elektronların belirli enerji seviyelerinden sıçramaları için gereken radyasyon frekanslarını kullanırlar. Bunun için de kuantum teorisini kullanarak zamanı takip ederler. Kuantum mekaniği bilgi güvenliği ve şifreleme yöntemlerinde de kullanılır. Şifre kodlamalarında geleneksel kriptografi (şifrebilim) anahtarlar kullanılır ve gönderici bir anahtar kullanarak şifreyi kodlar, alıcı ise bir diğer anahtarı kullanarak şifreyi çözer. Ancak bu süreçte birilerinin anahtarları yakalamasına ve şifre kodlarını ele geçirmesine engel olmak çok zordur. Bu sorun, kuantum anahtar dağıtımı (QKD) olarak bilinen yöntemle potansiyel olarak çözülebilir. QKD'de bilgiler fotonlarla gönderilir ve bu fotonlar rastgele kutuplanmışlardır. Kutuplanma, fotonun sadece bir düz-lemde titreşmesine neden olur. Örneğin "yukarı aşağı" veya "sağa sola" gibi... Alıcı kutuplu filtreler kullanarak şifreyi kırabilir ve sonrasında da seçili bir algoritma aracılığıyla bir mesajı güvenle şifreleyebilir. Gizli veri halen normal iletişim kanallarıyla iletilebilir; ancak elinde birebir aynı kuantum anahtarı olmayan hiç kimse bu şifreyi kıramaz. Süper-Güçlü Bilgisayarlar olarak bilinen Kuantum Bilgisayarları da kuantum

mekanikinin teknolojiye büyük katkılarında biridir. Standart bir bilgisayar bilgiyi ikili basamaklarla (1 ve 0'larla veya bitlerle) kodlarken, kuantum bilgisayarlar kuantum bitleri (kubitler) kullanarak işlem gücünü katlayarak arttırırlar. Çünkü kubitler, belli kuantum durumlarının süperpozisyonu ile çalışırlar. Son yıllarda kuantum mekaniği üzerine yapılan çalışmalar yeni buluşlara da kaynaklık etmiştir. Kuantum bilgisayarlar ve teleskoplar sayesinde dünyanın ilk kara delik fotoğrafı yayımlanmıştır. Yine son zamanların en önemli icatlarından biri de kuantum mikrofondur. Bu mikrofona "fonon" denilen bireysel ses partikülünü ölçebilecek kadar hassastır. Birçok bilim adamı, ilerleyen zamanlarda kuantum mikrofununun, kuantum aygıtlar için yeni tip kuantum sensörlerin ve depolama cihazlarının oluşturulmasına olanak sağlayabileceği görüşündedir.

Gelişmiş mikroskoplar, biyolojik pusulalar, medikal görüntüleme, nükleer görüntüleme, nanoteknoloji, biyoteknoloji, mikroelektronik aygıtlar, nükleer enerji, tomografi ve lazer gibi sistemler de kuantum mekaniğinin kullanım alanlarına örnek olarak verilebilir.

2.1 SCHRÖDINGER DENKLEMİ

Bu bölümde sunulan bilgi ve şekiller ağırlıklı olarak (Karaoğlu 2008) ve (Verçin 2000) kaynaklarından alınmıştır.

Klasik mekanikte bir parçacığın hareket durumu, parçacığın zamana göre fonksiyonu ile belirlenir. Kuantum mekaniğinde ise parçacığın hareket durumu dalga fonksiyonu ile belirlenir. Her iki durum içinde asıl sorun, hareketin zamanla nasıl değiştiğidir. Dolayısıyla her iki durumu da ifade eden hareket denklemlerini yazmak oldukça önemlidir. Klasik fizikte parçacığın durumu Newton'un ikinci kanunu, yani $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ile ifade edilir. Kuantum mekaniğinde ise parçacığın durumunu Schrödinger denklemiyle ifade edebiliriz. Fakat bir parçacığın durumunu ve zamanla nasıl bir değişim gösterdiğini ifade eden Zamana Bağlı Schrödinger Denklemi çözmek biraz zor olduğu için, kararlı dalgalar kullanılarak bu denklem Zamandan Bağımsız Schrödinger Denklemine dönüştür. Bu denklemi elde edebilmek için kararlı dalga, kararlı durumlar gibi bazı kavramları bilmemiz gerekir.

2.1.1 Kararlı Dalga

Kuantum mekaniğinin ilgilendiği en önemli nicelik, bir parçacığın dalga fonksiyonudur. O halde x eksenine doğrultusunda hareket eden iki sinüsel dalga göz önüne alalım. Kararlı

dalga (duran dalga) iki sınır arasında gelen ve yansıyan dalgaların üst üste binmesi sonucu oluştuğu için bu dalgalardan biri $+x$ yönünde, diğeri $-x$ yönünde ilerler.

Bu dalgalar sırasıyla aşağıdaki dalga denklemlerine sahiptirler:

$$\psi_1(x, t) = B \sin(kx - wt), \quad (2.1)$$

$$\psi_2(x, t) = B \sin(kx + wt). \quad (2.2)$$

Bu iki dalga bir doğru üzerinde birlikte ilerliyorsa, oluşan bileşke dalga, bu dalgaların cebirsel toplamı olur ve bu toplam

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = B [\sin(kx - wt) + \sin(kx + wt)] \\ &= B \left[2 \sin \frac{(kx - wt) + (kx + wt)}{2} \cos \frac{(kx - wt) - (kx + wt)}{2} \right] \\ &= 2B(\sin kx \cos wt) \end{aligned}$$

eşitliği ile verilir. Bu denklemde, $A = 2B$ olarak alınırsa,

$$\psi(x, t) = A(\sin kx \cos wt) \quad (2.3)$$

olur. Bu eşitlik, denklemin kararlı bir dalga denklemi olduğunu gösterir.

2.1.2 Dalga Fonksiyonu ve Özellikleri

Klasik fiziğe göre, bir sistemin herhangi bir andaki dinamik durumu, o sistemin konum ve momentum gibi dinamik değişkenlerinin bilinmesiyle belirlenebilir. Çünkü klasik fiziğe göre, bir sistemin, örneğin, konum ve momentum gibi dinamik değişkenleri aynı anda hiçbir belirsizlik içermeyecek şekilde ölçülebilir. Yani konum ve momentum gibi dinamik değişkenlerin ölçülerek bulunan değerleri, ölçüm düzeneklerinden etkilenmez. Fakat bu durum kuantum kuramında böyle değildir. Bir kuantum parçacığının konum ve momentumu aynı anda ölçüldüğünde, sonuç daima Heisenberg belirsizlik ilkesi kadar bir belirsizlik içerir. Bu nedenle kuantum sisteminin durumu, sisteme ilişkin dinamik değişkenlerin ölçülmesiyle tam olarak belirlenemeyebilir. Bu durumu belirleyen nicelik ise dalga fonksiyonudur. Böyle bir fonksiyon gerçek ya da sanal olabilir ve göz önüne alınan kuantum sisteminin dinamik değişkenlerine ilişkin bilgileri içerir.

İncelemeye çalıştığımız herhangi bir tanecik hakkındaki bütün bilgiler, $\psi(x, y, z, t)$ dalga fonksiyonu kullanılarak bulunur. Parçacığın incelenmekte olan özelliği zamanla değişmiyorsa, zaman bir değişken olmaktan çıkar. Böyle kararlı haller, zamana bağlı olmayan

$\psi(x, y, z)$ dalga fonksiyonu ile karakterize edilir. Dalga fonksiyonu için birçok matematiksel fonksiyon olabileceği için bunların içinde parçacığın özelliğini belirleyebilecek fonksiyonlar seçilmelidir. Bundan dolayı seçilecek fonksiyonun aşağıdaki bazı şartlara uyması gerekir. Bu tip dalga fonksiyonlarına *uyumlu* ya da *iyi davranışlı dalga fonksiyonları* denir.

1. Fonksiyon ve türevi sürekli olmalıdır. Yani değişkenin her değeri için fonksiyon ve türevi belirli değere sahip olmalıdır. Aksi halde değişkenin, örneğin x 'in belirli bir değerinde sistemin bu noktadaki özelliği belirsiz olur.
2. Değişkenin herhangi bir değerine karşılık fonksiyonun tek bir değeri olmalıdır. Aksi halde parçacığın aynı anda birden fazla yerde bulunabilmesi gibi istenmeyen sonuca varabiliriz.
3. Dalga fonksiyonu sonlu olmalıdır.
4. Fonksiyon normalize edilebilir olmalıdır.

Sistemdeki bütün parçacıkların yerleşim koordinatları ve zaman, sistemin durumunu tam olarak eş zamanlı tanımlar. Bu tanım spin gibi iç koordinatları içermelidir. Kuantum mekaniğinde sistemin durumunu eş zamanlı tanımlamanın başka bir yolu ise kuantum sayıları olarak isimlendirilen etiket setlerini tanımlamaktır. Ölçülebilir niceliklerin değerleri bu sayılardan hesaplanabilir; böylece bu sayıların n, l, m, \dots gibi belirlenmesi sistemi eş zamanlı olarak tanımlar. Bu sayede dalga fonksiyonu, koordinat ve zamanın uzun bir matematiksel fonksiyonu ile belirlenebilir.

2.2 TEK BOYUTTA ZAMANA BAĞLI SCHRÖDINGER DENKLEMİ

m kütleli bir parçacığın \vec{x} yer değiştirmesi ona etkiyen F kuvveti, $\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ formülü ile tanımlanır. Aynı şekilde v hızı ile x yönünde yayılan bir dalganın klasik dalga denklemi ise

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ile verilir. Buna karşılık olarak kuantum fiziğinde momentumu p , enerjisi E olan bir parçacık dikkate alalım. Bu parçacığın tek boyutlu dalga fonksiyonu,

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

ifadesinde $k = p/\hbar$ ve $w = E/\hbar$ alındığında

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar - Et/\hbar)} \quad (2.4)$$

şeklinde yazabilir. Burada \hbar Plank sabiti, w frekans, k ise dalga sayısıdır. Parçacığın toplam enerjisi

$$E_T = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_x^2 + V(x) = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \quad (2.5)$$

olur. Bu denklemin her iki tarafını ψ dalga fonksiyonu ile sağdan çarparsak,

$$E_x\psi = \frac{p_x^2\psi}{2m} + V(x)\psi \quad (2.6)$$

olur. Şimdi bu denklemdaki $E_x\psi$ ve $p_x^2\psi$ değerlerini bulalım.

Burada ψ dalga fonksiyonu için klasik dalga denkleminde olduğu gibi bir diferansiyel denklem elde etmeyi ve bu denklemi belirli durumlar için çözmeyi amaçlıyoruz. O halde

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar - Et/\hbar)}$$

ifadesinden ψ 'nin x 'e göre ikinci türevi

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[Ae^{i(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar})} \right] = i^2 \frac{p_x^2}{\hbar^2} Ae^{i(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar})} = -\frac{p_x^2}{\hbar^2} \psi p_x^2 \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

olur. ψ 'nin zamana göre türevi ise,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[Ae^{i(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar})} \right] = i \frac{E}{\hbar} \left[Ae^{i(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar})} \right] = -i \frac{E}{\hbar} \psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi \quad (2.8)$$

olur. (2.7) ve (2.8) denklemlerini (2.6) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right) + V\psi \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur. Bu denklem tek boyutta zamana bağlı Schrödinger denklemdir. Aynı zamanda bu denklem, II. mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Üç boyutta,

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) + V\psi \quad (2.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada V , hem x , y , z hem de t 'nin bir fonksiyonu olabilir.

2.3 TEK BOYUTTA ZAMANDAN BAĞIMSIZ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

Serbest bir parçacığın tek boyutlu ψ dalga fonksiyonunu,

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= Ae^{i\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)} = Ae^{(i/\hbar)(px)} e^{(-i/\hbar)(Et)} \\ &= Ae^{(i/\hbar)x} e^{(-i/\hbar)t} = \psi(x) e^{(-i/\hbar)t}\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin zamana göre türevini alınıp ve zamana bağlı Schrödinger denkleminin (2.9)'da yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi(x, t) \left(\frac{-iE}{\hbar} \right) e^{(-i/\hbar)t}$$

ve

$$i\hbar \left[-\psi(x, t) \frac{iE}{\hbar} e^{(-i/\hbar)t} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{(-i/\hbar)t} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) e^{(-i/\hbar)t},$$

$$E\psi(x) e^{(-i/\hbar)t} = e^{(-i/\hbar)t} \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) \right),$$

$$E\psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi,$$

düzenlemeleri yapılırsa, tek boyutta zamandan bağımsız

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (2.11)$$

Schrödinger denkleminin elde edilir. Kararlı dalga fonksiyonunun sadece uzaysal kısmı alınarak da bu denklem elde edilebilir. ψ 'nin uzay kısmı

$$\psi(x) = A \sin kx$$

şeklinde. x 'e göre iki kez türev alınırsa

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = Ak \cos kx,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A \sin kx = -k^2 \psi$$

elde edilir. Kinetik enerji denklemini

$$E_k = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.12)$$

yazar ve yukarıdaki denklemde $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ yerine konursa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin elde edilir.

2.4 SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Schrödinger denkleminin çözümlerinin incelendiği kuantum sistemleri, genel olarak zamana bağlı ve zamandan bağımsız kuantum sistemleri diye iki ayrı grupta toplanır. Zamana bağlı olmayan kuantum sistemi, hiçbir kuvvetin etkisi altında kalmadan hareket edebilen parçacıkların oluşturduğu bir sistem demektir. Bir sisteme etki eden kuvvet potansiyel gradienti ile ölçüldüğü için, sistem üzerine etki eden bir kuvvet yoksa potansiyel gradient de yoktur. Buna göre, zamana bağlı olmayan bir sistem, potansiyel gradientinin sıfır olduğu bir uzayda hareket eden parçacıkların oluşturduğu sistemdir ve böyle bir uzayda hareket eden parçacıklar serbest parçacıklardır.

Böyle bir serbest parçacığı niteleyen zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin tek boyutlu x uzayındaki biçimi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

idi. Bu denklem zamana içermediği için, sistemin kararlı durumunu belirler. Bu denklemin çözümü toplam enerji E ile potansiyel enerji V arasındaki ilişkiye bağlı olarak ortaya çıkar. Öte yandan, sistem kararlı durumda olduğu için $\psi(x)$ dalga fonksiyonları sistemin kabul edilebilir fonksiyonları olmalıdır. Yani denklemi sağlayan $\psi(x)$ fonksiyonları ile türevleri; sürekli, sonlu ve tek değerli olmalıdır. (2.11) denkleminin çözümleri sistemin hareketinin yönünü belirlemez. Sistemin hareketinin yönünü belirlemek için olasılık akım yoğunluğu kullanılır. Olasılık akım yoğunluğu bağıntısı ise,

$$j(x) = -\frac{\hbar}{2mi} \left[\psi(x)^* \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x)^*}{\partial x} \psi(x) \right] \quad (2.13)$$

formülü ile verilir.

Zamana bağlı olmayan sistemin tersi zamana bağlı sistemdir. Örneğin, x eksenini boyunca hareket eden bir parçacığı ele alalım. Bu parçacığın hareketi, potansiyel enerjiyi uygun bir biçimde seçerek x uzayının belli bir bölgesinde sınırlandırılabilir. Bu durumdaki parçacık tümüyle serbest değildir. Bu tür parçacıklardan oluşan sisteme zamana bağlı kuantum sistemi denir. Bu sistemlere ilişkin Schrödinger denkleminin çözümü, bazı özel koşullara bağlı olarak çözümlenir.

2.4.1 Zamandan Bağımsız Sistemlerde Schrödinger Denkleminin Çözümü

Tek boyutlu x uzayında hiçbir kuvvetin etkisinde kalmadan hareket eden m kütleli parçacığı ele alalım. Bu parçacık, x eksenini boyunca $-\infty$ ile $+\infty$ arasında serbestçe hareket ediyor olsun. Bu parçacığı niteleyen Schrödinger Denklemi (2.11) bağıntısıdır ve genelde V potansiyel enerjisini 0 seçmek çözümü değiştirmeyeceği için (2.11) bağıntısını

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x) \quad (2.14)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada $k = (\frac{2mE}{\hbar^2})^{1/2}$ dir. (2.13) denklemini sağlayan $\psi(x)$ fonksiyonu, A ve B birer sayı olmak üzere

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2.15)$$

biçiminde bir fonksiyondur. $\psi(x)$ fonksiyonunun tam olarak belirlenmesi A ve B katsayılarının belirlenmesine bağlıdır. Parçacığın toplam enerjisi (2.12) bağıntısından dolayı $E \geq 0$ koşulunu sağlar. Bu koşula göre, E 'nin alacağı değerlerde hiçbir kısıtlama yoktur. E , 0 ile ∞ arasında sürekli değer alır. Ayrıca durum fonksiyonunun zamana bağlılığı,

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (2.16)$$

ile verilmektedir. Burada $E = \hbar\omega$ seçilir ve $\psi(x)$ için de (2.15) bağıntısı kullanılırsa,

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)} \quad (2.17)$$

yazılır. Şimdi bu fonksiyonun fiziksel özelliklerini inceleyelim.

i) B=0 olsun. Bu durumda

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad (2.18)$$

olacaktır. Parçacığın t anında ve x konumundaki olasılık yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \psi(x, t)^* \psi(x, t) \\ &= A^* e^{-i(kx-\omega t)} A e^{i(kx-\omega t)} \\ &= A^* A = |A|^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

dir. Öte yandan (2.13) bağıntısı kullanılarak bulunan olasılık akım yoğunluğu,

$$j(x, t) = (\hbar k/m) |A|^2 \quad (2.20)$$

dir. Yani hem olasılık yoğunluğu hem de olasılık akısı konumdan bağımsızdır. Parçacığın toplam enerjisi kinetik enerji türünde olduğundan (2.12) bağıntısı kullanılarak parçacığın momentumu için

$$P_x = \hbar k = mv \quad (2.21)$$

eşitliği bulunur. O halde, x eksenini boyunca serbestçe hareket eden parçacığın hızı

$$v = \hbar k/m \quad (2.22)$$

dir. Bu eşitlik (2.20) bağıntısında yerine yazılırsa

$$j(x) = v |A|^2 \quad (2.23)$$

bulunur. Yani, olasılık akısı parçacığın hızı yönündedir. Bu sonuç parçacığın hareket yönünü belirler. (2.18) dalga fonksiyonu bir düzlemsel dalga denklemini belirlediği için açısal frekansı,

$$\omega = E/\hbar = k^2 \hbar/2m \quad (2.24)$$

olmalıdır. Buradan evre ve grup hızları için sırasıyla

$$v_e = \omega/k = \hbar k/2m = v/2 \quad (2.25)$$

ve

$$v_g = d\omega/dk = \hbar k/m = v \quad (2.26)$$

değerleri bulunur. O halde, $B=0$ durumunda, düzlemsel dalga $+x$ yönünde ilerleyen bir titreşimdir. (2.19) bağıntısıyla elde edilen sonuca göre, olasılık yoğunluğu hem konumdan hem de zamandan bağımsızdır. Dolayısıyla parçacığın konumu tam olarak belirlenemez. Fakat (2.20) bağıntısına göre momentum tam olarak belirlenebilir. Bu bizi Heisenberg belirsizlik ilkesine götürür.

$\Delta P_x = 0$ olduğu için $\Delta x = \infty$ dur. Demek ki (2.18) dalga fonksiyonu momentumu tam olarak bilinen ve sonsuz uzunluktaki bir demet içinde $+x$ yönünde herhangi bir yere giden bir parçacığın hareketini belirler.

ii) $A=0$ olsun. Bu durumda $\psi(x, t)$ fonksiyonu,

$$\psi(x, t) = B e^{-i(kx + \omega t)} \quad (2.27)$$

halini alır. Bu dalga fonksiyonu düzlemsel bir dalgayı temsil eder. Olasılık yoğunluğunu ve olasılık akısını hesaplırsak

$$\begin{aligned}
P(x, t) &= \psi(x, t)^* \psi(x, t) \\
&= B^* e^{-i(kx+\omega t)} B e^{-i(kx+\omega t)} \\
&= B^* B = |B|^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

ve

$$j(x) = -v |B|^2 \tag{2.29}$$

elde edilir. Yani, olasılık akısı $-v$ yönündedir ve $-x$ yönünde hareket etmektedir. Bu durumda, olasılık yoğunluğu konum ve zamandan bağımsız olduğu için parçacığın konumu tam olarak belirlenemez. Yine (2.21) bağıntısına göre momentum tam olarak belirlenebilir. $\Delta P_x = 0$ olduğu için $\Delta x = \infty$ dur. Demek ki (2.27) dalga fonksiyonu momentumu tam olarak bilinen ve sonsuz uzunluktaki bir demet içinde $-x$ yönünde herhangi bir yere giden bir parçacığın hareketini belirler.

iii) $\mathbf{A=B}$ olsun. Bu durumda dalga fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= A(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx+\omega t)}) \\
&= C e^{-i\omega t} \cos kx
\end{aligned} \tag{2.30}$$

olacaktır. Burada $C = 2A$ 'dır. Farklı yönlerde ilerleyen iki düzlem dalganın toplamı bir duran dalgayı temsil etmektedir. Buna göre x eksenini boyunca değişmez kalan düğüm noktaları, $\cos kx$ 'i sıfır yapan x değerleridir. Yani

$$x_n = \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{k} \right), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{2.31}$$

dır. Bu durumda olasılık yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(x, t) &= \psi(x, t)^* \psi(x, t) \\
&= C^* \cos kx C \cos kx \\
&= |C|^2 \cos^2 kx
\end{aligned} \tag{2.32}$$

dır.

$A=B$ olduğu için $+x$ yönünde ilerleyen bir düzlem dalgada olasılık akısı $+v|A|^2$ ve $-x$ yönünde ilerleyen bir düzlem dalgada da $-v|A|^2$ dir. O halde, herhangi bir x konumundan geçen bir parçacığın birim zamandaki toplam olasılık akısı sıfırdır. Yani bu fonksiyon x eksenini boyunca hareket eden ve momentumu $P_x = k\hbar$ olan ancak yönü belirlenemeyen bir serbest parçacığa karşılık gelir.

iv) $\mathbf{A}=-\mathbf{B}$ olsun. O halde durum fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= Ae^{i(kx-\omega t)} - Ae^{-i(kx+\omega t)} \\ &= 2iAe^{-i\omega t} \sin kx\end{aligned}\quad (2.33)$$

dir. Burada $D=2iA$ alınırsa

$$\psi(x, t) = De^{-i\omega t} \sin kx \quad (2.34)$$

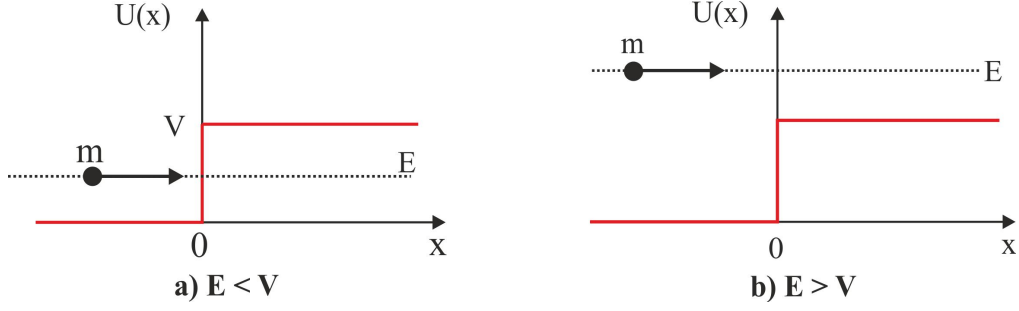
gibi başka bir duran dalga elde edilir. Herhangi bir x konumundaki olasılık yoğunluğu,

$$\begin{aligned}P(x, t) &= \psi(x, t)^* \psi(x, t) \\ &= D^* e^{-i\omega t} \sin kx D e^{-i\omega t} \sin kx, \\ &= |D|^2 \sin^2 kx\end{aligned}\quad (2.35)$$

dir ve $x_n = n(\frac{\pi}{k})$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) noktalarında sıfırdır. Bu durumda olasılık akım yoğunluğu yine sıfırdır. Yani (2.33) ile verilen duran dalga, x eksenini boyunca hareket eden ve momentumunun büyüklüğü bilinen ancak hareket yönü belirlenemeyen bir serbest parçacığı temsil etmektedir.

2.4.1.1 Basamak Potansiyeline Doğru Gelen Bir Parçacık

Yüksekliği sonlu büyüklükte olan potansiyel basamağındaki parçacığın hareketini ele alalım. Potansiyel basamağının yüksekliği V ve bu basamağa doğru gelen m kütleli parçacığın enerjisi E olsun. Klasik kurama göre, bu parçacık basamağa doğru $E < V$ olacak şekilde gelirse, $x = 0$ daki engelden geri döner. Yani, parçacık $x > 0$ bölgesine geçemez. Eğer parçacık $x > 0$ bölgesine geçerse, $E = E_k + V$ biçimindeki toplam enerji V 'den küçük olur. Bu durum parçacığın kinetik enerjisinin negatif bir değer alması, yani çizgisel momentumun sanal olması demektir. Fakat parçacığın çizgisel momentumun sanal olması klasik fizikte anlamsızdır. Bu durumu kuantum parçacığını ele alarak açıklamaya çalışabiliriz.



Şekil 2.1 V yüksekliğindeki basamak potansiyeline doğru gelen parçacık

Potansiyel basamağı, zamandan bağımsız olduğu için parçacığın hareketi (2.16) durum fonksiyonu ile belirlenir. O halde, (2.16) denkleminin çözümü aranırken Şekil 2.1 deki veriler kullanılarak,

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V & x > 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

sınır koşulları gözönüne alınmalıdır. Ayrıca, parçacığın toplam enerjisi sıfırdan küçük olamayacağı için, ya $E < V$ ya da $E > V$ koşullarında çözüm aranmalıdır.

i) $E < V$ Durumu

Bu durumda kuantum parçacığı, (Şekil 2.1a)' da görüldüğü gibi, potansiyel basamağına sol taraftan yaklaşıyor demektir. Buna göre (2.14) denklemi,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -k_1^2\psi(x) \quad (2.37)$$

biçiminde yazılır. Burada $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ olarak alınmıştır. Bu durum (2.36) deki $x < 0$ koşuluna uygundur. Öte yandan, $x > 0$ bölgesi için geçerli olan Schrödinger denklemi,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = k_2^2\psi(x) \quad (2.38)$$

dir. Burada $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$ olarak alınmıştır. (2.37) denklemi, serbest bir parçacık için (2.14) denklemi ile aynı biçimdedir. Bu nedenle $x < 0$ bölgesinde denklemi sağlayan genel çözüm,

$$\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (2.39)$$

şeklindedir.

$x > 0$ bölgesinde $E < V$ olduğu için, (2.38) denklemini sağlayan çözüm,

$$\psi(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \quad (2.40)$$

biçimindedir. Fakat Schrödinger denkleminin sağlanması için x 'in her değerinde sonlu değer alması gerekir. x sonsuza giderken e^{k_2x} de sonsuza gittiğinden $C = 0$ alınmalıdır. O halde, $x > 0$ bölgesindeki dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = De^{-k_2x} \quad (2.41)$$

olur. Fakat (2.39) ve (2.41) dalga fonksiyonlarının tam olarak belirlenebilmesi için A , B , D katsayıları bulunmalıdır. Şekil 2.1 e göre, $x = 0$ da hem bu iki dalga denklemini hem de türevleri sürekli olmalıdır. Bu nedenle aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

$$\begin{aligned} (Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}) &= De^{-k_2x}, \\ (iAk_1e^{ik_1x} - iBk_1e^{-ik_1x}) &= -k_2De^{-k_2x}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Bu iki koşuldan $A + B = D$ ve $A - B = i(k_2/k_1)D$ bağıntıları elde edilir. Bu iki bağıntıdan bilinmeyen üç katsayıdan ancak ikisi üçüncüsü cinsinden belirlenebilir. Bu iki bağıntı taraf tarafa toplanırsa A , çıkarılırsa B katsayısı elde edilir:

$$\begin{aligned} A &= (D/2)[1 + i(k_2/k_1)] = (D/2)[1 + i\alpha], \\ B &= (D/2)[1 - i(k_2/k_1)] = (D/2)[1 - i\alpha]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Burada $\alpha = k_2/k_1$ olarak alınmıştır.

Buna göre, aranan dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x) = \begin{cases} (D/2)(1 + i\alpha)e^{ik_1x} + (D/2)(1 - i\alpha)e^{-ik_1x} & x < 0 \\ De^{-k_2x} & x > 0 \end{cases}. \quad (2.44)$$

Bu dalga fonksiyonu için olasılık akı bağıntısı kullanarak parçacığın hareket yönü belirlenebilir. Örneğin, $x < 0$ bölgesine uyan dalga fonksiyonunun ilk terimi (2.13) bağıntısında kullanılırsa,

$$j_g = \frac{\hbar k_1}{4m} |D|^2 (1 + \alpha^2) \quad (2.45)$$

olasılık akısı elde edilir. Burada, $\frac{\hbar k_1}{m}$ hızı temsil eder. Dalga fonksiyonunun bu kesimi $+x$ yönünde ilerleyen ve dalga sayısı k_1 olan bir dalgayı belirlemektedir. Yani, dalga

fonksiyonunun bu kesimi parçacığın basamak potansiyeline doğru hareket ettiğini gösterir. Dalga fonksiyonunun ikinci terimine karşılık gelen olasılık akısı ise

$$j_y = -\frac{\hbar k_1}{4m} |D|^2 (1 + \alpha^2) \quad (2.46)$$

dir. Elde edilen olasılık akısı ilk teriminki ile aynı büyüklüktedir ancak ters işaretlidir. Bu durum dalga fonksiyonunun $-x$ yönünde ilerleyen ve dalga sayısı k_1 olan bir dalgayı temsil ettiğini gösterir. Aynı zamanda $x = 0$ noktasında V potansiyel basamağına gelerek oradan geri dönen parçacığı da belirler. Yani $E < V$ ve $x < 0$ bölgesinde potansiyel basamağına doğru gelen parçacıklar basamaktan geri dönerler.

Tanım olarak yansıyan dalganın şiddetinin (*olasılık akısının*) gelen dalganın şiddetine oranına yansıma katsayısı denir. Bu tanıma göre (2.45) ve (2.46) eşitliklerinden yansıma katsayısı

$$Y = \left| \frac{j_y}{j_g} \right| = 1 \quad (2.47)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik gelen dalganın aynen yansıdığını yani enerjisi V den küçük olan bir parçacığın $x > 0$ bölgesine geçemediğini gösterir. Bölge parçacık için yasak bölgedir. Diğer taraftan (2.44) bağıntısında,

$$e^{\pm k_1 x} = \cos k_1 x \pm \sin k_1 x$$

özdeşliği kullanılırsa, dalga fonksiyonu için

$$\psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} D(\cos k_1 x - \alpha \sin k_1 x) & x < 0 \\ D e^{-k_2 x} & x > 0 \end{array} \right\} \quad (2.48)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece $x < 0$ bölgesinde, gelen ve yansıyan dalga bir duran dalga oluşturur. Bu duran dalganın olasılık yoğunluğu, (2.48) bağıntısının birinci kısmında,

$$P_{du} = |D|^2 (\cos k_1 x - \alpha \sin k_1 x)^2 \quad (2.49)$$

olarak bulunur. Ancak $x > 0$ bölgesinde olasılık yoğunluğu, (2.48) bağıntısının ikinci kısmından

$$P_{gec} = |D|^2 e^{-2k_2 x} \quad (2.50)$$

olacaktır. Yani, gelen dalganın $x > 0$ bölgesine geçmesinin sonlu bir olasılığı vardır. Bu duruma Schrödinger dalgasının yasaklanmış bölgeye sızma olayı denir.

(2.48) bağıntısından görüldüğü üzere, klasik olarak yasaklanmış bölgeye sızan dalga k_2 niceliği tarafından kontrol edilir. Eğer, potansiyel basamağının yüksekliği yani V sonsuza yaklaşırsa, k_2 de sonsuza yaklaşır. Bu durum, yasaklanmış bölgeye sızan dalga fonksiyonunun hızlı bir biçimde sifira yaklaştığını gösterir. Klasik kurama göre, parçacığın $x > 0$ bölgesindeki toplam enerjisi, $E = \frac{p^2}{2m} + V$ eşitliği ile verilir. Bu bağıntıdan parçacığın kinetik enerjisi negatif bir değer alır. Bu durum parçacığın momentumunun sanal olduğunu gösterir ki parçacık $x > 0$ bölgesinde bulunamaz. Bu nedenle dalganın bu bölgeye sızması olayı kuantum kuramının önemli bir sonucudur.

Bir kuantum parçacığının, yasaklanmış $x > 0$ bölgesinde sonlu bir olasılıkla bulunması demek, bu parçacığın $x > 0$ bölgesinde Δx gibi bir aralığa yerleşmesi demektir. Bu aralık, kuantum parçacığının $x > 0$ bölgesindeki konumunun ölçümünde yapılan belirsizlik kadardır. Bu uzaklığı (2.50) ile verilen olasılık yoğunluğunun, ilk değerinin ($\frac{1}{e}$) kesimine düşmesi için gerekli olan uzaklık olarak tanımlayalım. O halde sızma uzaklığı denilen bu aralık (2.50) bağıntısından,

$$\Delta x = (1/2k_2) = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V-E)}} \quad (2.51)$$

olarak bulunur. O halde Heisenberg belirsizlik ilkesine göre $\Delta P_x = \hbar/2\Delta x = \sqrt{2m(V-E)}$ bulunur. V değişmez bir sayı olduğu için toplam enerjideki belirsizlik, $\Delta E = (\Delta P_x)^2/2m = (V-E)$ olur. Bu bağıntıya göre, toplam enerjinin potansiyel enerjiden kesin olarak küçük olduğu söylenemez. O halde $x = 0$ bölgesinde yüksekliği V olan engele doğru gelen dalga $x > 0$ bölgesine geçebilir. O halde olaya dalga gözüyle bakılırsa, klasik kurama ters düşen bir durum gözlenmez.

Şimdi de $x = 0$ bölgesindeki engele gelen parçacığın $x > 0$ bölgesine sızması olayını parçacık gözüyle ele alalım. İlk olarak $V > E$ olduğu için, $x = 0$ bölgesindeki engele gelen parçacığın $x > 0$ bölgesine sızması ve o bölgede Δx kadar yol alması için enerji kazanması gerekir. Parçacık kazandığı bu enerjinin $V - E$ kısmını potansiyel engelini aşmakta kullanacak ve geri kalan kısmı ile de Δx kadar yol alacaktır. Demek ki, parçacık $x = 0$ konumuna geldiğinde birdenbire

$$(V - E) + E_k \quad (2.52)$$

gibi bir enerji kazanacaktır ki bu durum enerjinin korunumu yasasına ters düşer.

ii) $E > V$ Durumu

Şekil 2.1b de görüldüğü üzere, parçacık sol taraftan, $x = 0$ noktasında yüksekliği V olan basamağa doğru geliyor olsun. Bu durumda Schrödinger denklemi,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = -k_1^2 \psi(x), \quad x < 0 \quad (2.53)$$

ve

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = -k_2^2 \psi(x), \quad x > 0 \quad (2.54)$$

biçimindedir. Bu iki denklem (2.37) ile verilen denkleme özdeştir. O halde, bu denklemleri sağlayan dalga fonksiyonu

$$U(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & x < 0 \\ Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} & x > 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

şeklinde olmalıdır. Burada $x < 0$ bölgesi için verilen dalga fonksiyonu genel bir çözümdür. Çünkü, $x < 0$ bölgesinde $x = 0$ noktasındaki basamağa doğru ilerleyen bir dalga basamaktan geri yansiyabilir. Ancak, bu durum $x > 0$ bölgesinde $+x$ yönünde ilerleyen bir dalga için geçerli değildir. Yani, $x > 0$ bölgesinde yüksekliği her yerde V olan bir basamak üzerinde ilerleyen dalganın geri yansımaları mümkün değildir. Bu nedenle, (2.55) eşitliğinde $x > 0$ bölgesi için önerilen dalga fonksiyonunda ikinci terimin olmaması, bunun için de D nin sıfır olması gerekir. Böylece $E > V$ durumunda Schrödinger denklemini sağlayan dalga fonksiyonu,

$$U(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & x < 0 \\ Ce^{ik_2x} & x > 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

olacaktır. Şimdi A, B, C katsayılarını belirleyelim. (1.39) koşullarından $A + B = C$ ve $A - B = \alpha C$ denklemleri elde edilir. Burada $\alpha = \frac{k_1}{k_2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{2}(1 + \alpha), \\ B &= \frac{C}{2}(1 - \alpha) \end{aligned} \quad (2.57)$$

olur. O halde, aranan dalga fonksiyonu, yalnızca C katsayısı cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2}(1 + \alpha)e^{ik_1x} + \frac{C}{2}(1 - \alpha)e^{-ik_1x} & x < 0 \\ Ce^{ik_2x} & x > 0 \end{cases}. \quad (2.58)$$

$x < 0$ bölgesi için bulunan dalga fonksiyonunun birinci terimi, bu bölgede potansiyel basamağına doğru gelen dalgayı ve ikinci terimi de potansiyel engelinden geri yansıyan dalgayı ifade etmektedir. O zaman bu terimlerin olasılık akıları

$$j_g = \frac{\hbar k_1}{4m} |C|^2 (1 + \alpha^2) \quad (2.59)$$

ve

$$j_g = -\frac{\hbar k_1}{4m} |C|^2 (1 - \alpha^2) \quad (2.60)$$

değerlerini alırlar. O halde (2.47) ile tanımlanan yansıma katsayısı

$$Y = \left| \frac{j_y}{j_g} \right| = \frac{(1 - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)} \quad (2.61)$$

değerini alır. Diğer yandan $x < 0$ bölgesine geçen dalga için olasılık akısı

$$j_{gec} = \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2 \quad (2.62)$$

olarak hesaplanır. Tanım olarak, $x > 0$ bölgesine geçen dalganın şiddetinin (*olasılık akısının*) gelen dalganın şiddetine oranına geçme katsayısı denir. Bu tanıma göre $x > 0$ bölgesi için geçme katsayısı

$$G = \left| \frac{j_{gec}}{j_g} \right| = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha^2)} \quad (2.63)$$

bulunur. (2.61) ve (2.63) eşitliklerinden $Y \neq 0$ ve $G \neq 1$ dir. Fakat klasik kurama göre $Y = 0$ ve $G = 1$ olmalıdır. O zaman bu durum bize $x = 0$ noktasına gelen dalganın tümüyle $x > 0$ bölgesine geçemediğini gösterir. Diğer yandan, Y ve G katsayılarının toplamının

$$Y + G = \frac{(1 - \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)} + \frac{4\alpha}{(1 + \alpha^2)} \quad (2.64)$$

olduğu görülür. Yani, gelen dalganın olasılık akısı $x = 0$ noktasında yansıyan akı ve geçen akı diye ikiye bölünür. Bu durum kuantum parçacıklarının dalga özelliği göstermelerinden kaynaklanır.

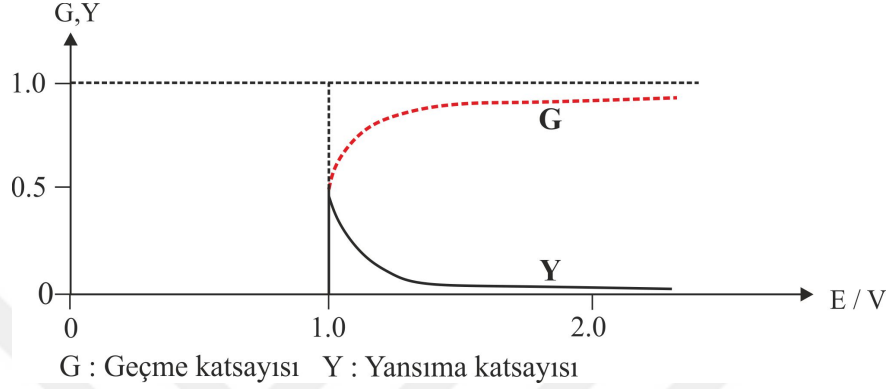
Öte yandan, α niceliğindeki k_1 ve k_2 değerleri kullanılırsa $\alpha = [1 - (V/E)]^{\frac{1}{2}}$ olarak bulunur. Bu değeri yansıma ve geçme katsayılarında yerine yazarsak,

$$Y = \frac{\left[1 - \left(1 - \left(\frac{V}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2}{\left[1 + \left(1 - \left(\frac{V}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]^2}$$

ve

$$G = \frac{4(1 - (\frac{V}{E}))^{\frac{1}{2}}}{\left[1 + (1 - (\frac{V}{E}))^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

elde edilir. Buna göre, yansıma ve geçme katsayıları, (E/V) 'nin fonksiyonu olarak çizilirse Şekil 2.2 elde edilir.



Şekil 2.2 Y Yansıma ve G geçme katsayılarının E/V nin fonksiyonu olarak değişimi

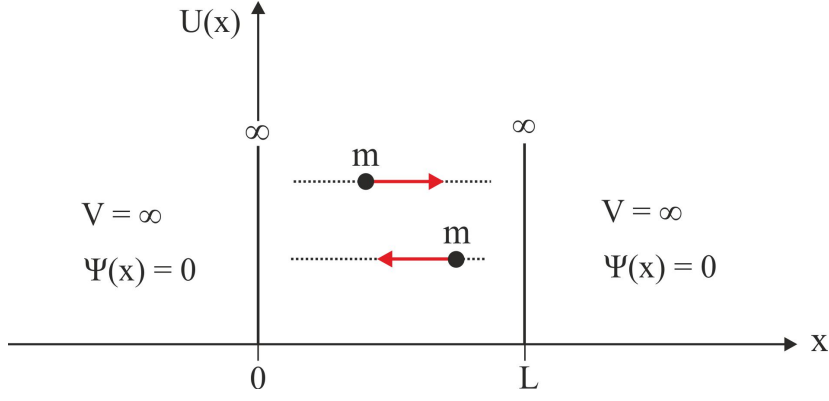
Şekil 2.2 de görüldüğü üzere, $E > V$ durumunda $x < 0$ bölgesinde $+x$ yönünde hareket eden bir kuantum parçacığının hareketini belirleyen dalga, $x = 0$ noktasına geldiğinde kısmen yansır, kısmen de $x > 0$ bölgesine geçer. Buna bağlı olarak, $x < 0$ bölgesindeki gelen dalgaya karşı gelen olasılık akısı, $x = 0$ noktasından geri yansıyan ve $x > 0$ bölgesine geçen akı olmak üzere ikiye bölünür.

2.4.2 Zamana Bağlı Sistemlerde Schrödinger Denkleminin Çözümü

Zamana bağlı sistemlerde Schrödinger denkleminin çözümünü, tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusundaki bir parçacığın hareketini göz önüne alarak inceleyelim.

2.4.2.1 Tek Boyutlu Sonsuz Potansiyel Kuyusundaki Bir Parçacık

Tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusundaki parçacık x eksenini boyunca belirli sınırlar içinde kalarak hareket eder. Şekil 2.3 te görüldüğü gibi, parçacığın hareket ettiği kuyunun $x = 0$ ve $x = L$ deki duvarlarının dışında kalan her yerde potansiyel $V = \infty$ ise, duvarların içinde kalan bir parçacık için bu duvarlar birer engel oluştururlar. Böylece, parçacık engellerin oluşturduğu kuyu içinde hareket eder ve engellerin dışına çıkamaz. Eğer, kuyu içinde kalan bölgede $V = 0$ ise parçacık, bu bölgede serbestçe hareket eder.



Şekil 2.3 Tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusunda hareket eden bir parçacık için sınır koşulları

Parçacığın Şekil 2.3 teki gibi hareket etmesi bazı sınır koşullarına bağlıdır. Şekil 2.3 teki parçacığı niteleyen Schrödinger denklemi (2.37) denklemi gibidir ve aşağıdaki formdadır:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x). \quad (2.65)$$

Böylece (2.65) denklemini sağlayan dalga fonksiyonları

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.66)$$

şeklindedir. (2.66) denkleminde sınır koşulları göz önünde bulundurularak A ve B katsayıları bulunmalıdır. O halde sınır koşulları aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\psi(x) = 0, \quad L \leq x \leq 0. \quad (2.67)$$

$x = 0$ da $\psi(0) = 0$ olması için $B = 0$ olmalıdır. Diğer taraftan $x = L$ ise $\psi(L) = 0$ olacağından,

$$A \sin kL = 0 \quad (2.68)$$

elde edilir. Bu bağıntıyı sağlayan k değeri,

$$k_{n_x} = (\pi/L)n_x, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \quad (2.69)$$

gibi olacaktır. O halde, (2.65) eşitliğini sağlayan dalga fonksiyonu

$$\psi_{n_x}(x) = A \sin k_{n_x} x = A \sin \left(\frac{\pi n_x}{L} \right) x \quad (2.70)$$

biçimindedir. Bağlıdaki A katsayısı, fonksiyonun tanımlandığı uzayda bulunabilir. Bu katsayı

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (2.71)$$

gibidir. Bu durumda tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusu içinde hareket eden parçacığı niteleyen dalga fonksiyonu

$$\psi_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n_x}{L}x\right) \quad (2.72)$$

olacaktır. Bu denklem ile verilen $\psi_{n_x}(x)$ fonksiyonu Schrödinger denkleminin özfonksiyonudur. Bu özfonksiyona bir özdeğer karşılık gelir. Böylece k ve k_{n_x} eşitliklerinden

$$E_{n_x} = \frac{\hbar^2 k_{n_x}^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_x^2 \quad (2.73)$$

elde edilir. (2.73) eşitliğinden görüldüğü üzere parçacığın toplam enerjisi sürekli değildir. Yani toplam enerji kuantumlanmıştır. Toplam enerjinin kuantumlanmasını kontrol eden n_x sayısına kuantum sayısı denir. Toplam enerjinin kuantumlu değerleri (2.73) den bulunabilir. $V = 0$ olduğu için (2.73) ile tanımlanan toplam enerji parçacığın kinetik enerjisine eşittir. O halde, parçacığın kinetik enerjisi kuantumlanmıştır. Bu durumda parçacığın hızı ancak belirli değerler alabilir. (2.72) ile verilen fonksiyon (2.65) denklemini sağlayan özfonksiyon olduğu için, bunlara karşı gelen enerji özdeğerleri E_{n_x} olmak üzere,

$$\hat{H}\psi_{n_x}(x) = E_{n_x}\psi_{n_x}(x) \quad (2.74)$$

özdeğer denklemi yazılabilir. Bu bağıttan E_{n_x} enerji özdeğerleri bulunabilir. n_x kuantum sayısının ilk beş değeri için bulunan enerji özdeğerleri ile bunlara karşı gelen özfonksiyonlar Çizelge 2.1 de verilmiştir.

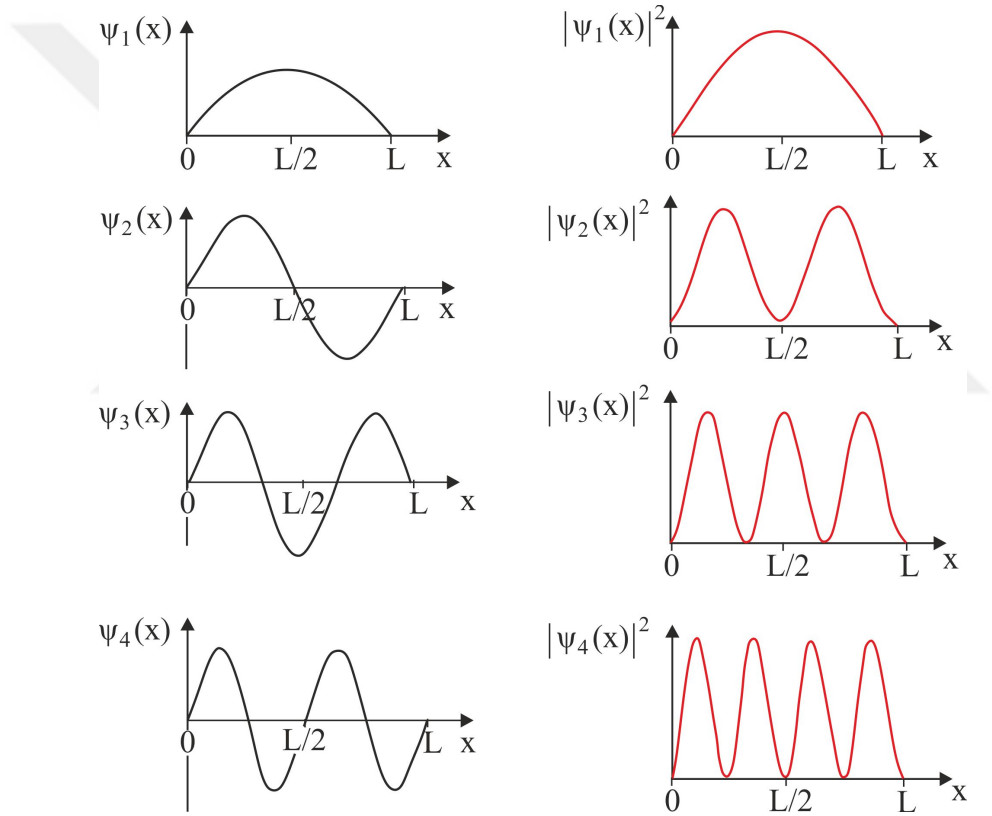
Çizelge 2.1 Tek Boyutlu Kuyuda Hareket Eden Bir Parçacığın Enerji Özdeğer ve Özfonksiyonları

| | | Enerji Özdeğerleri | Enerji Özfonksiyonları |
|-------|------------------|--------------------------|------------------------------|
| n_x | k_{n_x} | E_{n_x} | $\psi_{n_x}(x)$ |
| 1 | $\frac{\pi}{L}$ | $(\hbar^2\pi^2/2mL^2)$ | $\sqrt{(2/L)} \sin(\pi/L)x$ |
| 2 | $\frac{2\pi}{L}$ | $4(\hbar^2\pi^2/2mL^2)$ | $\sqrt{(2/L)} \sin(2\pi/L)x$ |
| 3 | $\frac{3\pi}{L}$ | $9(\hbar^2\pi^2/2mL^2)$ | $\sqrt{(2/L)} \sin(3\pi/L)x$ |
| 4 | $\frac{4\pi}{L}$ | $16(\hbar^2\pi^2/2mL^2)$ | $\sqrt{(2/L)} \sin(4\pi/L)x$ |
| 5 | $\frac{5\pi}{L}$ | $25(\hbar^2\pi^2/2mL^2)$ | $\sqrt{(2/L)} \sin(5\pi/L)x$ |

Çizelge 2.1 den de görüldüğü gibi, dalga sayısı k_{n_x} kuantumlanmıştır. Ona bağlı olarak, de Broglie dalgaboyu da kuantumlanmıştır. (2.69) bağıntısı kullanılarak, λ_{n_x} de Broglie dalga boyu için,

$$\lambda_{n_x} = 2\pi/k_{n_x} = 2L/n_x \quad (2.75)$$

değeri bulunur. Şekil 2.4 deki kuyu içinde de Broglie dalga boyunun tam ya da yarı-tam katlarının sığıdığı durumlar, parçacığın özfonksiyonlarıdır. Bu durumda parçacığın enerji diyagramı, sonlu sayıda enerji düzeylerinden oluşur. Her enerji düzeyine Çizelge 2.1 de görüldüğü gibi, yalnızca bir tek özfonksiyon karşı geldiği için, bu enerji düzeyleri çakışık olmayan enerji düzeyleridir.



Şekil 2.4 Tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusunda hareket eden parçacığın özfonksiyonlarının ve olasılık yoğunluklarının x 'e göre değişimi

Bu parçacık için en düşük enerji düzeyi ya da taban enerji durumu, $n_x = 1$ e karşı gelen E_1 değerindeki enerji düzeyidir ve sıfırdan farklıdır. Eğer parçacığın enerjisi sıfır olsaydı, içinde hareket ettiği ortam $V = 0$ olduğu için, kinetik enerjisi de sıfır olurdu ve bundan dolayı momentum da sıfır olurdu. Buna bağlı olarak kinetik enerjisi ve momentumu sıfır olduğundan parçacığın konumundaki belirsizlik Δx sonsuza gitmelidir. Fakat kuyunun

genişliği L olduğu için Δx sonlu bir sayı olmalıdır. Bu nedenle, parçacığın toplam enerjisi sıfır olamaz.

(2.73) bağıntısı kullanılarak, ardışık iki enerji düzeyi arasındaki enerji farkı,

$$\Delta E = E_{n_x+1} - E_{n_x} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (2n_x + 1) \quad (2.76)$$

yazılabilir. Bu demek oluyor ki ardışık iki enerji düzeyi arasındaki enerji farkı, kuyunun genişliğinin karesi ile ters orantılıdır. O halde, L sonsuza giderken enerji farkı da sıfıra gider. Yani, kuyudaki parçacık serbest parçacık özelliği kazandıkça enerji kesiklikten sürekliliğe doğru gider. Aynı zaman da ardışık iki enerji düzeyi arasındaki enerji farkı, parçacığın kütlesiyle ters orantılıdır. Eğer kütle makroskopik bir değerde ise $m > \hbar^2/L^2$ olur. Bu durumda da ΔE sıfıra gittiğinden enerji sürekli değer almaya başlar. Yani kuantum kuramına göre incelenen sistemlerin boyutları makroskopik boyutlara ulaşırsa elde edilen sonuçlar klasik kuramdaki sonuçlarla aynı olur.

Dalga fonksiyonunun sıfır olduğu noktalara düğüm noktaları denir. Şekil 2.4 te görüldüğü üzere tek boyutlu kuyudaki bir parçacık için $x = 0$ ve $x = L$ dahil olmak üzere toplam $(n_x + 1)$ tane düğüm noktası vardır. n_x değeri arttıkça enerjinin ve momentumun artmasına karşın dalgaboyu küçülür ve $n_x = 1$ için olasılık yoğunluğu, yalnızca $x = L/2$ de en büyük değerini alır. n_x değerleri arttıkça farklı x noktalarındaki olasılık yoğunlukları birbirine yakın değerler alır. n_x sonsuza yaklaşınca bu değerler birbirine eşit olur. Bu sonuç bizi klasik fizikteki sonuca götürür: Kuyunun içinde her yerde olasılık yoğunluğu hep aynı olur.

Kuyu içindeki titreşim $n_x = 2$ için $x = L/2$ de sıfır noktası oluşturur ve titreşim, $x = L/2$ den geçmek üzere soldan sağa ve sağdan sola doğru yayılır. Demek ki, dalga-parçacık ikililiği aradığımız veriye bağlı olarak ortaya çıkar. Bu demek oluyor ki sonsuz potansiyel kutusundaki bir parçacığın hareketi sınır koşullarına göre anlam kazanır.

BÖLÜM 3

BAZI YARDIMCI ÖNERMELER

Bu bölümde, ele alınan ters problemin çözümünün tekliğinin araştırılmasında kullanılacak olan bazı yardımcı önermelere yer verilmiştir.

Bir $Q = \{(x, t) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$ bölgesinde,

$$Lu \equiv iu_t + \sum_{s,j=1}^n a_{sj}(x)u_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x, t)u_{x_j} + r(x, t)u = f(x, t)g(x, t), \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.1)$$

formunda bir Schrödinger denklemini ele alalım. Burada $D \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesinin koni şartını sağladığı kabul edilmektedir. Yani her $x \in D$ için x 'i içeren ve tabanı $x_1 = 0$ düzleminde olan bir $K_x \subset D$ konisi vardır. (3.1) denkleminde $a_{sj}(x)$ katsayısı aşağıdaki koşulları sağlar:

$$a_{sj}(x) \in C^2(\overline{D}),$$

$$\sum_{s,j=1}^n a_{sj}(x) \xi^s \xi^j \geq \mu \sum_{j=1}^n (\xi^j)^2. \quad (3.2)$$

Burada μ pozitif bir sabittir. Denklemdaki $a_{sj}(x, t)$, $s, j = 1, 2, \dots, n$ katsayıları t 'den bağımsız fakat a_s ve r katsayıları t 'ye bağlıdır. Bu katsayılar Q bölgesinde ölçülebilir fonksiyonlardır ve t 'ye göre türevleri genelleşmiş türevlerdir. Ayrıca $\varphi(x, t)$ reel değerli fonksiyonları için

$$\mathcal{M} = \left\{ \varphi(x, t) \mid \varphi_{tt} \in C^2(Q), \left| D_t^\beta \varphi \right|, \left| D_t^\beta \varphi_{x_j} \right|, \left| D_t^\beta \varphi_{x_s x_j} \right| \leq C_\varphi \exp(d_\varphi t^2), \right. \\ \left. 0 \leq \beta \leq 2; j, s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Yukarıdaki kümede her φ fonksiyonu için $C_\varphi \geq 0$ ve $d_\varphi \geq 0$ sabitleri vardır; $D_t^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$ olup β bir tamsayıdır.

Ek olarak, Amirov ve Yamamoto (2008) de kullanılan aşağıdaki gösterimleri tanımlayalım:

$$Q_{\gamma \varepsilon_0} = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, 0 < \varepsilon_0 x_1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{j=2}^n (x_j - x_j^0)^2 < \gamma \right\},$$

$$\psi(x) = \varepsilon_0 x_1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{j=2}^n (x_j - x_j^0)^2 + \alpha_0;$$

$$\chi = \exp(\lambda \psi^{-\nu}), \quad \alpha_0 > 0, \quad \gamma + \alpha_0 = \eta < 1, \quad \alpha_0 < \psi(x) < \eta.$$

Burada $0 < \gamma, \varepsilon_0 < 1$ ve λ, ν pozitif parametrelerdir.

Lemma 3.1 *Kabul edelim ki λ ve ν parametreleri pozitif bir sabitten büyük olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik her $\varphi \in C^2(\overline{Q}_{\gamma\varepsilon_0})$ için geçerlidir:*

$$\chi^2 \left(\xi \varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i x_j} \right) \varphi \geq (\mu |\nabla \varphi|^2 + \xi \varphi^2) \chi^2 - C \lambda^2 \nu^2 \varepsilon \psi^{-2\nu-2} \varphi^2 \chi^2 + d_1(\varphi). \quad (3.3)$$

Burada

$$d_1(\varphi) = - \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left((\chi^2 a_{ij})_{x_j} \varphi^2 \right)_{x_i}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat. İlk olarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \chi^2 \left(\xi \varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i x_j} \right) \varphi \\ &= \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i x_j} \varphi \chi^2 \\ &= \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n \chi^2 a_{ij} \left((\varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} - \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} \right) \\ &= \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n \chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} \\ &= \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n \chi^2 a_{ij} (\varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij})_{x_j} \varphi_{x_i} \varphi + \sum_{i,j=1}^n \chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} \\ &= \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij})_{x_j} (\varphi^2)_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n \chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} \\ &= \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((\chi^2 a_{ij})_{x_j} \varphi^2)_{x_i} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij})_{x_j x_i} \varphi^2 + \sum_{i,j=1}^n \chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j}. \end{aligned}$$

(3.2) şartını uygularsak

$$\begin{aligned}
& \chi^2 \left(\xi \varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i x_j} \right) \varphi \\
& \geq \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((\chi^2 a_{ij})_{x_j} \varphi^2)_{x_i} \\
& \quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij})_{x_j x_i} \varphi^2 + \chi^2 \mu \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \\
& \geq \xi \chi^2 \varphi^2 - \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi)_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((\chi^2 a_{ij})_{x_j} \varphi^2)_{x_i} \\
& \quad - C \lambda^2 \nu^2 \varepsilon \psi^{-2\vartheta-2} \varphi^2 \chi^2 + \chi^2 \mu |\nabla \varphi|^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. Yukarıda birinci eşitsizlikte

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij})_{x_i x_j} \varphi^2 \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (2\chi \chi_{x_i x_j} a_{ij} + 2\chi_{x_i} \chi_{x_j} a_{ij} + 4\chi \chi (a_{ij})_{x_j} + 2\chi \chi_{x_j} (a_{ij})_{x_i} + \chi^2 (a_{ij})_{x_i x_j}) \varphi^2 \\
& \geq -C \sum_{i,j=1}^n (\chi |\chi_{x_i x_j}| + |\chi_{x_i}| |\chi_{x_j}| + \chi |\chi_{x_i}| + \chi^2) \varphi^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

bağıntısı kullanılmıştır. (3.5) eşitsizliğini değerlendirmek için χ fonksiyonunun türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\chi_{x_1} &= -\lambda \nu \psi^{-\nu-1} \chi, \quad \chi_{x_1 x_1} = \lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \chi + \lambda \nu (\nu + 1) \psi^{-\nu-2} \chi \\
\chi_{x_i} &= -\lambda \nu \frac{x_i}{\varepsilon_0^2} \psi^{-\nu-1} \chi, \\
\chi_{x_i x_i} &= \lambda^2 \nu^2 \frac{x_i^2}{\varepsilon_0^4} \psi^{-2\nu-2} \chi + \lambda \nu (\nu + 1) \frac{x_i^2}{\varepsilon_0^4} \psi^{-\nu-2} \chi - \lambda \nu \frac{1}{\varepsilon_0^2} \psi^{-\nu-1}, \\
\chi_{x_1 x_i} &= \lambda^2 \nu^2 \frac{x_i}{\varepsilon_0^2} \psi^{-2\nu-2} \chi + \lambda \nu (\nu + 1) \frac{x_i}{\varepsilon_0^2} \psi^{-\nu-2} \chi, \\
\chi_{x_i x_j} &= \lambda^2 \nu^2 \frac{x_i x_j}{\varepsilon_0^4} \psi^{-2\nu-2} \chi + \lambda \nu (\nu + 1) \frac{x_i x_j}{\varepsilon_0^4} \psi^{-\nu-2} \chi.
\end{aligned}$$

Burada λ ve ν parametrelerinin pozitif olduğu gözönünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
|\chi_{x_1}| &\leq \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \chi, \quad |\chi_{x_1 x_1}| \leq 2\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \chi, \\
|\chi_{x_i}| &\leq \lambda \nu \frac{x_i}{\varepsilon_0^2} \psi^{-\nu-1} \chi, \quad |\chi_{x_i x_i}| \leq 2\lambda^2 \nu^2 \frac{1}{\varepsilon_0^2} \psi^{-2\nu-2} \chi, \\
|\chi_{x_1 x_i}| &\leq 2\lambda^2 \nu^2 \frac{1}{\varepsilon_0} \psi^{-2\nu-2} \chi, \quad |\chi_{x_i x_j}| \leq 2\lambda^2 \nu^2 \frac{1}{\varepsilon_0^2} \psi^{-2\nu-2} \chi
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Son eşitsizlikler (3.5) de yerine yazılırsa;

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\chi^2 a_{ij})_{x_i x_j} \varphi^2 \geq -C \lambda^2 \nu^2 \frac{1}{\varepsilon_0^2} \psi^{-2\nu-2} \chi^2 \varphi^2 \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1'in ifadesinde verilen eşitsizlik ispatlanmıştır. ■

Lemma 3.2 *Lemma 3.1'in şartlarının sağlandığını kabul edelim. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\begin{aligned} \psi^{\nu+1} (\xi \varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i x_j})^2 \chi^2 &\geq -C \lambda \nu (|\nabla \varphi|^2 + \xi \varphi^2) \chi^2 \\ + 4 \lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \varphi^2 \chi^2 (\mu^2 |\nabla \psi|^4 - \frac{C}{\nu} |\nabla \psi|^3 - \frac{C}{\nu} |\nabla \psi|^2 - \frac{C}{\lambda \nu}) &+ d_2(\varphi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada

$$\begin{aligned} d_2(\varphi) &= 2 \lambda \nu \left(\sum_{i,j,k,s=1}^n \left((2a_{ij} a_{ks} \psi_{x_i} \vartheta_{x_j} \vartheta_{x_k})_{x_s} - (a_{ij} a_{ks} \psi_{x_i} \vartheta_{x_s} \vartheta_{x_k})_{x_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \psi_{x_i} (K - \xi) \chi^2 \varphi^2)_{x_j} - C \lambda \nu \sum_{i=1}^n (\chi \chi_{x_i} \varphi^2)_{x_i} \right), \end{aligned}$$

$$\vartheta = \chi \varphi,$$

$$K = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \psi_{x_i} \psi_{x_j} - \lambda \nu (\nu + 1) \psi^{-\nu-2} \psi_{x_i} \psi_{x_j} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_i x_j} \right)$$

olarak tanımlıdır.

İspat. İlk olarak $\vartheta = \chi \varphi$ şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. O halde

$$\varphi = \vartheta \chi^{-1},$$

$$\begin{aligned} \varphi_\xi &= (\vartheta \chi^{-1})_\xi = \vartheta_\xi \chi^{-1}, \varphi_{x_i} = \chi^{-1} (\vartheta_{x_i} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_i} \vartheta), \\ \varphi_{x_i x_j} &= \chi^{-1} \left((\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \psi_{x_i} \psi_{x_j} - \lambda \nu (\nu + 1) \psi^{-\nu-2} \psi_{x_i} \psi_{x_j} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_i x_j}) \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \vartheta_{x_i x_j} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_i} \vartheta_{x_j} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_j} \vartheta_{x_i} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\vartheta_i = \vartheta_{x_i}$, $\vartheta_{ij} = \vartheta_{x_i x_j}$, $\psi_i = \psi_{x_i}$, $\psi_{ij} = \psi_{x_i x_j}$ gösterimleri kullanılmıştır.

Yukarıdaki türev ifadeleri ve $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} &\chi^2 (\xi \varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{x_i x_j})^2 \psi^{\nu+1} \\ &= \chi^2 (\xi \vartheta \chi^{-1} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\chi^{-1} (\vartheta_{ij} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_i} \vartheta_{x_j} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_j} \vartheta_{x_i} \\ &\quad + (\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \psi_{x_i} \psi_{x_j} - \lambda \nu (\nu + 1) \psi^{-\nu-2} \psi_{x_i} \psi_{x_j} + \lambda \nu \psi^{-\nu-1} \psi_{x_i x_j}) \vartheta))^2 \psi^{\nu+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi^{\nu+1} \left(\xi \vartheta - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \vartheta_{ij} - K \vartheta - 2\lambda\nu \psi^{-\nu-1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \psi_i \vartheta_j \right)^2 \\
&\geq 4\lambda\nu \psi^{-\nu-1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \psi_i \vartheta_j \left((K - \xi) \vartheta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \vartheta_{ij} \right) \\
&\geq 4\lambda\nu \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \psi_i \vartheta_j \right) \left((K - \xi) \vartheta + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \vartheta_{ij} \right) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Lemma 3.2'nin ispatı, son eşitsizlikteki her bir terimin ayrı ayrı değerlendirmesine dayanmaktadır:

1. Terim:

$$\begin{aligned}
&4\lambda\nu \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \psi_i \vartheta_j \right) \sum_{k,s=1}^n a_{ks} \vartheta_{ks} \\
&= 2\lambda\nu \sum_{i,j,k,s=1}^n \left(2(a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_j \vartheta_k)_s + (a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_j \vartheta_s)_k - (a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_k \vartheta_s)_j \right. \\
&\quad \left. - (a_{ij} a_{ks} \psi_i)_s \vartheta_j \vartheta_k - (a_{ij} a_{ks} \psi_i)_k \vartheta_j \vartheta_s + (a_{ij} a_{ks} \psi_i)_j \vartheta_k \vartheta_s \right) \\
&= 2\lambda\nu \sum_{i,j,k,s=1}^n \left(2(a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_j \vartheta_k)_s - (a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_k \vartheta_s)_j - 2(a_{ij} a_{ks} \psi_i)_s \vartheta_j \vartheta_k + (a_{ij} a_{ks} \psi_i)_j \vartheta_s \vartheta_k \right).
\end{aligned}$$

olur. Yukarıda $(a_{ij} a_{ks} \psi_i)_k \vartheta_j \vartheta_s = (a_{ij} a_{ks} \psi_i)_s \vartheta_j \vartheta_k$ olduğu göz önüne alınmıştır.

O halde

$$\begin{aligned}
&4\lambda\nu \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \psi_i \vartheta_j \right) \sum_{k,s=1}^n a_{ks} \vartheta_{ks} \\
&\geq -C\lambda\nu |\nabla \vartheta|^2 + 2\lambda\nu \sum_{i,j,k,s=1}^n \left(2(a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_j \vartheta_k)_s - (a_{ij} a_{ks} \psi_i \vartheta_k \vartheta_s)_j \right) \tag{3.9}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için şimdi φ fonksiyonuna tekrar dönelim. Bunun için

$\vartheta_i = \chi \varphi_i + \chi_i \varphi$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-C\lambda\nu |\nabla\vartheta|^2 &= -C\lambda\nu\left(\sum_{i=1}^n \vartheta_i^2\right) = -C\lambda\nu \sum_{i=1}^n (\chi\varphi_i + \chi_i\varphi)^2 \\
&= -C\lambda\nu(\chi^2 |\nabla\varphi|^2 + \sum_{i=1}^n (2\chi\chi_i\varphi\varphi_i + \chi_i^2\varphi^2)) \\
&= -C\lambda\nu(\chi^2 |\nabla\varphi|^2 + \sum_{i=1}^n ((\chi\chi_i\varphi^2)_i - \chi\chi_{ii}\varphi^2)) \\
&= -C\lambda\nu\chi^2 |\nabla\varphi|^2 - C\lambda\nu \sum_{i=1}^n (\chi\chi_i\varphi^2)_i + C\lambda\nu\chi \sum_{i=1}^n \chi_{ii}\varphi^2 \\
&= -C\lambda\nu\chi^2 |\nabla\varphi|^2 - C\lambda\nu \sum_{i=1}^n (\chi\chi_i\varphi^2)_i + C\lambda\nu(\lambda^2\nu^2\psi^{-2\nu-2} |\nabla\varphi|^2 \\
&\quad + \lambda\nu(\nu+1) |\nabla\varphi|^2 \psi^{-\nu-2} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1})\varphi^2\chi^2 \\
&\geq -C\lambda\nu\chi^2 |\nabla\varphi|^2 - C\lambda\nu \sum_{i=1}^n (\chi\chi_i\varphi^2)_i - C\lambda^2\nu^2\psi^{-\nu-1}\varphi^2\chi^2
\end{aligned} \tag{3.10}$$

yazılabilir. Yukarıda son eşitlikte

$$\begin{aligned}
\chi &= \exp(\lambda\psi^{-\nu}), \\
\chi_i &= -\lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_i\chi, \\
\chi_{ii} &= \lambda^2\nu^2\psi^{-2\nu-2}\psi_i^2 + \lambda\nu(\nu+1)\psi_i^2\psi^{-\nu-2} - \lambda\nu\psi^{-\nu-1}\psi_{ii}\chi,
\end{aligned}$$

bağıntıları kullanılmıştır.

2. Terim:

$$\begin{aligned}
-4\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\psi_i\vartheta_j\xi\vartheta &= -2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i\xi\vartheta^2)_j + 2\lambda\nu\xi \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i)_j \vartheta^2 \\
&\geq -2\lambda\nu\xi \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i\vartheta^2)_j - C\lambda\nu\xi\vartheta^2 \\
&= -C\lambda\nu\xi\varphi^2\chi^2 - 2\lambda\nu\xi \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i\varphi^2\chi^2)_j.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3. Terim:

$$\begin{aligned}
4\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\psi_i\vartheta_jK\vartheta &= 2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_iK\vartheta^2)_j - 2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_iK)_j \vartheta^2 \\
&= 2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_iK\varphi^2\chi^2)_j - 2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_iK)_j \varphi^2\chi^2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Şimdi $-2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i K)_j \varphi^2 \chi^2$ ifadesini değerlendirelim:

$$\begin{aligned}
& -2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i K)_j \varphi^2 \chi^2 \\
= & -2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i (\sum_{k,s=1}^n a_{ks} (\lambda^2 \nu^2 \psi^{-2\nu-2} \psi_k \psi_s - \lambda\nu(\nu+1) \psi^{-\nu-2} \psi_k \psi_s)))_j \vartheta^2 \\
= & -2\lambda^2 \nu^2 \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,s=1}^n [(-2\lambda\nu(\nu+1) \psi^{-2\nu-3} + (\nu+1)(\nu+2) \psi^{-\nu-3}) a_{ij} a_{ks} \psi_i \psi_j \psi_k \psi_s \\
& + (\lambda\nu \psi^{-2\nu-2} - (\nu+1) \psi^{-\nu-2}) (\frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} a_{ks} + a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ks}) \psi_i \psi_j \psi_s \\
& + a_{ij} a_{ks} (\psi_{ij} \psi_k \psi_s + \psi_i \psi_{kj} \psi_s + \psi_i \psi_k \psi_{sj})] \vartheta^2 \\
= & 2\lambda\nu^2 (2\lambda\nu(\nu+1) \psi^{-2\nu-3} - (\nu+1)(\nu+2) \psi^{-\nu-3}) (\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i \psi_j)^2) \vartheta^2 \\
& - 2\lambda^2 \nu^2 (\lambda\nu \psi^{-2\nu-2} - (\nu+1) \psi^{-\nu-2}) \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,s=1}^n ((\frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} a_{ks} + a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ks}) \psi_i \psi_k \psi_s \\
& + a_{ij} a_{ks} (\psi_{ij} \psi_k \psi_s + \psi_i \psi_{kj} \psi_s + \psi_i \psi_k \psi_{sj})) \vartheta^2 \\
\geq & 2\lambda^3 \nu^3 \psi^{-2\nu-2} (2\nu\mu^2 |\nabla\psi|^4 - C |\nabla\psi|^3 - C |\nabla\psi|^2) \vartheta^2 \\
= & 2\lambda^3 \nu^3 \psi^{-2\nu-3} (2\nu\mu^2 |\nabla\psi|^4 - C |\nabla\psi|^3 - C |\nabla\psi|^2) \varphi^2 \chi^2 \tag{3.13}
\end{aligned}$$

olur. İkinci olarak K da yer alan son terimi dikkate alalım:

$$\begin{aligned}
& -2\lambda^2 \nu^2 (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\psi_i (\sum_{k,s=1}^n a_{ks} \psi^{-\nu-1} \psi_{ks}))_j \vartheta^2 \\
= & 2\lambda^2 \nu^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\psi_i \psi_j (\nu+1) \psi^{-\nu-2} (\sum_{k,s=1}^n (a_{ks} \psi_{ks})) \vartheta^2 \\
& - 2\lambda^2 \nu^2 \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,s=1}^n (a_{ij}\psi_i a_{ks} \psi_{ks})_j \vartheta^2 \psi^{-\nu-1} \\
\geq & 2\lambda^2 \nu^2 (\nu+1) \mu^2 |\nabla\psi|^2 \varepsilon \psi^{-\nu-2} \vartheta^2 - 2C\lambda^2 \nu^2 \psi^{-\nu-1} \vartheta^2 \\
= & 2\lambda^2 \nu^2 (\nu+1) \mu^2 |\nabla\psi|^2 \varepsilon \psi^{-\nu-2} \varphi^2 \chi^2 - 2C\lambda^2 \nu^2 \psi^{-\nu-1} \varphi^2 \chi^2. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

(3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
-2\lambda\nu \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\psi_i K)_j \vartheta^2 & \geq 2\lambda^3 \nu^3 \psi^{-2\nu-3} \varphi^2 \chi^2 (2\nu\mu^2 |\nabla\psi|^4 - C |\nabla\psi|^3 - C |\nabla\psi|^2 \\
& + \frac{\psi^{\nu+1}}{\lambda\nu} ((\nu+1) \mu^2 |\nabla\psi|^2 \varepsilon \psi^{\nu+1} - C)) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.2 nin ispatı tamamlanmış olur. ■

Lemma 3.3 Kabul edelim ki λ ve ν parametreleri; a_{ij} , ε_0 ve n ye bağlı pozitif bir sabitten büyük olsun. Bu durumda her $\varphi \in C^2(\overline{Q}_{\gamma\varepsilon_0})$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \lambda\nu \left(\frac{\mu}{2} |\nabla\varphi|^2 + \xi\varphi^2 \right) \chi^2 + 2\lambda^3\nu^4\psi^{-2\nu-3}\mu^2\varepsilon_0^4\varphi^2\chi^2 + d_3(\varphi) \\ & \leq \lambda\nu\theta\chi^2 \left(\xi\varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\varphi_{x_i x_j} \right) \varphi + \psi^{\nu+1}\chi^2 \left(\xi\varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\varphi_{x_i x_j} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada $d_3(\varphi) = \lambda\nu\theta d_1(\varphi) + d_2(\varphi)$ olup $\theta \geq 0$ ifadesi ispat içerisinde verilecektir.

İspat. (3.3) eşitsizliğini $\lambda\nu\theta$ ile çarpıp (3.7) eşitsizliğine ekleyelim. Bu durumda elde edilen yeni eşitsizliğin sol tarafı

$$\begin{aligned} & \lambda\nu\theta(\mu|\nabla\varphi|^2 + \xi\varphi^2)\chi^2 - C\lambda^3\nu^3\theta\varepsilon\psi^{-2\theta-2}\varphi^2\chi^2 + \lambda\nu\theta d_1(\varphi) - C\lambda\nu(|\nabla\varphi|^2 + \xi\varphi^2)\chi^2 \\ & + 4\lambda^3\nu^4\psi^{-2\nu-3}\varphi^2\chi^2 \left(\mu^2|\nabla\psi|^4 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^3 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^2 - \frac{C}{\lambda\nu} \right) + d_2(\varphi) \\ & = \lambda\nu\theta\mu|\nabla\varphi|^2\chi^2 + \lambda\nu\theta\xi\varphi^2\chi^2 - C\lambda^3\nu^3\theta\varepsilon\psi^{-2\theta-2}\varphi^2\chi^2 + \lambda\nu\theta d_1(\varphi) - C\lambda\nu|\nabla\varphi|^2\chi^2 \\ & - C\lambda\nu\xi\varphi^2\chi^2 + 4\lambda^3\nu^4\psi^{-2\nu-3}\varphi^2\chi^2 \left(\mu^2|\nabla\psi|^4 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^3 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^2 - \frac{C}{\lambda\nu} \right) + d_2(\varphi) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \lambda\nu\chi^2(|\nabla\varphi|^2(\theta\mu - C) + (\theta - C)\xi\varphi^2) + 4\lambda^3\nu^4\psi^{-2\nu-3}\varphi^2\chi^2 \left(\mu^2|\nabla\psi|^4 \right. \\ & \left. - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^3 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^2 - \frac{C}{\lambda\nu} - \frac{\theta C\varepsilon\psi}{4\nu} \right) + \lambda\nu\theta d_1(\varphi) + d_2(\varphi) \\ & \leq \lambda\nu\theta\chi^2 \left(\xi\varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\varphi_{x_i x_j} \right) \varphi \\ & + \psi^{\nu+1}\chi^2 \left(\xi\varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\varphi_{x_i x_j} \right)^2 + d_3(\varphi) \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Şimdi bir $\theta_0 \geq 0$ seçelim öyle ki her $\theta \geq \theta_0$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:

$$\theta\mu - C \geq \frac{\mu}{2}, \quad \theta - C \geq 1. \quad (3.18)$$

Ayrıca $|\nabla\varphi|^2 = \varepsilon_0^2(1 + \sum_{j=2}^n (x_j - x_j^0)^2) \geq \varepsilon_0^2$ eşitsizliği göz önüne alınıp λ ve ν yeterince büyük seçilerek

$$1 - \frac{C}{\nu|\nabla\psi|} - \frac{C}{\mu^2\nu|\nabla\psi|^2} - \frac{C}{\lambda\nu\mu^2|\nabla\psi|^4} - \frac{\theta C\varepsilon\psi}{4\nu\mu^2|\nabla\psi|^4} \geq \frac{1}{2}$$

eşitsizliğinden

$$\mu^2|\nabla\psi|^4 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^3 - \frac{C}{\nu}|\nabla\psi|^2 - \frac{C}{\lambda\nu} - \frac{\theta C\psi}{\lambda\nu} \geq \frac{\mu^2}{2}\varepsilon_0^4 \quad (3.19)$$

bulunur ve Lemma 3.3'ün ispatı tamamlanır. ■

BÖLÜM 4

GENEL SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEM

Bu bölümde Amirov ve Yamamoto (2008) de yer alan genel Schrödinger denklemi için bir ters problemin çözümünün tekliği üzerine bir tartışma yer almaktadır.

Problem 4.1 (3.1) denkleminde (4.1) koşulları altında ve (4.2) ek bilgisi yardımıyla (u, g) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemidir:

$$u(0, x, t) = u^0(x, t), u_{x_1}(0, x, t) = u^1(x, t), x = (x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (4.2)$$

Teorem 4.1 \bar{D} kümesinde $f(x, 0) \neq 0$ olsun. Bu durumda Problem 4.1 in $u \in \mathcal{M}$ ve $g \in C(D)$ olacak şekilde bir tek (u, g) çözümü vardır.

İspat. Kabul edelim ki $u_0(x) = 0$ olsun. Çözüm kümesini genişletmek amacıyla yeni bir bilinmeyen fonksiyon $\vartheta = ue^{-kt^2}$ tanımlayalım:

$$\vartheta = ue^{-kt^2},$$

$$u = \vartheta e^{kt^2}, \quad u_t = \vartheta_t e^{kt^2} + 2kt\vartheta e^{kt^2},$$

$$u_{x_j} = \vartheta_{x_j} e^{kt^2}, \quad u_{x_s x_j} = \vartheta_{x_s x_j} e^{kt^2}$$

olur. Bu türevler (3.1) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} & i[\vartheta_t e^{kt^2} + 2kt\vartheta e^{kt^2}] + \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} \vartheta_{x_s x_j} e^{kt^2} + \sum_{j=1}^n a_j \vartheta_{x_j} e^{kt^2} + r\vartheta e^{kt^2} \\ &= e^{kt^2} [i\vartheta_t + 2kt\vartheta + \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} \vartheta_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n a_j \vartheta_{x_j} + r\vartheta] \\ &= i\vartheta_t + 2kt\vartheta + \sum_{s,j=1}^n a_j \vartheta_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n a_j \vartheta_{x_j} + r\vartheta = f(x, t) g(x) e^{-kt^2} \end{aligned}$$

veya

$$L\vartheta + 2kti\vartheta = F(x, t)g(x) \quad (4.3)$$

bulunur. Burada

$$F(x, t) = f(x, t)e^{-kt^2}$$

olarak alınmıştır. $a(x) = 0$ olduğundan ve (4.1) koşullarından $u(x, 0) = 0$ 'dır. Dolayısıyla $\vartheta(x, 0) = 0$ olur. O halde (4.3) denkleminde $t = 0$ alınırsa

$$i\vartheta_t(x, 0) + 2kti\vartheta(x, 0) + \sum_{s,j=1}^n a_{sj}\vartheta_{x_s x_j}(x, 0) + \sum_{j=1}^n a_j\vartheta_{x_j}(x, 0) + r\vartheta(x, 0) = f(x, 0)g(x),$$

bu durumda $i\vartheta_t(x, 0) = f(x, 0)g(x)$ veya

$$g(x) = \frac{i}{f(x, 0)}\vartheta_t(x, 0)$$

olur. $\vartheta_t(x, 0)$ 'a ters Fourier dönüşümü uygulayıp yukarıdaki denkleminde $g(x)$ yerine yazarsak,

$$g(x) = \frac{i}{2\pi f(x, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \widehat{\vartheta}(x, \xi) d\xi \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada $\vartheta(x, t)$ 'nin t 'ye göre Fourier dönüşümü $\widehat{\vartheta}$ olup $\widehat{\vartheta} = p(x, \xi) + iq(x, \xi)$ dir. (4.3) denkleminde (4.4) eşitliğini yerine yazalım

$$L\vartheta + 2kti\vartheta = -F(x, t) \frac{i}{2\pi f(x, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \widehat{\vartheta}(x, \xi) d\xi.$$

Son denklemindeki her terime t 'ye göre Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}[i\vartheta_t] + 2ki\mathcal{F}[t\vartheta] + \sum_{s,j=1}^n a_{sj}\mathcal{F}[\vartheta_{x_s x_j}] + \sum_{j=1}^n \mathcal{F}[a_j\vartheta_{x_j}] + \mathcal{F}[r\vartheta] \\ &= i(i\xi\widehat{\vartheta}) + 2ki(i\widehat{\vartheta}_\xi) + \sum_{s,j=1}^n a_{sj}\widehat{\vartheta}_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n \widehat{a_j\vartheta_{x_j}} + r\widehat{\vartheta} \\ &= -\xi\widehat{\vartheta} - 2k\widehat{\vartheta}_\xi + \sum_{s,j=1}^n a_{sj}\widehat{\vartheta}_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n \widehat{a_j\vartheta_{x_j}} + r\widehat{\vartheta} \\ &= -\frac{i\widehat{F}}{2\pi f(x, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \widehat{\vartheta}(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\widehat{\vartheta} = p(x, \xi) + iq(x, \xi),$$

$$\widehat{F} = p_1(x, \xi) + iq_1(x, \xi), \quad \widehat{a_j \vartheta_{x_j}} = a_{1j} + ia_{2j}, \quad \widehat{a_0 \vartheta} = a_{10} + ia_{20}$$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} (p_{x_s x_j} + iq_{x_s x_j}) - \xi(p + iq) - 2k(p_\xi + iq_\xi) \\ & + \sum_{j=1}^n (a_{1j} + ia_{2j}) + a_{10} + ia_{20} = -\frac{i(p_1 + iq_1)}{2\pi f(x, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \widehat{\vartheta}(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

olduğu görülmüştür. Diğer yandan bu problemin çözümü reel değerli fonksiyonlar kümesinde arandığından, p ve q sırasıyla çift ve tek olur. Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi \widehat{\vartheta}(x, \xi) d\xi = 2i \int_0^{\infty} \xi q(x, \xi) d\xi$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} p_{x_s x_j} + i \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} q_{x_s x_j} + \sum_{j=1}^n a_{1j} + i \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ & + a_{10} + ia_{20} - \xi p - \xi iq - 2kp_\xi - 2kiq_\xi \\ & = \frac{iq_1}{\pi f(x, 0)} \int_0^{\infty} \xi q(x, \xi) d\xi + \frac{p_1}{\pi f(x, 0)} \int_0^{\infty} \xi q(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

olur. Denklemde reel ve sanal kısımlarını ortak paranteze aldığımızda

$$\xi p + 2kp_\xi - \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} p_{x_s x_j} = \frac{q_1}{2\pi f(x, 0)} \int_0^{\infty} \xi q(x, \xi) d\xi + \sum_{j=1}^n a_{1j} + a_{10}, \quad (4.5)$$

$$\xi q + 2kq_\xi - \sum_{s,j=1}^n a_{s_j} q_{x_s x_j} = -\frac{p_1}{2\pi f(x, 0)} \int_0^{\infty} \xi q(x, \xi) d\xi + \sum_{j=1}^n a_{2j} + a_{20} \quad (4.6)$$

denklem sistemi elde edilir. Teoremin ispatı için üçüncü bölümde (4.5)-(4.6) sisteminin özel durumu için verilmiş olan yardımcı önermelerden yararlanacağız. Bunun için (4.7) koşullarındaki $p(x, \xi)$ ve $q(x, \xi)$ fonksiyonları için aşağıdaki Cauchy verileri tanımlanacaktır:

$$\begin{aligned} p(0, tx, \xi) &= p^0, p_{x_1}(0, tx, \xi) = p^1, \\ q(0, tx, \xi) &= q^0, q_{x_1}(0, tx, \xi) = q^1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Şimdi aşağıdaki notasyonları tanımlayalım:

$$u_1 = p, u_2 = q,$$

$$m_1 = \frac{q_1}{2\pi f(x, 0)} \int_0^\infty \xi q d\xi - \sum_{j=1}^n a_{1j} - a_{10},$$

$$m_2 = -\frac{p_1}{2\pi f(x, 0)} \int_0^\infty \xi q d\xi - \sum_{j=1}^n a_{2j} - a_{20}$$

ve

$$L_0 u_k = -\xi u_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_k,$$

$$L_0 u_k = m_k; k = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

O halde (4.8) denklem sistemi

$$u_k = (0, x, \xi) = 0 \quad (4.9)$$

koşulları ile birlikte bir Cauchy Problemi olur. Lemma 3.3 ten

$$\lambda \nu \theta \chi^2 (L_0 \varphi) \varphi + \psi^{v+1} \chi^2 (L_0 \varphi)^2$$

$$\geq \lambda \nu \left(\frac{\mu}{2} |\nabla \varphi|^2 + \xi \varphi^2 \right) \chi^2 + 2\lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 \varphi^2 \chi^2 + d_3(\varphi)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik hem u_1 hem de u_2 için sağlanır:

$$\lambda \nu \theta \chi^2 (L_0 u_1) u_1 + \psi^{v+1} \chi^2 (L_0 u_1)^2 \geq \lambda \nu \left(\frac{\mu}{2} |\nabla u_1|^2 + \xi (u_1)^2 \right) \chi^2$$

$$+ 2\lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 (u_1)^2 \chi^2 + d_3(u_1),$$

$$\lambda \nu \theta \chi^2 (L_0 u_2) u_2 + \psi^{v+1} \chi^2 (L_0 u_2)^2 \geq \lambda \nu \left(\frac{\mu}{2} |\nabla u_2|^2 + \xi (u_2)^2 \right) \chi^2$$

$$+ 2\lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 (u_2)^2 \chi^2 + d_3(u_2).$$

Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\lambda \nu \theta \sum_{s=1}^2 (L_0 u_k) u_k + \psi^{v+1} \chi^2 \sum_{s=1}^2 (L_0 u_k)^2$$

$$\geq \lambda \nu \sum_{s=1}^2 \left(\frac{\mu}{2} |\nabla u_k|^2 + \xi (u_k)^2 \right) \chi^2 + 2\lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 (u_k)^2 \chi^2 + d_3(u_k) \quad (4.10)$$

elde edilir. Şimdi (4.10) eşitsizliğinin sol tarafını değerlendirelim

$$\sum_{s=1}^2 \lambda \nu \theta (L_0 u_k) u_k + \psi^{v+1} \chi^2 \sum_{s=1}^2 (L_0 u_k)^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 + \frac{1}{2} (L_0 u_k)^2 + \psi^{v+1} (L_0 u_k)^2 \right] \chi^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 + \left(\frac{1}{2} + \psi^{v+1} \right) (L_0 u_k)^2 \right] \chi^2 \\
&= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 \chi^2 + \left(\frac{1}{2} + \psi^{v+1} \right) \chi^2 \sum_{k=1}^2 (m_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 \chi^2 + \left(\frac{1}{2} + \psi^{v+1} \right) \chi^2 \left[\left(\frac{q_1}{\pi f(x, 0)} \int_0^\infty \xi q d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{j=1}^n a_{2j} - a_{20} \right)^2 + \left(-\frac{p_1}{\pi f(x, 0)} \int_0^\infty \xi q d\xi - \sum_{j=1}^n a_{2j} - a_{20} \right)^2 \right] \\
&\leq \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 \chi^2 + \left(\frac{1}{2} + \psi^{v+1} \right) \chi^2 \left[\frac{3q_1^2}{\pi^2 f^2(x, 0)} \left(\int_0^\infty \xi q d\xi \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 3 \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \right)^2 + 3a_{10}^2 + \frac{3p_1^2}{\pi^2 f^2(x, 0)} \int_0^\infty \xi q d\xi + 3 \left(\sum_{j=1}^n a_{2j} \right)^2 + 3a_{20}^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 \chi^2 + \left(\frac{1}{2} + \psi^{v+1} \right) \chi^2 \left[\frac{3(q_1^2 + p_1^2)}{\pi^2 f^2(x, 0)} \left(\int_0^\infty \xi q d\xi \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 3 \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2 \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_{2j}^2 \right)^2 + 3(a_{10}^2 + a_{20}^2) \right].
\end{aligned}$$

olur. (4.10) ve $\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^2 \lambda \nu \theta (L_0 u_k) u_k + \psi^{v+1} \chi^2 \sum_{s=1}^2 (L_0 u_k)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 u_k^2 \chi^2 + \left(\frac{1}{2} + \psi^{v+1} \right) \chi^2 \left[\frac{3(q_1^2 + p_1^2)}{\pi^2 f^2(x, 0)} \left(\int_0^\infty \xi q d\xi \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 3n \sum_{j=1}^n \left((a_{1j})^2 + (a_{2j})^2 \right) + 3(a_{10}^2 + a_{20}^2) \right] \tag{4.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integrali Cauchy-Schwartz eşitsizliği yardımıyla değerlendirebilirsek

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \xi q d\xi \right)^2 &= \left(\int_0^\infty (1 + \xi^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} \xi q d\xi \right)^2 \\
&\leq \int_0^\infty (1 + \xi^2)^{-1} d\xi \int_0^\infty (1 + \xi^2) \xi^2 q^2 d\xi \\
&\leq C_1 \int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 q^2 d\xi
\end{aligned} \tag{4.12}$$

yazılabilir. Bu değerlendirmede $C_1 = \int_0^\infty (1 + \xi^2)^{-1} d\xi$ alınmış olup $\xi^2 \leq \xi^2 + 1$ eşitsizliği kullanılmıştır. (4.12) eşitsizliğini (4.11) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^2 \lambda \nu \theta (L_0 u_k) u_k + \psi^{\nu+1} \chi^2 \sum_{s=1}^2 (L_0 u_k)^2 \\
&\leq \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 \sum_{k=1}^2 u_k^2 + 3 \left(\frac{1}{2} + \psi^{\nu+1} \right) \left(\frac{q_1^2 + p_1^2}{\pi^2 f^2(x, 0)} \right) C_1 \left(\int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 q^2 d\xi \right) \right. \\
&\quad \left. + n \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2 + a_{2j}^2 \right) + (a_{10}^2 + a_{20}^2) \right] \chi^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur. (4.10) ve (4.13) eşitsizliklerinden ise

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^2 \lambda \nu \left(\left(\frac{\mu}{2} |\nabla u_k|^2 + \xi (u_k)^2 \right) + 2 \lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 (u_k)^2 \right) \chi^2 + d_3 (u_k) \\
&\leq \left[\lambda^2 \nu^2 \theta^2 \sum_{k=1}^2 u_k^2 + 3 \left(\frac{1}{2} + \psi^{\nu+1} \right) \left(\frac{q_1^2 + p_1^2}{\pi^2 f^2(x, 0)} \right) C_1 \int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 q^2 d\xi \right. \\
&\quad \left. + n \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2 + a_{2j}^2 \right) + (a_{10}^2 + a_{20}^2) \right] \chi^2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir.

(4.14) eşitsizliği $(1 + \xi^2)^2$ ile çarpılır ve $(0, \infty)$ aralığı üzerinde ξ' ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \int_0^{\infty} (\lambda \nu (\frac{\mu}{2} |\nabla u_k|^2 + \xi u_k^2) + 2\lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 u_k^2) \chi^2 (1 + \xi^2)^2 d\xi \\
& + \sum_{k=1}^2 \int_0^{\infty} d_3(u_k) (1 + \xi^2)^2 d\xi \\
\leq & \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \nu^2 \theta^2 \chi^2 \int_0^{\infty} (1 + \xi^2)^2 u_k^2 d\xi \\
& + 3(\frac{1}{2} + \psi^{v+1}) \chi^2 (\frac{C_1}{\pi^2 f^2(x, 0)} \int_0^{\infty} (p_1^2 + q_1^2) (1 + \xi^2)^2 d\xi \int_0^{\infty} (1 + \xi^2)^2 q^2 d\xi \\
& + C_3 \int_0^{\infty} n (\sum_{j=1}^n (u_{1x_j}^2 + u_{2x_j}^2) + u_1^2 + u_2^2) (1 + \xi^2)^2 d\xi) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

bulunur.

(4.15) elde edilirken

$$|\widehat{a_j u_{x_j}}|^2 = (a_{1j})^2 + (a_{2j})^2, \quad |\widehat{a_0 u}|^2 = a_{10}^2 + a_{20}^2, \quad j = \overline{1, n},$$

olmak üzere, sabit bir j sayısı için Parseval eşitliği dikkate alınarak teoremin kabulleri yardımıyla aşağıdaki değerlendirmeler kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\infty} (1 + \xi^2)^2 ((a_{1j})^2 + (a_{2j})^2) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^2 |\widehat{a_j u_{x_j}}| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{a_j u_{x_j}}| d\xi + 2 \int_{\mathbb{R}} |\xi \widehat{a_j u_{x_j}}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\xi^2 \widehat{a_j u_{x_j}}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |a_j u_{x_j}|^2 dt + 2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_t (a_j u_{x_j})|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |\partial_t^2 (a_j u_{x_j})|^2 dt.
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |a_j u_{x_j}|^2 dt + 2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_t (a_j u_{x_j})|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |\partial_t^2 (a_j u_{x_j})|^2 dt \\
\leq & 2 \int_{\mathbb{R}} \sum_{0 \leq \beta \leq 2} (\partial_t^\beta (a_j u_{x_j}))^2 dt \leq C_2 K \int_{\mathbb{R}} \sum_{0 \leq \beta \leq 2} (\partial_t^\beta (u_{x_j}))^2 dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $C_2K \int_{\mathbb{R}} \sum_{0 \leq \beta \leq 2} (\partial_t^\beta (u_{x_j}))^2 dt$ ifadesi için

$$\begin{aligned} C_2K \int_{\mathbb{R}} \sum_{0 \leq \beta \leq 2} (\partial_t^\beta (u_{x_j}))^2 dt &= C_2K \left(\int_{\mathbb{R}} (u_{x_j})^2 dt + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t (u_{x_j}))^2 dt + \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^2 (u_{x_j}))^2 dt \right) \\ &= C_2K \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |(i\xi) \widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^2 \widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi \right) \\ &\leq 2C_2'K \int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 |\widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi \end{aligned}$$

yazılabilir. Daha sonra

$$\begin{aligned} &C_2K \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |(i\xi) \widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |(i\xi)^2 \widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi \right) \\ &\leq C_2'K \int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 |\widehat{u}_{x_j}|^2 d\xi \\ &= 2C_2''K \int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 (p_{x_j}^2 + q_{x_j}^2) d\xi \\ &= 2C_2''K \int_0^\infty (1 + \xi^2)^2 (u_{1x_j}^2 + u_{2x_j}^2) d\xi \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\int_0^\infty \sum_{j=0}^n (a_{1j}^2 + a_{2j}^2) (1 + \xi^2)^2 d\xi \leq C_3 \int_0^\infty \sum_{j=1}^n ((u_{1x_j}^2 + u_{2x_j}^2) + u_1^2 + u_2^2) (1 + \xi^2)^2 d\xi \quad (4.16)$$

olup

$$C_3n \sum_{j=1}^n (u_{1x_j}^2 + u_{2x_j}^2) = C_3n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 u_{kx_j}^2 = C_3n \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^n u_{kx_j}^2 = C_3n \sum_{k=1}^2 |\nabla u_k|^2$$

yazılabilir. Ayrıca $f \in H^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$C_4 = \int_0^\infty (p_1^2 + q_1^2) (1 + \xi^2)^2 d\xi \leq \infty$$

olduğu açıktır. Yukarıdaki eşitsizliklere dayanarak

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 \int_0^\infty [(\lambda\nu \frac{\mu}{2} - 3C_3n(1 + \psi^{v+1})) |\nabla u_k|^2 \chi^2 (1 + \xi^2)^2 d\xi \\ &+ \int_0^\infty (2\lambda^3\nu^4\psi^{-2\nu-3}\mu^2\varepsilon_0^4 - \theta^2\lambda^2\nu^2 - 3(1 + \psi^{\nu+1})(C_3 + C_4\bar{f}_0)) u_k^2 \chi^2 (1 + \xi^2)^2 d\xi] \\ &\leq - \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty d_3(u_k) (1 + \xi^2)^2 d\xi \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılabilir. Burada $\bar{f}_0 = \frac{C_1}{\pi^2} \max_{x \in \bar{D}} \left\{ \frac{1}{f_0^2} \right\}$ dır. $Q_{\gamma_{\varepsilon_0}}$ bölgesinde $\lambda \geq 1$, $\nu \geq \nu_1 = \frac{2}{\mu}(1 + 6nC_3)$, $0 \leq \psi \leq \eta \leq 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} \lambda \nu \frac{\mu}{2} - 6nC_3 &\geq \lambda \nu \frac{\mu}{2} - 6\lambda n C_3 = \lambda \left(\nu \frac{\mu}{2} - 6nC_3 \right) \\ &\geq \lambda \left(\frac{2}{\mu} (1 + 6nC_3) \frac{\mu}{2} - 6nC_3 \right) \\ &= \lambda (1 + 6nC_3 - 6nC_3) = \lambda \end{aligned} \quad (4.18)$$

olur. Eğer $\nu \geq \nu_2 = \mu^{-2} \varepsilon_0^{-4} (1 + \theta^2 + 3(C_3 + C_4 \bar{f}_0))$ olacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} &2\lambda^3 \nu^4 \psi^{-2\nu-3} \mu^2 \varepsilon_0^4 - \theta^2 \lambda^2 \nu^2 - 3(1 + \psi^{\nu+1})(C_3 + C_4 \bar{f}_0) \\ &\geq 2\lambda^3 \nu^3 \mu^2 \varepsilon_0^4 \left(\frac{1}{\mu^2 \varepsilon_0^4} (1 + \theta^2 + 3(C_3 + C_4 \bar{f}_0)) \right) \psi^{-2\nu-3} - \theta^2 \lambda^2 \nu^2 - 3(1 + \psi^{\nu+1})(C_3 + C_4 \bar{f}_0) \end{aligned}$$

bulunur ve bu eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\begin{aligned} &2\lambda^3 \nu^3 (1 + \theta^2 + 3(C_3 + C_4 \bar{f}_0)) \psi^{-2\nu-3} - \theta^2 \lambda^2 \nu^2 - 3(1 + \psi^{\nu+1})(C_3 + C_4 \bar{f}_0) \\ &= 2\lambda^3 \nu^3 \psi^{-2\nu-3} + 2\lambda^3 \nu^3 \theta^2 \psi^{-2\nu-3} + 6\lambda^3 \nu^3 (C_3 + C_4 \bar{f}_0) \psi^{-2\nu-3} \\ &\quad - \theta^2 \lambda^2 \nu^2 - 3(1 + \psi^{\nu+1})(C_3 + C_4 \bar{f}_0) \\ &\geq 2\lambda^3 \nu^3 \psi^{-2\nu-3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

olduğu görülür. (4.17)-(4.19) eşitsizliklerinde $\lambda \geq 1$ ve $\nu \geq \max\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^\infty (\lambda |\nabla u_k|^2 + 2\lambda^3 \nu^3 \psi^{-2\nu-3} u_k^2) \chi^2 (1 + \xi^2)^2 d\xi \leq - \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty d_3(u_k) (1 + \xi^2)^2 d\xi \quad (4.20)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $Q_{\gamma_{\varepsilon_0}}$ bölgesi üzerinde integralenir ve $\lambda \rightarrow +\infty$ için limit alınırsa

$$\int_{Q_{\gamma_{\varepsilon_0}}} \int_0^\infty u_k^2 d\xi dx \leq - \frac{1}{2\lambda^3 \nu^3} \sum_{k=1}^2 \int_{Q_{\gamma_{\varepsilon_0}}} \int_0^\infty d_3(u_k) (1 + \xi^2)^2 d\xi dx$$

bağıntısından $u_1 = u_2 = 0$ bulunur ve $g(x) = 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■



BÖLÜM 5

SONUÇ

Bölüm 3 de verilen (3.16) eşitsizliği literatürde Carleman eşitsizliği olarak adlandırılmaktadır. Bu tür eşitsizlikler, ilk kez 1939 yılında Torsten Carleman tarafından eliptik denklemlerin çözümlerinin tekliğinin araştırılmasında kullanılmıştır. Günümüze kadar da özellikle kötü konulmuş problemlerin çözümlerinin tekliğinin ispatında önemli bir araç olmuştur. Ters problemler teorisine uygulanması ise Bukhgeim ve Klibanov (1981) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonra bu yöntem başta parabolik ve hiperbolik denklemler olmak üzere çeşitli tipten denklemler için de uygulanmıştır (Khaidarov 1987, Puel and Yamamoto 1996, Imanuvilov and Yamamoto 1998, Isakov and Yamamoto 2000, Imanuvilov and Yamamoto 2001a-2001b, Egger et al. 2005, Bellassoued and Yamamoto 2006, Klibanov and Yamamoto 2006, Isakov 2006, Doubora and Osses 2006, Yamamoto 2009, Liu and Triggiani 2012, Lü 2012).

Bu çalışmada, genel bir Schrödinger denklemi için bir ters problemin çözümünün tekliği üzerine Amirov ve Yamamoto (2008) tarafından Lavrentiev vd. (1986) da verilen yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Burada problemin çözümü reel değerli fonksiyonlar kümesinde aranmaktadır. Ele alınan denklem klasik Schrödinger denkleminin daha genel olduğundan uygulama alanı klasik Schrödinger denklemine göre daha geniştir.



KAYNAKLAR

- Adams R A and Fournier J J F** (2003) *Sobolev Spaces*. 2nd edition, ISBN: 0-12-044143-8, Elsevier, Academic Press, Amsterdam, 305 pp.
- Aktag A and Kayhan H** (2009) Stationary state entanglement of a one-atom two-field system under random phase telegraph noise. *Physica Scripta*, 79 (6): 065015.
- Amirov A** (2001) *Integral Geometry and Inverse Problems for Kinetic Equations*. 1st edition, ISBN: 90-6764-352-1, VSP, Utrecht, 201 pp.
- Amirov A and Yamamoto M** (2005a) Unique Continuation and an Inverse Problem for Hyperbolic Equations Across a General Hypersurface. *Journal of Physics, Conference Series*, 12: 1-12.
- Amirov A and Yamamoto M** (2005b) The Timelike Cauchy Problem and the Inverse Problem. *Doklady Mathematics*, 71 (3): 325-326.
- Amirov A and Yamamoto M** (2008) Inverse Problems for a Schrödinger-Type Equation. *Doklady Mathematics*, 77 (2): 212-214.
- Baudouin L and Puel J P** (2002) Uniqueness and Stability in an Inverse Problem for the Schrödinger Equation. *Inverse Problems*, 18 (6): 1537.
- Bellassoued M and Yamamoto M** (2006) Logarithmic Stability in Determination of a Coefficient in an Acoustic Equation by Arbitrary Boundary Observation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 85 (2): 193-224.
- Bellassoued M and Choulli M** (2009) Logarithmic Stability in the Dynamical Inverse Problem for the Schrödinger Equation by Arbitrary Boundary Observation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 91 (3): 233-255.
- Bohr N** (1913) On the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26 153: 476-502.
- Budak G and Karabulut A** (2010) *Kuantum Fiziği I-II*. Nobel Yayın Dağıtım.
- Bukhgeim A L and Klibanov M V** (1981) Global Uniqueness of a Class of Inverse Problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 260 (2): 269-272.
- Cristofol M and Soccorsi E** (2011) Stability Estimate in an Inverse Problem for Non-Autonomous Magnetic Schrödinger Equations. *Applicable Analysis*, 90 (10): 1499-1520.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Dereli T and Verçin A** (2000) *Kuantum mekaniği*. ODTÜ Geliştirme Vakfı.
- Doubova A and Osses A** (2006) Rotated Weights in Global Carleman Estimates Applied to an Inverse Problem for the Wave Equation. *Inverse Problems*, 22 (1): 265-296.
- Gasquet C and Witomski P** (2013) *Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*, Springer Science & Business Media. 30 (5): 89-90.
- Gonzalez-Velasco E A** (1996) *Fourier analysis and boundary value problems*. Elsevier.
- Gölgeleyen F** (2010) Poisson parantezi içeren kinetik denklemler için bazı ters problemlerin çözülebilirliğinin ve yaklaşık çözümlerinin araştırılması, *Doktora Tezi*, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi.
- Griffel D H** (2002) *Applied Functional Analysis*. Courier Corporation.
- Heisenberg W** (1983) The actual content of quantum theoretical kinematics and mechanics.
- Heitler W** (1961) Erwin Schrödinger Obituary. *Roy. Soc. Obit* 7: 223-234.
- Herb R and Sally Jr P J** (2011) The Plancherel formula, the Plancherel theorem, and the Fourier transform of orbital integrals. *In Representation Theory and Mathematical Physics: Conference in Honor of Gregg Zuckerman's 60th Birthday, October 24-27, 2009, Yale University*, 557: 1.
- Hörmander L** (1976) *Linear Partial Differential Operators*. Springer, Berlin, 285 pp.
- Imanuvilov O Y and Yamamoto M** (1998) Lipschitz Stability in Inverse Parabolic Problems by the Carleman Estimate. *Inverse Problems*, 14: 1229-1245.
- Imanuvilov O Y and Yamamoto M** (2001a) Global Lipschitz Stability in an Inverse Hyperbolic Problem by Interior Observations. *Inverse Problems*, 17 (4): 717-728.
- Imanuvilov O Y and Yamamoto M** (2001b) Global Uniqueness and Stability in Determining Coefficients of Wave Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 26 (7-8): 1409-1425
- Ichinose W** (1990) A Note on the Cauchy Problem for Schrödinger Type Equations on the Riemannian Manifold. *Mathematicae Japonica*, 35: 205-213.
- Isakov V** (2006) *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. pp. 51-88. Springer, New York.
- Kabanikhin S I** (2008) Definitions and Examples of Inverse and Ill-Posed Problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 16: 317-357.
- Karaoğlu B** (2008) *Kuantum mekaniğine giriş*. Seçkin.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Khaidarov A** (1987) On Stability Estimates and Inverse Problems for Second Order Hyperbolic Equations. *Mathematics of the USSR Sbornik*, 58: 267-277
- Klibanov M V and Yamamoto M** (2006) Lipschitz Stability of an Inverse Problem for an Acoustic Equation. *Applicable Analysis*, 85 (5): 515-538.
- Lavrentiev M M, Romanov V G and Shishatskii S P** (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. 1 st edition. ISBN:0-82180896-6, American Mathematical Society, Providence, 291 pp.
- Lions J L and Magenes E** (1972) *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 357 pp.
- Liu S and Triggiani R** (2012) Global Uniqueness and Stability in Determining the Damping Coefficient of an Inverse Hyperbolic Problem with Non-Homogeneous Dirichlet BC Through an Additional Localized Neumann Boundary Condition. *Applicable Analysis*, 91: 1551-1581.
- Lubkin E** (1979) Schrödinger's cat *International Journal of Theoretical Physics*, 18(8): 519-600.
- Lü Q** (2012) Carleman Estimate for Stochastic Parabolic Equations and Inverse Stochastic Parabolic Problems. *Inverse Problems*, 28 (4): 045008.
- Mikhailov V P** (1978) *Partial Differential Equations*. Revised from the 1976 Russian edition, Mir Publishers, Moskow, 396 pp.
- Mehra J, Rechenberg H and Schweber S S** (2001) The Historical Development of Quantum Theory. Volume 6: The Completion of Quantum Mechanics, 1926-1941. Part 1: The Probability Interpretation and the Statistical Transformation Theory, the Physical Interpretation, and the Empirical and Mathematical Foundations of Quantum Mechanics 1926-1932 *Physics Today*, 54 (11): 56-59.
- Mercado A, Osses A and Rosier L** (2008) Inverse Problems for the Schrödinger Equation Via Carleman Inequalities with Degenerate Weights. *Inverse Problems*, 24 (1): 015017.
- Pais A** (1991) *Niels Bohr's: times In physics, philosophy, and polity*. Oxford University Press.
- Puel J P and Yamamoto M** (1996) On a Global Estimate in a Linear Inverse Hyperbolic Problem. *Inverse Problems*, 12 (6): 995.
- Reddy B D** (1998) *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*. Springer, New York, 472 pp.
- Schrödinger E** (1926) An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review*, 28 (6): 1049.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Schrödinger E** (1935) Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23 (49): 823-828.
- Schrödinger E** (1935) Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society. *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 31: 555.
- Schrödinger E and Trimmer J D** (1980) The present situation in quantum mechanics: a translation of Schrödinger's 'cat paradox' paper *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124 (5): 323-338.
- Shynk J J** (2012) *Probability, random variables, and random processes: theory and signal processing applications*. John Wiley & Sons.
- Triggiani R and Zhang Z** (2015) Global Uniqueness and Stability in Determining the Electric Potential Coefficient of an Inverse Problem for Schrödinger Equations on Riemannian Manifolds. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 23 (6): 587-609.
- Vladimirov V S** (2002) *Methods of the Theory of Generalized Functions*. ISBN: 0-415-27356-0, CRS Press, London, 311 pp.
- Yamamoto M** (2009) Carleman Estimates for Parabolic Equations and Applications. *Inverse problems*, 25 (12): 123013
- Yamamoto M** (2013) *Mathematics for Industry: Principle, Reality and Practice, from the Point of View of a Mathematician, What Mathematics Can Do for You*, Springer, 77-99.
- Yarasa R** (1976) *Fourier analizi*. İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi.
- Yuan G and Yamamoto M** (2010) Carleman Estimates for the Schrödinger Equation and Applications to an Inverse Problem and an Observability Inequality. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 31 (4): 555-578.

ÖZGEÇMİŞ

Burcu Köken, 1989 yılında Tokat'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2014 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2015 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Ereğli Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimi aldı. 2017 yılında Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimi almaya başladı. 2014 yılından beri özel bir eğitim kurumunda Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres : Mevlana Mah. Karasu Cad. No 43 KAT:9 D/34 Talas
38100/KAYSERİ.

Tel : (537) 969 58 71/ 554 364 92 40

E-posta : burcu.koken4@gmail.com